

鉄筋コンクリート長方形はり断面の  
最適許容応力度設計OPTIMUM ELASTIC DESIGN OF RECTANGULAR REINFORCED  
CONCRETE BEAM SECTIONS長 尚\*  
By Takashi CHOU

## 1. ま え が き

現在曲げを受ける鉄筋コンクリート断面の常用設計法は、いわゆる許容応力度設計法である。その場合、コンクリートおよび鉄筋の最大応力度が、それぞれの許容応力度になるように、つまりつり合い断面となるように有効高さ ( $d_{\min}$ : 最小有効高さ)、鉄筋量 ( $p_0$ : つり合い鉄筋比) などを決めるとすると、これはいわゆる fully stressed design ではあるが、最も経済的な設計であるかどうかは疑問である。従来この問題に関して、鉄筋コンクリート工学の参考書<sup>(1),(2)</sup>などでは、「コンクリートと鉄筋の価格、工事費などの条件から検討を要する問題である。一般には有効高さを最小有効高さより幾分大きく目に選ぶことが多い」とか、「幅、有効高さを色々変化させて、それらの中から経済的な断面を選択するのが最良の設計といえよう」といった程度の記述にとどまり、具体的な断面の決定法については触れられていない。

本論文では、曲げを受ける鉄筋コンクリート長方形断面の有効高さおよび鉄筋量などの決定の問題を、最適設計<sup>(3),(4)</sup>の問題として定式化し、これをモンテカルロ法により解くことにより、実用的な最適設計図表が得られたので報告する。

なおここでいう経済性は、断面内に占めるコンクリートと主鉄筋の面積比率と両者の材料費（打設、運搬、加工、組立などの費用を含む）の比を用いて評価している。したがってここで示した結果を利用して設計された構造物が、全体として最も経済的であるとは必ずしもいえないことをあらかじめ断っておく。なぜなら、有効高さおよび鉄筋量が構造物全体で一定ではないこと、主鉄筋以外の鉄筋があること、構造物全体の経済性と構成部材の経済性は必ずしも一致しないこと、また実際に選べる寸法および鉄筋量は不連続な数値となる場合が多い

ことなど、実際の設計にあたっては配慮されなければならない点があるからである。

本来最適設計の究極の目的は、このような局所的な最適化にあるのではなく、構造物全体としての最適化にあるのである。しかし構造物全体としての最適設計を行うには、計算容量、計算時間、最適化計算の手法などに難点が残されている<sup>(5)</sup>。このような現状から、全体の最適設計のための一部資料として (Suboptimization)、あるいは従来のもよりも合理的で実用的な設計資料として、部分的な最適化の結果が利用されている<sup>(6)-(8)</sup>。本文も同じような趣旨から、標題の実用的な最適許容応力度設計を提示し、若干の考察を行うものである。

## 2. 定式化および最適化計算

## (1) 概要および設計変数

ここでは、曲げを受ける鉄筋コンクリート長方形断面の最適設計を次のように定義する。与えられた曲げモーメント  $M$  の作用下で、コンクリートと鉄筋の最大応力度が、あらかじめ与えられたそれぞれの許容応力度を越えない範囲内で、その断面を構成している両材料の材料費の和が最も安くなるように、有効高さ  $d$  および鉄筋量  $A_s$  (引張鉄筋量)、 $A_s'$  (圧縮鉄筋量) などを定めることであるとする。

一般に鉄筋の材料費に比較してコンクリートのそれは安いから、なるべく鉄筋量を少なくした方が経済的である。したがってここでいう最適設計は単鉄筋となるのが普通であると予想されるが、比較的鉄筋の材料費が安く、かつコンクリートの許容応力度が低い場合には、複鉄筋とした方が経済的となることも考えられるので、本文では一般的に図-1 で示すような複鉄筋を対象とする。なお単鉄筋は複鉄筋の特殊な場合 ( $A_s'=0$  もしくは  $p'=0$ ) である。

\* 正会員 工博 信州大学教授 工学部土木工学科

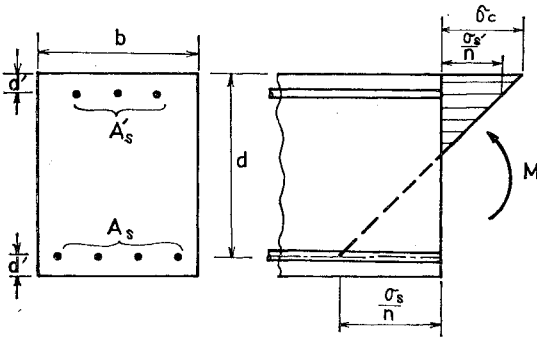


図-1 複鉄筋長方形断面

この設計問題においては、あらかじめ与えられるものは、曲げモーメント  $M$ 、幅  $b$ 、 $d'$ 、コンクリートの許容曲げ圧縮応力度  $\sigma_{ca}$ 、鉄筋の許容応力度  $\sigma_{sa}$  であり、求めるものは有効高さ  $d$ 、鉄筋量  $A_s, A_s'$  である。しかし  $d, A_s, A_s'$  をそのまま、この最適設計問題の設計変数としないで、これらの代わりにそれぞれ次に示すような、 $C, p, \alpha$  を設計変数とすることとする。

$$C = \frac{d}{\sqrt{\frac{M}{b}}}, p = \frac{A_s}{bd}, \alpha = \frac{A_s'}{A_s} \dots\dots\dots(1)$$

このようにすれば、後述の制約条件および目的関数が都合良く、 $M$  および  $b$  に無関係となり、最適解がこれら  $M, b$  の値に無関係な係数として求められる。しかも通常用いられている最小有効高さ  $d_{min}$  を求めるときの係数  $C_1$  およびつり合い鉄筋比  $p_0$  と最適解の比較が容易にできる便宜がある。また  $p'$  の代わりに  $\alpha$  を用いるのは、後述するように圧縮鉄筋量  $A_s'$  に対して、引張鉄筋量  $A_s$  に関連させて上下限値を設けるが、そのための便宜によるものである。

一般に幅  $b$  は上記のように、 $d, A_s, A_s'$  を決める前に別な条件から決まるものであるが、場合によっては  $b$  もこれらの設計変数との関連で決めるべき設計変数となることも考えられる。そのような場合の扱い方については 3.(2) で後述する。

$d'$  については、厳密には断面寸法および鉄筋量の関連で決まる設計変数とした方が合理的な場合が多いであろう。しかし通常行われているようにここでも  $d'$  の代わりに  $d$  に対する寸法比、すなわち  $d'/d$  を定数として扱うことにする。このようにすれば、実際に考えられる  $d'/d$  の数値の範囲では、最適設計の結果に大きな影響がないことが予想され、計算種別は少なくともすむ。しかも後述するように、制約条件および目的関数の形が簡単になるばかりでなく、これらが  $M$  および  $b$  に無関係に定式化される利点が生れる。

以下述べる、この最適設計問題の計算手順は次のようになる。

a) あらかじめ与えられた許容応力度  $\sigma_{ca}, \sigma_{sa}$  および寸法比  $d'/d$  を用いて、コンクリートおよび鉄筋の最大応力度がそれぞれの許容応力度以下になるという制約条件を作る。

b) コンクリートと鉄筋の材料費の比を用いて、その断面から成る単位長さ当りの部材の費用に相当する目的関数を作る。

c) a) の制約条件の下で b) の目的関数が最小となるように、設計変数  $C, p, \alpha$  を、最適化計算の手法を適用して決める。

(2) 制約条件

曲げを受ける複鉄筋長方形断面(図-1 参照)の、コンクリートの最大応力度  $\sigma_c$ 、鉄筋の引張応力度  $\sigma_s$  および圧縮応力度  $\sigma_s'$  は周知のように次式で表わされる。

$$\sigma_c = \frac{2M}{\left\{k\left(1-\frac{k}{3}\right)+2np'(k-f)(1-f)\frac{1}{k}\right\}bd^2} \dots\dots\dots(2)$$

$$\sigma_s = n\sigma_c \frac{1-k}{k} \dots\dots\dots(3)$$

$$\sigma_s' = n\sigma_c \frac{k-f}{k} \text{ (ただし } p'=0 \text{ のときは } 0) \dots\dots\dots(4)$$

ここに、

$$k = -n(p+p') + \sqrt{n^2(p+p')^2 + 2n(p+p'f)} \dots\dots\dots(5)$$

$$f = \frac{d'}{d} \dots\dots\dots(6)$$

$$n = 15 \dots\dots\dots(7)$$

である。

コンクリートの最大応力度および鉄筋の応力度がそれぞれの許容応力度以下となるための条件式は、式(1)で示した設計変数を用いて表わせれば、式(2),(3)より次のようになる。

$$\left\{k\left(1-\frac{k}{3}\right)+2nap(k-f)(1-f)\frac{1}{k}\right\}C^2 \geq \frac{2}{\sigma_{ca}} \dots\dots\dots(8)$$

$$\frac{k}{(1-k)}\left\{k\left(1-\frac{k}{3}\right)+2nap(k-f)(1-f)\frac{1}{k}\right\}C^2 \geq \frac{2n}{\sigma_{sa}} \dots\dots\dots(9)$$

圧縮鉄筋量  $A_s'$  は余り少なくとも、逆に多くて引張鉄筋量  $A_s$  より多くても実際的な意味がないと考えられるので、引張鉄筋量と関連させて、 $\alpha$  を次の範囲に限ることとする。

$$0.01 \leq \alpha \leq 1.0 \dots\dots\dots(10)$$

以上式 (8)~(10) がこの問題の制約条件である。

なお制約条件の中に  $\sigma_s' \leq \sigma_{sa}$  に相当する式を含めなかったのは、通常  $\sigma_{sa} > n\sigma_{ca}$  で、したがって式 (4) より式 (8) が満たされれば、 $\sigma_s' \leq \sigma_{sa}$  は成立するからである。

前節で述べたように、設計変数として  $C, p, \alpha$  を選び、さらに  $d'/d$  を定数  $f$  としたことにより、式 (8)~(10) の制約条件が、 $M$  および  $b$  に無関係な式となり、しかもこれらの式の形が非常に簡単になっている。

(3) 目的関数

前述したようにこの問題の経済性の評価は、断面を構成しているコンクリートと主鉄筋の各材料費の和の大小とするものとする。いま有効高さと鉄筋量が長さ方向に一定な、単位長さ当りの部材の費用を COST とすれば、これは次式で表わされる。

$$COST = V_c C_c + V_s C_s \dots\dots\dots (11)$$

ここに、 $V_c, V_s$  はコンクリートおよび鉄筋の単位長さ当りの体積、 $C_c, C_s$  はそれぞれの単位体積当りの材料費（コンクリートの場合は生コン費と打込み費などを加えた単価、鉄筋の場合は素材費、運搬費、加工費、組立費などを加えた単価）である。

図一と式 (1), (6) より

$$V_c = 1 \times (d + d') b = (1 + f) b d$$

$$= (1 + f) C \sqrt{M b} \dots\dots\dots (12)$$

$$V_s = 1 \times (p + p') b d = (1 + \alpha) p b d$$

$$= (1 + \alpha) p C \sqrt{M b} \dots\dots\dots (13)$$

であり、

$$q = \frac{C_s}{C_c} \dots\dots\dots (14)$$

とすれば、式 (11) は次のようになる。

$$COST = \{1 + f + (1 + \alpha) p q\} C \sqrt{M b} C_c \dots (15)$$

上式において、 $\sqrt{M b} C_c$  は定数として与えられるものであるから、COST を最小にするためには次式  $z$  を最小にすればよいことになる。

$$z = \{1 + f + (1 + \alpha) p q\} C \rightarrow \min \dots\dots\dots (16)$$

この式 (16) がこの問題の目的関数である。この目的関数も前節で述べたように、設計変数を  $C, p, \alpha$  とし、 $d'/d$  を定数とすることにより、 $M$  および  $b$  に無関係な式となっている。

(4) 最適化計算

式 (8), (9), (16) に示される制約条件、目的関数は、設計変数  $C, p, \alpha$  に関して非線形である。したがってこの最適設計問題は非線形計画問題である。この種の問題を解く最適化計算の手法としては種々なものが現在提案されており、中でも反復線形計画法 (SLP)、無制

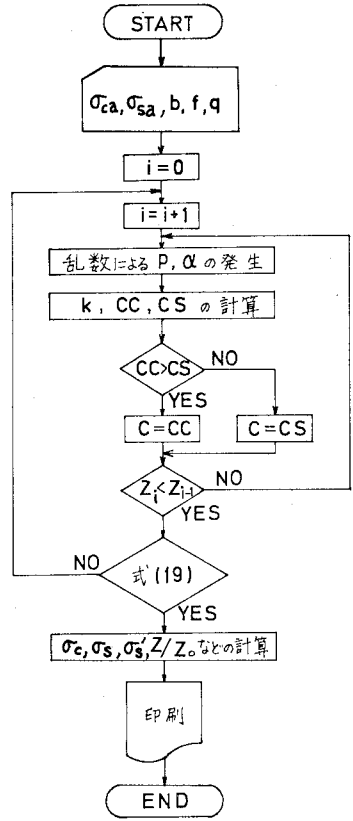
約最小化反復法 (SUMT)、ダビドン・フレッチャー・パウエル法 (DFP)、モンテカルロ法などが比較的よく用いられている。これらの手法はそれぞれ長所短所を有しており、定式化された最適化問題によって使い分けられている。ここでは後述するような理由から、モンテカルロ法を用いる。

図二に主な計算手順のフローチャートを示す。まずデータとして、 $\sigma_{ca}, \sigma_{sa}, q, f$  を与える。次いで設計変数を、乱数を利用して発生させるのであるが、3つの設計変数のうち、 $p$  と  $\alpha$  の2つだけについて発生させる。  $C$  については、その  $p$  と  $\alpha$  を用いて式 (8), (9) から逆算される  $C$ , すなわち次式で求められる  $CC$  と  $CS$  のうち大きい方を採用する。

$$CC = \sqrt{\frac{2}{\left\{ k \left( 1 - \frac{k}{3} \right) + 2 n \alpha p (k - f) (1 - f) \frac{1}{k} \right\} \sigma_{ca}}} \dots\dots\dots (17)$$

$$CS = \sqrt{\frac{n(1-k)\sigma_{ca}}{k\sigma_{sa}}} CC \dots\dots\dots (18)$$

このようにするのは、この問題の最適解は、式 (8), (9) で示される制約条件のうちの少なくとも1つの境界上に存在する（両方の境界すなわち端点にあることもあり、その場合は  $CC = CS = C$ ,  $p = p_0$  となる）こと、そしてある  $p, \alpha$  の値に対応する境界上の点の  $C$  が簡単な形で表現される式 (17), (18) から求めることができるからである。こうすることにより、乱数の発生空間が3次元から2次元に下がり、最適化計算の収束速度の向上が計れる。また最適解は一般に端点もしくはその近傍に存在する場合が多いことが予想されるので、最初の  $p$  は  $p_0$  を中心にある範囲内で発生させ、その後は目的関数の改善のあった1つ前の  $p$  を中心に、次第にせばめ



図二 最適化計算フローチャート

ていくある範囲内で発生させ、収束のスピード化を計るものとする。収束の判定は連続した5回の改善されていく目的関数値の変化率が $\epsilon(1/1000)$ 以下になることによるものとする。

$$\frac{z_{i-5}-z_i}{z_i} < \epsilon \dots\dots\dots(19)$$

なお、式(8)~(10)で作られる許容領域は凸領域であり、式(16)の目的関数は2次式であるから、この非線形計画問題には局所的最適解はなく、解が求まればそれは正解である<sup>3)</sup>。

最適化の手法としてモンテカルロ法を利用することにしたのは次のような理由からである。

a) モンテカルロ法は一般に他の方法に比べてアルゴリズムが非常に簡単である。

b) 設計変数が多くなると、乱数を発生させる空間が多次元となり、収束速度が極端に遅くなり、解の精度が悪くなる。この問題では設計変数が少なく、しかも前述のように、発生空間を3次元から2次元に下げることができるので、比較的早く収束させられる。

c) 一般的には非線形計画法の手法として、現在最も使い易いのはSLP法であるが、この問題のように最適解が必ずしも端点にないような問題のときには、SLP法では収束が悪い傾向がある。

### 3. 最適設計図表と考察

#### (1) 計算種別

計算に用いた、許容応力度 $\sigma_{ca}, \sigma_{sa}$ 、寸法比 $f$ は次の通りである。

$$\sigma_{ca} = 60, 80, 70, 90, 100, 110, 120, 130 \text{ kg/cm}^2$$

$$\sigma_{sa} = 1400, 1600, 1800, 2000, 2100 \text{ kg/cm}^2$$

$$f = 0.15, 0.10$$

コンクリートと鉄筋の材料費の比 $q$ は通常50~100

の範囲にあるようである。これはコンクリートの材料費(生コン費+打設費)と鉄筋の材料費(素材費+運搬費+加工費+組立費)の単価の現状が次のような値であったことから判断したものである。

$$C_c = 9000 \text{ 円/m}^3 \sim 13000 \text{ 円/m}^3$$

$$C_s = 8000 \text{ 円/t} \times 7.85 \text{ t/m}^3 \sim 120000 \text{ 円/t} \\ \times 7.85 \text{ t/m}^3 = 628000 \text{ 円/m}^3 \sim 942000 \text{ 円/m}^3$$

$$\therefore q = \frac{628000}{13000} \sim \frac{942000}{9000} \approx 50 \sim 100$$

ここでは余裕を見込んで $q$ の計算種別としては、30から10きざみに180まで16種類とした。

以上により、全部の計算種類は $8 \times 5 \times 2 \times 16 = 1280$ 種となる。なお $n$ の値は厳密には $\sigma_{ca}$ の値に応じて変わるべきものであろうが、常用設計では $n=15$ の一定値としているので、ここでもそれによるものとした。

#### (2) 最適設計図表

前記のように計算種別は1280種であるが、次項のe)で述べるような最適解の一定性があるために、整理すると表-1~7、図-3に示すような結果となる。 $d'/d=0.15$ の場合が表-1~3に、 $d'/d=0.10$ の場合が表-5~7に示してある。図-3には両方の結果が図示されている。なお、当初予想されたように、ここで示した計算の範囲内では最適解は、すべて単鉄筋となり、したがって $\alpha=0, \sigma_s'=0$ である。

有効高さ $d$ 、引張鉄筋量 $A_s$ 、設計変数 $C, p$ の最適解をそれぞれ $d_{opt}, A_{sopt}, C_{opt}, p_{opt}$ とすれば、これらは表-1, 2, 4~6、図-3を利用して次式から求められる。

$$d_{opt} = C_{opt} \sqrt{\frac{M}{b}}, A_{sopt} = p_{opt} b d_{opt} \dots\dots(20)$$

$$C_{opt} = \begin{cases} C_{opt}^l (C_1 < C_{opt}^l \text{ のとき}) \\ C_1 (C_{opt}^l \leq C_1 \leq C_{opt}^u \text{ のとき}) \dots\dots(21) \\ C_{opt}^u (C_1 > C_{opt}^u \text{ のとき}) \end{cases}$$

表-1  $C_{opt}^l, p_{opt}^u \left( \frac{d'}{d} = 0.15 \right)$

(応力度: kg/cm<sup>2</sup>)

$\sigma_{sa} (= \sigma_s)$	$q$	40	50	60	70	80	90	100	110	120	130	140	150	160	170	180
1400	$C_{opt}^l$	0.188	0.208	0.226	0.243	0.258	0.272	0.286	0.298	0.310	0.322	0.333	0.344	0.354	0.364	0.374
	$\sigma_c$	123	106	94	85	78	72	68	64	61	58	55	53	51	49	48
1600	$C_{opt}^l$		0.195	0.212	0.227	0.241	0.255	0.267	0.279	0.290	0.301	0.311	0.321	0.331	0.340	0.349
	$\sigma_c$		121	107	97	89	83	78	73	70	66	63	61	58	56	55
1800	$C_{opt}^l$			0.199	0.214	0.227	0.240	0.252	0.263	0.273	0.284	0.293	0.303	0.312	0.321	0.330
	$\sigma_c$			121	109	100	93	87	82	78	74	71	68	66	63	61
2000	$C_{opt}^l$				0.203	0.216	0.228	0.239	0.249	0.260	0.269	0.278	0.287	0.296	0.304	0.312
	$\sigma_c$				121	111	103	97	92	87	83	79	76	73	71	68
2100	$C_{opt}^l$					0.210	0.222	0.233	0.243	0.253	0.263	0.272	0.281	0.290	0.297	0.305
	$\sigma_c$					117	109	102	96	91	87	83	80	77	74	72
	$p_{opt}^u$	0.02501	0.02005	0.01679	0.01444	0.01269	0.01130	0.01020	0.00930	0.00855	0.00791	0.00738	0.00689	0.00647	0.00610	0.00577

$$p_{opt} = \begin{cases} p_{opt}^u = (C_{opt}^l \text{ のとき}) \\ p_0 (C_{opt} = C_1 \text{ のとき}) \\ p_{opt}^l (C_{opt} = C_{opt}^u \text{ のとき}) \end{cases} \dots\dots(22)$$

上式中  $C_1, p_0, k_0$  はつり合い断面に対するもので、

$$C_1 = \sqrt{\frac{2}{\sigma_{ca} k_0 (1 - k_0/3)}} \dots\dots\dots(23)$$

$$p_0 = \frac{k_0 \sigma_{ca}}{2 \sigma_{sa}}, \quad k_0 = \frac{n \sigma_{ca}}{n \sigma_{ca} + \sigma_{sa}}$$

である。また  $C_{opt}^l, p_{opt}^u$  は最適断面の有効高さがつり合い断面のそれより大きく、鉄筋比がつり合い断面のそれより小さくなる場合の  $C, p$  を示す。 $C_{opt}^u, p_{opt}^l$  は逆に最適断面の有効高さがつり合い断面のそれより小さく、鉄筋比がつり合い断面のそれより大きくなる場合

表-2  $C_{opt}^u, p_{opt}^l (d'/d = 0.15)$

(応力度: kg/cm<sup>2</sup>)

$\sigma_{ca}(=\sigma_c)$		$q$		
		30	40	50
60	$C_{opt}^u$	0.318	0.331	0.342
	$\sigma_s$	1493	1722	1919
70	$C_{opt}^u$	0.295		
	$\sigma_s$	1741		
80	$C_{opt}^u$	0.276		
	$\sigma_s$	1992		
$p_{opt}^l$		0.00756	0.00598	0.00500

の  $C, p$  を示す。なお表-1, 2, 5, 6 にはこれらの  $d_{opt}, p_{opt}$  を用いた場合のコンクリートと鉄筋の応力度が示されている。

表-3  $\mu (d'/d = 0.15)$

(応力度: kg/cm<sup>2</sup>)

$\sigma_{ca}$	$\sigma_{sa}$	$q$																	
		30	40	50	60	70	80	90	100	110	120	130	140	150	160	170	180		
60	1400	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	0.998	0.995	0.991	0.987	0.982	
	1600	0.999*	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	0.999	0.997	
	1800	0.992*	0.999*	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	
	2000	0.982*	0.995*	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	
	2100	0.976*	0.991*	0.998*	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	
70	1400	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	0.997	0.993	0.988	0.982	0.975	0.968	0.960	0.952		
	1600	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	0.999	0.997	0.993	0.989	0.984	0.979		
	1800	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	0.999	0.997	0.994		
	2000	0.996*	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0		
	2100	0.992*	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0		
80	1400	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	0.997	0.992	0.985	0.976	0.967	0.957	0.947	0.937	0.927	0.917		
	1600	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	0.997	0.993	0.988	0.982	0.975	0.968	0.960	0.952			
	1800	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	0.998	0.995	0.992	0.987	0.982	0.976		
	2000	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	0.999	0.997	0.995	0.991		
	2100	0.999*	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	0.999	0.998	0.996		
90	1400	1.0	1.0	1.0	1.0	0.999	0.994	0.986	0.976	0.965	0.953	0.941	0.929	0.916	0.904	0.892	0.881		
	1600	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	0.998	0.993	0.987	0.979	0.970	0.961	0.951	0.941	0.931	0.922			
	1800	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	0.997	0.993	0.988	0.982	0.975	0.968	0.960	0.952			
	2000	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	0.998	0.994	0.990	0.985	0.980	0.974			
	2100	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	0.998	0.995	0.991	0.987			
100	1400	1.0	1.0	1.0	0.999	0.992	0.982	0.970	0.956	0.942	0.927	0.913	0.899	0.885	0.871	0.858	0.845		
	1600	1.0	1.0	1.0	1.0	0.996	0.989	0.980	0.970	0.959	0.948	0.936	0.924	0.913	0.901	0.890			
	1800	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	0.998	0.994	0.988	0.981	0.972	0.963	0.954	0.944	0.935	0.925			
	2000	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	0.997	0.994	0.988	0.982	0.975	0.968	0.960	0.952			
	2100	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	0.999	0.997	0.993	0.989	0.983	0.977	0.970			
110	1400	1.0	1.0	1.0	0.993	0.981	0.966	0.950	0.934	0.917	0.901	0.885	0.869	0.854	0.839	0.825	0.811		
	1600	1.0	1.0	1.0	1.0	0.995	0.987	0.976	0.964	0.951	0.937	0.924	0.910	0.897	0.884	0.871			
	1800	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	0.997	0.992	0.984	0.974	0.964	0.953	0.942	0.930	0.919	0.908			
	2000	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	0.999	0.995	0.989	0.982	0.974	0.965	0.956	0.947	0.937	0.928			
	2100	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	0.998	0.994	0.989	0.989	0.982	0.975	0.967	0.958	0.950			
120	1400	1.0	1.0	0.996	0.983	0.967	0.949	0.930	0.911	0.892	0.874	0.857	0.840	0.824	0.809	0.794	0.780		
	1600	1.0	1.0	1.0	0.996	0.987	0.975	0.960	0.945	0.930	0.914	0.899	0.884	0.869	0.855	0.841			
	1800	1.0	1.0	1.0	1.0	0.997	0.990	0.981	0.970	0.957	0.945	0.932	0.919	0.906	0.893	0.881			
	2000	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	0.998	0.993	0.986	0.977	0.967	0.957	0.946	0.935	0.924	0.913			
	2100	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	0.997	0.992	0.985	0.976	0.967	0.957	0.947	0.937	0.927			
130	1400	1.0	0.999	0.989	0.971	0.951	0.930	0.909	0.888	0.868	0.848	0.830	0.812	0.796	0.780	0.765	0.751		
	1600	1.0	1.0	0.999	0.990	0.976	0.960	0.943	0.925	0.908	0.891	0.874	0.858	0.842	0.827	0.813			
	1800	1.0	1.0	1.0	0.998	0.991	0.980	0.968	0.954	0.939	0.924	0.910	0.895	0.881	0.868	0.854			
	2000	1.0	1.0	1.0	1.0	0.999	0.993	0.984	0.974	0.963	0.951	0.938	0.926	0.913	0.901	0.889			
	2100	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	0.997	0.990	0.982	0.972	0.961	0.950	0.939	0.927	0.915	0.904			

表-4  $C_1, p_0$   
(応力度: kg/cm<sup>2</sup>)

$\sigma_{ca}$	$\sigma_{sa}$	$C_1$	$p_0$
60	1400	0.313	0.00839
	1600	0.324	0.00675
	1800	0.335	0.00556
	2000	0.346	0.00466
	2100	0.351	0.00429
70	1400	0.279	0.01071
	1600	0.288	0.00867
	1800	0.297	0.00716
	2000	0.306	0.00603
	2100	0.311	0.00556
80	1400	0.253	0.01319
	1600	0.261	0.01071
	1800	0.269	0.00889
	2000	0.276	0.00750
	2100	0.280	0.00693
90	1400	0.233	0.01578
	1600	0.239	0.01287
	1800	0.246	0.01071
	2000	0.252	0.00907
	2100	0.256	0.00839
100	1400	0.216	0.01847
	1600	0.222	0.01512
	1800	0.228	0.01263
	2000	0.233	0.01271
	2100	0.236	0.00992
110	1400	0.202	0.02125
	1600	0.208	0.01745
	1800	0.213	0.01461
	2000	0.218	0.01243
	2100	0.220	0.01152
120	1400	0.191	0.02411
	1600	0.196	0.01985
	1800	0.200	0.01667
	2000	0.204	0.01421
	2100	0.207	0.01319
130	1400	0.181	0.02703
	1600	0.185	0.02232
	1800	0.189	0.01878
	2000	0.193	0.01604
	2100	0.195	0.01490

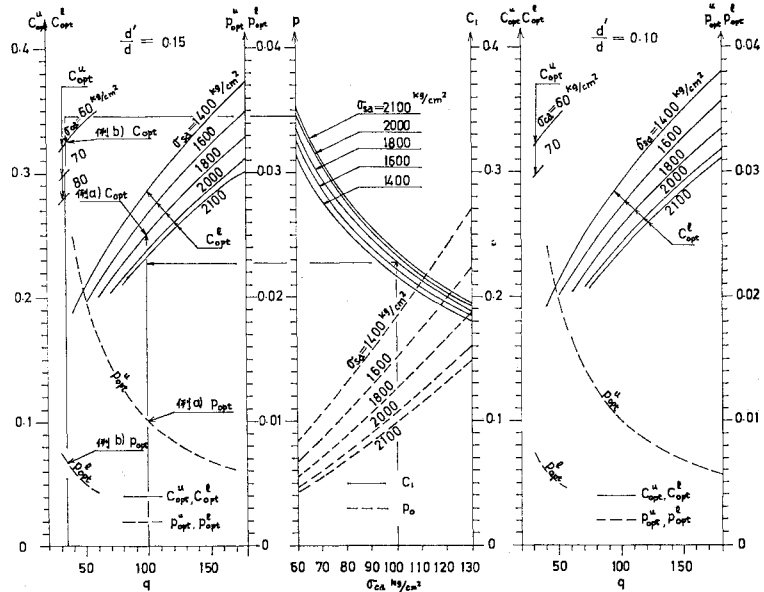


図-3 最適設計係数

表-3,7 は上記の最適解を用いる場合の経済性の割合を示すものである。すなわち  $\mu$  はつり合い断面 ( $d=d_{min}, p=p_0$ ) を用いた場合の費用に対する、最適断面を用いた場合の費用の比である。

$$\mu = \frac{z(C_{opt}, p_{opt})}{z(C_0, p_0)} \dots\dots\dots (24)$$

したがってこれらの表において 1.0 となっている部分は、最適解が

$C_1, p_0$  となる部分で、 $\sigma_c = \sigma_{ca}, \sigma_s = \sigma_{sa}$  となる場合が最も経済的であることを示している。 $\mu$  が 1.0 より小さい部分は、 $C_1, p_0$  より違う  $C_{opt}, p_{opt}$  を用いる方が  $C_1, p_0$  を用いるより、その  $\mu$  の割合で経済的となることを示している。このような場合には最適解は許容領域の端点にはなく、 $C_{opt} = C_{opt}^l > C_1$  の場合はコンクリートの最大応力度がその許容応力度を下回った方が、 $C_{opt} = C_{opt}^u < C_1$  の場合 (表-3,7 において \*印を付した部分に相当) は鉄筋の応力度がその許容応力度を下回った方が、それぞれ経済的となる。つまり、fully stressed design でない方が有利となる場合である。

実際にここに示した最適設計図表を利用して  $C_{opt}, p_{opt}$  を求めるには次のようにする。まず表の場合には、表-3 もしくは 7 において、 $\mu=1.0$  となっているケースは表-4 から  $C_1, p_0$  を求めれば、これが  $C_{opt}, p_{opt}$

表-5  $C_{opt}^l, p_{opt}^u$  ( $d'/d = 0.10$ )

(応力度: kg/cm<sup>2</sup>)

$\sigma_{sa}$ ( $=\sigma_s$ )	$q$	応力度 (kg/cm <sup>2</sup> )															
		40	50	60	70	80	90	100	110	120	130	140	150	160	170	180	
1400	$C_{opt}^l$	0.192	0.212	0.231	0.248	0.263	0.278	0.291	0.304	0.317	0.329	0.340	0.351	0.361	0.371	0.381	
	$\sigma_c$	119	103	91	82	76	70	66	62	59	56	54	52	50	48	47	
1600	$C_{opt}^l$		0.199	0.216	0.232	0.246	0.260	0.272	0.285	0.296	0.307	0.318	0.328	0.338	0.347	0.357	
	$\sigma_c$		117	104	94	87	81	76	71	68	64	62	59	57	55	53	
1800	$C_{opt}^l$			0.204	0.218	0.232	0.245	0.257	0.268	0.279	0.290	0.300	0.309	0.318	0.327	0.336	
	$\sigma_c$			117	106	98	91	85	81	76	72	69	67	64	62	60	
2000	$C_{opt}^l$				0.207	0.220	0.232	0.244	0.255	0.265	0.275	0.284	0.293	0.302	0.311	0.319	
	$\sigma_c$				118	108	101	94	89	85	81	77	74	71	69	66	
2100	$C_{opt}^l$					0.203	0.215	0.227	0.238	0.248	0.258	0.268	0.277	0.286	0.295	0.303	
	$\sigma_c$					123	114	106	99	94	89	85	81	78	75	72	
$p_{opt}^u$		0.02391	0.01920	0.01605	0.01382	0.01215	0.01082	0.00977	0.00892	0.00820	0.00758	0.00705	0.00660	0.00620	0.00584	0.00553	

である。同表において\*印のついているケースについては、表-2 もしくは 6 より  $C_{opt}^u, p_{opt}^l$  を求める。その他の  $\mu < 1.0$  のケースは表-1 もしくは 5 より  $C_{opt}^l, p_{opt}^u$  を求める。これらがそれぞれ  $C_{opt}, p_{opt}$  である。次に 図-3 によって求める場合には、まず  $\sigma_{ca}, \sigma_{sa}$  に対応する  $C_1$  を図の中央部分より読み、この点から水平線を左 ( $d'/d=0.15$  のとき) もしくは右 ( $d'/d=0.10$  のとき) に延ばし、この線が与えられた  $q$  と  $\sigma_{ca}, \sigma_{sa}$  に対応する  $C_{opt}^l$  より下にある場合は  $C_{opt}^l, p_{opt}^u$  を読み、この線が  $C_{opt}^u$  より上にある場合は  $C_{opt}^u, p_{opt}^l$  を読む。その他の場合は  $C_1, p_0$  がそのまま  $C_{opt}, p_{opt}$  である。

具体例を示す。

a)  $M=40$  tm,  $b=1$  m,  $d'/d=0.15$ ,  $\sigma_{ca}=100$  kg/

表-6  $C_{opt}^u, p_{opt}^l$  ( $\frac{d'}{d}=0.10$ )

$\sigma_{ca}(=\sigma_c)$		$q$		
		30	40	50
60	$C_{opt}^u$	0.320	0.333	0.344
	$\sigma_s$	1527	1758	1962
70	$C_{opt}^u$	0.296		
	$\sigma_s$	1780		
$q_{opt}^l$		0.00730	0.00578	0.00481

$cm^2, \sigma_{sa}=1800$  kg/cm<sup>2</sup>,  $C_c=9400$  円/m<sup>3</sup>,  $C_s=12000$  円/t  $\times 7.85$  t/m<sup>3</sup>=942000 円/m<sup>3</sup> の場合:

$q=100$  であるから、表-3 より 0.994 である。したがって表-1 より  $C_{opt}=C_{opt}^l=0.252, p_{opt}=p_{opt}^u=0.01020$  を得る。最適有効高さ  $d_{opt}$ 、最適鉄筋量  $A_{sopt}$  は、

表-7  $\mu$  ( $\frac{d'}{d}=0.10$ )

(応力度: kg/cm<sup>2</sup>)

$\sigma_{ca}$	$\sigma_{sa}$	$q$	$\mu$																
			30	40	50	60	70	80	90	100	110	120	130	140	150	160	170	180	
60	1400	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0
	1600	0.999*	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	0.999	0.997	0.995
	1800	0.994*	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0
	2000	0.984*	0.996*	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0
	2100	0.978*	0.993*	0.999*	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0
70	1400	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	0.999	0.996	0.991	0.985	0.978	0.970	0.962	0.954	0.946		
	1600	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	0.998	0.995	0.990	0.986	0.980	0.974		
	1800	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	0.999	0.997	0.995	0.991		
	2000	0.997*	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	0.999	
	2100	0.994*	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0
80	1400	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	0.999	0.995	0.989	0.980	0.971	0.961	0.951	0.941	0.930	0.919	0.909		
	1600	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	0.999	0.996	0.991	0.985	0.978	0.970	0.962	0.954	0.946		
	1800	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	0.999	0.997	0.993	0.989	0.983	0.978	0.971		
	2000	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	0.998	0.995	0.992	0.988		
	2100	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	0.998	0.996	0.993	
90	1400	1.0	1.0	1.0	1.0	0.998	0.991	0.982	0.971	0.959	0.947	0.934	0.921	0.908	0.896	0.883	0.871		
	1600	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	0.996	0.990	0.983	0.974	0.965	0.955	0.945	0.934	0.924	0.913			
	1800	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	0.999	0.996	0.991	0.985	0.978	0.970	0.962	0.954	0.946			
	2000	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	0.999	0.996	0.992	0.987	0.982	0.975	0.969		
	2100	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	0.999	0.996	0.993	0.988	0.983	0.978		
100	1400	1.0	1.0	1.0	0.997	0.989	0.978	0.964	0.950	0.935	0.919	0.904	0.890	0.875	0.862	0.848	0.835		
	1600	1.0	1.0	1.0	1.0	0.999	0.994	0.986	0.976	0.965	0.953	0.941	0.929	0.916	0.904	0.892	0.881		
	1800	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	0.997	0.992	0.984	0.976	0.967	0.957	0.948	0.937	0.927	0.917		
	2000	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	0.999	0.996	0.991	0.985	0.978	0.970	0.962	0.954	0.946		
	2100	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	0.999	0.995	0.991	0.985	0.979	0.972	0.965	0.957		
110	1400	1.0	1.0	0.999	0.990	0.977	0.961	0.944	0.926	0.909	0.892	0.875	0.859	0.844	0.829	0.814	0.801		
	1600	1.0	1.0	1.0	0.999	0.993	0.983	0.971	0.958	0.944	0.930	0.916	0.901	0.888	0.874	0.861	0.848		
	1800	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	0.996	0.988	0.979	0.969	0.958	0.946	0.935	0.923	0.911	0.899	0.888		
	2000	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	0.998	0.993	0.986	0.978	0.969	0.960	0.950	0.940	0.930	0.920		
	2100	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	0.999	0.997	0.992	0.985	0.978	0.970	0.961	0.952	0.943	0.934		
120	1400	1.0	1.0	0.993	0.979	0.961	0.942	0.922	0.902	0.883	0.865	0.847	0.830	0.813	0.798	0.783	0.769		
	1600	1.0	1.0	1.0	0.994	0.983	0.969	0.954	0.938	0.922	0.906	0.890	0.874	0.859	0.845	0.831	0.818		
	1800	1.0	1.0	1.0	1.0	0.996	0.987	0.976	0.964	0.951	0.938	0.924	0.911	0.897	0.884	0.871	0.859		
	2000	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	0.997	0.991	0.982	0.972	0.962	0.951	0.939	0.928	0.916	0.905	0.894		
	2100	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	0.999	0.995	0.989	0.980	0.971	0.961	0.951	0.941	0.930	0.919	0.909		
130	1400	1.0	0.998	0.985	0.966	0.945	0.922	0.900	0.878	0.858	0.838	0.819	0.802	0.785	0.769	0.754	0.739		
	1600	1.0	1.0	0.997	0.986	0.971	0.954	0.936	0.917	0.899	0.881	0.864	0.848	0.832	0.817	0.802	0.789		
	1800	1.0	1.0	1.0	0.997	0.988	0.976	0.962	0.947	0.932	0.916	0.901	0.886	0.872	0.858	0.844	0.831		
	2000	1.0	1.0	1.0	1.0	0.997	0.990	0.980	0.969	0.957	0.944	0.931	0.918	0.905	0.892	0.880	0.868		
	2100	1.0	1.0	1.0	1.0	0.999	0.995	0.987	0.977	0.967	0.955	0.943	0.931	0.919	0.907	0.895	0.884		

$$d_{opt} = 0.252 \sqrt{\frac{4\,000\,000}{100}} = 50.4 \text{ cm}$$

$$A_{sopt} = 0.01020 \times 100 \times 50.4 = 51.4 \text{ cm}^2$$

となり、応力度は表-1より、 $\sigma_c = 87 \text{ kg/cm}^2$ 、 $\sigma_s = 1\,800 \text{ kg/cm}^2$ となる。ちなみにつり合い断面の場合は、 $d_{min} = 45.6 \text{ cm}$ 、 $A_s = 57.6 \text{ cm}^2$ である。

b)  $M = 40 \text{ tm}$ 、 $b = 1 \text{ m}$ 、 $d'/d = 0.15$ 、 $\sigma_{ca} = 60 \text{ kg/cm}^2$ 、 $\sigma_{sa} = 2\,000 \text{ kg/cm}^2$ 、 $C_c = 12\,000 \text{ 円/m}^3$ 、 $C_s = 420\,000 \text{ 円/m}^3$ の場合：

$q = 35$ である。図-3において、 $C_1(\sigma_{ca} = 60 \text{ kg/cm}^2$ 、 $\sigma_{sa} = 2\,000 \text{ kg/cm}^2) = 0.346$ で、この点を通る水平線は同図左の $q = 35$ 、 $\sigma_{ca} = 60 \text{ kg/cm}^2$ の $C_{opt}$ より上にくるから、 $C_{opt} = C_{opt}'' = 0.325$ 、 $p_{opt} = p_{opt}' = 0.0068$ を得る。経済性は表-3より $\mu = 0.989$ となる。したがって $d_{opt}$ 、 $A_{sopt}$ はそれぞれ $65.0 \text{ cm}$ 、 $44.2 \text{ cm}^2$ となり、 $\sigma_c = 60 \text{ kg/cm}^2$ 、 $\sigma_s = 1\,607 \text{ kg/cm}^2$ となる。これに対して $d_{min} = 69.2 \text{ cm}$ 、 $A_s = 32.2 \text{ cm}^2$ である。

さて、長方形断面の幅 $b$ は、 $d$ 、 $A_s$ を決める前に別な条件から決まる定数として扱う場合が多い。もし $b$ が $d$ 、 $A_s$ 、 $A_s'$ の関連で決まる場合でも、 $b$ を設計変数に加えて、改めて最適設計をする必要はない。なぜなら、この場合でも制約条件は式(8)、(9)と同じで $b$ に無関係であり、費用は式(15)からわかるように $\sqrt{b}$ に比例するから、すでに示した $C_{opt}$ 、 $p_{opt}$ を使って、許容範囲(たとえば $b \geq b_l$ 、 $d/b \geq m$ のような)内の最小の $b$ を決めればよいからである。そのような例について示す。

c)  $M = 40 \text{ tm}$ 、 $d'/d = 0.15$ 、 $\sigma_{ca} = 120 \text{ kg/cm}^2$ 、 $\sigma_{sa} = 2\,000 \text{ kg/cm}^2$ 、 $q = 100$ 、 $d/b \leq 2$ の場合：

表-3より $\mu = 0.986$ 、表-1より $C_{opt} = 0.239$ 、 $p_{opt} = 0.01020$ を得る。ここで $b$ が最小となる、すなわち $b = d/2$ となるような $d_{opt}$ は式(20)の中の $b$ に $d_{pot}/2$ を代入して次式より求められる。

$$d_{opt} = \sqrt[3]{2 C_{opt}^2 M} \dots\dots\dots(25)$$

したがって、

$$d_{opt} = \sqrt[3]{2 \times 0.239^2 \times 4\,000\,000} = 77.0 \text{ cm}$$

$$b = 38.5 \text{ cm}$$

を得る。 $b$ は丸めて $40 \text{ cm}$ を採用するものとすれば、

$$d_{opt} = 0.239 \sqrt{\frac{4\,000\,000}{40}} = 75.6 \text{ cm}$$

$$A_{sopt} = 0.0102 \times 38.5 \times 75.6 = 29.7 \text{ cm}^2$$

となる。

最後に、本図表を用いて最適設計を行う手順について整理すると次のようになる。

① あらかじめ設計条件として与えるべきものは、曲げモーメント $M$ 、幅 $b$ (もしくは $b$ の下限条件など)、寸法比 $d'/d$ 、許容応力度 $\sigma_{ca}$ 、 $\sigma_{sa}$ である。

②  $C_c$ 、 $C_s$ を見積り、 $q$ を決める。

③ 表-1~7、もしくは図-3より $\mu$ 、 $C_{opt}$ 、 $p_{opt}$ を求める。

④ 式(20)もしくは式(25)より $d_{opt}$ 、 $A_{sopt}$ を決定する。

### (3) 考 察

#### a) 単鉄筋と複鉄筋

前述したように、ここで示した計算種別の範囲内では最適解はすべて単鉄筋となっている。これは圧縮側を鉄筋で補強するのは鉄筋の有効利用でなく、不経済であるということから当然予想されるところである。しかし極端に鉄筋の材料費が安く、しかもコンクリートの許容応力度が低い場合には、複鉄筋とした場合の方が有利となることもあり得る。たとえば、 $q = 20$ 、 $\sigma_{ca} = 60 \text{ kg/cm}^2$ 、 $\sigma_{sa} = 1\,600 \text{ kg/cm}^2$ の場合について、最適解を求めてみると、 $C_{opt} = 0.289$ 、 $p_{opt} = 0.0108$ 、 $p' = 0.0026$ 、 $\sigma_c = 60 \text{ kg/cm}^2$ 、 $\sigma_s = 1\,281 \text{ kg/cm}^2$ 、 $\sigma_s' = 573 \text{ kg/cm}^2$ 、 $\mu = 0.985$ であった。ちなみにこの場合の $C_1$ 、 $p_0$ はそれぞれ $0.324$ 、 $0.00675$ である。このように極端に $q$ が小さく、比較的 $\sigma_{ca}$ も低い場合には、なるべくコンクリート断面積を少なくし、圧縮側を鉄筋で補強した方が有利となることもあり得るのである。しかし $q = 20$ というようなことは、実際にはほとんど考えられないから、前記の図表にもこのようなケースは示していない。

#### b) つり合い断面と最適断面

普通のコンクリートと鉄筋の許容応力度の組み合わせの場合、つまりコンクリートの許容応力度の比較的高いものと、鉄筋のそれの低いもの、あるいはその逆の組み合わせ(たとえば $\sigma_{ca} = 60 \text{ kg/cm}^2$ で $\sigma_{sa} = 2\,100 \text{ kg/cm}^2$ のような)でない場合で、コンクリートと鉄筋の材料費の比 $q$ も普通の範囲では、表-3,7にみられるように、 $\mu$ は1もしくは1に非常に近い値となっているケースが多い。

また表-1~7からわかるように、 $\mu$ が1に非常に近くても、 $C_{opt}$ 、 $p_{opt}$ は $C_1$ 、 $p_0$ とはかなり違う値となっている傾向がある。たとえば $\sigma_{ca} = 120 \text{ kg/cm}^2$ 、 $\sigma_{sa} = 2\,100 \text{ kg/cm}^2$ 、 $q = 100$ 、 $d'/d = 0.15$ の場合、 $\mu = 0.992$ であるが、 $C_{opt} = 0.233$ 、 $p_{opt} = 0.0102$ であるのは対して $C_1 = 0.207$ 、 $p_0 = 0.01319$ である。このような傾向となるのは、 $C$ 、 $p$ の間には $C$ が増えれば $p$ が減り、逆に $C$ が減れば $p$ が増える関係があり、しかも目的関数はそれらの積の部分を含んでいるため、 $C$ 、 $p$ が多少変化しても目的関数の値はそれほど変化しないことになるからである。

これらのことから、普通の場合には、つり合い断面とするのが最も経済的であるケースが多く、しかもここで



示した図表から求まる最適断面をそのまま使わず、多少違った有効高さとそれに対応する鉄筋断面積を用いても経済性の低下はわずかであるといえる。この後半のことは、最初に述べたように、有効高さ、鉄筋量として  $d_{opt}$ ,  $p_{opt}$  が必ずしもそのまま選べないという実際上の制約を考えれば、非常に都合なことである。

しかし表-3.7 からわかるように、 $q$  が大きく、比較的  $\sigma_{ca}$  が大きく、 $\sigma_{sa}$  が小さい場合にはつり合い断面を用いると、かなり不経済となるケースもあり得るから、そのような場合には、ここで示した図表により  $d$ ,  $p$  を決定しなければならないことはいうまでもない。

なお  $\mu$  が 1 に非常に近く、経済性はわずかであっても、大断面もしくは製作が大量（たとえば標準設計などのように）の場合には少しでも有利な  $d_{opt}$ ,  $C_{opt}$  を採用して経済費の節約を計るべきであろう。

c)  $d_{opt} > d_{min}$ ,  $p_{opt} < p_0$  となる場合

表-3.7 にみられるように、コンクリートと鉄筋の材料費の比  $q$  が大きく、コンクリートの許容応力度が高く、逆に鉄筋のそれが低い場合には、つり合い断面の有効高さ  $d_{min}$  より大きい  $d_{opt}$ , つり合い鉄筋比  $p_0$  より少ない  $p_{opt}$  を使った方が経済的となる傾向がある。これは比較的材料費が高く、強度の低い鉄筋の使用をなるべく少なくし、逆に比較的材料費が安く、強度の高いコンクリートを多く使った方が効果的となるからである。 $\mu$  が 1 より小さくなり、つり合い断面でない最適断面が存在する場合のほとんどがこのケースである。

d)  $d_{opt} < d_{min}$ ,  $p_{opt} > p_0$  となる場合

前記 a) で述べたように、最適解はすべて単鉄筋であるが、最適有効高さは  $d_{min}$  より大きくなるとは限らない。すなわちケースとしては少ないが、表-3.7 の \* 印の付してある部分に相当する、表-2.6, 図-3 の  $C_{opt}$ ,  $p_{opt}$  が最適解となる場合、つまり  $q$  が小さく、 $\sigma_{ca}$  が低い場合は  $d_{min}$  より小さい有効高さとし、鉄筋比を  $p_0$  より多くした方が経済的となっている。これは比較的材料費が高く、強度の低いコンクリートをなるべく少なくし、逆に比較的材料費の安く、強度の高い鉄筋を多く引張鉄筋として使った方が効果的となるからである。前記 (2) b) の例題はこのケースである。

e) 最適解の一定性

前述したように計算種別が 1280 種もあ

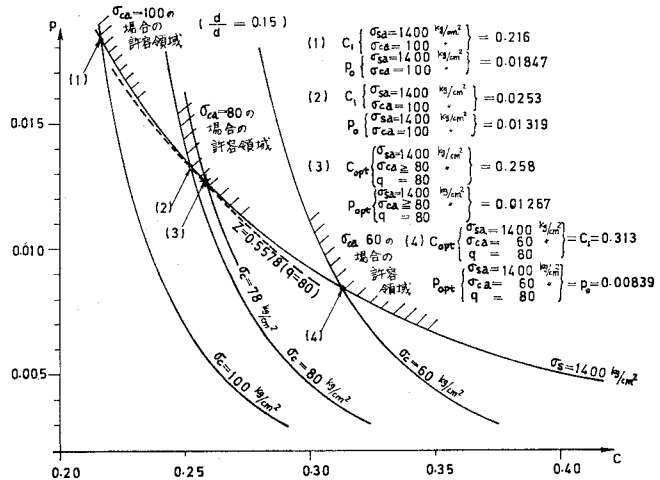


図-4  $\sigma_c \leq 1400 \text{ kg/cm}^2$  の場合の許容領域と最適解

たにもかかわらず、結果は比較的簡単な図表に整理できたのは、次のような最適解の一定性が存在するからである。

まず、 $q$  が大きく、 $\sigma_{ca}$  が高く、 $\sigma_{sa}$  が低くて、 $d_{opt} > d_{min}$ ,  $p_{opt} < p_0$  となる場合、つまり前記 c) の場

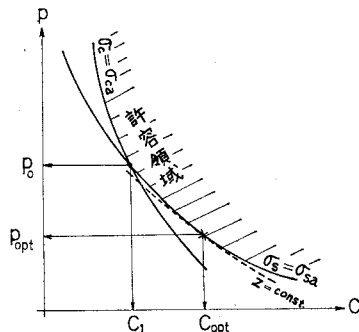


図-5 制約条件、目的関数および最適解の一般的関係

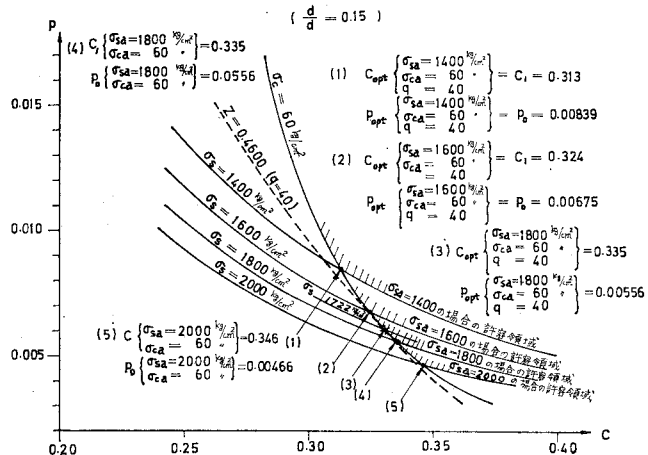


図-6  $\sigma_c \leq 60 \text{ kg/cm}^2$  の場合の許容領域と最適解

合,  $C_{opt}=C_{opt}^I, p_{opt}=p_{opt}^u$  は,  $\sigma_{ca}$  に無関係な一定値となる (表-1,5 参照). このような性質が存在することは 図-4 を見れば明らかであろう. これは  $\sigma_{sa}=1400 \text{ kg/cm}^2, \sigma_{ca}=60, 80, 100 \text{ kg/cm}^2, q=80$  の場合の許容領域と目的関数について示したものである. 図中の・印の点がそれぞれの場合の端点つまり  $C_1, p_0$  の点であるが,  $\sigma_{ca} \geq 78 \text{ kg/cm}^2$  の場合最適解は端点になく,  $\sigma_s = \sigma_{sa}$  となる境界の一定点, 図の×印の点となる. これは  $\sigma_{ca} \geq 78 \text{ kg/cm}^2$  では許容領域は  $\sigma_{ca}$  の大きくなるにつれて広がるが, 目的関数の値が図中の×印点の  $z=0.5578$  より小さくなる部分が生れてこないからである (拡張した許容領域は点線より上側の部分にしか生じない). なお 図-4 は複数個のケースについて図示しており, 制約条件, 目的関数および最適解の関係がややわかりにくいと思われるので, 1つのケースについて参考のために示したのが 図-5 である. 前記 d) の場合にも同じようなことがいえる. つまり,  $q$  が小さく,  $\sigma_{ca}$  が低く,  $\sigma_{sa}$  が高く,  $d_{opt} < d_{min}, p_{opt} > p_0$  となる場合,  $C_{opt}=C_{opt}^u, p_{opt}=p_{opt}^I$  は,  $\sigma_{sa}$  の値に無関係な一定値となる (表-2,5 参照). これも,  $\sigma_{ca}=60 \text{ kg/cm}^2, \sigma_{sa}=1400, 1600, 1800, 2000 \text{ kg/cm}^2, q=40$  の場合を図示した 図-6 より説明できる. すなわちこの場合も上記と同じような理由から,  $\sigma_{sa} \geq 1722 \text{ kg/cm}^2$  では最適解は端点になく,  $\sigma_{sa}$  には無関係な一定点 (×印点) となるからである.

次に前記 e) の場合, 最適鉄筋比  $p_{opt}$  は鉄筋の許容応力度  $\sigma_{sa}$  にも無関係な一定値となる. このことはラグランジュの未定乗数法<sup>3)</sup> を適用することにより証明することができる. 前述のようにこの場合の制約条件は  $\sigma_s = \sigma_{sa}$  の一式であるから, ラグランジュ関数  $\phi$  は, 式 (9), (16) より次のように定義される.

$$\phi(C, p, \lambda) = (1+f+pq)C - \lambda \left\{ \frac{k^2(1-k/3)}{1-k} C^2 - \frac{2n}{\sigma_{sa}} \right\} \dots\dots\dots(26)$$

そこで,  $C, p, \lambda$  を求める連立方程式は次のようになる.

$$\frac{\partial \phi}{\partial C} = 0 \text{ より, } 1+f+pq - \frac{2\lambda C k^2(1-k/3)}{1-k} = 0 \dots\dots\dots(27)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial p} = 0 \text{ より, } q - \frac{2n\lambda C k(k^2-3k+3)}{3(1-k)(k+np)} = 0 \dots\dots\dots(28)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial \lambda} = 0 \text{ より, } \frac{k^2(1-k/3)}{1-k} C^2 - \frac{2n}{\sigma_{sa}} = 0 \dots\dots\dots(29)$$

式 (29) より

$$C = \frac{1}{k} \sqrt{\frac{2n(1-k)}{\sigma_{sa}(1-k/3)}} \dots\dots\dots(30)$$

であり, 式 (27), (29) より

$$\lambda = \frac{(1+f+pq)\sigma_{sa}C}{4n} \dots\dots\dots(31)$$

を得る. これらを式 (28) に代入すると次式を得る.

$$q - \frac{n(1+f+pq)(k^2-3k+3)}{k(3-k)(k+np)} = 0 \dots\dots\dots(32)$$

この式 (32) を解けば  $p_{opt}$  が求まるが, この式は  $\sigma_{sa}$  を含んでいないから,  $p_{opt}$  は  $\sigma_{sa}$  に無関係となるのである. なお式 (30) にみられるように  $C_{opt}$  は  $\sigma_{sa}$  に関係している. 同じような関係が前記 d) の場合にもいえる. すなわち d) の場合, 最適鉄筋比  $p_{opt}$  はコンクリートの許容応力度  $\sigma_{ca}$  には無関係な一定値となる. これも同様にラグランジュの未定乗数法を用いることにより証明できる. この場合のラグランジュ関数  $\phi$  は, 式 (8), (16) より

$$\phi(C, p, \lambda) = (1+f+pq)C - \lambda \left\{ k \left( 1 - \frac{k}{3} \right) C^2 - \frac{2}{\sigma_{sa}} \right\} \dots\dots\dots(33)$$

となり, 連立方程式は次のようになる.

$$1+f+pq - 2\lambda C k \left( 1 - \frac{k}{3} \right) = 0 \dots\dots\dots(34)$$

$$q - \frac{n\lambda C(3-2k)(1-k)}{3(k+np)} = 0 \dots\dots\dots(35)$$

$$k \left( 1 - \frac{k}{3} \right) C^2 - \frac{2}{\sigma_{ca}} = 0 \dots\dots\dots(36)$$

これらの式 (34)~(36) から  $p_{opt}$  を求める式を導くと次のようになる.

$$q - \frac{n(1+f+pq)(3-2k)(1-k)}{6k(k+np) \left( 1 - \frac{k}{3} \right)} = 0 \dots\dots\dots(37)$$

この式 (37) は  $\sigma_{ca}$  に無関係であり, したがって  $p_{opt}$  は  $\sigma_{ca}$  に無関係な一定値となる.

なお, 本最適設計問題はここに示したように, 単鉄筋となることがあらかじめわかっていたれば, ラグランジュの未定乗数法により解くことも可能である.

f)  $d'/d$  の影響

$d'/d$  が 0.15 の場合と 0.10 の場合とでは, 最初予想したように, 表-1~3, 5~7 にみられるように結果に大きな差はない. したがって, 実際の  $d'/d$  が必ずしもこれらの値でない場合, どちらか近い方の図表を用いて設計しても, 実用上十分な精度の結果が得られる.

g) 解の収束性

乱数を発生させた回数は, 1ケース当たり少ないもので 200 回, 多いものでは 100000 回, 平均 8000 回であった. 計算時間は HITAC-8700/8800 を用いて 1ケース

平均 1.25 秒であった。

ここで示した解が正解であることは、図-4,5 で示したような若干の図解と解が完全に一致し、しかも前記 e) の最適解の一定性が、得られた解に満足されていたことから確かめることができた。

#### 4. ま と め

以上を要約すると次のようになる。

(1) 曲げを受ける鉄筋コンクリート長方形断面の最適許容応力度設計を求めるための実用的な図表が得られた。

(2) 最適断面の決定は、あらかじめ設計条件として、曲げモーメント  $M$ 、幅  $b$  (もしくは幅の下限条件)、寸法比  $d'/d$ 、許容応力度  $\sigma_{ca}$ ,  $\sigma_{sa}$  と、材料費の比  $q$  が与えられると、表-1~7, もしくは 図-3 を利用することにより行うことができる。

(3) 最適断面は通常単鉄筋である。

(4) 最適断面はつり合い断面と一致する場合が多い。

(5) 最適断面と多少違う断面としても経済性の低下は多くの場合わずかである。

(6)  $q$  が大きく、 $\sigma_{ca}$  が高く、 $\sigma_{sa}$  が低い場合には、最適有効高さ  $d_{opt}$  はつり合い断面の  $d_{min}$  より大きくなり、最適鉄筋比  $p_{opt}$  は  $p_0$  より小さくなる。なおこの場合、これらの最適値は  $\sigma_{ca}$  に無関係な一定値となる。また  $p_{opt}$  は  $\sigma_{sa}$  にも無関係な一定値となる。

(7)  $q$  が小さく、 $\sigma_{ca}$  が低く、 $\sigma_{sa}$  が高い場合には、 $d_{opt} < d_{min}$ ,  $p_{opt} > p_0$  となることがある。なおこの

場合、これらの最適値は  $\sigma_{sa}$  に無関係な一定値となる。

また  $p_{opt}$  は  $\sigma_{ca}$  にも無関係な一定値となる。

(8)  $d'/d$  の変化は最適解にほとんど影響をおよぼさない。

#### 5. あとがき

材料費の調査にご協力をいただいた、日本国有鉄道長野鉄道管理局施設部長 伊藤信義氏ならびに首都高速道路公団 新津敬治氏に深く感謝します。

なお、本文の計算は、信州大学リモートパッチステーションを経由した東京大学大型計算機センターの HIT-AC-8700/8800 を利用して行ったことを付記する。

#### 参 考 文 献

- 1) 水野高明：鉄筋コンクリート工学，森北出版，p. 70, 1970.
- 2) 岡田 清：鉄筋コンクリート工学，朝倉書店，p. 48, 1972.
- 3) 長 尚：構造物の最適設計，朝倉書店，1971.
- 4) Schmit, L.A. : Structural Synthesis 1959~1969 A Decade of Progress, Japan-U.S. seminar on matrix methods of structural analysis and design, 1969.
- 5) 土木学会編：土木工学における数値解析/計画手法編，サイエンス社，1974.
- 6) 大久保禎二：トラス構造物の最適設計法に関する研究，土木学会論文報告集，No. 177, pp. 9~19, 1970.
- 7) 奥村敏恵・大久保禎二：Suboptimization による鋼連続桁の最適設計，土木学会論文報告集，No. 215, pp. 1~14, 1973.
- 8) 山田善一・大宮司尚：鋼床版床組の最適設計の実用化に関する研究，土木学会論文報告集，No. 233, pp. 35~43, 1975.

(1975.4.26・受付)