

伝達マトリックス法による鋼床版連続桁橋の 有効幅の解析*

ANALYSIS OF EFFECTIVE WIDTH FOR CONTINUOUS STEEL GIRDER BRIDGES BY TRANSFER MATRIX METHOD

中 井 博**・事 口 寿 男***

By Hiroshi NAKAI and Hisao KOTOGUCHI

1. ま え が き

最近、プレート・ガーダー橋の長大化に伴う問題点が各国において再検討されているが、その基本的なものの一つに shear lag の解析と有効幅の合理的算定法があげられる。

従来より、この問題は、数多くの研究者によって論じられており、たとえば G. Girkmann¹⁾ や福田²⁾による T 形ばりの研究、あるいは W. Koepcke と G. Dencke³⁾ による板桁橋のフランジ有効幅の研究があげられる。また、鋼床版桁橋については、G. Adbel-Sayed⁴⁾の研究がある。さらに、最近の研究として山村⁵⁾によるものがある。以上の研究は、フーリエ級数を利用したものであり、数学的取り扱いが繁雑であるように思われる。

このような繁雑さを避けた研究としては、フランジ内の垂直応力分布が 2 次の放物線と近似できるという E. Reissner⁶⁾の研究があげられる。この研究は、E. Chwalla⁷⁾によっても活用され、T 桁、合成桁、リップ付き鋼板桁などに関する有効幅の実用的な公式が示されている。わが国でも近藤・小松・中井⁸⁾は Reissner の仮定を実験によって確かめ、鋼床版桁橋の shear lag 解析を行い、有効幅の実用公式を提案している。この研究は、有限要素法による解析結果ともよく一致することが A. R. Flint と M. R. Horne¹²⁾の論文で紹介されている。それで、Merison 委員会でもまとめられた箱桁橋の“Interiorium Design Rule”¹³⁾でも、shear lag による垂直応力は 2 次放物線形の実用公式として与えている。

ところで、以上の研究はほとんどが単純桁を対象としたものであり、連続桁の shear lag 解析⁷⁾を行ったもの

* この論文は当初第 26 回年次学術講演会 (I-199, 昭 46) で発表したが第 28 回年次学術講演会 (I-14, 昭 48) の主旨にそって書きかえたものである。

** 正会員 工博 大阪市立大学教授 工学部土木工学科

*** 正会員 工修 大阪市立大学助手 工学部土木工学科

はあまり見当たらないようである。わが国の示方書でも“Interiorium Design Rule”でも、着目点に最も不利になる荷重を載荷し、曲げモーメントが 0 となる区間を等価スパンとする単純桁に置換して有効幅を求めている。しかし、連続桁の shear lag が容易に解析できる実用計算を開発し、長大桁橋を安全に設計するための有効幅を求めておくことは重要な課題であると思われる。一方、種々なスパン割、あるいは複雑な境界条件を持つ鋼床版連続桁橋についても検討する余地が多分に残されているように思われる。

本文は、このような実用的観点より、鋼床版連続桁橋の shear lag を解析し、有効幅について数値的な評価を試みたものである。基礎微分方程式としては、すでに文献 8) に示したものをを用いるが、軸方向力を受ける連続桁も取り扱えるように修正をほどこした。解析方法としては、各種の境界条件を有するものに適用できる汎用性のあるものとするために、伝達マトリックス法を活用することにする。この方法によると、連続桁橋はもちろん、ラーメン橋、斜張橋などのばね支持された構造物でも shear lag 現象を考慮して、それらの変形量・断面力を容易に求めることができる。

しかしながら、基礎微分方程式の解は双曲線関数項が含まれるので、そのままの形でマトリックス表示すると、計算誤差の点で好ましくない。それで、文献 13) で述べた手法を活用し、双曲線関数項を分離・単位化して高精度の演算が行えるようにする。

一方、理論上の仮定の妥当性や計算精度の問題を確かめるために、 π 形断面を有するアクリライト製の連続桁橋模型に関する載荷実験を行った。連続桁の shear lag 実験はこれまでほとんど報告されていないが、実験結果と計算結果とを比較した有用なデータを提供するものとする。

最後に、種々な桁橋について数値計算を行ったが、ここではその代表的なものとして ① 3 区間連続桁橋、

② 斜張橋, ③ 方柱ラーメン橋などの shear lag による垂直応力分布と有効幅とを例示する。また, 特に鋼床版連続桁橋について, 有効幅を求めるための等価スパン長の取り方などに関する考察を試みたものである。

2. 基礎式

(1) 記号と断面定数

図-1 は鋼床版桁橋断面を示すが, 図心 O_n において直交座標 (x, y, z) 軸をとる。これらの軸に関する変形量, 断面力を一般構造力学の定義にしたがい次のように定める。

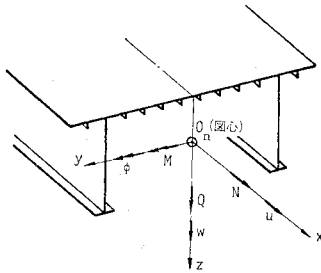


図-1 座標系と断面力・変形量

- (u, N) ; 橋軸 x 方向の変位, および軸方向力
 - (φ, M) ; 水平軸 y まわりのたわみ角, および曲げモーメント
 - (w, Q) ; 鉛直軸 z 方向のたわみ, およびせん断力
- たわみ角 φ とたわみ w との幾何学的関係は, 明らかに

$$\varphi = -dw/dx \dots \dots \dots (1)$$

で与えられる。

図-1 の π 形断面桁の shear lag を解析するにあたり, 図-2 に示すモデルに置換する。ここに,

- h ; 桁高 $2b$; 腹板の間隔
 - t_u ; デッキプレートの厚さ t_w ; 腹板の厚さ
 - F_1 ; ブラケットの断面積 F_2 ; 下フランジの断面積
- とする。なお, このモデルは箱桁の shear lag を近似的に取り扱うことができるが, その詳細は文献 8) にゆずる。

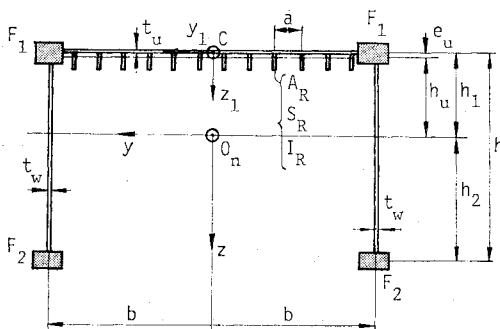


図-2 π 形断面

図-2 の π 形断面桁の断面定数は, 以下のように定義できる。

$$\text{断面積}; A = 2(F_u + F_1 + F_w + F_2) \dots \dots \dots (2)$$

ここに, F_u, F_w はそれぞれ, 片側デッキプレートおよび片側腹板の断面積であり, 2次元弾性体として取り扱うとき, ポアソン比 ν の影響を考慮しなければならないので, 次のように書ける。

$$F_u = b\bar{t}_u = b \left(\frac{t_u}{1-\nu^2} + \frac{A_R}{a} \right), \quad F_w = \frac{t_w h}{1-\nu^2} \dots \dots \dots (3)$$

ここに, \bar{t}_u はデッキプレートの換算板厚であり, A_R, a はそれぞれ縦リブ1個の断面積, 間隔とする。

断面2次モーメント;

$$I = 2 \left\{ F_u h_u^2 + \left(\frac{1}{3} h^2 - h_1 h_2 \right) F_w + \frac{b}{a} I_R + F_1 h_1^2 + F_2 h_2^2 \right\} \dots \dots \dots (4)$$

ただし, 図心 O_n の位置 $h_1, (h_2 = h - h_1)$ は次式によって定められる。

$$h_1 = \frac{1}{A} \left\{ (2F_2 + F_w)h + \frac{2b}{a} S_R \right\} \dots \dots \dots (5)$$

S_R は縦リブ1個のデッキプレート中央に関する断面1次モーメントであり, 縦リブの偏心による鋼床版としての中立軸は図-2 に示すように h_1 より e_u だけ下方にあるから,

$$h_u = h_1 - e_u = h_1 - \frac{S_R}{aI_u} \dots \dots \dots (6)$$

より求められる。なお, 式(4)内の I_R は縦リブ1個あたりのデッキプレート中立軸に関する断面2次モーメントとする。

(2) 基礎微分方程式

a) 断面力のつり合い式

図-3 より π 形断面桁の微小要素についての力のつり合いを立てると, 次式が得られる。

$$\frac{dQ}{dx} = -q, \quad \frac{dM}{dx} = Q \dots \dots \dots (7)$$

$$\frac{dN}{dx} = -p \dots \dots \dots (8)$$

ここに, p, q はそれぞれ軸方向等分布荷重, および鉛直方向等分布荷重である。ただし, 軸方向荷重 p , 軸方向力 N は図-1 に示したように, 図心 O_n に作用するものとする。

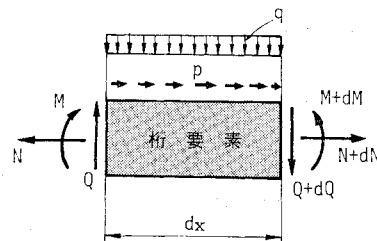


図-3 桁要素

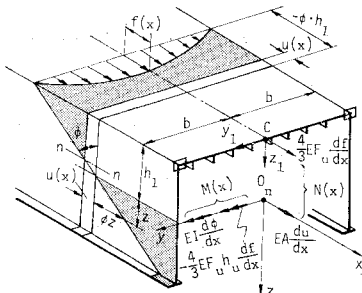


図-4 桁各部の軸方向変位

b) 変形量と断面力の関係式

桁各部の橋軸方向変位 ξ の実用解としては、文献 8) に類似させて、次のように選ぶ (図-4 参照)。

$$\left. \begin{aligned} \text{デッキ・プレート;} \xi_1 &= -\varphi(x) \cdot h_1 + \left(1 - \frac{y_1^2}{b^2}\right) \cdot f(x) + u(x) \\ \text{ウェッジ・プレート;} \xi_2 &= \varphi(x) \cdot z + u(x) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (9)$$

ここで、 $\varphi(x)$ は式 (1) に示した桁のたわみ角であり、 $f(x)$ は shear lag によって生ずるデッキプレート中央点における軸方向変位である。もちろん、shear lag による軸方向変位は軸方向に変化するとともに、横断面方向には $(1 - y_1^2/b^2)$ なる 2 次放物線状の変化をするものとする。また、 $u(x)$ は軸方向荷重による軸方向の変位であるが、たとえば方杖ラーメン橋の脚より伝わる軸力は強固なダイヤフラムを通じて主桁図心に作用し、また斜張橋のケーブルより伝わる軸力は縦シャイベ、横シャイベを通じて主桁図心に作用するものと仮定すると、この軸方向変位 $u(x)$ は横断面方向には変化しないものとすることができる。

結局、垂直応力 σ_x は次のように与えられる。

$$\left. \begin{aligned} \text{デッキ・プレート;} \\ \sigma_x &= \frac{E}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial \xi_1}{\partial x} + \frac{d\varphi}{dx} \cdot z_1 \right) \\ &= \frac{E}{1-\nu^2} \left\{ -\frac{d\varphi}{dx} \cdot (h_1 - z_1) + \left(1 - \frac{y_1^2}{b^2}\right) \cdot \frac{df}{dx} + \frac{du}{dx} \right\} \\ \text{ウェッジ・プレート;} \\ \sigma_x &= \frac{E}{1-\nu^2} \cdot \frac{\partial \xi_2}{\partial x} = \frac{E}{1-\nu^2} \cdot \left(\frac{d\varphi}{dx} \cdot z + \frac{du}{dx} \right) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (10)$$

次に、これらによって求められる応力と断面力との関係が、

$$\int_A \sigma_x dA = N(x), \quad \int_A \sigma_x z dA = M(x) \dots\dots\dots (11)$$

になることに注目すると、次の 2 つの微分方程式をうる。

$$\frac{4}{3} EF_u \frac{df(x)}{dx} + EA \frac{du(x)}{dx} = N(x) \dots\dots\dots (12)$$

$$EI \frac{d\varphi(x)}{dx} - \frac{4}{3} EF_u h_u \frac{df(x)}{dx} = M(x) \dots\dots\dots (13)$$

未知変形量 $\varphi(x)$, $f(x)$, $u(x)$ を得るためには、条件式をもう一つ設定する必要がある。この詳細に関しては文献 8) にゆずるが、桁を構成する各板要素の力のつり合いができるだけ満足し、しかもポテンシャルエネルギーを最小ならしめるに最も適切な $f(x)$ を Galerkin 法を用いて導くと、次の近似解を得る。

$$\begin{aligned} -F_u h_u \frac{d^2 \varphi(x)}{dx^2} + \frac{4}{5} F_u \frac{d^2 f(x)}{dx^2} \\ + F_u \frac{d^2 u(x)}{dx^2} - \frac{2 G t_u}{Eb} f(x) = 0 \end{aligned} \dots\dots\dots (14)$$

(3) 断面力・変形量の解

断面力は、式 (7)~(8) に示したように単純な微分方程式であるので、容易にそれらの解を求めることができる。

変形量に関する微分方程式は複雑であるが、式 (12)~(14) と (7) を用いると、まず $f(x)$ に関する次の微分方程式が得られる。

$$\frac{d^2 f(x)}{dx^2} - \alpha^2 \cdot f(x) = \frac{h_u \beta}{EI} Q(x) + \frac{p \beta}{EA} \dots\dots\dots (15)$$

ただし、

$$\alpha = \frac{1}{b} \sqrt{\frac{t_u}{(1+\nu)t_u}} \cdot \beta \dots\dots\dots (16)$$

$$\beta = \frac{1.5}{1.2 - \left(\frac{F_u}{A} + \frac{2 F_u h_u^2}{I} \right)} \dots\dots\dots (17)$$

とする。したがって、式 (15) は容易に解くことができる。

次に、式 (13) から

$$\frac{d\varphi(x)}{dx} = \frac{M(x)}{EI} + \frac{\gamma}{h_u} \cdot \frac{df(x)}{dx} \dots\dots\dots (18)$$

と表わされるから、たわみ角 $\varphi(x)$ は両辺を x で 1 回積分すればよい。ただし、

$$\gamma = \frac{4}{3} \cdot \frac{F_u h_u^2}{I} \dots\dots\dots (19)$$

と置いたものである。また、たわみ $w(x)$ は、式 (1) に示したようにたわみ角 $\varphi(x)$ を x で 1 回積分すれば求められる。

最後に、軸方向変位 $u(x)$ は、式 (12) より次式の解を求めればよい。

$$\frac{du(x)}{dx} = \frac{N(x)}{EA} - \delta \cdot \frac{df(x)}{dx} \dots\dots\dots (20)$$

ここに、

$$\delta = \frac{4}{3} \cdot \frac{F_u}{A} \dots\dots\dots (21)$$

以上の式によって求められた解をマトリックス表示すると、式 (22) のように表わされる ($f'(x) = df(x)/dx$)。

表-1 荷重項

項	鉛直等分布荷重による項	橋軸方向等分布荷重による項
$a_{1,9}$	$\frac{qh_u\beta\delta}{EI\alpha^3}(\sinh \alpha x - \alpha x)$	$-\frac{p}{EA}\left\{\frac{x^2}{2} + \frac{\beta\delta}{\alpha^2}(\cosh \alpha x - 1)\right\}$
$a_{2,9}$	$q\left[\frac{x^4}{24EI} + \frac{\beta\gamma}{EI\alpha^4}\left\{(\cosh \alpha x - 1) - \frac{(\alpha x)^2}{2}\right\}\right]$	$-\frac{p\beta\gamma}{EAh_u\alpha^3}(\sinh \alpha x - \alpha x)$
$a_{3,9}$	$-q\left\{\frac{x^3}{6EI} + \frac{\beta\gamma}{EI\alpha^3}(\sinh \alpha x - \alpha x)\right\}$	$\frac{p\beta\gamma}{EAh_u\alpha^2}(\cosh \alpha x - 1)$
$a_{4,9}$	$-\frac{qh_u\beta}{EI\alpha^3}(\sinh \alpha x - \alpha x)$	$\frac{p\beta}{EA\alpha^2}(\cosh \alpha x - 1)$
$a_{5,9}$	$-\frac{qh_u\beta}{EI\alpha^2}(\cosh \alpha x - 1)$	$\frac{p\beta}{EA\alpha}\sinh \alpha x$

ただし、状態ベクトル $\{u w \varphi f f' M Q N 1\}$ には添字 x , あるいは 0 を付け、それぞれ任意点 x , および始点 $x=0$ における値を表わすものとする。

また、式 (22) 左辺の格間マトリックス中の要素 $a_{i,9}$ ($i=1\sim 5$) は、表-1 のようにとればよい。

特に、単純桁橋や連続桁橋の場合のように、橋軸方向の荷重を受けない $p=0$ の場合には、どの断面においても $N(x)=0$ となる。

すると、式 (20) より軸方向変位は、

$$u(x) = -\delta \cdot f(x) \dots\dots\dots (23)$$

によって求められるから、これら 1 組の共役つゝ (u, N) を式 (22) 中点線で囲んだように消去することができる。

さらに、式 (22) において shear lag に関与するパラメーター $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ をすべて 0 とおいたものは、曲げと軸方向力を受ける棒に関する格間マトリックスになることは容易に証明される。

しかしながら、 $p=0$ の場合でも方杖ラーメン橋や斜張橋などでは、軸方向の変位が拘束され、それに伴って軸方向力が発生する。このような場合も含めた shear lag 解析を行うことが本文の目的であるので、以下では基礎式 (22) をもとにして考察を進める。

3. 伝達マトリックス法による解法

(1) 双曲線関数項の分離と単位化

式 (22) の変形量 u, w, φ, f, f' には、双曲線関数で表わされた項が混在しており、そのままの形で演算を行うと、 αx が大きいとき $\sinh \alpha x$ や $\cosh \alpha x$ が他の項と比較して著しく大きくなり、桁落ちなどが生じて計算

精度上好ましくない。そこで、次のような変形量を新たに定義する。

$$\left. \begin{aligned} \text{変換軸方向変位; } \mu(x) &= u(x) + \delta \cdot f(x) \\ \text{変換たわみ; } \omega(x) &= w(x) + \frac{\gamma}{h_u \alpha^2} \cdot f'(x) \\ \text{変換たわみ角; } \psi(x) &= \varphi(x) - \frac{\gamma}{h_u} \cdot f'(x) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (24)$$

一方、 $f'(x)$ の力学的意味を考えると、式 (12) の左辺第 1 項 $\frac{4}{3}EF_u \cdot f'(x)$ は、図-4 より明らかなようにデッキプレート内に発生する軸方向力であり、この力により水平軸まわりに式 (13) の左辺第 3 項のような付加曲げモーメント

$$m(x) = \frac{4}{3}EF_u h_u \cdot f'(x) = \gamma \frac{EI}{h_u} \cdot f'(x) \dots\dots\dots (25)$$

を発生させる⁹⁾。それで、以下では $f'(x)$ の代りに上式のような力学的意味を持つ $m(x)$ を用い、shear lag による軸方向変位 f と共役つゝ (f, m) にとるものとする。

次に、式 (24)~(25) を用いて式 (22) を書きかえると、 $\mu(x), \omega(x), \psi(x)$ の行要素の双曲線関数項は分離され、 $f(x)$ と $m(x)$ の行要素のみが双曲線関数を含むことになる。したがって、それらを次のように単位化しておく。

$$\tilde{f}(x) = f(x) / \cosh \alpha x, \quad \tilde{m}(x) = m(x) / \cosh \alpha x \dots\dots\dots (26)$$

u	=	1	0	0	$-\delta(\cosh \alpha x - 1)$	$-\frac{\delta}{\alpha} \sinh \alpha x$	0	$-\frac{h_u \beta \delta}{EI \alpha^2} (\cosh \alpha x - 1)$
w		0	1	$-x$	$-\frac{\gamma}{h_u \alpha} (\sinh \alpha x - \alpha x)$	$-\frac{\gamma}{h_u \alpha^2} (\cosh \alpha x - 1)$	$-\frac{x^2}{2EI}$	$-\left\{ \frac{x^3}{6EI} + \frac{\beta\gamma}{EI\alpha^3} (\sinh \alpha x - \alpha x) \right\}$
φ		0	0	1	$\frac{\gamma}{h_u} (\cosh \alpha x - 1)$	$\frac{\gamma}{h_u \alpha} \sinh \alpha x$	$\frac{x}{EI}$	$\frac{x^2}{2EI} + \frac{\beta\gamma}{EI\alpha^3} (\cosh \alpha x - 1)$
f		0	0	0	$\cosh \alpha x$	$\frac{1}{\alpha} \sinh \alpha x$	0	$\frac{h_u \beta}{EI \alpha^2} (\cosh \alpha x - 1)$
f'		0	0	0	$\alpha \sinh \alpha x$	$\cosh \alpha x$	0	$\frac{h_u \beta}{EI \alpha} \sinh \alpha x$
M		0	0	0	0	0	1	x
Q		0	0	0	0	0	0	1
N		0	0	0	0	0	0	0
1		0	0	0	0	0	0	0

すると、以上により、図-5 に示す格間長 l_k の桁要素に対しては、次のように伝達マトリックス表示することができる。

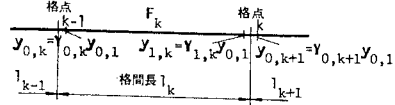


図-5 第 k パネル

$$\tilde{y}_{l,k} = \tilde{F}_k \tilde{y}_{0,k} \dots (27)$$

ここに、 $\tilde{y}_{0,k}$ 、 $\tilde{y}_{l,k}$ はそれぞれパネル k の左端 ($x=0$)、および右端 ($x=l_k$) の状態ベクトルであり、これらをすべて添字にして

$$\left. \begin{aligned} \tilde{y}_{0,k} &= \{\mu \ \omega \ \psi \ \tilde{f} \ \tilde{m} \ M \ Q \ N \ 1\}_{0,k} \\ \tilde{y}_{l,k} &= \{\mu \ \omega \ \psi \ \tilde{f} \ \tilde{m} \ M \ Q \ N \ 1\}_{l,k} \end{aligned} \right\} \dots (28.1, 2)$$

と表わすことにする。また、 \tilde{F}_k はパネル k の格間マトリックスであり、 $p=0$ の場合に対しては次のように表わすことができる。

$$\tilde{F}_k = \begin{bmatrix} \mu_0 & \omega_0 & \psi_0 & f_0 & m_0 & M_0 & Q_0 & N_0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{l}{EA} & 0 \\ 0 & 1 & -l & 0 & 0 & -\frac{l^2}{2EI} & -\frac{l^3}{6EI} + \frac{\beta\gamma l}{EI\alpha^2} & 0 & q\left(\frac{x^4}{24EI} - \frac{\beta\gamma x^2}{2EI\alpha^2}\right) \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{l}{EI} & \frac{l^2}{2EI} & 0 & -\frac{ql^3}{6EI} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{h_u}{EI\alpha\gamma} \tanh \alpha l & 0 & \frac{h_u \beta}{EI\alpha^2} \frac{\cosh \alpha l - 1}{\cosh \alpha l} & 0 & \frac{qh_u \beta}{EI\alpha^3} \frac{\sinh \alpha l - \alpha l}{\cosh \alpha l} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{EI\alpha\gamma}{h_u} \tanh \alpha l & 1 & 0 & \frac{\beta\gamma}{\alpha} \tanh \alpha l & 0 & \frac{q\beta\gamma}{\alpha^2} \frac{\cosh \alpha l - 1}{\cosh \alpha l} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & l & 0 & -\frac{ql^2}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -ql \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_k \dots (29)$$

一方、格点 k における変形量の連続条件、および断面力のつり合い条件式をたてると、格点 k が剛支点などの特異点も含めて（詳しくは後述する）、次のように表示できる。

$$\tilde{y}_{0,k+1} = \tilde{P}_k \tilde{y}_{l,k} \dots (30)$$

ただし、 $\tilde{y}_{0,k+1}$ はパネル $k+1$ の左端 ($x_{k+1}=0$) の状態ベクトル（式 (28.1) 参照）とし、 \tilde{P}_k は以下のような格点マトリックスとする。

$$\tilde{P}_k = \begin{bmatrix} \mu_l & \omega_l & \psi_l & \tilde{f}_l & \tilde{m}_l & M_l & Q_l & N_l & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \varepsilon_{1,4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \varepsilon_{2,5} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \varepsilon_{3,4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ K(\mu, \omega, \psi) & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -P_k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_k \dots (31)$$

上式中 \tilde{P}_k は、格点 k に作用する鉛直集中荷重とする。また、 $\varepsilon_{1,4}$ 、 $\varepsilon_{2,5}$ 、 $\varepsilon_{3,4}$ は次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_{1,4} &= \left(\frac{\delta_{k+1}}{\delta_k} - 1 \right) \delta_k \Pi_1^k \\ \varepsilon_{2,5} &= \left\{ \frac{I_k}{I_{k+1}} \left(\frac{\alpha_k}{\alpha_{k+1}} \right)^2 - 1 \right\} \frac{1}{EI_k \alpha_k^2} \Pi_1^k \\ \varepsilon_{3,4} &= - \left(\frac{\gamma_{k+1}}{\gamma_k} \frac{h_{u,k}}{h_{u,k+1}} - 1 \right) \frac{\gamma_k}{h_{u,k}} \Pi_1^k \end{aligned} \right\} \dots (32)$$

ただし、

$$\Pi_1^k = \prod_{i=1}^k \cosh \alpha_i l_i = \cosh \alpha_1 l_1 \cdot \cosh \alpha_2 l_2 \cdots \cosh \alpha_k l_k \dots (33)$$

$$\begin{bmatrix} \frac{x}{EA} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{1,9} \\ a_{2,9} \\ a_{3,9} \\ a_{4,9} \\ a_{5,9} \\ -\frac{qx^2}{2} \\ -qx \\ -px \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u \\ w \\ \varphi \\ f \\ f' \\ M \\ Q \\ N \\ 1 \end{bmatrix} \dots (22)$$

とする。さらに K はばねマトリックスであり、これについても後述する。

(2) 計算方式

式 (27) と (30) とを組み合わせると、 n 個のパネルより構成された桁全体にわたる計算を次のようにして行うことができる。

$$\tilde{y}_{l,n} = \tilde{F}_n \tilde{P}_{n-1} \tilde{F}_{n-1} \dots \tilde{P}_k \tilde{F}_k \dots \tilde{P}_2 \tilde{F}_2 \tilde{P}_1 \tilde{F}_1 y_{0,1} \dots \dots \dots (34)$$

しかしながら、格間マトリックスの式 (29) の第 4, 5 行目は、点線で囲んであるように $\cosh \alpha_k l_k$ で割って単位化してあるので、上式にしたがうマトリックス乗算を

行うとき、文献 13) に示したような操作が必要である。一般に、第 k パネルの右端における状態ベクトル $\tilde{y}_{l,k}$ は、上式より

$$\tilde{y}_{l,k} = \tilde{F}_k \tilde{P}_{k-1} \tilde{F}_{k-1} \dots \tilde{F}_2 \tilde{P}_1 \tilde{F}_1 y_{0,1} = \tilde{Y}_{l,k} y_{0,1} \dots \dots \dots (35)$$

同様に第 $k+1$ パネル左端では、

$$\tilde{y}_{0,k+1} = \tilde{P}_k \tilde{Y}_{l,k} y_{0,1} = \tilde{Y}_{0,k+1} y_{0,1} \dots \dots \dots (36)$$

で表わされ、 $\tilde{Y}_{l,k}$, $\tilde{Y}_{0,k+1}$ を状態マトリックスとよぶことにする。

すると、等断面・等パネルの桁に対する状態マトリックス $\tilde{Y}_{0,k+1}$ を例示すると、次のように表わすことができる。

$$\tilde{Y}_{0,k+1} = \begin{bmatrix} \mu_{0,1} & \omega_{0,1} & \psi_{0,1} & \tilde{f}_{0,1} & \tilde{m}_{0,1} & M_{0,1} & Q_{0,1} & N_{0,1} & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{kl}{EA} & 0 \\ 0 & 1 & -kl & 0 & 0 & -\frac{(kl)^2}{2EI} & -\frac{(kl)^3}{6EI} + \frac{\beta\gamma kl}{EI\alpha^2} & 0 & q \left\{ \frac{(kl)^4}{24EI} - \frac{\beta\gamma(kl)^2}{2EI\alpha^2} \right\} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{kl}{EI} & \frac{(kl)^2}{2EI} & 0 & \frac{q(kl)^3}{6EI} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\cosh kal}{\cosh^k al} & \frac{h_u}{EI\alpha\gamma} \cdot \frac{\sinh kal}{\cosh^k al} & 0 & \frac{h_u\beta}{EI\alpha^2} \cdot \frac{\cosh kal - 1}{\cosh^k al} & 0 & -\frac{qh_u\beta}{EI\alpha^2} \cdot \frac{\sinh kal - kal}{\cosh^k al} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{EI\alpha\gamma}{h_u} \cdot \frac{\sinh kal}{\cosh^k al} & \frac{\cosh kal}{\cosh^k al} & 0 & \frac{\beta\gamma}{\alpha} \cdot \frac{\sinh kal}{\cosh^k al} & 0 & \frac{q\beta\gamma}{\alpha^2} \cdot \frac{\sinh kal}{\cosh^k al} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & kl & 0 & -\frac{q(kl)^2}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \left\{ \frac{1}{\cosh^k al} \right. & 0 & \left. \begin{matrix} -q \cdot kl \\ -q \cdot kl / \cosh^k al \end{matrix} \right. \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \left\{ \frac{1}{\cosh^k al} \right. & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \left. \begin{matrix} 1 \\ 1 / \cosh^k al \end{matrix} \right. \end{bmatrix} \dots \dots \dots (37)$$

すなわち、これに \tilde{F}_{k+1} を乗ずれば $\tilde{Y}_{l,k+1}$ が得られるが、 $\tilde{Y}_{0,k+1}$ の第 7, 8, 9 行目の要素は { で示すように元の値とそれを $\cosh^k al$ で割った 2 つの値を考える。そして、 \tilde{F}_{k+1} $\tilde{Y}_{0,k+1}$ の第 4, 5 行目の計算を行うときのみ { の下側の値を用いることにする。

このようにすると、格間マトリックスを乗じるたびに式 (37) に示すように \tilde{f} , \tilde{m} の値は $\cosh al$ で割ったもので与えられることになる。それで、一般に不等パネルの場合の $\tilde{f}_{l,k}$, $\tilde{m}_{l,k}$ 値は次のように与えられる。

$$\tilde{f}_{l,k} = f_{l,k} / \Pi_1^k, \tilde{m}_{l,k} = m_{l,k} / \Pi_1^k \dots \dots \dots (38)$$

(3) 境界条件

a) 初期条件

桁の支持方法がどのような形式のものであるとしても、幾何学的・力学的境界条件から、この問題に対しては必ず 4 つのものが既知であり、先に述べたようにそれらの共役ついをなす 4 つのものが未知と

表-2 初期条件

項 目	単純支持		固定端	自由端
	橋軸方向の移動自由	橋軸方向の移動拘束		
形式				
既知量	$\omega_{0,1} = 0$ $m_{0,1} = 0$ $M_{0,1} = 0$ $N_{0,1} = 0$	$\mu_{0,1} = \epsilon_{0,1} \cdot f_{0,1}$ $\omega_{0,1} = 0$ $m_{0,1} = 0$ $M_{0,1} = 0$	$\mu_{0,1} = 0$ $\omega_{0,1} = \frac{m_{1,0}}{\alpha_1^2 EI_1}$ $\psi_{0,1} = 0$ $f_{0,1} = 0$	$m_{0,1} = 0$ $M_{0,1} = 0$ $Q_{0,1} = 0$ $N_{0,1} = 0$
未知量	$\mu_{0,1}$ $\psi_{0,1}$ $f_{0,1}$ $Q_{0,1}$	$\psi_{0,1}$ $f_{0,1}$ $Q_{0,1}$ $N_{0,1}$	$m_{0,1}$ $M_{0,1}$ $Q_{0,1}$ $N_{0,1}$	$\mu_{0,1}$ $\omega_{0,1}$ $\psi_{0,1}$ $f_{0,1}$

なる。これらの条件を一般の桁橋に対して示すと表-2 のようになる。

すると、これらの未知量より組み立てられた初期ベクトル $Y_{0,1}$ を定めることができる。いま、これをマトリックス表示して、それを初期マトリックス $Y_{0,1}$ とよぶことにする。たとえば、桁左端が橋軸方向の移動が自由な場合に対する初期マトリックスは、表-2 より

$$Y_{0,1} = \begin{bmatrix} \text{初期条件} \\ M_{0,1} & \psi_{0,1} & f_{0,1} & Q_{0,1} & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \text{中間条件より生ずる未知量} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} \quad (39)$$

と表わすことができる。上式では、以下に述べる中間条件より生ずる未知量をあらかじめ考えているが、桁左端ではすべて0にセットしておく。

b) 中間条件

① 剛支点

連続桁の中間の剛支点 $r(=k)$ では、不静定せん断力 Q_r^s が未知量となって生じ、これに対してたわみ $w_{l,r} = 0$ である ($w_{l,r} \neq 0$)。すなわち、本文のように双曲線関数項を分離・単位化している解法では、拘束度を強め計算精度の向上をはかるため、表-3 のような未知量とそれに応じた中間条件式を設定することにする(式(24)参照)。表中()でかこんであるものは、橋軸方向の変位が拘束されない場合であり、この場合は不静定軸方向力 N_r^s が生じないから、中間条件式は不必要である。

このような中間条件を設定した場合、格点マトリックスはすでに示した式(31)で与えられるが、点線で囲んだ要素はすべて0とすることができる。ただし、橋軸方向の変位が拘束されない場合、2重の点線で示した1行1列目の要素は1に置いておかなければならない。

すでに示したように、初期マトリックス式(39)に格点マトリックス \tilde{F}_i や格点マトリックス \tilde{P}_i を順次掛る

表-3 中間条件

形	中間条件式
式	格点 r $\left(\frac{r}{\Delta} \right)$
未知量	
(N_r^s)	$\mu_{1,r} - \delta_r \cdot f_r^s = 0$ (条件なし)
Q_r^s	$\omega_{1,r} - \frac{m_r^s}{\alpha_r^2 EI_r} = 0$
f_r^s	$\bar{f}_{1,r} - f_r^s / \Pi_1^r = 0$
m_r^s	$\bar{m}_{1,r} - m_r^s / \Pi_1^r = 0$

と、第 $r+1$ パネルの左端の状態マトリックス $\tilde{Y}_{0,r+1}$ が求められるが、上述のように格点 r で格点マトリックスを修正すると、変形量の連続条件・断面力のつり合い条件は次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} \mu_{0,r+1} &= \delta_{r+1} \cdot f_r^s, & \omega_{0,r+1} &= \frac{m_r^s}{\alpha_{r+1}^2 EI_{r+1}}, \\ \psi_{0,r+1} &= \psi_{l,r} - \left(\frac{\gamma_{k+1}}{\gamma_k} \frac{h_{u,k}}{h_{u,k+1}} - 1 \right) \frac{\gamma_k}{h_{u,k}} f_r^s, \\ \bar{f}_{0,r+1} &= f_r^s / \Pi_{i=1}^r \cosh \alpha_i l_i, & m_{0,r+1} &= m_r^s / \Pi_{i=1}^r \cosh \alpha_i l_i, \\ M_{0,r+1} &= M_{l,r}, & Q_{0,r+1} &= Q_{l,r} - Q_r^s, \\ N_{0,r+1} &= N_{l,r} - N_r^s \end{aligned} \right\} \quad (40)$$

それで、上式を満足するために状態マトリックス $\tilde{Y}_{0,r+1}$ は、第 $r+1$ パネルにおいて、式(41)のように修正する必要がある。ただし、桁が中間支点において橋軸方向に移動できる場合には、上でも説明したように N_r^s の項を取り除かなければならない。それに伴って、式(41)中の要素 a_{r+1} , b_{r+1} , c_{r+1} は式(42)のように修正するものとする。

$$\tilde{Y}_{0,r+1} = \begin{bmatrix} \text{初期条件の項} & \text{中間未知量} \\ f_r^s & m_r^s & Q_r^s & (N_r^s) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{r+1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_{r+1} & 0 & 0 \\ c_{r+1} & 0 & 0 & 0 \\ 1/\Pi_1^r & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & 0 & 1/\Pi_1^r & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \begin{Bmatrix} 1 \\ 1/\Pi_1^r \end{Bmatrix} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \begin{Bmatrix} 1 \\ 1/\Pi_1^r \end{Bmatrix} \end{bmatrix} \quad (41)$$

ここに、

$$\left. \begin{aligned} a_{r+1} &= \delta_{r+1} & \left. \begin{aligned} & \text{(不静定軸方向力 } N_r^s \text{)} \\ & \text{(が生ずるとき)} \end{aligned} \right\} \\ &= \left(\frac{\delta_{r+1}}{\delta_r} - 1 \right) \delta_r & \left. \begin{aligned} & \text{(不静定軸方向力 } N_r^s \text{)} \\ & \text{(が生じないとき)} \end{aligned} \right\} \\ b_{r+1} &= 1/(\alpha_{r+1}^2 EI_{r+1}) \\ c_{r+1} &= - \left(\frac{\gamma_{k+1}}{\gamma_k} \frac{h_{u,k}}{h_{u,k+1}} - 1 \right) \frac{\gamma_k}{h_{u,k}} \end{aligned} \right\} \quad (42.1 \sim 3)$$

② 変断面の処理

式(31)に示したように格点マトリックスの1~3行目に双曲線関数項が入ってくるが、著しく変断面でないかぎり $\epsilon_{1,4}$, $\epsilon_{2,5}$, $\epsilon_{3,4}$ は微小項であり、そのまま計算を進めてもよい。しかし、断面が著しく変化する場合、演算誤差の点で好ましくないので、以下のような処理をする。すなわち、格点 $i(k)$ で f_i^s , m_i^s の2つの不静定量を導入する。このとき、表-3 より中間条件式は

$$\left. \begin{aligned} \tilde{f}_{l,i} - f_i^s / \Pi_1^i &= 0 \\ \tilde{m}_{l,i} - m_i^s / \Pi_1^i &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(43)$$

である。

すると、この場合の格点マトリックスは、式 (31) において点線と実線で二重に囲んだ要素を 0 とし、しかも次式を採用すればよい。

$$\varepsilon_{1,4} = \varepsilon_{2,5} = \varepsilon_{3,4} = 0 \dots\dots\dots(44)$$

その代わりに、第 $i+1$ パネル左端の状態マトリックス $\tilde{Y}_{0,i+1}$ は、式 (41) において Q_i^s, N_i^s の項は取り去り、 a_{i+1} としては式 (41.1) の軸力 N_i^s が生じない場合を用い、 b_{i+1} および c_{i+1} は式 (42.2~3) を用いる。

③ ばね支点

連続桁橋の一つに、表-4 に例示する方杖ラーメン橋や斜張橋が考えられる。これらの等価モデルとばね定数 K_j を表中に示したが、連続桁の弾性支持点では、

$$\begin{bmatrix} M \\ Q \\ N \end{bmatrix}_j^s = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u \\ w \\ \varphi \end{bmatrix}_{l,j} \dots\dots\dots(45)$$

なる断面力がステップすることになる。それで、②で説明したようにばね支持点でまた2つの未知量 f_k^s, m_k^s を導入し、それを求める条件式 (43) を立てる。そして、ばね支持点をこえたパネル $j+1$ の左端における状態マトリックス $\tilde{Y}_{0,j+1}$ は、次のように修正すればよい。

$$\tilde{Y}_{0,j+1} = \begin{bmatrix} \text{初期値} & f_j^s & m_j^s \\ \dots & a_{j+1} & 0 \\ & 0 & b_{j+1} \\ & c_{j+1} & 0 \\ & 1/\Pi_1^j & 0 \\ & 0 & 1/\Pi_1^j \\ \dots & \left\{ \begin{array}{l} \kappa_{11} \\ \kappa_{11}/\Pi_1^j \end{array} \right\} & \left\{ \begin{array}{l} \kappa_{12} \\ \kappa_{12}/\Pi_1^j \end{array} \right\} & \dots \\ & \left\{ \begin{array}{l} \kappa_{21} \\ \kappa_{21}/\Pi_1^j \end{array} \right\} & \left\{ \begin{array}{l} \kappa_{22} \\ \kappa_{22}/\Pi_1^j \end{array} \right\} \\ & \left\{ \begin{array}{l} \kappa_{31} \\ \kappa_{31}/\Pi_1^j \end{array} \right\} & \left\{ \begin{array}{l} \kappa_{32} \\ \kappa_{32}/\Pi_1^j \end{array} \right\} \\ & 0 & 0 \end{bmatrix} \dots\dots\dots(46)$$

表-4 ばね支持された連続桁

形式	方杖 ラーメン 橋	斜 張 橋
断面諸量	<p>格点 j 主桁 ラーメン橋脚 曲げ剛度 EI 伸び剛度 EA_{∞} ヒンジ</p>	<p>伸び剛度 $E_s A_s$ ケーブル 格点 j 主桁</p>
等価モデル	<p>主桁 j $K_j(\nu_{1,j}, \omega_{1,j}, \psi_{1,j})$</p>	<p>主桁 j $K_j(\nu_{1,j}, \omega_{1,j})$</p>
パネ定数	$K_j = 3EI_k$ $\begin{bmatrix} \frac{\nu_1}{l} & \frac{\omega_1}{l^2} & \frac{\psi_1}{l} \\ \frac{\sin\theta}{l^2} & \frac{\cos\theta}{l^2} & \frac{1}{l} \\ \frac{\sin\theta\cos\theta}{l^3} & \frac{\cos^2\theta}{l^3} & \frac{\cos\theta}{l^2} \\ \frac{\sin^2\theta}{l^3} & \frac{\sin\theta\cos\theta}{l^3} & \frac{\sin\theta}{l^2} \end{bmatrix}_j$	$K_j = \frac{t A}{l_s}$ $\begin{bmatrix} \nu_1 & \omega_1 & \psi_1 \\ 0 & 0 & 0 \\ \sin\theta\cos\theta & \sin^2\theta & 0 \\ \cos^2\theta & -\sin\theta\cos\theta & 0 \end{bmatrix}_j$

表-5 末端条件 (表-2 参照)

形式	単 純 支 持		固 定 端	自 由 端
	橋軸方向の変位自由	橋軸方向の変位拘束		
条 件	$\omega_{l,n} = 0$	$\mu_{l,n} - \delta_n \cdot f_n^s = 0$	$\mu_{l,n} = 0$	$\tilde{m}_{l,n} = 0$
式	$\tilde{m}_{l,n} = 0$	$\omega_{l,n} = 0$	$\omega_{l,n} - \frac{m_n^s}{\alpha_n^2 EI_n} = 0$	$M_{l,n} = 0$
	$M_{l,n} = 0$	$\tilde{m}_{l,n} = 0$	$\psi_{l,n} = 0$	$Q_{l,n} = 0$
	$N_{l,n} = 0$	$M_{l,n} = 0$	$\tilde{f}_{l,n} = 0$	$N_{l,n} = 0$
		$f_{l,n} - f_n^s / \Pi_1^n = 0$	$\tilde{m}_{l,n} - m_n^s / \Pi_1^n = 0$	

ただし、

$$\left. \begin{aligned} \kappa_{m1} &= -\delta_j k_{m1} + \frac{\gamma_j}{h_{u,j}} k_{m3} \\ \kappa_{m2} &= -\frac{1}{\alpha_j^2 EI_j} k_{m2} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(47)$$

($m=1 \sim 3$)

と置いたものである。

c) 末端条件

初期マトリックス $Y_{0,1}$ に格間マトリックス \tilde{F}_k 、格点マトリックス \tilde{P}_k を次々とかけていき、剛支点やばね支点などでは状態マトリックス $\tilde{Y}_{0,k+1}$ を上述のような修正をして計算を進めると、最終的に桁右端 n における状態マトリックス $\tilde{Y}_{l,n}$ を式 (34) によって求めることができる。ここでは、①で説明したのと同様にどのような支持条件であっても、必ず4つの境界条件が成立する。これらを表-5に整理して示す。ただし、橋軸方向の変位が拘束される場合には、格点 n においてステップ量 f_n^s 、または、 m_n^s を導入して計算精度をあげるようにしている。

(4) 無次元化

断面力・変形量が混在する伝達マトリックス法では、次元をそろえて高精度の演算をするために無次元化をすることが望ましい。そこで、本文では以下のように無次元化 (添字 0, l および k は略す) をすべての式にほどこすことにした。

変形量；

$$\left. \begin{aligned} \mu &= \mu^* \cdot \frac{Pclc}{EA_c}, & \omega &= \omega^* \cdot \frac{Pclc^3}{EI_c} \\ \psi &= \psi^* \cdot \frac{Pclc^2}{EI_c}, & \tilde{f} &= \tilde{f}^* \cdot \frac{h_u}{\alpha_c} \cdot \frac{Pclc}{EI_c} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(48)$$

断面力；

$$\left. \begin{aligned} \tilde{m} &= \tilde{m}^* \cdot Pclc^i, & M &= M^* \cdot Pclc \\ Q &= Q^* \cdot P_c, & N &= N^* \cdot P_c \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(49)$$

荷 重；

$$q = q^* \cdot Pclc, \quad P = P^* \cdot P_c \dots\dots\dots(50)$$

(5) デッキ・プレートの垂直応力と有効幅

断面力・変形量が以上の解析で求めたので、これを元にして設計計算上重要な桁各部の垂直応

力 σ_x を式 (10) より求める。変形量 df/dx , df/dx , du/dx は、それぞれ式 (18), (25), (20) に示すように断面力 $M(x)$, $m(x)$, $N(x)$ で表わされるから、垂直応力は次のように表わされる (添字 0, l あるいは k は略す)。

$$\left. \begin{aligned} &\text{デッキ・プレート;} \\ &\sigma_x = \frac{1}{1-\nu^2} \left[\frac{M(x)+m(x)}{W_u} \cdot \frac{h_1-z_1}{h_u} + \frac{m(x)}{\gamma W_u} \cdot \left\{ \delta - \left(1 - \frac{y_1^2}{b^2} \right) \right\} - \frac{N(x)}{A} \right] \\ &\text{ウェブ・プレート;} \\ &\sigma_x = \frac{1}{1-\nu^2} \left[\frac{M(x)+m(x)}{W_z} - \frac{m(x)}{\gamma W_u} \delta + \frac{N(x)}{A} \right] \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(51)$$

ここに、

$$W_u = \frac{I}{h_u}, \quad W_z = \frac{I}{z} \dots\dots\dots(52)$$

なる断面係数を表わすものとする。

このようにデッキ・プレートの垂直応力 $\sigma_x(y)$ の分布が求まれば、図-6 に示すように有効幅 b_m を定めることができる。すなわち、デッキ・プレートとウェブとの結合点における $\sigma_{x,max}$ を設計の対象とするのであるから、図-6(b) に示すようにデッキ・プレートの中間部が桁断面として協力しないと考え、初等ばり理論によって計算された応力が $\sigma_{x,max}$ となるような幅 b_m を有

効幅と定義する。この条件式は、図-6(a), (b) ともにデッキ・プレートに作用する合力は等しいはずであるから、次のように表わされる。

$$\int_0^b \sigma_x(y) dy = b_m \cdot \sigma_{x,max} \dots\dots\dots(53)$$

ところで、デッキ・プレートには通常リブが付いているので、デッキ・プレートとリブの両者を含めた有効幅を定めるほうが合理的である。それで、有効幅を求める際の $\sigma_x(y)$ は鋼床版の中立軸 $z_1 = e_u$ のところで考え、また $y_1 = y$ であることに注目すると、式 (51), (53) より

$$\frac{b_m}{b} = 1 - \frac{\frac{2}{3} \cdot \frac{m(x)}{\gamma}}{M(x) + \frac{2}{3} \cdot \frac{m(x)}{\gamma} - \frac{W_u}{A} \cdot N(x)} \dots\dots\dots(54)$$

が得られる。

ここで、 κ は桁の断面形状を表わすパラメーターであり、次式で求められる。

$$\kappa = \frac{2F_u}{A} + \frac{2F_u h_u^2}{I} = \frac{3}{2}(\gamma + \delta) \dots\dots\dots(55)$$

すると、式 (54) は $N(x) = 0$ のとき、文献 8) とまったく一致した結果を与えている。そして、有効幅 b_m が定まれば、図-6(b) に示したようにそれに応じた図心 O_n' 、断面 2 次モーメント I' 、縁距離 $h_u' = h_1' - e_u$ を求めることができる。

さらに、 $N(x) = 0$ の場合のとき、デッキ・プレートの最大応力は、

$$\sigma_{x,max} = -\frac{M(x)}{I'} h_u' \dots\dots\dots(56)$$

である。一方、式 (54) を若干変形すると、

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{1-\nu^2} \cdot \frac{m(x)}{\gamma W_u} = -\left(1 - \frac{b_m}{b} \right) \cdot \sigma_{x,max} \dots\dots\dots(57)$$

となる。上式を用いて式 (51) を変形すると、有効幅 b_m を用いて垂直応力分布 $\sigma_x(y)$ を求める工学上重要な公式を得る。

$$\begin{aligned} \sigma_x(y) &= \sigma_{x,max} + \frac{1}{1-\nu^2} \cdot \frac{m(x)}{\gamma W_u} \cdot \left(1 - \frac{y^2}{b^2} \right) \\ \therefore \sigma_x(y) &= \sigma_{x,max} \left\{ 1 - \frac{3}{2} \left(1 - \frac{b_m}{b} \right) \left(1 - \frac{y^2}{b^2} \right) \right\} \dots\dots\dots(58) \end{aligned}$$

ここで、デッキ・プレート中央部 $y = 0$ では、

$$\sigma_{x,min} = \sigma_{x,max} \left\{ 1 - \frac{3}{2} \left(1 - \frac{b_m}{b} \right) \right\} \dots\dots\dots(59)$$

すなわち 図-6(a) に示すようにデッキ・プレート中央部の応力 $\sigma_{x,min}$ は、 $\sigma_{x,max}$ から $1.5 \sigma_{x,max} (1 - b_m/b)$ だけ減少することがわかる。

以上の応力公式は、桁要素を 2 次弾性体として取り扱ったために、断面諸定数にはポアソン比 ν の影響が入っている。しかしながら、この影響を無視して通常の設計計算で行う方法で断面諸定数を求めても、応力計算結果の誤差は僅少であることが明らかにされている。

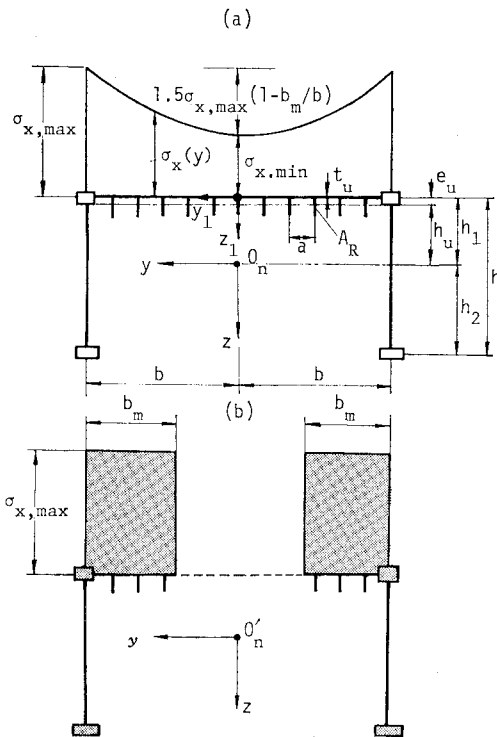


図-6 デッキ・プレートの垂直応力分布と有効幅の定義

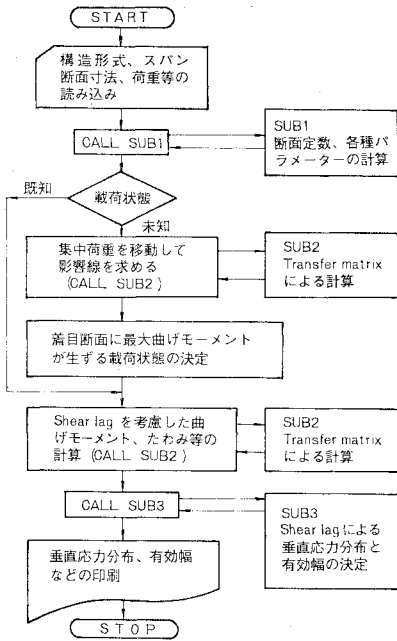


図-7 Flow Chart.

図-7 には shear lag の解析と有効幅の算定を行うためのフローチャートを示す。

4. 数値計算例

(1) 連続桁の計算例

a) 曲げモーメント影響線

城ヶ島大橋¹⁵⁾をモデルとした3径間連続桁(スパン割1:1.25:1)を図-8に示す。ここに ω 値とは文献8)より、鋼床版の寸法・材料特性を表わすものであり、次式で計算される。

$$\omega = \frac{1}{1-\nu} + \frac{A_R}{at_u}(1+\nu) = \frac{\beta}{(ab)^2} \dots\dots\dots(60)$$

図-9は shear lag 理論による連続桁の側径間(着目点4)、中間支点上(着目点10)、および中央径間(着目点15)の曲げモーメントの影響線を示したものである。図中の()値は初等ばり理論による値であり、 l/b を種々変化させて計算したが、影響線に関しては初等ばり理論と shear lag 理論による値とはほとんど差異がないことが明らかにできた。

b) 最大断面力と変形量

表-6は図-8の連続桁の着目断面に最も不利になるようなL荷重(等分布荷重 $q=0.35\text{ t/m}^2$,集中荷重 $P=5\text{ t/m}$)を載荷した時の最大曲げモーメント、最大反力、および最大たわみ量を示したものである。この表から、曲げモーメントや支点反力などの断面力は文献7)で

も示されているように、初等ばり理論による値と差異はないが、変形量 w は shear lag 理論による値の方が若干大きくなる。それで、 l/b の変化による最大たわみ w_{15} を shear lag 理論による値と初等ばり理論による値の比として求め、プロットすれば図-10のようになる。ただし、ここではスパン l を $l=(l_1+l_2)/2$ に取ってある。この図より $l/b < 12$ ぐらいになれば変形量は shear lag を考慮して求めなければならないことがわかる。

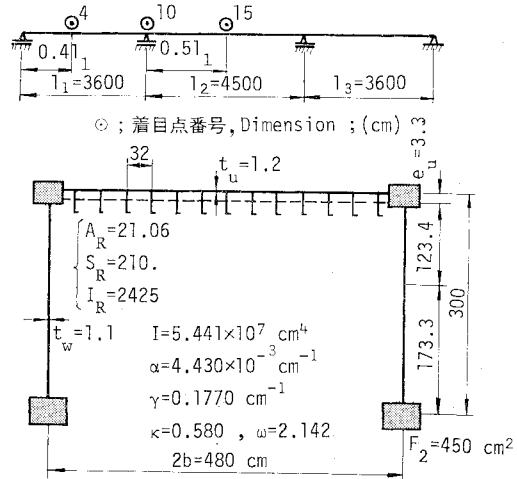


図-8 連続桁の断面図・側面図

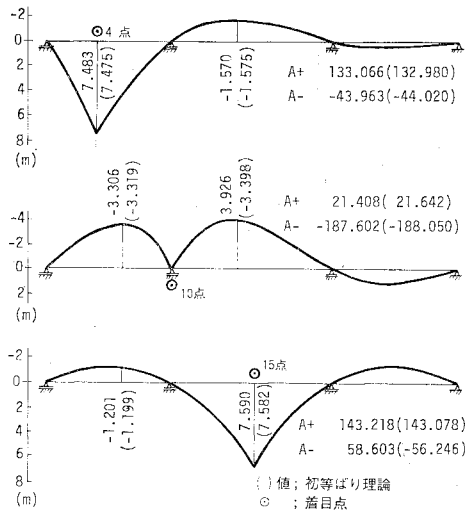


図-9 曲げモーメントの影響線と影響線面積

表-6 最大断面力と変形量

項目	曲げモーメント M (t・m)			反力 (t)		たわみ (cm) w_{15}
	M_4	M_{10}	M_{15}	R_0	R_{10}	
① shear lag 理論	524.71	533.18	550.38	67.205	136.060	0.771
② 初等ばり理論	524.49	534.42	549.92	67.199	136.114	0.754
①/② (%)	100	99.8	100	100	99.9	102

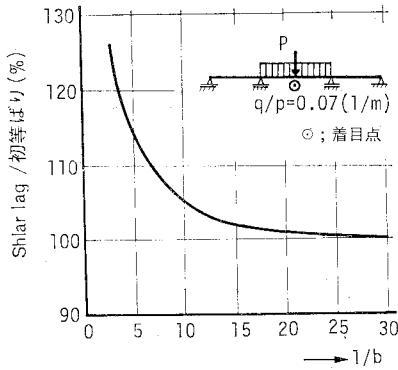


図-10 l/b によるたわみの変化

c) 垂直応力分布と有効幅

着目断面の曲げモーメントが最大になるような L 荷重を載荷した時のデッキ・プレートの垂直応力分布を図-11 に示す。

表-7 はこの垂直応力分布から求めた有効幅 b_m/b を示す。また、現行示方書による値も併記している。

表-7 より、本文による有効幅と現行示方書による値とを比較すると、いずれの場合も本文による有効幅は小さく、現行の道路橋示方書による値は若干危険側の値を示している。

(2) 斜張橋の計算例

図-12 は、尾道大橋¹⁶⁾をモデルとした斜張橋を示す。図示の着目断面における断面力が最大となるように L 荷重を載荷し、そのときのデッキ・プレートの垂直応力分布を求めたものを 図-13 に示す。

図-13(b) に示すように、ケーブル取付点におけるデッキ・プレートの垂直応力度は、図-13(a) と異なり、ウェブとデッキ・プレートの接合点で最小となり、デッキ・プレート中央部で最大となる。このような現象を negative shear lag とよんでいる。

表-8 は 図-13 の応力分布から求めた有効幅の値を

表-7 連続桁の有効幅 b_m/b

b_m/b	着目点	Case-1	Case-2	Case-3
	(着目点4)	(着目点10)	(着目点15)	(着目点15)
①木 法		0.86	0.64	0.87
②現行示方書		0.93	0.69	0.92
①/② (%)		93	93	94

表-8 斜張橋の有効幅 b_m/b

形式	着目点	①	②	③	④
	斜 張 橋		0.81	1.17 1.14	0.75
2 径 間		0.87	0.89	0.81	0.59
4 径 間		0.70	0.37	0.66	0.36

上側：L-Side, 下側：R-Side

示したものである。ケーブル取付点における b_m/b 値が 1.0 より大きいのは、negative shear lag がおこるため

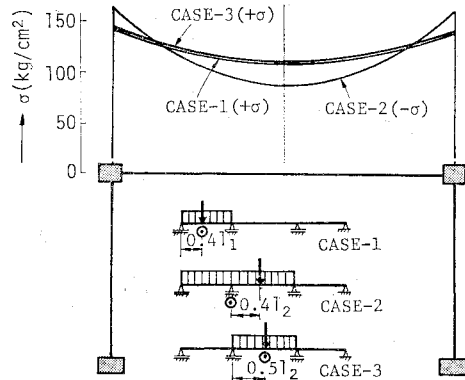


図-11 デッキ・プレートの垂直応力度

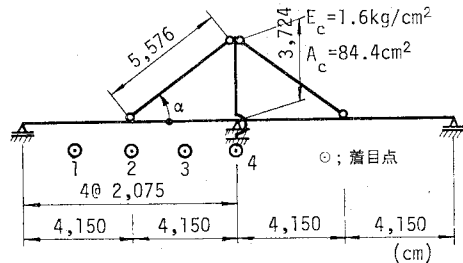


図-12 斜張橋の側面図

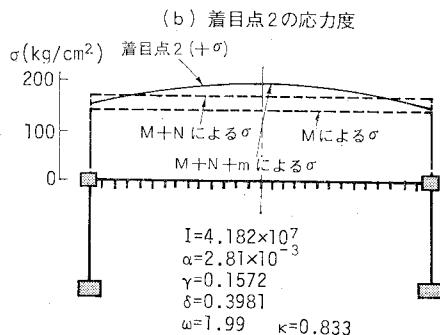
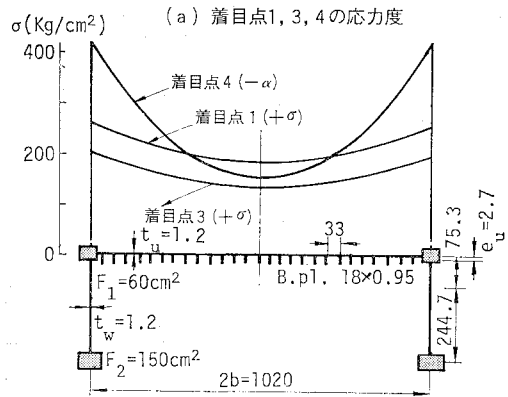


図-13 斜張橋の垂直応力分布

で、このようなときには式 (54) の有効幅の考え方は無意味であることを示している。

また、ケーブルのばね定数が 0 (2 径間) と ∞ (4 径間連続桁) にした時の有効幅の値も示してあるが、斜張橋の有効幅はいずれの場合ともかなりの差異がある。

(3) 方杖ラーメン橋の計算例

このラーメン橋の例として、図-14 に示す方杖橋¹⁷⁾について解析を行った。

着目断面 (◎印) における曲げモーメントが最大になるように L 荷重を載荷した時のデッキ・プレート の応力分布を

表-9 方杖ラーメン橋の有効幅 b_m/b

形式	着目点	①	②	③
方杖ラーメン橋 3 径間	①	0.86	0.87	0.79
	②	0.89	0.72	0.92

図-14(b) に示す。表-9 はこの応力分布から求めた有効幅を示したものである。同表にはラーメン橋脚部を剛支点とみなした 3 径間連続桁の値も併記してあるが、この場合両者には大きい差異がないように思われる。

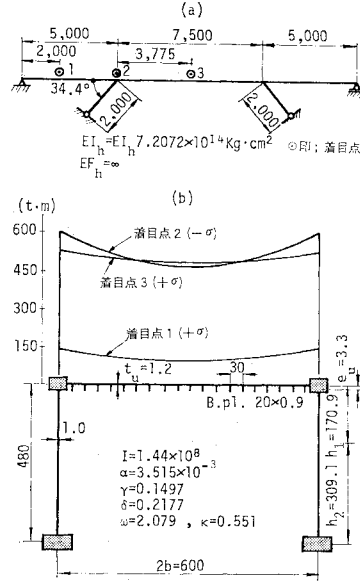


図-14 方杖ラーメン橋

5. 模型実験

(1) 模型桁・実験方法

前節で連続桁橋などの shear lag 理論による数値計算を行ったが、これらの理論値が妥当なものであるかを検証するために、アクリライト製の 3 径間連続桁模型を製作し、載荷実験を行った。

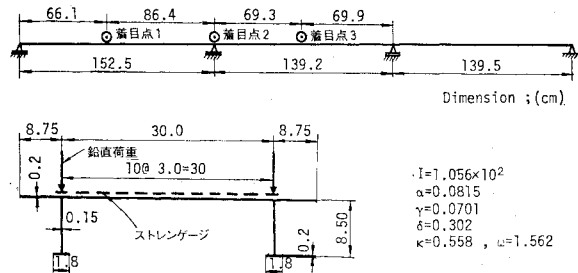


図-15 模型桁の側面図・断面図

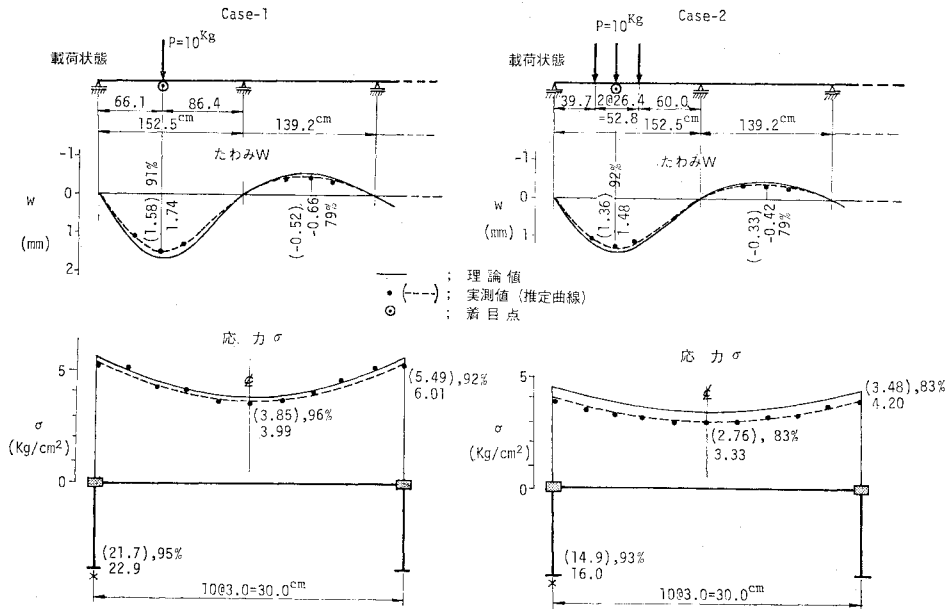


図-16 側径間のたわみと垂直応力分布

図-15には模型桁の側面図、および断面図を示す。模型桁、材料試験結果（ヤング率 $E=2.8 \times 10^4 \text{kg/cm}^2$ 、せん断弾性係数 $G=1.2 \times 10^4 \text{kg/cm}^2$ 、ポアソン比 $\nu=0.36$ ）の詳細は文献 14) を参照されたい。

(2) 実験結果と考察

3 径間連続桁模型の側径間、中間支点、および中央径間中央のそれぞれ着目点 1, 2, 3 にできるだけ大きい応力が生ずる荷重状態と、それによって生ずるフランジプレート垂直応力分布図を 図-16~18 に示す。

フランジプレートの実測応力分布は、若干の乱れが現われているので、実測値は理論にしたがって放物線分布すると仮定し、最小自乗法によって整理した。このような処理をすると、いずれの場合もこの推定曲線と理論曲線との比は 80~96% の範囲にあり、よく一致している。また下フランジの応力値に対しても、理論値と実測値を図中に示しているが、両者は良好に一致している。

一方、側径間と中央径間中央点におけるたわみ w の実験値（両側ウェブ直下の平均値）も 図-16~18 中に示してあるが、実測値と理論値の比は、垂直応力度と同

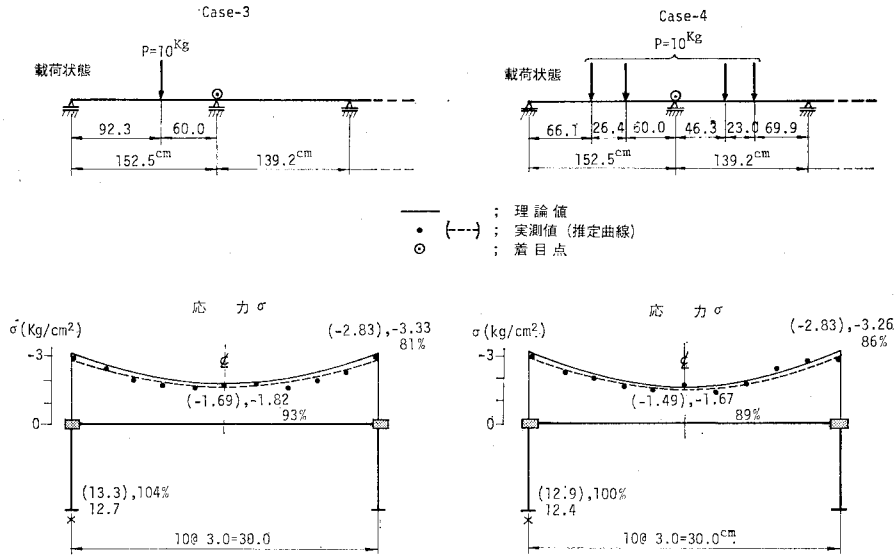


図-17 中間支点上の垂直応力分布

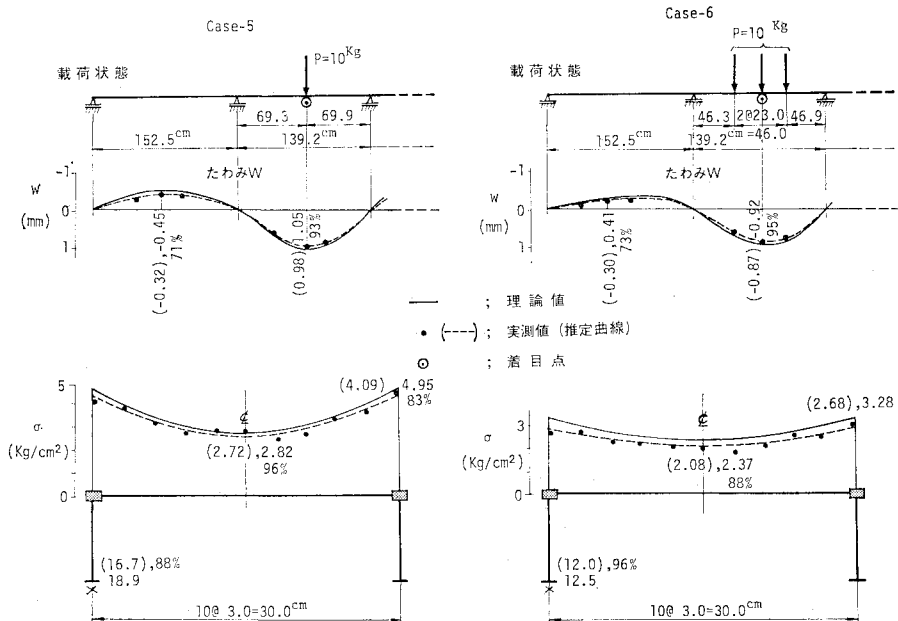


図-18 中間支間のたわみと垂直応力分布

表—10 連続桁橋模型の有効幅 b_m/b

項目	着目点		中間支点		中央径間	
	①	②	③	④	⑤	⑥
実験値	0.79	0.86	0.74	0.68	0.75	0.85
理論値	0.77	0.86	0.71	0.68	0.72	0.82
実/理 (%)	103	100	104	100	104	104

様によく一致していることがわかる。

表—10 は 図—16~18 の垂直応力分布から求めた有効幅 b_m/b を示したものである。有効幅の実験値と理論値の比も良好であり、100~104% 内にある。

したがって、本文の連続桁の shear lag 現象の理論的解析が妥当であることがこの実験により確かめることができたように思われる。

6. 連続桁の有効幅算定に関する一提案

(1) 換算スパンの取り方

等2径間連続桁, 3径間連続桁(スパン割 1:1.25:1)を対象にして, 設計上重要な断面に着目して, L 荷重を載荷して, 有効幅 b_m/b と l/b の関係を調べる。パラメーター ω と ϵ 値が異なると, b_m/b の値も若干変化するが, 文献 8) によるとその差は僅少であるので, 断面形状としては 図—8 を使用した。

図—19~20 には, それぞれ2径間, 3径間の場合 l/b と b_m/b の関係を求めたものである。ただし, 横軸の l/b 値を定めるためのスパン l としては, 等2径間の場合ケース1, ケース2ともに $l=l_1$, 3径間の場合, 着目断面が第1径間内(ケース3)にある時, $l=l_1$, 中間支点上(ケース4)にある時, $l=(l_1+l_2)/2$, 中央径間(ケース5)内にある時は $l=l_2$ にとってある。

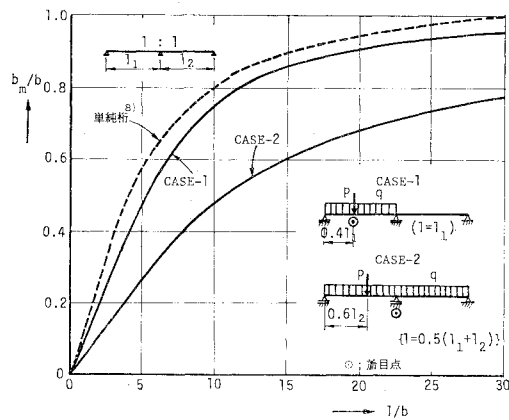
さて, 図—19~20 中には文献 8) に示した単純桁(スパン l) の提案値が点線で示してあるが, 連続桁を単純桁に置換するための等価スパンについて検討する。表—11 には, まず単純桁のスパン l をそれぞれ 0.85, 0.40, 0.7 倍したときの有効幅を文献 8) より求めたものである。一方, 図—19~20 より連続桁の有効幅を読みとったものも表—11 の中に示してあるが, 側径間の場合ケース1とケース3とは単純桁のスパンを $0.85l$ としたときの値とよく一致している。また, ケース2とケース4に示す中間支点上では $0.40l$, ケース5の中央径間の場合には $0.70l$ にとった値とよく近似している。それで, 連続桁をこのような等価スパンによって単純桁に置換し, そのときの有効幅を厳密値と比較したのも表—11 中に示したが, 通常問題となる $5 < l/b < 25$ の範囲では, その誤差は数パーセント以内である。したがって, 連続桁橋を単純桁橋とみなして算定する場合の等価ス

パン l は,

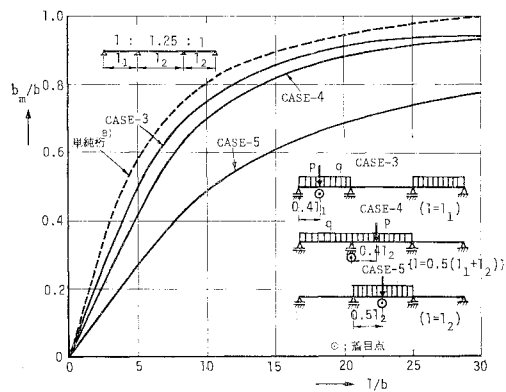
$$l = \beta L_0 \dots \dots \dots (61)$$

と表わすことができるように思われる。すなわち, 係数 β とスパン L_0 は 表—12 に示す値をとればよい。

ただし, 表—12 はあくまで各径間のスパン比が比較的そろっている場合であり, 著しい不等スパンの場合には本文の解析方法により別途有効幅を定めるべきである。その一例として等分布荷重が満載する不等スパン連続桁の計算結果を 図—21 に示す。図中の応力分布で () 内の数値は小松(2重対称の箱桁を対象)⁷⁾ によって計算されたものであるが, 本文では π 形断面として取り扱っているが偏差は少なく良好な一致がみられる。それで, その応力分布図をもとにして有効幅を求めたものも図中に示してある。ここで, [] 内の数値は表—12 の換算スパンを用いて単純桁として求めたものである。着目断面の応力が最大になる荷重状態でないにもかかわらず断面 A, B, C, E, F ではほぼ妥当な近似値が得られている。しかし, 断面 D では negative shear lag が現



図—19 2径間連続桁の l/b と b_m/b の関係



図—20 3径間連続桁の l/b と b_m/b の関係

表-11 単純桁と連続桁の有効幅の比較

形式	等価スパン l	l/b		5	7	10	15	20	25
		b_m/b							
単純桁	$0.85l$	①		0.52	0.65	0.78	0.87	0.94	0.96
	$0.40l$	②		0.27	0.38	0.51	0.65	0.74	0.80
	$0.70l$	③		0.45	0.58	0.70	0.83	0.90	0.94
2 径間連続桁	l_1 (case-1)	④		0.50	0.63	0.76	0.86	0.91	0.94
		④/① (%)		96	97	97	99	97	98
中支間点	$0.5(l_1+l_2)$ (case-2)	⑤		0.26	0.38	0.49	0.62	0.71	0.75
		⑤/② (%)		96	100	96	96	96	94
3 径間連続桁	l_1 (case-3)	⑥		0.51	0.64	0.76	0.86	0.91	0.94
		⑥/① (%)		98	99	97	99	97	98
中支間点	$0.5(l_1+l_2)$ (case-4)	⑦		0.26	0.38	0.49	0.62	0.71	0.75
		⑦/② (%)		96	100	96	98	96	94
中径中央	l_2 (case-5)	⑧		0.44	0.57	0.70	0.82	0.89	0.92
		⑧/③ (%)		98	98	100	99	99	98

表-12 連続桁の換算スパンの取り方

項目	着目点	側径間	中間支点	中央径間
β		0.85	0.40	0.70
L_0		l_1	$(l_1+l_2)/2$	l_2

なしてよい。また、中間支点付近においては有効幅を安全側の値に定めるために図-22 中の実線で示すように直線的に変化するとよいように思われる。

7. 結 言

本文は、鋼床版連続桁橋の shear lag 現象と有効幅の解析を伝達マトリックス法を用いて行ったものである。さらに、理論上の仮定の妥当性及び計算精度の問題を確かめるために、連続桁橋模型を製作し実験的研究も行った。以下、結論を要約すれば次のとおりである。

- (1) 軸方向力をも受ける連続桁の shear lag 解析ができる基礎微分方程式を誘導し、パラメーター αl が増大しても伝達マトリックス法で精度よく計算できる方法を示した。
- (2) 各種構造物の shear lag 解析ができるよう初期ベクトル、中間条件式、末端条件式を示し、その解析法を明示した。
- (3) 数値計算例として、3径間連続桁、斜張橋、方杖ラーメン橋の設計上重要な断面におけるデッキ・プレートの垂直応力分布と有効幅を例示した。

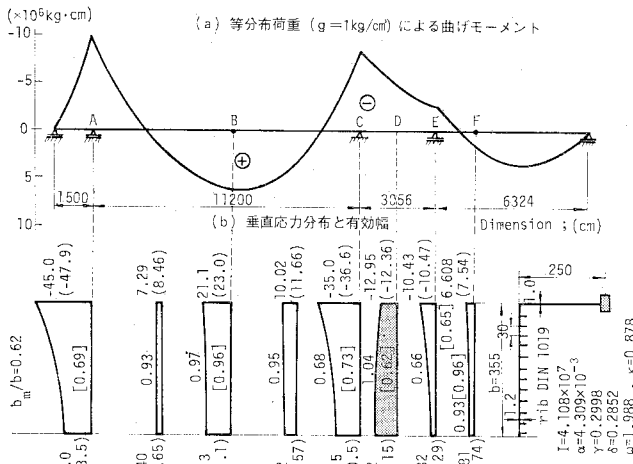


図-21 4径間連続桁の有効幅 (Negative shear lag が起こる例)

われており、上述のような取り扱いをすると誤った結果を与えることになる。

このような連続桁橋や前述の斜張橋などにおいて negative shear lag 現象が現われる場合の有効幅の実用的な取り扱いについては、別途報告する予定である。

(2) 橋軸方向の有効幅の変化

橋軸方向の有効幅の変化を調べるために、図-8 に示した断面を有する等2径間、3径間連続桁について計算を行った。

図-22(a), (c) は最大曲げモーメントを示している。そして、この荷重状態に対応した各断面の有効幅を図-22(b), (d) に示す。これらの図を観察すると、支間部では中央部付近で有効幅は大きくなり、中央点から離れるにしたがって緩慢ではあるが有効幅は小さくなる。一方、支点上で有効幅は著しく小さくなり、その両側 $0.2l_1 \sim 0.2l_2$ の範囲で急激な変化をしている。

これらの図より、支間中央付近では有効幅を一定とみ

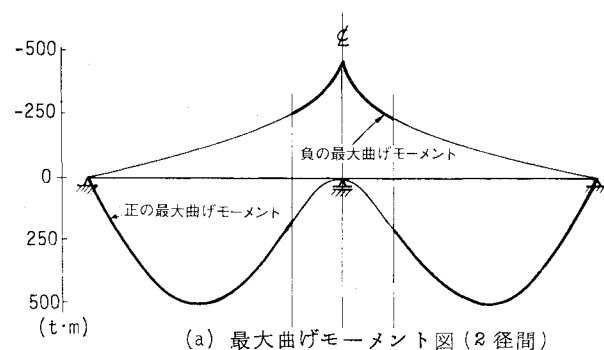
(4) 理論上の仮定の妥当性を確認するために3径間連続桁橋模型による載荷実験を行った。変形量、垂直応力、有効幅値の実測値はいずれも理論値と良好に一致し、本文における連続桁の shear lag 解析が妥当であることが確かめられた。

(5) 等2径間、3径間の有効幅と l/b の関係を図-19~20 に示した。さらに、有効幅の橋軸方向の変化を数値計算によって明らかにした。

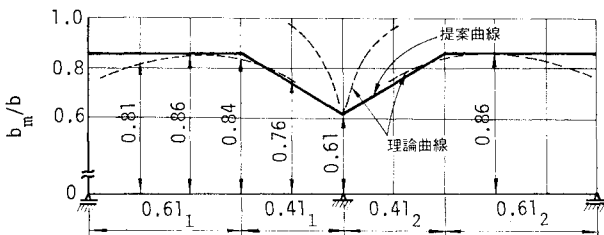
(6) これらの数値計算から、鋼床版連続桁橋の有効幅を単純桁橋に置換するための合理的な換算スパンの取り方を明示した。

(7) 斜張橋のケーブル取付点や、不等スパンを有する連続桁橋では negative shear lag が生じることを示した、これらの問題についてはさらに理論的・実験的研究が必要であると思われる。

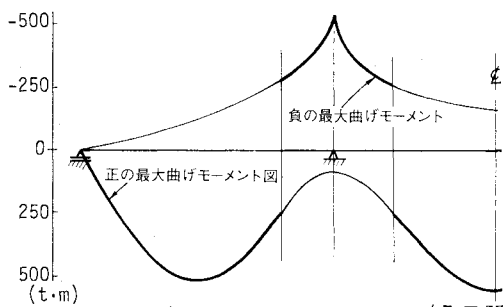
謝 辞：本研究に対し、文部省科学研究費の補助を受けたことを付記する。また、この研究を遂行すること



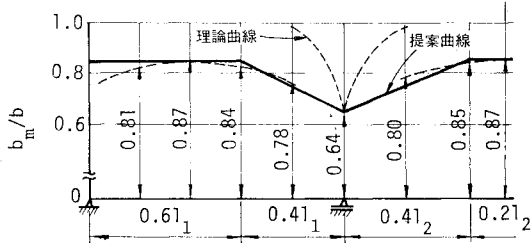
(a) 最大曲げモーメント図 (2 径間)



(b) 有効幅の変化



(c) 最大曲げモーメント図 (3 径間)



(d) 有効幅の変化

図-22 橋軸方向の有効幅の変化

に当り、種々ご支援賜った大阪大学・小松定夫教授に深甚の謝意を表する次第である。

参考文献

1) Girkman, G.: *Flächentragwerke*, Dritte Auflage, Springer-Verlag, S. 116~124, 1954.
 2) Fukuda, T.: *Ein Beitrag zur Lösung der mitwirk-*

enden Brite, Report of the Institute of Industrial Science, The University of Tokyo, Vol. 12, No. 5, 1963.
 3) Koepcke, W. und Denecke, G.: *Die mitwirkenden Brite der Gurte von Plattenbalken*, Deutscher Ausschuss für Stahlbeton, Wilhelm Ernst & Sohn, Heft 12, 1967.
 4) Abdel, S.G.: *Effective Width of Steel Deck Plate*, Proc. of ASCE, ST. 7, pp. 1459~1473, 1967.7.
 5) Reissner, E.: *Analysis of shear lag in Box Beams by the Principle of Minimum Potential Energy*, Quarterly of Applied Mathematics, Vol. IV, No. 3, pp. 268~278, 1946.
 6) Chwalla, E.: *Über das Problem der voll mittragenden Brite von Gurt und Rippenplatten*, Alfons-Leon-Gedenkschrift, Wien, 1972.
 7) 小松定夫: *連続箱桁の shear lag について*, 土木学会論文集, 第 58 号, pp. 1~9, 1958.9.
 8) 近藤和夫・小松定夫・中井 博: *鋼床版桁橋の有効幅に関する研究*, 土木学会論文集, 第 86 号, pp. 1~17, 1962.10.
 9) 小松定夫・中井 博・北田俊行: *曲線桁橋の shear lag と有効幅に関する研究*, 土木学会論文報告集, No. 191, pp. 1~14, 1971.7.
 10) 山村信道: *偏載荷重を受ける π 形断面桁橋の上フランジ有効幅に関する研究*, 土木学会論文報告集, No. 226, pp. 1~12, 1974.6.
 11) *Inquiry into the Basis of Design and Method of Erection of Steel Box Girder Bridges*, Interium design and workmanship rules, Part I and II, London, Her Majesty's Stationery Office, 1973.
 12) Flint, A.R. and Horne, M.R.: *Conclusions of Research Programme and Summary of Parametric Studies*, Paper 10, International Conference of Steel Box Girder Bridges, ICE, London, 1973.2.
 13) 中井 博・事口寿男: *伝達マトリックス法による曲げねじりを受ける薄肉直線桁橋の解析と断面力, 変形量に関する研究*, 土木学会論文報告集, No. 233, pp. 55~70, 1975.1.
 14) 中井 博・谷田玲二・奥村敏久: *伝達マトリックス法の不整格子桁橋の解析への応用と模型実験*, 土木学会論文報告集, No. 243, pp. 7~18, 1975.11.
 15) 城ヶ島大橋応力測定委員会編: *城ヶ島大橋応力測定報告集*, 技報堂, 1961.10.
 16) 田村周平・笛吹昭光・出野 宏: *尾道大橋の設計について*, 橋梁, Vol. 4, pp. 58~67, 1968.6.
 17) Jacobi, H.G.: *Die Straßenbrücke über das Alzettetal in Luxemburg Ein Stählernes Sprengwerk*, Stahlbau, Heft 7, 38 Jahrg., S. 193~202, 1969.7.
 18) *道路橋示方書・同解説*, 日本道路協会, 昭和 48 年 2 月.

(1975.12.8・受付)