【ノート】

振動感覚を評価するためのアーチ橋の動的応答スペクトル

RESPONSE SPECTRA OF ARCH BRIDGES TO EVALUATE THE HUMAN RESPONSE

小　堀　為　雄*・梶　川　康　男**
By Tameo KOBORI and Yasuo KAJIKAWA

1.　まえがき

本文は，先に発表した"単一動荷重に対する道路橋の振動感覚[1)]"を補足するものである．

文献 1) においては，橋梁の振動モードが単一の正弦級数で表わされると考え，この場合に対して動的応答の二乗平均スペクトルを求める方法について述べた．しかし，ランガー桁橋の対称振動などのように振動モードが正弦級数の和として表わされる場合の二乗平均スペクトルの取扱い方については触れなかった．しかし，道路橋における歩行者の振動感覚を評価するためには，高次の振動も問題となるので，このような場合についても検討されねばならない．しかも，個々の橋梁形式に対して，それらを直接解析的に求めることは非常に繁雑となるので有効な方法とはいえない．そこで，類似した橋梁形式に対して動的応答の二乗平均スペクトルを検討しておくことは，今後，走行荷重による道路橋の使用限界状態を照査するうえで，きわめて重要であると考えられる．

2.　アーチ橋の対称振動に対する動的応答スペクトル

橋梁の振動モードは式 (1) のように正弦級数の和で仮定され，式 (2) の正規化条件を満たすものとして扱われる[2)]．

$$\varphi_n(x)=\sum_{m=1}^{\infty} a_{nm}\sin\frac{m\pi x}{L} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

$$\int_0^L \rho\varphi_n^2(x)dx=\frac{\rho L}{2}\sum_{m=1}^{\infty} a_{nm}^2=1 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

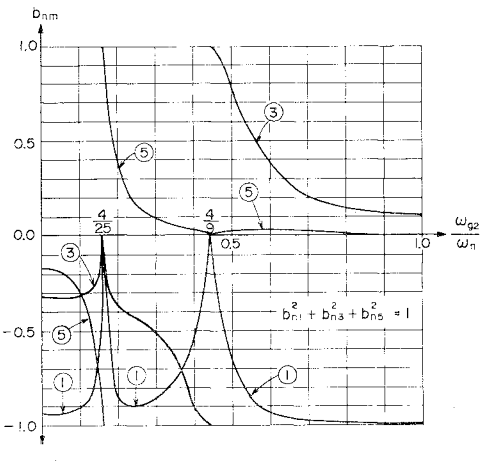
ここで，ρ は橋梁の単位長さ当りの質量であり，L は橋梁の支間長である．

文献 1) では，式 (1) で表わされる振動モードをもつ道路橋上を大型車（2自由度系）が単独に走行したときの動的応答（変位・速度・加速度）を不規則振動解析の手法によって求めた．また，単純桁橋や単純トラス橋の振動モードならびにアーチ系橋梁の逆対称振動モードでは，式 (1) の単一項 ($m=n$) で表わされ，係数 a_{nm} が固有振動数 ω_n と独立に確定することから，動的応答の二乗平均スペクトルを計算することができた[1)]．一方，アーチ系橋梁の対称モードでは式 (1) の級数として m の奇数項だけを評価すればよいが，各係数 a_{nm} ($m=1, 3, 5, \cdots$) は橋梁の固有振動数 ω_n と独立に確定しないために，取扱いが複雑になる．ところが，この場合でも吉村・平井の方法[2)]によれば，比較的容易に係数 a_{nm} と固有振動数 ω_n の関係が得られる．いま，対称1次と2次の振動モードが $m=1, 3, 5$ の3項で表わされるものと仮定すると，係数 a_{n1}, a_{n3}, a_{n5} の比は次式で表わされる[2)]．

$$a_{n1}:a_{n3}:a_{n5}=b_{n1}:b_{n3}:b_{n5}$$
$$=\frac{1}{\omega_{g1}^2-\omega_n^2}:\frac{1}{3(3^4\omega_{g1}^2-\omega_n^2)}:\frac{1}{5(5^4\omega_{g1}^2-\omega_n^2)} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (3)$$

ここに，ω_{g1} はアーチ系橋梁の曲げ作用のみを考慮して求められる1次振動数，ω_n は橋梁の n 次の固有振動数，b_{n1}, b_{n3}, b_{n5} は $b_{n1}^2+b_{n3}^2+b_{n5}^2=1$ となる係数である．

式 (3) における b_{nm} を用いて対称振動モードを表わ



図―1　モード係数 b_{nm} の変化
（○の数字は項数 m を示す）

* 正会員　工博　金沢大学教授　工学部建設工学科
** 正会員　　　　福井工業大学講師　建設工学科

すと次のようになる．

$$\varphi_n(x)=\sqrt{\frac{2}{\rho L}}\left(b_{n1}\sin\frac{\pi x}{L}+b_{n3}\sin\frac{3\pi x}{L}+b_{n5}\sin\frac{5\pi x}{L}\right)\cdots(4)$$

したがって，ω_{g1} と ω_n の比が決まれば b_{nm} を確定することができる．**図—1** に ω_{g2}/ω_n によって b_{nm} がどのように変化するかを示した．なお，**図—1** において ω_{g2} $(=4\omega_{g1})$ を用いたのは，後述する **表—1** との関連からである．

式(4)で表わされる振動モードを用いることによって，文献 1) において求めたと同様に，“動的応答の二乗平均スペクトル”を求めることが可能となる．すなわち，さまざまな ω_{g1} と ω_n との組合せに対し，b_{nm} は式(3)で確定され，式 (4) からわかるように a_{nm} は b_{nm} に $\sqrt{2/\rho L}$ を乗じて求めることができることから，文献 1) における式(24) の a_{nm} に代入すれば，結局 $\sqrt{2/\rho L}$ はすべての積分に関係なく定数として評価される．したが

表—1　規準化された応答速度の二乗平均スペクトル（対称振動）［$\times10^3$］（—— は 0.1×10^3 未満を示す）

振動評価時間 4 秒（対角線の左上）／振動評価時間 6 秒（対角線の右下）

ω_n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
25	3.5	4.4	8.2	38	4.7	2.6	2.6	3.2	4.1	5.5	6.1	3.9	1.6	0.6	0.2	0.1	—	—	—	—	0.1	0.1	0.1	0.1	
24	6.7	7.8	13	38	9.2	8.4	10	13	19	26	26	15	6.9	3.5	2.0	1.3	1.0	0.8	0.7	0.6	0.6	0.6	0.6		—
23	13	15	22	32	16	16	18	23	33	45	39	25	17	14	12	11	10	10	9.4	9.2	9.1	9.0		0.2	—
22	51	52	57	45	49	51	53	56	58	51	40	37	37	38	39	39	39	40	40	40	41		2.6	0.1	—
21	94	95	89	76	87	90	91	87	70	50	53	61	66	69	72	73	75	75	76	77		31	2.6	0.1	—
20	106	107	88	92	100	103	103	98	81	74	79	83	86	88	90	91	91	92	92		64	30	2.6	0.1	—
19	115	116	77	107	114	119	123	123	103	93	93	94	96	97	98	98	99	99		74	64	30	2.6	0.1	—
18	123	124	103	120	125	130	135	127	105	100	101	102	104	105	105	106	106		81	73	63	30	2.7	0.1	—
17	131	135	122	128	133	139	142	123	109	108	110	111	112	113	113	114		89	80	72	62	29	2.8	—	—
16	139	144	131	137	142	148	144	121	116	117	119	120	121	121	122		97	88	79	71	60	28	3.1	0.1	—
15	147	152	141	146	151	157	140	126	126	127	129	130	130	131		107	97	87	78	70	59	27	3.6	0.1	—
14	154	157	151	156	161	161	139	135	137	138	139	140	140		118	106	95	86	76	68	56	26	4.8	0.4	0.1
13	160	124	160	166	171	159	146	147	148	149	150	150		130	117	105	94	84	74	66	53	26	7.4	1.1	0.3
12	168	100	163	165	158	150	156	159	160	161	162		144	129	116	103	92	82	72	63	48	26	14	3.0	0.9
11	173	141	166	152	108	143	160	166	168	169		159	143	128	114	101	90	79	70	62	43	31	27	6.3	1.4
10	155	141	150	131	101	126	135	139	141		176	158	141	126	112	99	87	78	72	70	50	48	36	7.1	1.3
9	59	63	66	102	78	67	63	62		166	175	156	139	123	109	96	88	88	97	105	81	60	28	5.4	0.9
8	26	22	53	70	20	11	8.7		49	163	173	154	136	120	109	106	116	131	135	125	94	57	20	3.9	0.6
7	49	17	44	5.2	0.5	0.2		0.8	51	157	169	150	135	129	139	152	153	144	133	117	93	51	15	3.0	0.4
6	76	2.3	1.6	—	—		0.1	1.4	56	144	160	157	166	177	171	159	145	133	121	108	89	47	12	2.5	0.2
5	0.6	1.7	—	—		—	—	4.8	73	111	164	202	191	175	160	146	134	127	113	101	83	43	11	3.1	0.2
4	0.2	0.4	—		—	—	0.2	37	115	159	190	195	178	162	149	136	124	113	103	88	69	38	26	28	9.3
3	0.4	—		—	—	0.4	3.6	46	61	182	187	184	167	152	137	123	113	115	122	101	96	59	21	11	3.3
2	0.1		—	0.1	0.5	0.6	1.3	22	54	168	152	148	189	180	166	153	141	131	120	108	95	51	13	5.6	1.9
1		0.1	0.1	0.1	—	3.3	46	28	51	191	194	184	175	163	152	142	133	124	115	105	92	49	11	4.4	1.6

振動評価時間 8 秒（対角線の右上）／振動評価時間 10 秒（対角線の左下）

ω_n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
1		—	0.1	—	—	1.1	7.7	26	44	204	201	190	175	161	149	137	127	118	110	100	87	45	9.6	2.8	0.6
2	—		—	0.1	0.3	0.3	0.5	10	44	175	158	174	202	189	170	154	140	129	119	106	91	48	11	3.5	0.8
3	—	—		—	—	0.2	1.7	17	56	195	200	181	161	142	125	108	97	106	133	122	100	59	20	6.6	1.2
4	—	—	—		—	—	0.1	9.6	119	174	219	199	178	159	142	127	114	101	90	78	58	30	20	12	2.7
5	—	0.2	—	—		—	—	0.6	60	112	195	214	199	178	158	142	127	114	103	92	75	37	7.1	0.4	—
6	0.6	0.2	0.1	—	—		—	0.1	40	144	148	141	162	181	176	160	143	128	115	103	83	42	8.2	0.5	0.1
7	3.3	0.3	1.0	—	—	—		0.2	35	159	152	129	112	110	130	152	155	145	131	116	92	47	10	0.9	0.2
8	24	2.0	4.5	2.5	0.1	—	0.1		33	165	157	134	114	96	86	87	105	127	135	128	99	54	14	1.4	0.3
9	40	37	52	116	46	26	22	21		169	160	138	118	100	85	73	66	69	85	104	91	59	20	2.0	0.5
10	206	171	196	186	109	134	148	155	159		162	141	121	104	89	75	64	55	51	55	51	45	24	2.7	0.6
11	202	161	198	226	196	125	129	135	140	142		142	124	107	92	79	67	57	48	42	33	23	16	2.3	0.7
12	188	168	173	198	218	122	105	111	116	120	122		125	109	95	82	70	60	51	43	33	16	6.9	1.1	0.4
13	171	209	150	172	200	153	89	90	96	100	103	105		111	97	84	73	63	54	45	37	16	2.9	0.4	0.1
14	155	194	129	151	175	181	92	74	78	83	87	89	91		98	86	75	65	56	48	40	17	1.5	0.1	—
15	142	171	110	132	153	175	120	65	63	68	72	75	77	79		87	76	67	58	50	42	18	0.9	—	—
16	131	152	92	116	134	157	149	70	52	55	59	63	65	67	69		77	68	60	52	44	19	0.7	—	—
17	120	137	82	102	118	138	153	94	48	45	48	52	55	57	59	60		69	61	53	46	20	0.7	—	—
18	111	125	96	88	104	121	140	122	55	38	39	43	46	48	50	52	53		62	54	47	21	0.7	—	—
19	103	114	134	76	92	106	124	131	75	36	32	34	38	40	42	44	45	46		55	48	21	0.7	—	—
20	94	103	136	65	81	94	109	124	99	43	28	28	31	33	36	37	39	40	41		49	22	0.8	0.1	—
21	81	86	103	48	67	77	88	101	97	51	24	22	24	27	29	31	33	34	35	36		22	0.8	0.1	—
22	41	45	58	23	31	37	43	50	55	41	18	10	9.9	11	12	13	14	15	15	16	16		0.9	0.1	—
23	7.6	9.3	17	15	3.8	4.7	6.3	8.5	12	14	8.9	3.4	1.2	0.5	0.2	0.2	0.2	0.3	0.3	0.4	0.4	0.4		0.1	—
24	1.5	1.8	3.2	4.3	—	0.3	0.5	0.8	1.1	1.5	1.2	0.5	0.2	—	—	—	—	—	—	—	—	0.1	0.1		—
25	0.4	0.4	0.7	1.4	—	0.1	0.1	0.2	0.3	0.4	0.4	0.2	0.1	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	

って，単一項の場合と同様，“動的応答の二乗平均スペクトル”を $2/\rho L$ で規準化して示すことができ，結局 ω_{g1} と ω_n によって式 (3) で確定される b_{nm} を用いて計算すれば，一般座標における応答の二乗平均値を求めることができる．

以上より，文献 1) の **図—6** と同様な“規準化された二乗平均スペクトル”を求めたものを **表—1** に示した．ここで，2 自由度にモデル化された大型車が橋面に与える定常外力に関する諸量は文献 1) と全く同じである．すなわち，次の 2 つの有帯域スペクトルを考えた．

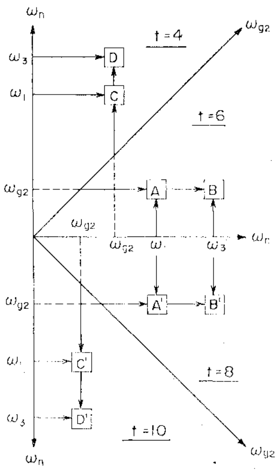
$\omega=3\pi\sim7\pi$ rad/sec において

$$S_f(\omega)=800\ 000\ \mathrm{kg^2/rad/sec}$$

$\omega=20\pi\sim40\pi$ rad/sec において

$$S_f(\omega)=88\ 000\ \mathrm{kg^2/rad/sec}$$

また，1 台の大型車が走行したときの道路橋における歩行者の振動感覚を求めることが，主目的であることから応答量として応答速度の二乗平均に関する値を示した[3]．振動感覚の評価時間を強制振動の継続時間に等しくとり，4, 6, 8 および 10 秒とし，橋梁の減衰定数 h_n として 0.02 を考えた．なお，アーチ系の橋梁では対称 1 次振動数が逆対称 1 次振動数 ω_{g2} よりも一般に大きいために，**表—1** では ω_{g1} をパラメーターとせず，ω_{g2} ($=4\omega_{g1}$) をパラメーターとして作表した．



図—2　応答スペクトル表の構成

表—1 の構成図を **図—2** に示した．まず，直角座標軸に橋梁の対称モードの固有振動数 ω_n ($n=1, 3$) をとり，斜座標軸に橋梁の曲げ作用のみによる振動数（一般に，逆対称 1 次振動数）ω_{g2} をとった．そして，ω_n 軸と ω_{g2} 軸によって分けられる 4 つの部分に，振動評価時間 t が 4, 6, 8, 10 秒の場合に対する規準化された応答速度の二乗平均スペクトル値 (R_V) を示した．**表—1** の用い方を **図—2** で示せば，たとえば $t=6$ (8) 秒の場合，横軸に ω_1 や ω_3 をとり，上(下) 向き斜軸に ω_{g2} をとれば，その交点 $A(A')$, $B(B')$ が対称 1 次 ($n=1$) および対称 2 次 ($n=3$) に対する応答スペクトル値となる．また，$t=4$ (10) 秒の場合であれば，上(下) 向き縦軸に ω_1 や ω_3 をとり，斜軸にそれぞれ ω_{g2} をとれば，その交点 $C(C')$, $D(D')$ が対称 1 次，2 次に対する応答スペクトル値となる．これらの値は質量で規準化されているので，これらの値 R_V に $2/\rho L$ を乗じたものが一般座標における各振動次数に対する応答速度の二乗平均値となる．したがって，着目点（支点より距離 x）の振動感覚評価に必要な応答速度の二乗平均値 $E[\dot{y}^2(L/V,x)]$ は次式にて求めることができる．

$$E[\dot{y}^2(L/V,x)]=\sum_n\left\{\frac{2}{\rho L}R_V\varphi_n^2(x)\right\}$$
$$\fallingdotseq\left(\frac{2}{\rho L}\right)^2\sum_n\left\{R_V\left(\sum_{m=1,3,5}b_{nm}\sin\frac{m\pi x}{L}\right)^2\right\}\quad\cdots\cdots(5)$$

ここに，b_{nm} は ω_n と ω_{g2} の値によって式 (3) または **図—1** より求められる係数である．

以上のようにして，**表—1** と式 (5) によって対称振動の固有振動モードが式 (4) で与えられる場合の応答速度の二乗平均値を求めることができる．そして，逆対称振動に対して文献 1) で示した単一項振動モードに関する二乗平均値を求め，これらの和の平方根をとれば振動刺激が与えられ，振動による心理的影響の評価尺度[3] への変換が可能である．

文献 1) および本文では，ランガー桁橋を一応対象に考えてきたが，振動モードを正弦級数で展開しているので，他のアーチ系橋梁（ほかのランガー，ローゼ，アーチ，吊橋など）に対する振動評価にもそのまま用いることができる．これらの橋梁形式に対する固有振動数や固有振動モードの解析法については文献 4) に詳説されているので，ここでは省略する．また，斜吊材を有するトラスドランガー桁橋やニールセン型ローゼ桁橋における振動モードは，一般に単一項の級数で近似されるために，**表—1** を用いることなく，文献 1) の応答スペクトル図を用いることによって応答を評価できると思われる．ただし，固有振動数 ω_n については文献 5), 6) などの方法によって求めねばならない．

文献 1) と本文において求めた応答スペクトルに関して次のような特徴を挙げることができる．

1) ω_n, ω_{g2}, h_n, t などの条件が同じであれば振動刺激は橋梁重量に反比例する．

2) 路面粗さのパラメーターや走行速度が，ここで用いた条件と異なる場合にも応答スペクトルを多少補正することによって用いることができる．

3) 外力スペクトルの第一有帯域 ($3\pi\sim7\pi$ rad/sec)

において固有振動数を大きくすることは，一般に振動刺激を小さくする．これは，文献 1) においてランガー桁橋のライズを大きくしても振動刺激があまり変化しないことと矛盾するように見えるが，現行の設計法ではライズを大きくすれば，その分だけ断面が小さくなり固有振動数としてはあまり変化しないためと考えられる．

4) アーチ橋における曲げ剛性は対称振動による応答にあまり影響しない．これは，文献 1) において補剛桁の桁高を大きくしても振動刺激への影響がわずかであったことと一致する．特に，$\omega_{g2}>0.5\omega_n$ の範囲ではほとんど影響を受けない．

5) 文献 1) および本文で示した応答スペクトルは応答速度に関するものであるが，応答変位・応答加速度のスペクトルについては，ω_n が $3\pi\sim7\pi$ rad/sec の範囲にあれば次式によって近似される．

$$R_D=R_V/\omega_n^2 \quad \cdots\cdots(6)$$

$$R_A=\omega_n^2R_V \quad \cdots\cdots(7)$$

ここに，R_D ならびに R_A は変位ならびに加速度の規準化された応答スペクトルである．

3. あとがき

文献 1) と本文においては，道路橋の動的安定性問題のうち，歩行者に及ぼす心理的影響を考慮するための理論的考察を行った．まず，最も基本となる１台の大型車が走行したときを考え，動的応答値の推定に有効な“応答スペクトル”を提案することができた．特に，本文では振動モードが奇数項の正弦級数の和で表わされる場合に対して“応答スペクトル”を提案した．文献 1) の応答スペクトル図とあわせて考えれば，アーチ系橋梁の振動が歩行者に与える影響を評価することができる．

この種の応答スペクトルによれば，従来かなりの距離があった固有値問題と実際の橋梁設計問題とを，ある程度接近させることができると思われる．現在のところ，いろいろな仮定を設けて解析していることもあり，粗い推定しかできないが，この種のアプローチは重要なことと思われる．今後，外力に対して設けた仮定の検定を行うとともに，実交通流に近い自動車列を考える場合や連続桁のように複雑な振動モードを有する場合の応答スペクトルなどを解析する必要がある．また，不快な振動という限界状態の発生確率を同じにするには，各橋梁をいかに設計すべきかをも検討せねばならない．

参 考 文 献

1) 小堀・梶川：単一動荷重に対する道路橋の振動感覚，土木学会論文報告集第 248 号，1976 年 4 月
2) 吉村・平井：ランガー桁の動的解析，土木学会論文集第 101 号，1964 年
3) 小堀・梶川：橋梁振動の人間工学的評価法，土木学会論文報告集第 230 号，1974 年
4) 吉村・平井：補剛アーチおよびつり橋の動的共通解析，土木学会論文集第 115 号，1965 年
5) 赤尾：トラスドランガー桁の振動，土木学会第19回年次学術講演会講演概要集，I－33，1964 年
6) 吉村・平井：はりあるいはラーメンとを組合わせた動的および静的解析法について，土木学会論文集第 116 号，1965 年

(1976．2．12・受付)