

吊橋ケーブルの温度応答に関する研究

STUDY ON THE THERMAL RESPONSE OF SUSPENSION
BRIDGE CABLES

原 田 康 夫*・長 谷 川 鎬 一**

By Yasuo HARADA and Shuichi HASEGAWA

1. 序 論

吊橋ケーブルを熱移動の立場からながめてみると、ケーブルを構成する素線からそれに隣接する次の素線への伝熱は、素線と素線との接触面（あるいは線）およびその周辺に存在する空隙を介して行われる。特に吊橋ケーブルの主流となっている平行線ケーブルの場合には、素線は理論的にはたがいに線接触をしているにすぎないから、空隙の存在がケーブルの伝熱機構に対する支配的要素になると考えられる。したがって吊橋ケーブルは、実質内に多くのすきまを有する保温材料の一種とみることができ、それゆえ、ケーブルの熱伝導率は素線に比べてきわめて低いであろうということは容易に推察される。このようにケーブルの熱伝導率が低いということと合わせて、それが定量的に把握されておらず、しかもケーブルの温度推定のための具体的手段に欠けていたことにより、いくつかの解決すべき問題点が残されている。

ケーブル形状は吊橋の形状を支配する代表的なパラメーターである。そしてケーブルは温度変化によって微妙にその長さを変え、それがスケールアップされて大きな形状変化となって現われる。したがって、吊橋を設計する際の温度応力の見積りのためには、ケーブルの温度応答を適確に把握することが是非とも必要になる。それと同様に、吊橋が架設開始から完成にいたるまでに経験する各種の形状確認においても、ケーブルの温度応答が重要な役割を受持つ。そこで接触温度計を用いてケーブルの表面温度を測定し、それをケーブルの平均温度であると考えて、形状確認のデータ処理に供しているのが現状である。しかしこの場合には、ケーブル表面付近の外気の状態や温度計感熱部とケーブル表面の接触状態によって測定値の信頼度が低下したり、ケーブル断面内の温

度勾配によって、この測定値が必ずしもケーブルの平均温度を表わしていないという問題点がある。ケーブルの熱伝導率が低いということは、ケーブル断面内の温度勾配を増加せしめる。その結果、平均温度からの温度偏差に応じて素線に二次応力を発生させることになり、これも吊橋設計上の解決すべき課題として残されている。

筆者らは、気温の変動にともなうケーブルの温度応答を追跡する手法を明らかにするとともに^{1),2)}、吊橋に導入される誤差の見積りに対する応用例³⁾を示し、さらに大形模型を用いた実験により基礎的なデータを得た⁴⁾。本文はこれらの結果をも合わせて、気温ならびに日射の変動によるケーブルの温度応答式を導き、模型実験の結果を利用してケーブルの温度応答性能を定量的に把握するとともに、それにとり問題点について若干の考察を加えたものである。

2. 基礎方程式

ケーブルを巨視的に見て熱移動に関する均質な物質であると考えれば、無限に長い円柱の熱伝導に関する微分方程式を適用することができる。したがって、ケーブルの熱移動を表わす基礎方程式は、それを極座標 (r, θ) で表わせば式 (1) のようになる。

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \kappa \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} \right) \dots \dots (1)$$

ここに、 u は時間 t および場所 (r, θ) におけるケーブルの温度であり、 κ は熱伝導率を λ 、比熱を C_p 、密度を ρ としたとき $\kappa = \lambda / C_p \rho$ で与えられる熱拡散率である。

一方、ケーブルは気温と日射の変動を受けているから、式 (1) に対する境界条件を次のように書くことができる。

$$\left(\frac{\partial u}{\partial r} \right)_{r=a} + h \{ (u)_{r=a} - u_{\text{ext}} \} = f \dots \dots (2)$$

ここに、 a はケーブル半径、 u_{ext} は気温、 f は日射量

* 正会員 (株) 横河橋梁製作所 主任開発員

** 正会員 工博 (株) 横河橋梁製作所 設計部長

を表わすパラメーター、 h は表面伝達率を α としたとき $h=\alpha/\lambda$ で表わされる定数であって、ここでは熱放散率とよぶことにする。

基礎方程式 (1) は u に関して線形であるから、その解を気温の変動によるもの u_t と日射の変動によるもの u_r に分離するとともに、式 (2) をそれぞれに対する境界条件に分けて考えればよい。このとき、 u_r については $u \rightarrow u_r$ とすることにより式 (1)、(2) がそのまま成立するが、 u_t は r, t のみの関数となり、それに対する境界条件としてニュートンの放熱法則を適用すればよい。すなわち、式 (1)、(2) に対応して次式が成立する。

$$\frac{\partial u_t}{\partial t} = \kappa \left(\frac{\partial^2 u_t}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_t}{\partial r} \right) \dots\dots\dots (3)$$

$$\left(\frac{\partial u_t}{\partial r} \right)_{r=a} + h \{ (u_t)_{r=a} - u_{\text{ext}} \} = 0 \dots\dots\dots (4)$$

またこれらの問題の初期条件として、断面内等温を考える。

3. 気温の変動による応答

気温の変動によるケーブルの温度応答を与える式とその誘導については文献 1) で詳述したので、ここではその概要と結果を記すにとどめる。

任意の気温変動に対する非定常解は、単位跳躍入力に対する非定常解を知って、それに Duhamel の積分を適用することにより得ることができる。したがってまず最初に、境界条件式 (4) において $u_{\text{ext}}=1$ とするとともに、初期条件 $(u_t)_{t=0}=0$ のもとで基礎方程式 (3) を解くことになる。これは変数分離を行うことによって簡単に解くことができ、その結果は次のようになる。

$$u_{t,\text{step}}(r,t) = 1 - \sum_{i=1}^{\infty} \frac{2ah}{\alpha_i^2 + (ah)^2} \times \frac{J_0(\alpha_i/a \cdot r)}{J_0(\alpha_i)} e^{-(\alpha_i^2/a^2)xt} \dots (5)$$

ここに、 $u_{t,\text{step}}$ は単位跳躍入力によるケーブル温度、 α_i は

$$xJ_1(x) - ahJ_0(x) = 0 \dots\dots\dots (6)$$

の第 i 番目の正根、 J_0, J_1 はそれぞれ 0 階および 1 階の第 1 種 Bessel 関数である。ついで式 (5) に Duhamel 積分を適用すれば、任意の気温の変動 $u_{\text{ext}}(\tau)$ によるケーブルの温度応答式を次のように表わすことができる。

$$\begin{aligned} u_t(r,t) &= u_0 + \int_0^t \frac{\partial u_{t,\text{step}}(r,t-\tau)}{\partial t} \{ u_{\text{ext}}(\tau) - u_0 \} \alpha \tau \\ &= u_0 + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{2ah}{\alpha_i^2 + (ah)^2} \frac{J_0(\alpha_i/a \cdot r)}{J_0(\alpha_i)} \\ &\quad \cdot \frac{\alpha_i^2}{a^2} \kappa e^{-(\alpha_i^2/a^2)xt} \int_0^t \{ u_{\text{ext}}(\tau) - u_0 \} e^{(\alpha_i^2/a^2)xt} d\tau \\ &\dots\dots\dots (7) \end{aligned}$$

ここに、 u_0 は初期のケーブル温度である。ケーブルの平均温度は、式 (7) より次のように表わすことができる。

$$\begin{aligned} \bar{u}_t(t) &= \frac{1}{\pi a^2} \int_0^a u_t(r,t) \cdot 2\pi r dr \\ &= u_0 + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(2ah)^2}{\alpha_i^2 \{ \alpha_i^2 + (ah)^2 \}} \cdot \frac{\alpha_i^2}{a^2} \kappa e^{-(\alpha_i^2/a^2)xt} \\ &\quad \times \int_0^t \{ u_{\text{ext}}(\tau) - u_0 \} e^{(\alpha_i^2/a^2)xt} d\tau \dots\dots\dots (8) \end{aligned}$$

いま、気温 $u_{\text{ext}}(\tau)$ を時間間隔 Δt の間で

$$u_{\text{ext}}(\tau) = m\tau + n \quad (t - \Delta t \leq \tau \leq t) \dots\dots\dots (9)$$

のように直線近似すれば、

$$\begin{aligned} F_i(t) &= \frac{\alpha_i^2}{a^2} \kappa e^{-(\alpha_i^2/a^2)xt} \int_0^t \{ u_{\text{ext}}(\tau) - u_0 \} e^{(\alpha_i^2/a^2)xt} d\tau \\ &= \left(mt + n - u_0 - \frac{a^2}{\alpha_i^2 \kappa} m \right) (1 - e^{-(\alpha_i^2/a^2)xt}) \\ &\quad + m \Delta t e^{-(\alpha_i^2/a^2)xt} + e^{-(\alpha_i^2/a^2)xt} F_i(t - \Delta t) \\ &\dots\dots\dots (10) \end{aligned}$$

が成立するから、式 (7)、(8) によって数値計算を行う場合には、漸化式 (10) を利用すれば便利である。

4. 日射の変動による応答

(1) 概要

日射の変動によるケーブル温度応答式は、気温の変動によるケーブルの温度応答式と同様の手順で誘導することができる。すなわち、ケーブルがその表面を通して吸収する輻射熱を単位跳躍関数として与えたときの非定常解を求め、それに Duhamel の定理を適用すればよい。

そこで、空中に張渡された吊橋のケーブルが太陽から受ける輻射エネルギーの分布を 図-1 に示すようなパターンであると考え。すなわち、境界条件式 (2) における日射量を表わすパラメーター f は時間 t および場所 θ の関数であって、次式で与えられるものとする。

$$f(\theta, t) = \begin{cases} h'I(t) \sin(\theta - \theta_0) & (\theta_0 \leq \theta \leq \theta_0 + \pi) \\ 0 & (\theta_0 - \pi < \theta < \theta_0) \end{cases} \dots\dots\dots (11)$$

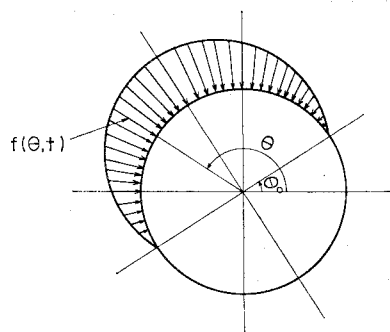


図-1 輻射エネルギーのパターン

ここに、 h' はケーブル表面での輻射線吸収率を β としたとき、 $h' = \beta/\lambda$ で与えられる定数で、熱放散率 h に対応して熱吸収率とよぶことにする。また I は、ケーブル軸を含み、かつ水平面と θ_0 なる角度をなす平面の単位面積が単位時間当りに受ける輻射熱量である。

(2) 単位跳躍入熱による非定常解

単位跳躍入熱を式 (11) に対応して次式で表わす。

$$f(\theta) = \begin{cases} \sin(\theta - \theta_0) & (\theta_0 \leq \theta \leq \theta_0 + \pi) \\ 0 & (\theta_0 - \pi < \theta < \theta_0) \end{cases} \dots\dots (12)$$

この場合には、単位跳躍入熱による非定常解 $u_{r, \text{step}}(r, \theta, t)$ が、ケーブル表面で輻射熱 $\bar{f}(\theta)$ を受けると同時にニュートン型放熱をするときの定常解 $u_{r1}(r, \theta)$ と、ケーブルの初期温度を $-u_{r1}(r, \theta)$ として空气中に放置したときの非定常解 $u_{r2}(r, \theta, t)$ の和として表わされることを利用すれば都合がよい。

式 (12) で与えられる単位跳躍入熱のもとの定常状態に対する基本方程式および境界条件は次のとおりである。

$$\frac{\partial^2 u_{r1}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_{r1}}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_{r1}}{\partial \theta^2} = 0 \dots\dots (13)$$

$$\left(\frac{\partial u_{r1}}{\partial r}\right)_{r=a} + h(u_{r1})_{r=a} = \bar{f}(\theta) \dots\dots (14)$$

式 (13) の一般解は、 r, θ に関して変数分離を行い、 u_{r1} が $\theta = \pi/2$ に関して対称であることを利用すれば、式 (15) のように書くことができる。

$$u_{r1}(r, \theta) = \sum_{n=0,2,4,\dots} A_n r^n \cos n\theta + \sum_{m=1,3,5,\dots} B_m r^{-m} \sin m\theta \dots\dots (15)$$

積分定数 A_n, B_m は式 (15) が境界条件 (14) を満足するように決めればよい。簡単のため、あらためて $\theta - \theta_0$ を θ とし、入熱関数 $\bar{f}(\theta)$ を

$$\bar{f}_s(\theta) = |\sin \theta|/2, \bar{f}_a(\theta) = (\sin \theta)/2 \dots\dots (16)$$

のように、対称項と逆対称項に分解してやれば、それぞれに対応して A_n および B_m を次のように決めてやることができる。

対称入熱の場合には、 $\theta=0$ に関する対称性より式 (15) の B_m の項がなくなる。そこで入熱関数 $\bar{f}_s(\theta)$ を $-\pi < \theta < \pi$ で Fourier 展開し、

$$\bar{f}_s(\theta) = \frac{1}{\pi} - \frac{2}{\pi} \sum_{n=2,4,6,\dots} \frac{\cos n\theta}{(n-1)(n+1)} \dots\dots (17)$$

これと式 (15) を境界条件 (14) に代入すれば、 A_n が次のように定まる。

$$\left. \begin{aligned} A_0 &= \frac{1}{\pi h} \\ A_n &= -\frac{2}{\pi} \frac{1}{a^{n-1}(ah+n)(n-1)(n+1)} \\ &\quad (n=2, 4, 6, \dots) \end{aligned} \right\} \dots\dots (18)$$

一方、逆対称入熱の場合には、 $\theta=0$ に関する逆対称性より、式 (15) の A_n の項がなくなるから、入熱関数 $\bar{f}_a(\theta)$ と式 (15) を式 (14) に代入すれば B_m が求められる。

$$\left. \begin{aligned} B_1 &= \frac{1}{2(ah+1)} \\ B_m &= 0 \quad (m \neq 1) \end{aligned} \right\} \dots\dots (19)$$

以上のことより、単位跳躍入熱 $\bar{f}(\theta)$ のもとの定常解 $u_{r1}(r, \theta)$ は次式で与えられることになる。

$$u_{r1}(r, \theta) = \frac{a}{2(ah+1)} \left(\frac{r}{a}\right) \sin \theta - \frac{2a}{\pi} \times \sum_{n=2,4,\dots} \frac{1}{(ah+n)(n^2-1)} \left(\frac{r}{a}\right) \cos n\theta - \frac{1}{\pi h} \dots\dots (20)$$

次に、初期温度を与えて空气中に放置されたケーブルの非定常状態を $u_{r2}(r, \theta, t)$ で表わすことにすれば、これは境界条件

$$\left(\frac{\partial u_{r2}}{\partial r}\right)_{r=a} + h(u_{r2})_{r=a} = 0 \dots\dots (21)$$

のもとで基礎方程式 (1) を満足する。この一般解は変数分離することによって簡単に求められ、次の形に書くことができる。

$$u_{r2}(r, \theta, t) = \sum_{n=0} \sum_{s=1} (A_{ns} \cos n\theta + B_{ns} \sin n\theta) J_n\left(\frac{\alpha_{ns}}{a} r\right) e^{-(\alpha_{ns}^2/a^2) t} \dots\dots (22)$$

ここに、 α_{ns} は

$$x J_n'(x) + ah J_n(x) = 0 \dots\dots (23)$$

の第 s 番目の正根であり、 J_n は n 階第 1 種 Bessel 関数である。式 (22) は、初期条件より $t=0$ において $-u_{r1}(r, \theta)$ に一致しなければならない。そこで、初期値を与える関数を $u_{r0}(r, \theta)$ とおいて、これを次のような形に Fourier-Bessel 展開してみる。

$$u_{r0}(r, \theta) = \sum_{n=0} \sum_{s=1} (A_{ns} \cos n\theta + B_{ns} \sin n\theta) J_n\left(\frac{\alpha_{ns}}{a} r\right) \dots\dots (24)$$

係数 A_{ns}, B_{ns} は、三角関数の直交性と Lommel の積分定理を用い、 α_{ns} が式 (23) の根であることを考慮して決めることができる。

$$\left. \begin{aligned} A_{ns} &= \frac{1}{\pi a^2} \frac{\varepsilon_n \alpha_{ns}^2}{(\alpha_{ns}^2 + a^2 h^2 - n^2) J_n^2(\alpha_{ns})} \\ &\quad \times \int_0^a \int_{-\pi}^{\pi} \xi u_{r0}(\xi, \varphi) J_n\left(\frac{\alpha_{ns}}{a} \xi\right) \cos n\varphi d\varphi d\xi \\ B_{ns} &= \frac{1}{\pi a^2} \frac{\varepsilon_n \alpha_{ns}^2}{(\alpha_{ns}^2 + a^2 h^2 - n^2) J_n^2(\alpha_{ns})} \\ &\quad \times \int_0^a \int_{-\pi}^{\pi} \xi u_{r0}(\xi, \varphi) J_n\left(\frac{\alpha_{ns}}{a} \xi\right) \sin n\varphi d\varphi d\xi \\ \varepsilon_0 &= 1, \varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \dots = 2 \end{aligned} \right\} \dots\dots (25)$$

したがって、式 (25) を用いれば、式 (24) は次の形に書けることになる。

$$u_{r0}(r, \theta) = \frac{1}{\pi a^2} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_n \alpha_{ns}^2}{\alpha_{ns}^2 + a^2 h^2 - n^2} \times \frac{J_n(\alpha_{ns}/a \cdot r)}{J_n^2(\alpha_{ns})} \times \int_0^a \int_{-\pi}^{\pi} \xi u_{r0}(\xi, \varphi) \times J_n(\alpha_{ns}/a \cdot \xi) \cos n(\theta - \varphi) d\varphi d\xi \dots (26)$$

そこで実際に、式 (20) に $u_{r0}(r, \theta) = -u_{r1}(r, \theta)$ を考慮して式 (25) により係数 A_{ns} , B_{ns} を計算してみれば、その結果は次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} A_{ns} &= \frac{2 \varepsilon_n \alpha_{ns}}{\pi(\alpha_{ns}^2 + a^2 h^2 - n^2)(ah+n)(n^2-1)} \times \frac{J_{n+1}(\alpha_{ns})}{J_n^2(\alpha_{ns})} \quad (n=0, 2, 4, \dots) \\ B_{1s} &= -\frac{a\alpha_{1s}}{(\alpha_{1s}^2 + a^2 h^2 - 1)(ah+1)} \frac{J_2(\alpha_{1s})}{J_1^2(\alpha_{1s})} \\ B_{ns} &= 0 \quad (n \neq 1) \end{aligned} \right\} \dots (27)$$

以上によって、初期温度 $-u_{r1}(r, \theta)$ が与えられてニュートン型放熱をするケーブルの非定常解 $u_{r2}(r, \theta, t)$ が求まったことになるから、単位跳躍入熱 $\bar{f}(\theta)$ に対する非定常解 $u_{r, \text{step}}(r, \theta, t)$ は、 θ を $\theta - \theta_0$ にもどせば式 (28) で表わされることになる。

$$u_{r, \text{step}}(r, \theta, t) = u_{r1}(r, \theta) + u_{r2}(r, \theta, t) = \sum_{n=0, 2, 4, \dots}^{\infty} \frac{2 \varepsilon_n a}{\pi(ah+n)(n^2-1)} \cos n(\theta - \theta_0) \times \sum_{s=1}^{\infty} \frac{\alpha_{ns}}{\alpha_{ns}^2 + a^2 h^2 - n^2} \frac{J_{n+1}(\alpha_{ns})}{J_n^2(\alpha_{ns})} \times (e^{-\alpha_{ns}^2/a^2 \cdot kt} - 1) J_n\left(\frac{\alpha_{ns}}{a} r\right) - \frac{a}{ah+1} \sin(\theta - \theta_0) \sum_{s=1}^{\infty} \frac{\alpha_{1s}}{\alpha_{1s}^2 + a^2 h^2 - 1} \times \frac{J_2(\alpha_{1s})}{J_1^2(\alpha_{1s})} (e^{-\alpha_{1s}^2/a^2 \cdot kt} - 1) J_1\left(\frac{\alpha_{1s}}{a} r\right) \dots (28)$$

(3) 任意の輻射入熱による応答

式 (12) で与えられる単位跳躍入熱による非定常解 $u_{r, \text{step}}(r, \theta, t)$ が式 (28) で表わされることを利用すれば、式 (11) で与えられる任意入熱に対する非定常解 $u_r(r, \theta, t)$ は Duhamel 積分を行うことにより求めることができる。

$$u_r(r, \theta, t) = \int_0^t f_0(\tau) \frac{\partial u_{r, \text{step}}}{\partial t}(r, \theta, t - \tau) d\tau \dots (29)$$

ただし

$$f_0(\tau) = h' I(\tau) \dots (30)$$

しかしながら、入熱強度 $f_0(\tau)$ のほかに法線日射面の傾斜角 θ_0 もまた時間 τ の関数となっているから、式

(29) の積分を実行しても、気温の変動による応答を計算したときのような簡単な漸化式が得られない。そこで式 (29) を数値積分の形で計算することを考える。時間 τ において、強度が $f_0(\tau) \sin(\theta - \theta_{0,\tau})$ で微小時間幅 $\Delta\tau$ のパルスが与えられたとすれば、それによる時間 t での応答値 $\Delta u_r(r, \theta, t - \tau)$ は次式で表わされる。

$$\Delta u_r(r, \theta, t - \tau) = f_0(\tau) \{ u_{r, \text{step}}(r, \theta, t - \tau) - u_{r, \text{step}}(r, \theta, t - \tau - \Delta\tau) \} = \sum_{n=0, 2, 4, \dots}^{\infty} \frac{2 \varepsilon_n a}{\pi(ah+n)(n^2-1)} \cos n(\theta - \theta_{0,\tau}) \times U_n(r, t - \tau) f_0(\tau) - \frac{a}{ah+1} \sin(\theta - \theta_{0,\tau}) U_1(r, t - \tau) f_0(\tau) \dots (31)$$

$$U_n(r, t) = \sum_{s=1}^{\infty} \frac{\alpha_{ns}}{\alpha_{ns}^2 + a^2 h^2 - n^2} \frac{J_{n+1}(\alpha_{ns})}{J_n^2(\alpha_{ns})} \times J_n\left(\frac{\alpha_{ns}}{a} r\right) (1 - e^{-\alpha_{ns}^2/a^2 \cdot kt}) e^{-\alpha_{ns}^2/a^2 \cdot kt} \dots (32)$$

したがって、式 (31), (32) を用いて $\tau=0$ から時間間隔 $\Delta\tau$ ごとに Δu_r 計算をし、それらを時間 t までについて加え合わせることになる。具体的な数値計算にあたっては、影響関数 (32) が時間の増加とともに 0 に漸近するから、所要の精度に応じて履歴時間を設定すればよい。

ケーブルの平均温度については、式 (31), (32) を用いることにより次のように表わすことができる。

$$\Delta \bar{u}_r(t - \tau) = \frac{1}{\pi a^2} \int_0^a \int_0^{2\pi} \Delta u_r(r, \theta, t - \tau) r d\theta dr = -\frac{4}{\pi h} \bar{U}(t - \tau) f_0(\tau) \dots (33)$$

$$\bar{U}(t) = \sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha_{0s}^2 + a^2 h^2} \frac{J_1^2(\alpha_{0s})}{J_0^2(\alpha_{0s})} (1 - e^{-\alpha_{0s}^2/a^2 \cdot kt}) \times e^{-\alpha_{0s}^2/a^2 \cdot kt} \dots (34)$$

5. 数値計算法

(1) 数値計算の収束性

これまで示したように、気温および日射の変動によるケーブルの温度応答は Bessel 関数を含む級数解として表わされている。そこで数値計算の収束性を確認するため、 $a=30$ cm, $\kappa=9.2$ cm²/h, $h=0.259$ 1/cm として次のような数値実験を試みた。

気温の単位跳躍入力による応答式 (5) から、時刻 τ で与えられた単位パルスによる応答を次のように求める。

$$\Delta u_r(r, t - \tau) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{2 ah}{\alpha_i^2 + (ah)^2} \frac{J_0(\alpha_i/a \cdot r)}{J_0(\alpha_i)}$$

$$\times (e^{(\alpha_i^2/a^2)\epsilon d\tau} - 1) e^{-(\alpha_i^2/a^2)\epsilon(t-\tau)} \dots\dots\dots(35)$$

式(35)で $r=a, t-\tau=d\tau=1$ として、パルス入力1時間後のケーブル表面における温度の計算値を式(6)の根 α_i の数に対してプロットしたものが図-2である。70項程度でほぼ収束していると思われるが、50項だけとっても70項までとったときに比べて約2%の誤差である。

日射の変動によるケーブルの温度応答式(31),(32)は、Bessel関数の階数 n とそれに対応する式(23)の根 α_{ns} に関する二重級数で表わされており、さらに数値計算にあたっては Duhamel の定理を単位パルスの重ね合わせとして数値積分の形で適用する。式(31),(32)より単位パルスによるケーブル表面上の点 ($r=a, \theta-\theta_0=\pi/2$) での応答値を次のように書く。

$$\begin{aligned} \Delta u_r(a, \theta_0+\pi/2, t-\tau) \\ = \sum_{n=0,2,4,\dots} (-1)^{n/2} A_n U_n(a, t-\tau) \\ + BU_1(r, t-\tau) \dots\dots\dots(36) \end{aligned}$$

式(23)の根 α_{ns} の数と式(36)の各項の収束状態との対応を図-3に示す。 α_{ns} を50項までとったとき、 $n=1$ での収束性にやや問題があるが、他の階数については図-1の結果と同等あるいはそれ以上の収束性を示している。図-4は α_{ns} を50項として階数 n と式(36)の収束性との関連を示したものであり、 $n=6$ 以上ではほぼ収束していることがわかる。 $n=6$ としたときの結果は $n=10$ としたときに比べて0.4%以下の誤差である。単位パルスによる応答値の経時変化は図-5に示したとおりである。パルスが与えられた表面の温度は急激に低下し、25時間後にはその影響がほとんどなくなる。中心温度に与える単位パルスの影響は表面温度に比べてきわめて小さいが、最大値はパルス入力後15時間程度のところで現われている。以上の結果より、計算

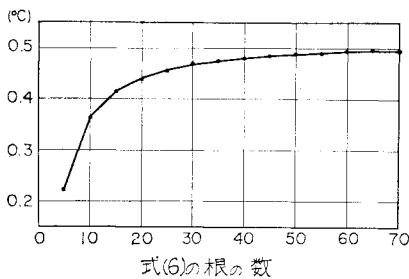
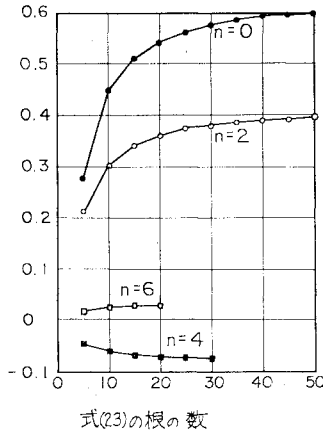
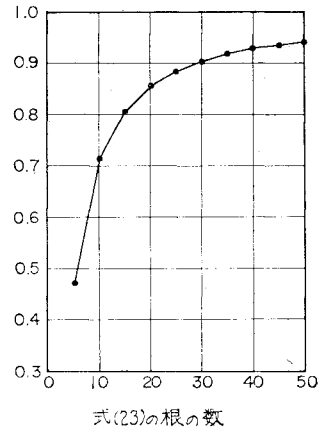


図-2 単位温度パルスによるケーブル表面温度(1時間後)



(a) $(-1)^{n/2} A_n U_n$



(b) BU_1

図-3 単位日射パルスによる影響値(1時間後)

の打切時間をパルス入力後40時間としても、実用上の精度には問題がない。

(2) 日射量

日射の変動によるケーブルの温度応答を数値計算するにあたっては、模型実験時に得た散乱光を含む水平面日

表-1 太陽赤緯と均時差

月	太陽赤緯(°)	均時差(分)
1	-20.8	-8.6
2	-12.9	-13.4
3	-3.0	-8.3
4	9.6	-0.3
5	18.8	2.8
6	23.1	-0.4
7	21.2	-5.2
8	13.8	-3.6
9	3.0	4.3
10	-8.6	13.5
11	-18.3	14.4
12	-23.0	4.3

文献 5) による月平均値

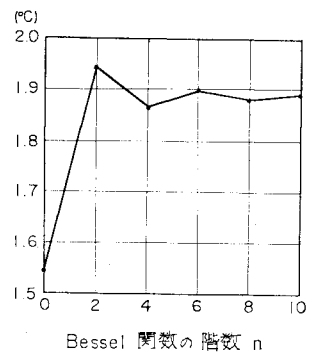


図-4 単位日射パルスによるケーブル表面温度(1時間後)

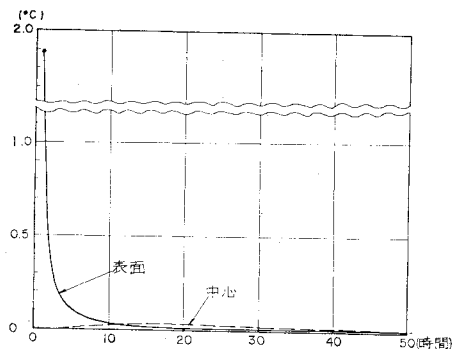


図-5 単位日射パルスによる温度履歴

射量の測定値から、ケーブル受光面の法線高度および方位角を用いて換算した受光面日射量を用いるとともに、大気透過率を $P=0.75$ 、大気外日射量を $I_0=1164 \text{ kcal/m}^2\text{h}$ として得られる東京(東経 $139^\circ45'$ 、北緯 $35^\circ39'$)での理論日射量をも用いた。ここで、太陽赤緯および真太陽時と平均太陽時の差である均時差には、文献 5) より各月ごとの平均値を算出し(表-1)、それを用いた。

6. 模型実験

ケーブルの熱移動に関する物性値を推定するとともに、気温および日射の変動によるケーブルの温度応答を

実験的に把握し、その追跡理論の妥当性の検証も兼ねて、大形模型による実験を行った。実験方法、得られたデータとその考察、および気温の変動によるケーブルの温度応答に関する理論値の妥当性などについてはすでに詳しく紹介した⁴⁾。ここでは、気温と日射の変動を同時に受けるケーブルの温度応答結果について簡単な考察を加えてみる。

日射の変動による応答を計算するためには式(30)における熱吸収率 h' を知る必要がある。日射については気温のような跳躍入力を実験的に与えることが困難なことにより、この値を次のように推定した。ケーブルへの輻射熱入力には太陽から輻射入熱とケーブル表面からの輻

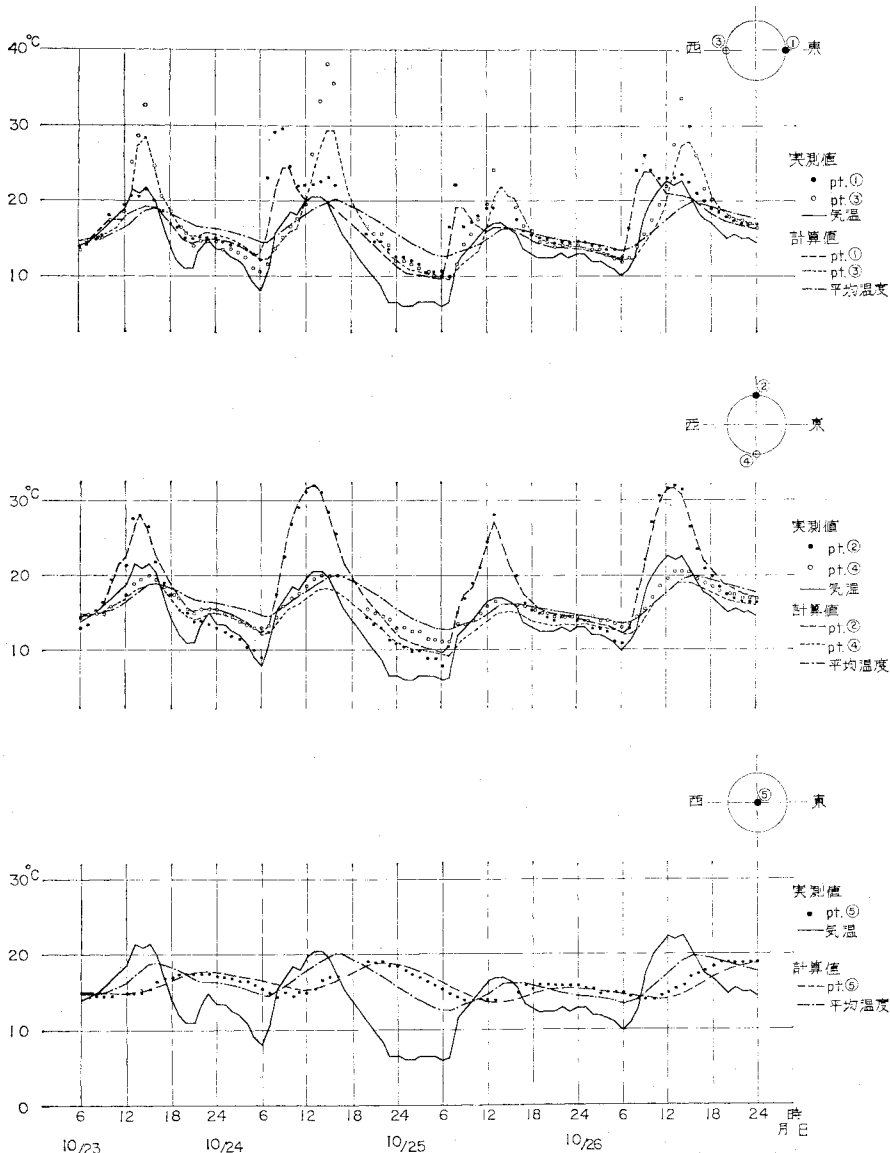


図-6 気温・日射応答実験結果(供試体 M42)

射放熱の差であると考えられることができるが、この実験ではケーブルの地面側表面は太陽からの輻射入熱よりも、むしろ地表との輻射線の交換による影響を大きく受けると推察される。そこで天空に向うケーブル上側表面の応答に注目し、日射量の不規則な変動が小さい快晴の日(10月24日)の応答結果から、気温のみの変動による応答計算値を差引いたものが輻射入熱による応答値であると考えて熱吸収率 h' を推定した。その結果は、ラッピング・塗装のない供試体 M 42 で $h' = 55 \text{ cmh}^\circ\text{C}/\text{kcal}$ 、ラッピング・塗装付の供試体 M 50 で $h' = 45 \text{ cmh}^\circ\text{C}/\text{kcal}$ となり、ラッピング・塗装の効果が現われている。

気温・日射の変動によるケーブル温度の測定結果と、

実測日射量を用いたそれらに対する計算値を合わせて示したものが 図-6,7 である。2種類の供試体 M 42 と M 50 の応答パターンには本質的な差が見られない。ケーブル上側表面の点②の結果を見れば、図示した期間(10月23日~10月26日)の昼間では実測値と計算値がよく一致しており、10月24日の結果から推定した熱吸収率 h' の値の妥当性を裏付けている。点②の夜間における測定値は計算値を若干下回っている。これはケーブル表面からの輻射放熱によるものと考えられる。ケーブルの地面側表面の点④では、気温応答実験の結果と異なり、昼夜を問わず実測値が計算値をやや上回っている。これは大地の夜間放射の影響とともに、昼間におい

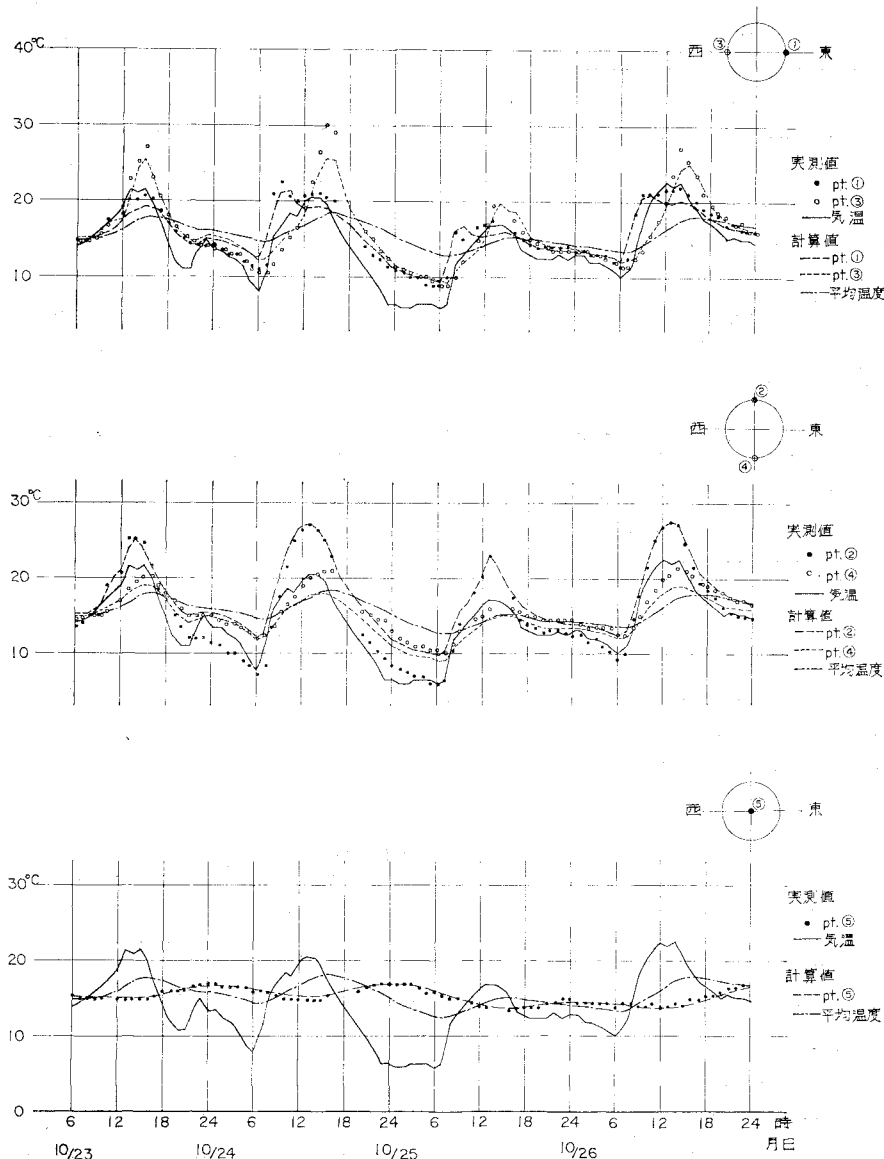


図-7 気温・日射応答実験結果(供試体 M 50)

ては太陽からの輻射線が大地に反射してケーブルの地面側表面に輻射熱を与えることの影響を受けているためと推察される。

点②~④に直交するケーブル表面上の点①, ③での測定結果には特異な現象が見受けられる。このような現象は日射計でつかまえられなかったエネルギーによるものであり, 文献4)で述べたように朝夕で輻射線の入射角が小さいこともあって, 地表で反射した輻射線がその原因になっていると推察されるが, これが実験場所の地形や建物といった二次的な外的条件に影響されているとも考えられるので, 場所を変えて次のような確認実験を行った。発泡スチロールをはり合わせて120mmの厚さとした板から直径600mmの円板をつくり, その円周上に厚さ3.2mmの矩形鋼片(60mm×60mm)を配置したものを供試体として, 円板の軸を南北に合わせるように地上1.5mの高さに設置した。快晴の日(昭和50年9月2日)を選んで, 鋼片の温度を熱電対(アルメル・クロメル)で測定したところ, 図-6,7の結果とまったく同じ傾向を認めることができた。

これらの結果に現われている特異性のうち, 輻射放熱による夜間のケーブル表面温度降下はともかくとして, 空中に張渡された実際の吊橋ケーブルでは, 地表面からの反射エネルギーに起因する現象は大きくないであろう。ただし, 熱の表面伝達を支配する要因の1つである風の影響は, 地上実験よりある程度大きく現われることが予想されるが, 全体としてこれまでに述べた温度応答の追跡方法は妥当な値を与えるものといえよう。

7. ケーブルの温度応答に伴う問題点

吊橋ケーブルの温度応答性能が一般の鋼構造部材に比べてきわめて低い水準にあることを示したが, これに関連して吊橋の設計上あるいは架設上で問題となりそうな二, 三の点をひろい出して見直してみたい。数値計算には, 直径600mmの平行線ケーブルを想定して, 模型実験で得られた諸定数($\alpha=10.62 \text{ cm}^2/\text{h}$, $h=0.148 \text{ 1/cm}$, $h'=45 \text{ cm h}^\circ\text{C/kcal}$)を用い, 1時間ごとの気温観測結果(1973年東京)および大気透過率を $P=0.75$ としたときの理論日射(東京)をもとにした。

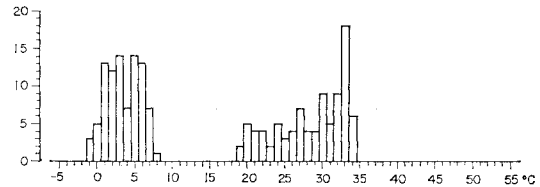
(1) 吊橋の設計温度

吊橋の設計温度荷重は基準温度に対する温度変化として規定され, 各部材の温度応力の算定は与えられた温度変化に対するケーブルの伸縮にその基礎をおいている。本州四国連絡橋上部構造設計指針(1967)⁵⁾では, この温度変化について「瀬戸内海各地の最低気温の最低値は -8.3°C , 過去4箇年(1959~1962年)における年平均

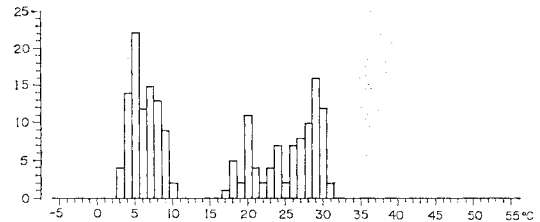
気温の平均値は約 $+15^\circ\text{C}$ になる。そこで, 気温と橋梁部材の温度との差を考え, 基準温度を $+20^\circ\text{C}$ とし最低値 -10°C に対し最高値 $+50^\circ\text{C}$ と $\pm 30 \text{ deg.}$ の温度変化の範囲を考えた」とし, 60°C の温度変動幅を与えている。

ところですでにみたように, ケーブルの伸縮を支配する断面内平均温度は, ケーブルの低い温度応答性能のため, 日射の影響を考慮に入れても気温の変動幅に比べて温度応答の振幅が小さい。そこで夏(6~8月), 冬(12~2月)の各3か月について, 気温および日射の変動によるケーブルの温度応答を計算してみた。結果は図-8に示すとおりであり, 気温の年変動幅 35°C ($-1\sim 34^\circ\text{C}$)に対して, ケーブルの表面温度は 45°C ($2\sim 47^\circ\text{C}$)の年変動をするが, ケーブル平均温度の年変動幅は 31°C ($4\sim 35^\circ\text{C}$)となって気温変動幅の90%弱である。

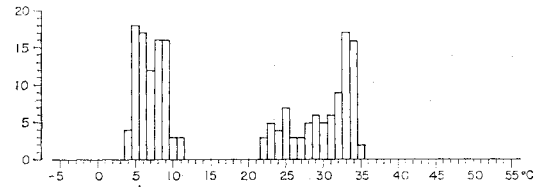
また過去のデータより日本各地の気温の年変動幅を調べたもの⁵⁾が表-2, 3である。気温の変動幅には地域による差がほとんどなく, 平均的にみておよそ 30°C であり, 記録的な変動幅をみても特殊な例を除いて 45°C 程



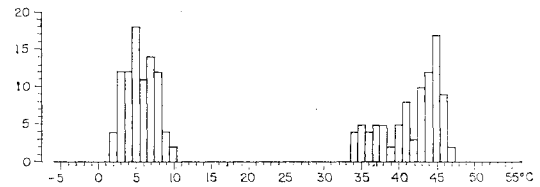
(a) 日最高気温および日最低気温



(b) 気温の変動によるケーブル平均温度(日最高値および日最低値)



(c) 気温日射の変動によるケーブル平均温度(日最高および日最低値)



(d) ケーブル表面温度(日最高値および日最低値)

図-8 気温およびケーブル温度の頻度分布

表-2 日最高気温・日最低気温の月平均値 (1941~1970年の平均)

地名	日最高気温	年平均気温	日最低気温	気温変動
雅内	22.2 (8月)	6.3	-8.2 (2月)	30.4
東京	31.0 (8月)	15.0	-0.4 (1月)	31.4
神戸	31.6 (8月)	15.5	1.2 (1月)	30.4
岡山	32.0 (8月)	14.5	-1.3 (1月)	33.3
広島	31.1 (8月)	15.5	0.2 (1月)	30.9
鹿児島	32.0 (8月)	17.0	2.0 (1月)	30.0

表-3 気温の最高および最低記録

地名	最高記録	最低記録	気温差
雅内	31.3 (1946.8.22)	-19.4 (1944. 1.30)	50.7
東京	38.4 (1953.8.21)	-9.2 (1876. 1.13)	47.6
神戸	37.6 (1914.8. 6)	-6.4 (1936. 1.18)	44.0
岡山	37.2 (1942.7.24)	-8.9 (1963. 1.24)	46.1
広島	36.8 (1962.7.27)	-8.6 (1917.12.28)	45.4
鹿児島	37.0 (1942.8. 1)	-6.7 (1923. 2.28)	43.7

度である。

2ヒンジ補剛吊橋の場合には、設計応力の中に占める温度応力の割合は一般に小さい。これを閘門橋⁷⁾についてみれば次のようになる。この場合にも温度変化を ±30°C としている。たとえば補剛トラスの弦材断面は、中央径間では主として風荷重+温度変化によって、また側径間では活荷重+温度変化によってそれぞれ決定されているが、いずれの場合でも温度応力は設計応力に対して約 6% である。このことは、温度変化を ±20°C まで低減させても弦材応力は 2% 程度の減少を示すにすぎないことを意味している。

しかしながら連続補剛吊橋の場合には、補剛トラスの断面を中間支点付近で集中的に配置する必要もあって、ケーブル形状の変化に対する中間支点上での補剛トラス応力の感受性を高める結果になっている。南備讃瀬戸大橋の試設計(3径間連続補剛吊橋 270 m + 1 100 m + 270 m)によれば、ケーブル直径 1 197 mm、補剛トラスの断面二次モーメントは支間部の 8.4 m⁴ に対して中間支点上で 24.8 m⁴ であり、中間支点上の部材断面は後死荷重+活荷重+温度変化(±30°C)で決定されている。たとえば弦材断面の設計軸力は後死荷重によるもの 2 000 t、活荷重によるもの 5 000 t、温度変化によるもの 1 000 t の合計 8 000 t であり、温度変化による影響は設計軸力の 12.5% に達している。したがってこの場合には、ケーブル平均温度の変動に関する上記の考察結果より、設計に使用する温度変化の範囲を ±20°C とすれば弦材の設計軸力を約 4% 減少させることになり、とかく大型化しがちな中間支点上部材の断面設計に有利に作用する。

これらの結果を総合してみれば、設計応力に占める温度応力の割合が小さい2ヒンジ補剛吊橋の場合ほとんどか

くとしても、その割合が大きくなる連続補剛吊橋の場合には設計温度変化の範囲に再考の余地が残されており、少なくとも本文で考察した直径 600 mm 以上のケーブルの場合にはその温度変化の範囲を ±20°C とすれば十分であろうと思われる。

(2) ケーブルの二次応力

ケーブルはその平均温度の変動に伴って伸縮し、それによるケーブルの形状変化はケーブル張力の変化をひきおこす。それと同時に、ケーブルを構成する各素線には、その素線温度とケーブル平均温度の差に応じて二次応力が発生する。このような断面内温度差による二次応力については、架設中のケーブルでは日照の方向が変化するようにしたがって大きなねじれが発生することにより緩和される傾向にあるが、吊橋完成後のケーブルではケーブルバンドの位置で素線間のスリップが拘束されるとともに、吊材張力によってねじれも拘束されると考えられるから、上述の温度差によるひずみそのまま二次応力に変換されるとみてよい。

ケーブルの平均温度の変化に伴う単径間吊橋の変位 $\eta(x)$ 、ケーブル水平反力の変動 H_t は、線形化撓度理論によれば次のように表わすことができる⁸⁾。

$$\eta(x) = -H_t \frac{8f}{H_d} \left[\frac{1}{2} \frac{x}{l} \left(1 - \frac{x}{l} \right) - \frac{1}{c^2 l^2} \left\{ 1 - \frac{\cos hc(l/2-x)}{\cos hc l/2} \right\} \right] \dots\dots (37)$$

$$H_t = - \frac{(l/8 f^2) \tau \Delta t L_T}{\frac{2}{3} - \frac{8}{c^2 l^2} \left(1 - \frac{\tan hc l/2}{cl/2} \right) + \frac{1}{8 \lambda}} H_d \dots\dots (38)$$

ここに、 l は支間、 f はサグ、 τ は線膨張係数、 Δt は温度変化、 H_d は死荷重によるケーブル水平反力であり、ケーブルおよび補剛桁の弾性係数を E_c および E とし、それぞれの断面積および断面二次モーメントを A_c および I としたとき

$$cl = l \sqrt{\frac{H_d}{EI}}, \quad \lambda = \frac{f^2}{H_d l} \frac{E_c A_c}{L E} \dots\dots (39)$$

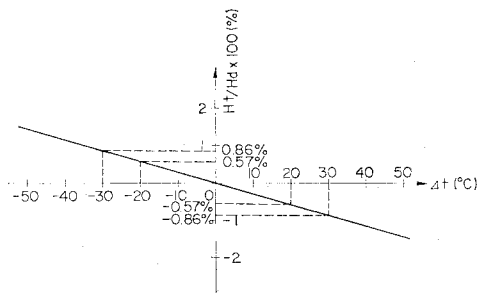
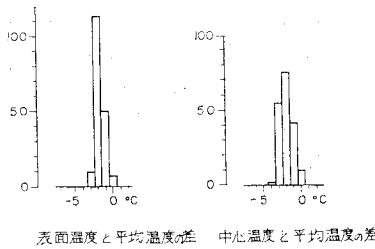


図-9 ケーブル平均温度の変動による水平反力の変化



図一10 ケーブル断面内温度差（日最低値）の頻度分布

である。また L_E および L_T は単径間吊橋 については次のようになる。

$$L_E \doteq l \left(1 + 8 \frac{f^2}{l^2} \right), L_T \doteq l \left(1 + \frac{16}{3} \frac{f^2}{l^2} \right) \dots (40)$$

これらの式に閉門橋の諸元を用いて計算したケーブル水平反力の変動を 図一9 に示す。温度変化の範囲を $\pm 30^\circ\text{C}$ とすれば、ケーブル水平反力の変化は死荷重反力に対して 1% 弱となることがわかる。

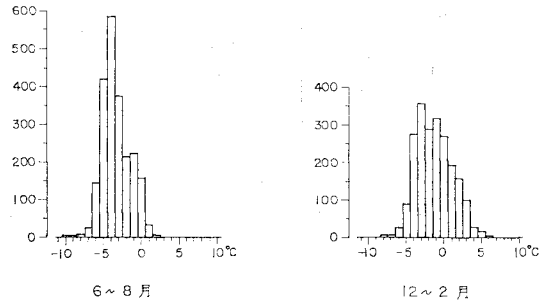
次に断面内の温度差によって発生する二次応力 σ_t は、注目する素線の温度とケーブル平均温度の差を $\Delta t'$ とすれば、素線の弾性係数 $E_c = 2.0 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2$ 、線膨張係数 $\gamma = 1.2 \times 10^{-5} \text{ 1/}^\circ\text{C}$ に対して次式で表わされる。

$$\sigma_t = -\gamma \Delta t' E_c = -24 \Delta t' \dots (41)$$

この温度差 $\Delta t'$ は、これまでに行った数値計算あるいは模型実験より明らかとなっており、ケーブル表面あるいはケーブル中心に配置された素線について大きくなる。そこで直径 600 mm のケーブルについての数値計算結果から、 $\Delta t'$ の日最低値、すなわち正の温度応力に変換される温度差、に関する頻度分布をとれば 図一10 のようになる。これにケーブル表面からの夜間放射の影響を考慮して $\Delta t' = -10^\circ\text{C}$ とすれば、断面内温度差による二次応力は 240 kg/cm^2 に達する。この値は、文献 6) により平行線ケーブル用ワイヤの 0.7% 保証耐力を 118 kg/mm^2 としたときの許容引張応力度 $\sigma_{ta} = 5780 \text{ kg/cm}^2$ に対して約 4% に相当するから、前述したケーブルの形状変化に伴う応力変動とも合わせて注意する必要がある。

(3) 形状確認

ケーブル形状は吊橋の形状を支配する代表的なパラメーターであり、ケーブルは温度変化によって微妙にその長さを変え、それがスケールアップされて大きな形状変化をもたらす。したがってケーブル形状を確認するにあたっては、そのときのケーブル温度を正しく把握することが必要となる。たとえば、吊橋完成形状を確認するときに観測される誤差の原因の所在については、常に議論の対象とされながらも必ずしも明解な結論が得られない



図一11 ケーブル平均温度と気温の差の頻度分布（毎時）

のは、ケーブルの温度応答特性に関する具体的な考察根拠が欠けていた点にその一因があるといえる。

図一11 はケーブル平均温度とそのときの気温の差についての頻度分布を示す。これは形状確認時のケーブル温度を気温に等しいとしたことによる温度推定誤差の頻度分布を意味する。この結果よりケーブルの温度推定誤差を $\pm 10^\circ\text{C}$ とし、閉門橋の諸元を例にとり、式 (37) により形状変化を計算すれば、支間中央で $\pm 183 \text{ mm}$ となってその影響はかなり大きいものであることがわかる。

8. 結 論

吊橋のケーブルを熱移動の立場からみたときに均質な物質であると考えて、気温および日射の不規則な変動による温度応答式を導き、平行線ケーブルを供試体とする模型実験結果を用いて、誘導した温度応答式の妥当性を検証した。また、ケーブルの温度応答に伴って発生する吊橋の設計あるいは架設上の問題点をいくつかひろい出して、それらに検討を加えた。その結果、得られた結論は以下のとおりである。

(1) ここで誘導した温度応答式は、模型実験による検証の結果、妥当な値を与えるものであることが確認された。模型実験では二、三の特異現象が観測されたが、実験方法に起因するものを除けば、夜間におけるケーブル表面からの輻射放熱が認められたので、ケーブルと大気との間に発生する表面伝達における風の影響とともに今後の研究課題となろう。

(2) 設計応力に占める温度応力の割合が小さい 2 ヒンジ補剛吊橋の場合とはともかくとしても、ケーブルの形状変化に対して部材応力の感受性が高い連続補剛吊橋の場合には、断面設計の経済性からみて考えるべき温度変化の範囲に再考の余地が残されている。少なくとも本文中で考察した直径 600 mm 以上のケーブルの場合には、温度変化の範囲を $\pm 20^\circ\text{C}$ とすれば十分であろうと思われる。

(3) ケーブルの温度応答性能が低いことにより、断面内の温度勾配に伴うケーブルの二次応力は無視できないオーダーになる。また同じ理由で気温とケーブル平均温度に差が現われ、それが架設中あるいは完成後に行われる各種の形状確認に大きな影響を与える。これらの現象はケーブルが太径化するとともに顕著になるので注意が必要である。

本研究は吊橋ケーブルの温度応答特性を解明し、それにとりもなる問題点のいくつかを考察を加えたものである。しかしながら、いまのところこれを評価する実験データが十分ではなく、本四連絡架橋プロジェクトをはじめとする今後の長大吊橋の建設に対して適切な指針を与えるためには、さらに多くの実験データ、とくに実橋を対象としたデータが必要である。

参 考 文 献

- 1) 長谷川脩一・原田康夫・鳥居邦夫・清田鍊次：吊橋ケーブルの温度推定について、横河橋梁技報 第4号，1974年11月。
- 2) 長谷川脩一・原田康夫・清田鍊次：吊橋ケーブルの温度推定について、土木学会第2回関東支部年次研究発表会，1975年1月。
- 3) 長谷川脩一・原田康夫・飯田 勝：吊橋の製作施工誤差による変位・応力，橋梁と基礎，1975年1月。
- 4) 長谷川脩一・原田康夫・清田鍊次・押尾祐三・遠藤秀雄：吊橋ケーブルの温度測定実験について，橋梁と基礎，1975年10月。
- 5) 東京天文台編纂：理科年表／昭和49年，丸善。
- 6) 土木学会編：本州四国連絡橋技術調査報告書，昭和42年7月。
- 7) 日本道路公団関門建設所編：関門高速道路関門橋設計図集。
- 3) 平井 敦：鋼橋Ⅲ，昭和42年，技報堂。

(1975.11.20・受付)