

# 材料強度のばらつきを考慮した定常不規則振動体 の初通過破壊確率の研究

FIRST-PASSAGE FAILURE PROBABILITY OF STATIONARILY RANDOMLY  
EXCITED STRUCTURES WITH SCATTERED MATERIAL STRENGTH

小松定夫\*・中山隆弘\*\*

By Sadao KOMATSU and Takahiro NAKAYAMA

## 1. 緒 言

わが国における土木構造物は、地震、台風といった非常に苛酷な自然環境にさらされる。このような激烈な荷重を受けても、なお人命に被害を及ぼすことのないように強固な構造物を設計し、構築しなければならないことはいうまでもない。そのために幾多の研究者がこの種の荷重の特性を調査し、より精度の高い解析手法の開発に努め、またより優れた築造技法の確立を目指している。従来こうした方面の研究は非常に積極的になされ、数多くの有益な成果が発表されてきた。しかし一方構造物そのものの安全性の適切な評価方法に関する研究は、比較的少なかったように思われる。本来構造物の安全性評価の社会的意義は重大であるはずであるが、現状では、きわめて概括的かつ直感的な安全率が安全性に対する唯一の判定基準となっている。ところが安全率だけでは適確な安全性の評価ができないことは周知の通りであり<sup>1)</sup>、わが国でも信頼性工学に基づく構造設計法に、多くの人々の目が向けられてきている<sup>2),3)</sup>。特に地震、台風などのように、いつ、いかなる規模で構造物に脅威をもたらすのか、明確な確定論的予測が困難な外力に対しては、確率・統計的な手法を有効に利用して構造物を設計するか、もしくは現時点でそれが困難な場合は、少なくとも安全性の確率論的評価をすることは、土木構造物が公共性を有しており、安全性が最優先されるべきであることから望ましいことと思われる。

さてこの種のいわゆる不規則外力に関しては、不連続過程と見なせる地震あるいは台風発生の不規則性と、連続過程と見なし得る地震動および風速変動の不規則性とが存在する<sup>4)</sup>。構造物の耐用期間内の信頼度あるいは非破壊確率と、上記の2種類の不規則性とは密接に関連

するものであるが、本研究ではこれらのうち、1回の地震動、または1回の台風通過における構造物の信頼度の推定法について考察することを目的としている。その際構造物の破壊確率を、ある点の応力が動的応答の継続時間内に材料強度を超過する確率と定義することによって考察を進めている。

不規則過程があるレベルを超過する確率は、一般には初通過確率 (first-passage probability) として知られているが、構造物などの破壊問題を対象にする場合は、特に初通過破壊確率 (first-passage failure probability) といわれている。初通過確率に関する Rice<sup>5)</sup> の基礎的研究が構造物の不規則振動問題に応用されたのは比較的新しく、Eringen<sup>6)</sup> が 1958 年に耐震問題にそれを適用したのがはじめてであろうと思われる。その後の Rosenbluth-Bustamante<sup>7)</sup>、篠塚<sup>8)</sup>、小松<sup>9)</sup> による研究については、後藤・亀田が文献 10) で詳述している。そのほか南井<sup>11)</sup> は平均値が零でない非定常正規応答過程が単位時間にあるレベルを超過する回数<sup>12)</sup>の期待値、すなわちレベル超過率の算定式を誘導している。さらに Crandall-Chandiramani-Cook<sup>12)</sup> は、ホワイトノイズ状の外力を受ける 1 自由度振動系の応答があるレベルをはじめて越える時刻の確率分布をシミュレーションによって求め、初通過確率を算出しているが、レベルが高い場合には長時間にわたる計算時間を要するという欠点をもっている。また篠塚・Yang<sup>13)</sup> は篠塚<sup>8)</sup> の提案した初通過破壊確率の下界を Gallot<sup>14)</sup> の方法によって改善し、それまでの上下界の幅をかなり小さくすることに成功している。山田・竹宮<sup>15)</sup> は長周期構造物が地震動を受ける場合の安全性について考察し、応答が材料強度を越える現象はポアソン過程を構成するとして、構造物の信頼度を計算した。さらに Lin<sup>16),17)</sup> は Stratonovich<sup>18)</sup> によって提案された random points model を用いて、ホワイトノイズ状の外力を受ける 1 自由度振動系の初通過確率を検討し、良好な結果を得ている。この結果は Yang・篠

\* 正会員 工博 大阪大学教授 工学部土木工学科

\*\* 正会員 工修 広島工業大学講師 工学部土木工学科

塚<sup>19)</sup>によって、前述の篠塚の上下界法、ポアソン近似解法などの結果と比較され、その優位性が示されている。一方 Racicot-Moses<sup>20)</sup> も同モデルを対象にして、Lyon<sup>21)</sup> が指摘した clump size を考慮してかなり精度のいい近似解を提案した。

以上のように初通過破壊確率の近似計算法に関する研究は数多く見られるが、いずれもレベルあるいは材料強度を確定量としている点では共通している。しかし構造材料の強度は、たとえ同一条件のロットより選び出されても、不純物の量や分布あるいは結晶構造の相違などのために本質的にばらつきを有するもので<sup>22)</sup>、これらの理論を構造物の安全性評価法に適用するためには、材料強度を確率量としたものに拡張しておくことが望ましい。さらに強度のばらつきが初通過破壊確率におよぼす影響を、具体的に把握しておくことも重要であると考えられる。したがって本研究では、材料強度を確率量とみなし、定常応答過程およびその包絡線過程のレベル超過率の算定式をまず誘導した。次にこのレベル超過率を用いて、初通過破壊確率の算定式をいわゆるポアソン近似による方法と、後述する包絡線過程による方法により表わした。さらにこれらの算定法を適用して、材料強度の平均値と変動係数、外力の大きさ、系の減衰定数などの種々の値に対して、ホワイトノイズ状の不規則外力を受ける1自由度振動系のレベル超過率および初通過破壊確率を計算し、従来考慮されなかった強度のばらつきの影響を詳細に考察した。

なお星谷・Shah、千葉<sup>23), 24)</sup> が指摘しているように、振動系の質量あるいはばね定数等を確率量として応答量を算定すれば、さらに精度の高い初通過破壊確率を推定することができると思われるが、本論文ではそれらの影響については論及していない。

## 2. レベル超過率の算定式

構造物のある主要な点の応力の時間的変動を表わす不規則応答過程  $x(t)$  およびその包絡線過程  $a(t)$  は、いずれも零平均値を有する定常正規確率過程であるとすると(図-1 参照)。この

とき  $x(t)$  および  $a(t)$  の材料強度  $S$  に対するレベル超過率  $\nu_x^+(S)$ ,  $\nu_a^+(S)$  の算定式は以下のように誘導される。なお文中の太文字は、その変数が確率変数であることを示して

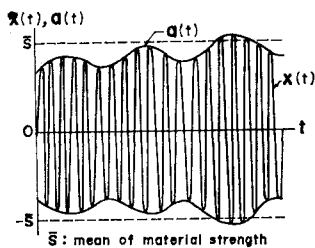


図-1 応答が材料強度を超過する現象の概略図

いる。添字+は  $\nu_x^+(S)$ ,  $\nu_a^+(S)$  が、それぞれ応答およびその包絡線が正の材料強度を正の勾配で越えるレベル超過率であることを意味している。

さて材料強度の確率密度関数(以下では密度関数と省略)を  $f_S(S)$  とするとき、強度が  $S$  と  $S+dS$  との間に存在する確率は次式で与えられる。

$$P(S \leq S \leq S+dS) = f_S(S)dS \dots\dots\dots(1)$$

次に Rice の理論によれば、応答が任意時刻  $t_n$  では  $S$  より小さく、時刻  $t_n+dt$  に正の勾配をもって  $S$  を越える確率は、応答と応答速度  $\dot{x}(t)$  の結合密度関数  $f_{x\dot{x}}(x, \dot{x})$  を用いて次のように示される。

$$P(x(t_n) < S \cap x(t_n+dt) \geq S) = dt \int_0^\infty \dot{x} f_{x\dot{x}}(S, \dot{x}) d\dot{x} \dots\dots\dots(2)$$

さらに材料強度と応答現象が互いに独立であると仮定すれば、強度が  $S$  と  $S+dS$  との間に存在し、かつ応答が微小時間  $dt$  の間に  $S$  を越える確率は、式(1)と式(2)の積として次式のように与えられる。

$$P(S \leq S \leq S+dS \cap x(t_n) < S \cap x(t_n+dt) \geq S) = dt \left\{ \int_0^\infty \dot{x} f_{x\dot{x}}(S, \dot{x}) d\dot{x} \right\} f_S(S) dS \dots\dots(3)$$

したがって材料強度の集合を  $R_S$  で表わせば、応答が  $dt$  の間に材料強度  $S$  を超過する確率が次式によって示される。

$$P(x(t_n) < S \cap x(t_n+dt) \geq S) = dt \int_{R_S} \left\{ \int_0^\infty \dot{x} f_{x\dot{x}}(S, \dot{x}) d\dot{x} \right\} f_S(S) dS \dots\dots\dots(4)$$

よってレベル超過率の一般式は次式で示される。

$$\nu_x^+(S) = \int_{R_S} \left\{ \int_0^\infty \dot{x} f_{x\dot{x}}(S, \dot{x}) d\dot{x} \right\} f_S(S) dS \dots\dots\dots(5)$$

この  $\nu_x^+(S)$  は定常過程を考える限りでは時刻には無関係である。

### (1) 応答過程のレベル超過率

応答が零平均値を有する定常正規確率過程を示す場合、応答と応答速度とは互いに独立であり、相関係数は零である。したがって両者の結合密度関数は、

$$f_{x\dot{x}}(x, \dot{x}) = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_{\dot{x}}} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma_x^2} - \frac{\dot{x}^2}{2\sigma_{\dot{x}}^2}\right) \dots\dots\dots(6)$$

と表わせる。式中  $\sigma_x^2$ ,  $\sigma_{\dot{x}}^2$  はそれぞれ  $x(t)$ ,  $\dot{x}(t)$  の分散である。

式(6)を式(5)に代入して次式が得られる。

$$\nu_x^+(S) = \frac{1}{2\pi} \frac{\sigma_{\dot{x}}}{\sigma_x} \int_{R_S} \exp\left(-\frac{S^2}{2\sigma_x^2}\right) f_S(S) dS \dots\dots\dots(7)$$

さて材料強度の規定は設計思想にかかわる問題であるが、本研究ではとりあえず現行の許容応力度設計法の思想に基づき、材料強度として降伏点を念頭においている。さらに構造用材料の降伏点または耐力が正規分布あるいは対数正規分布を示すことは周知の通りであり、本研究においても材料強度の密度関数としてこれらの密度関数を採用した。また材料の物理的基本性質および材料規約などによって、降伏点あるいは耐力の上限、下限に制約が与えられる場合も当然考えられるので、そのような条件にも対処し得るよう、密度関数が条件付正規あるいは対数正規密度関数で与えられるときの算定式を求めた。

a) 材料強度が条件付正規分布をなす場合

材料強度の確率分布が正規分布で与えられ、さらにその上限、下限がそれぞれ有限値  $S_u, S_l$  で規定される場合には、密度関数は次式で示される。

$$f_S(S) = \frac{1}{\sqrt{2} \sigma_S \{ \text{Erf}(\lambda_l/\sqrt{2}) - \text{Erf}(\lambda_u/\sqrt{2}) \}} \cdot \exp\left\{-\frac{(S-\bar{S})^2}{2\sigma_S^2}\right\} \dots\dots\dots(8)$$

ここに、 $\bar{S}, \sigma_S$  はそれぞれ強度の平均値と標準偏差であり、 $\lambda_u, \lambda_l, \text{Erf}(\ )$  は次の通りである。

$$\lambda_u = \frac{S_u - \bar{S}}{\sigma_S}, \quad \lambda_l = \frac{S_l - \bar{S}}{\sigma_S} \dots\dots\dots(9)$$

$$\text{Erf}(y) = \int_y^\infty \exp(-z^2) dz : \text{誤差関数} \dots\dots\dots(10)$$

式(8)を式(7)に代入して次式が得られる。

$$\nu_{x, CN^+}(S) = \frac{\sigma_x}{2\sqrt{2}\pi\sigma_x\sigma_S \{ \text{Erf}(\lambda_l/\sqrt{2}) - \text{Erf}(\lambda_u/\sqrt{2}) \}} \cdot \int_{S_l}^{S_u} \exp\left(-\frac{S^2}{2\sigma_x^2}\right) \exp\left\{-\frac{(S-\bar{S})^2}{2\sigma_S^2}\right\} dS \dots\dots\dots(11)$$

$\nu_{x, CN^+}(S)$  は強度が条件付正規分布をなすときのレベル超過率を表わし、以下においても同様に、添字  $N, CLN, LN$  はそれぞれ強度が無条件正規分布、条件付対数正規分布、無条件対数正規分布をなすことを示している。

さて式(11)の右辺の定積分  $I$  は誤差関数によって表わせる。すなわち、

$$I = \sqrt{\frac{2\sigma_x^2\sigma_S^2}{\sigma_x^2 + \sigma_S^2}} \exp\left\{-\frac{(\bar{S}^2 - 2\sigma_S^2)\sigma_x^2 + 2\sigma_S^5}{2\bar{S}\sigma_S^2(\sigma_x^2 + \sigma_S^2)}\right\} \cdot \left[ \text{Erf}\left\{\frac{(\sigma_x^2 + \sigma_S^2)S_l - \bar{S}\sigma_x^2}{\sqrt{2}\sigma_x\sigma_S\sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_S^2}}\right\} - \text{Erf}\left\{\frac{(\sigma_x^2 + \sigma_S^2)S_u - \bar{S}\sigma_x^2}{\sqrt{2}\sigma_x\sigma_S\sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_S^2}}\right\} \right] \dots\dots\dots(12)$$

となる。ここで次の無次元パラメーターを導入する。  
 $\delta_S = \sigma_S/\bar{S}$  (材料強度の変動係数)  $\dots\dots\dots(13)$   
 $\bar{m} = \bar{S}/\sigma_x$  (材料強度の平均値と応答の

$$\text{r.m.s. 値との比}) \dots\dots\dots(14)$$

$\delta_S$  は材料強度のばらつきの程度を表わし、 $\bar{m}$  はいわば動的信頼性解析における中央安全率ともいふべきパラメーターであり、いずれもレベル超過率あるいは初通過破壊確率を決定する主要な無次元パラメーターである。

さらに強度の上、下限をそれぞれ

$$S_u = \bar{S} + \kappa_u \sigma_S, \quad S_l = \bar{S} - \kappa_l \sigma_S \dots\dots\dots(15)$$

とすれば、式(9)より

$$\lambda_u = \kappa_u, \quad \lambda_l = -\kappa_l \dots\dots\dots(16)$$

なる関係が成立することは明らかである。

式(15)を式(12)に代入し、さらに式(13),(14)の関係を考慮し、得られた  $I$  の値と式(16)を式(11)に代入すれば、材料強度が条件付正規分布する場合のレベル超過率の算定式として次式が得られる。

$$\nu_{x, CN^+}(S) = \frac{\sigma_x}{2\pi\sqrt{1+\bar{m}^2\delta_S^2}\sigma_x} \cdot \frac{\text{Erf}(\alpha_l/\sqrt{2}) - \text{Erf}(\alpha_u/\sqrt{2})}{\text{Erf}(-\kappa_l/\sqrt{2}) - \text{Erf}(\kappa_u/\sqrt{2})} \cdot \exp\left\{-\frac{\bar{m}^2}{2(1+\bar{m}^2\delta_S^2)}\right\} \dots\dots\dots(17)$$

式中、

$$\left. \begin{aligned} \alpha_l &= \frac{\bar{m}^2\delta_S - (1+\bar{m}^2\delta_S^2)\kappa_l}{\sqrt{1+\bar{m}^2\delta_S^2}} \\ \alpha_u &= \frac{\bar{m}^2\delta_S + (1+\bar{m}^2\delta_S^2)\kappa_u}{\sqrt{1+\bar{m}^2\delta_S^2}} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(18)$$

b) 材料強度が正規分布する場合

この場合は、前項の式(17)において  $\kappa_l \rightarrow \infty, \kappa_u \rightarrow \infty$  とすれば所要の算定式が得られる。このとき式(18)より  $\alpha_l \rightarrow -\infty, \alpha_u \rightarrow \infty$  であることは明らかで、したがって

$$\left. \begin{aligned} \text{Erf}(-\kappa_l/\sqrt{2}) &= \text{Erf}(\alpha_l/\sqrt{2}) = \sqrt{\pi} \\ &(\kappa_l \rightarrow \infty, \alpha_l \rightarrow -\infty) \\ \text{Erf}(\kappa_u/\sqrt{2}) &= \text{Erf}(\alpha_u/\sqrt{2}) = 0 \\ &(\kappa_u \rightarrow \infty, \alpha_u \rightarrow \infty) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(19)$$

となる。

式(19)を式(17)に代入して次式を得る。

$$\nu_{x, N^+}(S) = \frac{\sigma_x}{2\pi\sqrt{1+\bar{m}^2\delta_S^2}\sigma_x} \cdot \exp\left\{-\frac{\bar{m}^2}{2(1+\bar{m}^2\delta_S^2)}\right\} \dots\dots\dots(20)$$

c) 材料強度が条件付対数正規分布する場合

材料強度の上、下限が式(15)で与えられるものとすれば、密度関数は次式で表わせる。

$$f_S(S) = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}\pi\sigma_S S \{ \text{Erf}*(\beta_l/\sqrt{2}) - \text{Erf}*(\beta_u/\sqrt{2}) \}} \cdot \exp\left\{-\frac{(\ln S^* - \bar{S})^2}{2\sigma_{S^*}^2}\right\} \dots\dots\dots(21)$$

式中、

$$\left. \begin{aligned} S^* &= \ln S \\ \sigma_{S^*} &= \sqrt{\ln(1+\delta_S^2)} \\ \bar{S}^* &= \ln \bar{S} - 0.5 \sigma_{S^*}^2 = \ln(\bar{S}/\sqrt{1+\delta_S^2}) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(22)$$

$$\left. \begin{aligned} \beta_l &= \frac{\ln\{(1-\kappa_l\delta_S)\sqrt{1+\delta_S^2}\}}{\sqrt{\ln(1+\delta_S^2)}} \\ \beta_u &= \frac{\ln\{(1+\kappa_u\delta_S)\sqrt{1+\delta_S^2}\}}{\sqrt{\ln(1+\delta_S^2)}} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(23)$$

式 (21) を式 (7) に代入すれば

$$\begin{aligned} \nu_{x,CLN^+}(S) &= \frac{\sqrt{\pi} \sigma_x}{(2\pi)^{2/3} \sigma_x \sigma_{S^*} \{ \text{Erf}(\beta_l/\sqrt{2}) - \text{Erf}(\beta_u/\sqrt{2}) \}} \\ &\cdot \int_{S_l}^{S_u} \frac{1}{S} \exp\left(-\frac{S^2}{2\sigma_x^2}\right) \\ &\cdot \exp\left\{-\frac{(S^* - \bar{S}^*)^2}{2\sigma_{S^*}^2}\right\} dS \dots\dots\dots(24) \end{aligned}$$

が得られ, これを  $\bar{m}$  と  $\delta_S$  を用いて書き改めれば次のようになる.

$$\begin{aligned} \nu_{x,CLN^+}(S) &= \frac{\sigma_x}{4\sqrt{2\pi} \sigma_x \sqrt{\ln(1+\delta_S^2)} \{ \text{Erf}(\beta_l/\sqrt{2}) - \text{Erf}(\beta_u/\sqrt{2}) \}} \\ &\cdot \int_{R_l}^{R_u} \exp(-z) \frac{1}{z} \\ &\cdot \exp\left[-\frac{\{\ln\sqrt{2(1+\delta_S^2)}z - \ln \bar{m}\}^2}{2\ln(1+\delta_S^2)}\right] dz \dots\dots\dots(25) \end{aligned}$$

式中,

$$\left. \begin{aligned} R_l &= \frac{\bar{m}^2(1-\kappa_l\delta_S)^2}{2}, \quad R_u = \frac{\bar{m}^2(1+\kappa_u\delta_S)^2}{2} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(26)$$

ただし右辺の定積分は数値積分に頼らざるを得ない.

d) 材料強度が対数正規分布する場合

この場合は式 (25) において  $\kappa_l \rightarrow \bar{S}/\sigma_S = 1/\delta_S$ ,  $\kappa_u \rightarrow \infty$  とすればよい. このとき式 (23) より  $\beta_l \rightarrow -\infty$ ,  $\beta_u \rightarrow \infty$ , さらに式 (26) より  $R_l \rightarrow 0$ ,  $R_u \rightarrow \infty$  となることがわかる.

したがって式 (25) において

$$\left. \begin{aligned} \text{Erf}(\beta_l/\sqrt{2}) &= \sqrt{\pi} \quad (\beta_l \rightarrow -\infty) \\ \text{Erf}(\beta_u/\sqrt{2}) &= 0 \quad (\beta_u \rightarrow \infty) \\ R_l &= 0 \quad (\kappa_l \rightarrow 1/\delta_S) \\ R_u &= \infty \quad (\kappa_u \rightarrow \infty) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(27)$$

として所要の式を得ることができる.

$$\begin{aligned} \nu_{x,LN^+}(S) &= \frac{\sigma_x}{4\pi\sqrt{2\pi} \sigma_x \sqrt{\ln(1+\delta_S^2)}} \int_0^\infty \exp(-z) \frac{1}{z} \\ &\cdot \exp\left[-\frac{\{\ln\sqrt{2(1+\delta_S^2)}z - \ln \bar{m}\}^2}{2\ln(1+\delta_S^2)}\right] dz \end{aligned} \dots\dots\dots(28)$$

なお右辺の定積分は  $\int_0^\infty \exp(-z) f(z) dz$  の型を有しており, Gauss の数値積分法<sup>25)</sup>などを使用して数値積分

を行うことができる.

(2) 包絡線過程のレベル超過率

狭帯域正規確率過程の包絡線過程もまた確率過程であり, その表示方法としてはやはり Rice<sup>9)</sup> によるものが一般的である. この Rice の理論に基づき, Lyon<sup>21)</sup> は狭帯域定常正規確率過程に対する包絡線過程  $a(t)$  の変位と速度の結合密度  $f_{a\dot{a}}(a, \dot{a})$  を次式のように求めた.

$$f_{a\dot{a}}(a, \dot{a}) = \frac{a}{\sqrt{2\pi} \sigma_x^2 \sigma_1} \exp\left(-\frac{a^2}{2\sigma_x^2} - \frac{\dot{a}^2}{2\sigma_1^2}\right) \dots\dots\dots(29)$$

式中,

$$\sigma_1^2 = \sigma_x^2 - \omega_m^2 \sigma_x^2 \dots\dots\dots(30)$$

であり,  $\omega_m$  は狭帯域のなかの代表的周波数である.

さて包絡線過程のレベル超過率  $\nu_a^+(S)$  が, 式 (5) における  $\dot{x} f_{x\dot{x}}(S, \dot{x}) d\dot{x}$  の代わりに  $\dot{a} f_{a\dot{a}}(S, \dot{a}) d\dot{a}$  と置くことによって得られることは明らかである. すなわち

$$\nu_a^+(S) = \int_{R_S} \left[ \int_0^\infty \dot{a} f_{a\dot{a}}(S, \dot{a}) d\dot{a} \right] f_S(S) dS \dots\dots\dots(31)$$

が成立するので, これに式(29)を代入して次式を得る.

$$\nu_a^+(S) = \frac{\sigma_1}{\sqrt{2\pi} \sigma_x^2} \int_{R_S} S \exp\left(-\frac{S^2}{2\sigma_x^2}\right) f_S(S) dS \dots\dots\dots(32)$$

a) 材料強度が条件付正規分布をなす場合

材料強度の密度関数は式 (8) で与えられるので, これを式 (32) に代入すると,

$$\begin{aligned} \nu_{a,CN^+}(S) &= \frac{\sigma_1}{2\sqrt{\pi} \sigma_x \sigma_x^2 \{ \text{Erf}(-\kappa_l/\sqrt{2}) - \text{Erf}(\kappa_u/\sqrt{2}) \}} \\ &\cdot \int_{S_l}^{S_u} S \exp\left(-\frac{S^2}{2\sigma_x^2}\right) \exp\left\{-\frac{(S-\bar{S})^2}{2\sigma_{S^*}^2}\right\} dS \end{aligned} \dots\dots\dots(33)$$

となる. 右辺の定積分はやはり誤差関数によって表わされ, さらに式 (13), (14) で定義した  $\delta_S, \bar{m}$  を用いれば, 式 (33) は次式のように書き改められる.

$$\begin{aligned} \nu_{a,CN^+}(S) &= \frac{\bar{m} \delta_S \sigma_1}{2\sqrt{\pi} \sigma_x (1+\bar{m}^2 \delta_S^2) \{ \text{Erf}(-\kappa_l/\sqrt{2}) - \text{Erf}(\kappa_u/\sqrt{2}) \}} \\ &\cdot \exp\left(-\frac{1}{2\delta_S^2}\right) \times \left[ \exp(r_l) - \exp(r_u) \right] \\ &+ \frac{\sqrt{2}}{\delta_S \sqrt{1+\bar{m}^2 \delta_S^2}} \exp\left\{\frac{1}{2\delta_S^2(1+\bar{m}^2 \delta_S^2)}\right\} \\ &\cdot \left\{ \text{Erf}\left(\frac{\alpha_l}{\sqrt{2}}\right) - \text{Erf}\left(\frac{\alpha_u}{\sqrt{2}}\right) \right\} \dots\dots\dots(34) \end{aligned}$$

ここに,

$$\left. \begin{aligned} r_l &= \frac{-(1+\bar{m}^2\delta_s^2)\delta_s^2\kappa_l^2+2\bar{m}^2\delta_s^3\kappa_l+(1-\bar{m}^2\delta_s^2)}{2\delta_s^2} \\ r_u &= \frac{-(1+\bar{m}^2\delta_s^2)\delta_s^2\kappa_u^2-2\bar{m}^2\delta_s^3\kappa_u+(1-\bar{m}^2\delta_s^2)}{2\delta_s^2} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(35)$$

b) 材料強度が正規分布する場合

式 (34) において  $\kappa_l \rightarrow \infty, \kappa_u \rightarrow \infty$  とすれば所要の算定式が得られることは明らかである。このとき式 (35) を考慮すれば  $\exp(r_l) - \exp(r_u)$  の項は零になり、また式 (19) を用いれば、結局次式が成立する。

$$\nu_{a,N^+}(S) = \frac{\bar{m}\sigma_1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x(1+\bar{m}^2\delta_s^2)^{3/2}} \cdot \exp\left\{-\frac{\bar{m}^2}{2(1+\bar{m}^2\delta_s^2)}\right\} \dots\dots\dots(36)$$

c) 材料強度が条件付対数正規分布する場合

強度の密度関数は式 (21) で与えられるので、これを式 (32) に代入して

$$\begin{aligned} \nu_{a,CLN^+}(S) &= \frac{\sigma_1}{2\sqrt{\pi}\sigma_x\sigma_s\{\text{Erf}(\beta_l/\sqrt{2})-\text{Erf}(\beta_u/\sqrt{2})\}} \\ &\cdot \int_{S_l}^{S_u} \exp\left(-\frac{S^2}{2\sigma_x^2}\right) \exp\left\{-\frac{(S^*-\bar{S}^*)^2}{2\sigma_s^{*2}}\right\} dS \end{aligned} \dots\dots\dots(37)$$

を得る。式 (37) を  $\bar{m}, \delta_s$  によって書きなおし、次式が得られる。

$$\begin{aligned} \nu_{a,CLN^+}(S) &= \frac{\sigma_1}{2\sqrt{2\pi}\sigma_x\sqrt{\ln(1+\delta_s^2)}\{\text{Erf}(\beta_l/\sqrt{2})-\text{Erf}(\beta_u/\sqrt{2})\}} \\ &\cdot \int_{R_l}^{R_u} \exp(-z) \frac{1}{\sqrt{z}} \\ &\cdot \exp\left\{-\frac{(\ln\sqrt{2(1+\delta_s^2)z}-\ln\bar{m})^2}{2\ln(1+\delta_s^2)}\right\} dz \end{aligned} \dots\dots(38)$$

式中の記号については前述の通りである。

d) 材料強度が対数正規分布する場合

この場合は式 (38) の中に陰に含まれているパラメーター  $\kappa_l, \kappa_u$  をそれぞれ  $1/\delta_s$  および無限大にすればよいことは (1) の d) と同様である。したがって式 (27) を用いれば次式が得られる。

$$\begin{aligned} \nu_{a,LN^+}(S) &= \frac{\sigma_1}{2\sqrt{2\pi}\sigma_x\sqrt{\ln(1+\delta_s^2)}} \int_0^\infty \exp(-z) \frac{1}{\sqrt{z}} \\ &\cdot \exp\left\{-\frac{(\ln\sqrt{2(1+\delta_s^2)z}-\ln\bar{m})^2}{2\ln(1+\delta_s^2)}\right\} dz \end{aligned} \dots\dots\dots(39)$$

式 (17), (20), (25), (28) に見られるように、定常応答過程のレベル超過率は、応答および応答速度の r.m.s. 値  $\sigma_x, \sigma_{\dot{x}}$  と、材料強度の平均値と  $\sigma_x$  との比  $\bar{m}$  および材料強度の変動係数  $\delta_s$  という 4 つのパラメーターにより決定されることがわかる。また包絡線過程のレベル超過率は、これらのパラメーターに加えて、式 (30) に含

まれる狭帯域のなかの代表的周波数  $\omega_m$  が必要であることが、式 (34), (36), (38), (39) より理解できる。

### 3. 初通過破壊確率の近似解

定常不規則応答過程の初通過破壊確率は、Chapman-Kolmogorov 方程式あるいは Fokker-Planck 方程式を解けば求められるが、いまだに 1 自由度振動系の不規則応答の問題に対してさえも厳密解は得られていない。というよりは、不規則過程の確率構造が完全に記述できない限り、すなわち任意次数の結合確率密度関数を求めることができない限り、厳密解を得ることは不可能である。したがってポアソン近似をはじめ、各種の近似解法が提案されてきたが、本研究ではこのポアソン近似による方法と、Lyon<sup>21)</sup> によって提案された包絡線過程による方法にしたがって初通過破壊確率の算定式を定める。なお構造物の破壊問題を考える場合には、当然引張側と圧縮側の破壊を対象にしなければならない。したがって応答過程あるいは包絡線過程のレベル超過率としては、上述の  $\nu_x^+(S), \nu_a^+(S)$  に、それぞれ  $\nu_x^-(S), \nu_a^-(S)$  を加えたものを考えなければならない。ここに  $\nu_x^-(S), \nu_a^-(S)$  はそれぞれ応答過程および包絡線過程が負の材料強度を負なる勾配で超えるレベル超過率である。しかし引張強度と圧縮強度が等しい場合には、 $\nu_x^+(S) = \nu_x^-(S), \nu_a^+(S) = \nu_a^-(S)$  なる関係が成立することは明らかである。すなわちこのときには、両レベル超過率は  $2\nu_x^+(S), 2\nu_a^+(S)$  となる。

#### (1) ポアソン近似による方法

これは周知の通り、ある時刻に応答が材料強度を越える現象と、それ以前に応答がその強度を越えた現象とが互いに独立であるという仮定に基づく方法である。定常応答過程におけるレベル超過率は時間に無関係であり、したがって定常増分を有するポアソン過程の理論より、初通過破壊確率  $P_f(\tau)$  は、材料の引張強度と圧縮強度が等しい場合には、次式によって与えられる。

$$P_f(\tau) = 1 - \exp(-2\nu_x^+(S)\tau) \dots\dots\dots(40)$$

ここに  $\tau$  は振動の継続時間を表す。

上述の仮定から明らかなように、この方法は材料強度と応答にかなりの差がなければ、精度が非常に落ちる。すなわち前述のパラメーター  $\bar{m}$  が比較的大きい領域において使用し得る方法であるといえる。

#### (2) 包絡線過程による方法

一般に狭帯域周波数特性を示す応答過程を注意深く観察すると、図-2 に示すように、応答があるレベルを一

生じ易いことがわかる。すなわち応答と材料強度に大きな差がある場合を除き、応答の強度超過現象は密集 (clump) 状態で生じるといえよう。そのような場合には、近接した 2 時刻における応答の強度超過現象が互いに独立であるとの仮定は成立し難い。

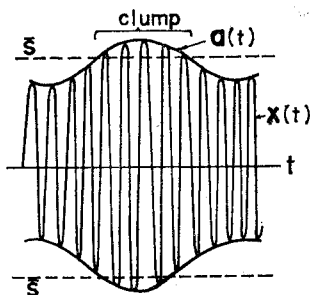


図-2 clump の概念図

包絡線過程による方法は、このポアソン近似の欠陥を補おうとするもので、Lyon によって提案されたものであり、ある時刻に包絡線が強度を越える現象と、それ以前に包絡線が強度を越えた現象とが互いに独立であるとする方法である。この場合は包絡線過程のレベル超過率を用いて、 $P_f(\tau)$  は次式で与えられる。

$$P_f(\tau) = 1 - \exp(-2\nu_a^+(S)\tau) \dots\dots\dots (41)$$

4. 数値計算結果および考察

本章では線型 1 自由度振動系にホワイトノイズ状の定常不規則外力が作用するときのレベル超過率および初通過破壊確率を、それぞれ 2., 3. の算定式に基づいて計算し、主として材料強度のばらつきの大きさとこれらの値との関係を考察する。もちろん理想的なホワイトノイズ状の不規則外力は存在しない。しかし振動系の減衰が小さいという条件のもとでは、ホワイトノイズとして近似計算した応答の分散が、厳密なスペクトル解析による分散に対する良好な近似値となり得ることは自明であり、よってホワイトノイズスペクトルを示す外力に対する応答解析と、その結果に基づいて計算したレベル超過率などに対する考察は重要な意味をもっている。

さて振動方程式は減衰定数を  $\zeta$ 、固有円振動数を  $\omega_0$ 、時刻  $t$  における単位質量当りの外力を  $f(t)$  で表わすと次式の通りである。

$$\ddot{y} + 2\zeta\omega_0\dot{y} + \omega_0^2 y = f(t) \dots\dots\dots (42)$$

ここに、 $y$  は振動変位を、 $\dot{y}$ ,  $\ddot{y}$  はそれぞれ速度、加速度を示す。いま外力  $f(t)$  が円振動数  $\omega$  に無関係な、一様なパワースペクトル密度関数  $S_0$  を有する定常確率過程であるとすれば、不規則振動論により、変位のパワースペクトル密度関数  $S_{yy}(\omega)$  は、次式で与えられる<sup>26)</sup>。

$$S_{yy}(\omega) = \frac{S_0}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\zeta\omega_0\omega)^2} \dots\dots\dots (43)$$

さらに  $y(t)$  と、系の代表的な点のある種の応力、すなわち前述の記号で示せば  $x(t)$  とに線型関係の存在す

るような振動系を想定し、

$$x(t) = cy(t)$$

なる関係が成立するものとする。ここに  $c$  は、長さ・質量・時間に対する基本単位をそれぞれ  $L, M, T$  とすると、 $M^{-1}L^2T^2$  なる次元を有する定数であり、系の特性によって決まる。このとき  $x(t)$  のパワースペクトル密度関数  $S_{xx}(\omega)$  と  $S_{yy}(\omega)$  との間には明らかに

$$S_{xx}(\omega) = c^2 S_{yy}(\omega)$$

なる関係が存在するので、式(43)より次式が得られる。

$$S_{xx}(\omega) = \frac{c^2 S_0}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\zeta\omega_0\omega)^2} \dots\dots\dots (44)$$

よって

$$\sigma_x^2 = \int_{-\infty}^{\infty} S_{xx}(\omega) d\omega = \frac{\pi c^2 S_0}{2\zeta\omega_0^3} \dots\dots\dots (45)$$

$$\sigma_x^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 S_{xx}(\omega) d\omega = \frac{\pi c^2 S_0}{2\zeta\omega_0} \dots\dots\dots (46)$$

$$\sigma_x = \omega_0 \sigma_x \dots\dots\dots (47)$$

次に式 (30) に示した  $\sigma_1^2$  を計算する場合、 $\omega_m$  として  $\omega_0$  を用いれば、式 (47) より  $\sigma_1 = 0$  となり、包絡線過程が成立し得なくなる。この不都合を免がれるため Lyon の方法を踏襲する。すなわち図-3 の実線で示した実際の応答スペクトル  $S_{xx}(\omega)$  を、高さが  $S_{xx}(\omega)$  のピークに等しく、面積が  $\sigma_x^2$  に等しくなるような矩形スペクトル  $S_{xx}^*(\omega)$  で置換し、この置換スペクトルを応答スペクトルとみなすという条件のもとに  $\omega_0$  を  $\omega_m$  として  $\sigma_1^2$  を計算する。このとき次式が得られる。

$$\sigma_1^2 = \frac{\pi^2 \zeta^2 \omega_0^2}{12} \sigma_x^2 \dots\dots\dots (48)$$

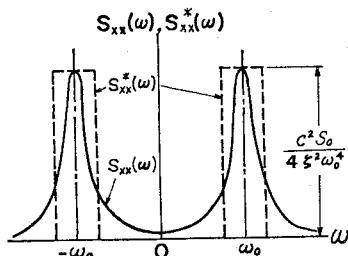


図-3 置換スペクトル

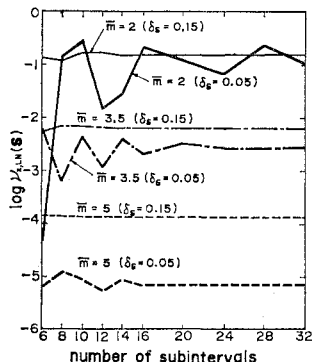


図-4 Gauss の方法による数値積分の収束性

式 (47), (48) と前述の各算定式より, 狭帯域正規応答過程とその包絡線過程のレベル超過率および初通過破壊確率は, いずれも 4 つのパラメーター  $\bar{m}$ ,  $\delta_s$ ,  $\zeta$ ,  $\omega_0$  によって計算されることがわかる. 以下  $\omega_0$  を  $2\pi$  rad/sec とし,  $\bar{m}$ ,  $\delta_s$ ,  $\zeta$  の値を適当に組み合わせて求めた計算結果について考察する. それに先立ち, 計算途上で用いた Gauss の方法による数値積分の収束性の状態を図-4 に示す. 図から  $\bar{m}=2$ ,  $\delta_s=0.05$  のように  $\bar{m}$ ,  $\delta_s$  が小さい場合には収束性はあまり良くないが, これらの値が大きくなるにしたがって良好になり, たとえば  $\bar{m}=5$  の場合には  $\delta_s$  が 0.05 のように小さくても分点数が 10 程度で, すでに積分値が収束していることがわかる.

(1) レベル超過率に関する結果と考察

a) 応答過程のレベル超過率

材料強度を確率量とした結果と確定量とした結果の差異を図-5 によって示す. いずれも  $\bar{m}$  の増大とともにレベル超過率が小さくなることはいうまでもないが,  $\bar{m}$  に対する変化率が強度のばらつきが大きくなるにしたがって小さくなっていることがわかる.

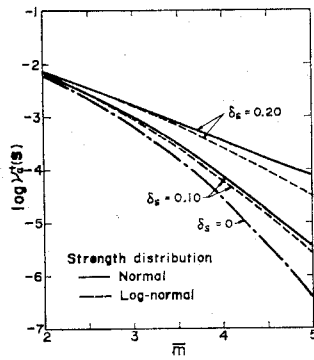


図-5  $\bar{m}$  と  $\nu_{x^+}(S)$  との関係

工学的にいい方をすれば, 構造用材料として強度のばらつきが大きい材料を使用する場合には, 断面性能を多少高めても部材の信頼度をそれほど大きくすることはできないといえるであろう. さらに強度が正規分布する場合の方が対数正規分布する場合よりもその傾向が強くなることもわかる. つまり図-5 は感覚的にもわかるばらつきの大きい材料の効率の悪さを定量的に示している. 材料強度を確定量とした従来の研究では, この事実を明確にできない.

次に材料強度の変動係数に対するレベル超過率の変化を図-6 に示す. 明らかに変動係数の影響は,  $\bar{m}$  の値が大きいほど著しい. また材料強度の確率分布型の影響についても, 強度の変動係数が

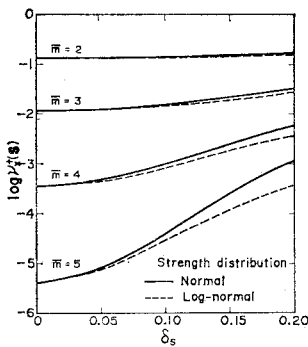


図-6  $\delta_s$  と  $\nu_{x^+}(S)$  との関係

小さい範囲では, 正規分布としても, 対数正規分布としてもレベル超過率に著しい差異は認められないが, 変動係数が大きくなればその影響を無視できないことがわかる. すなわちその場合には, 正規分布とした場合の方がかなり大きいレベル超過率を与える.

b) 包絡線過程のレベル超過率

図-7 は  $\zeta$  を 0.01 としたときの  $\bar{m}$  とレベル超過率との関係を示したものである. 図より両者の関係については, 応答過程のレベル超過率に対する考察がそのまま成立することがわかる. さらに図-8 に示すように材料強度の変動係数および確率分布型の影響についても応答過程の場合と同様の傾向がある. 図では  $\zeta$  が 0.01 の場合しか示していないが,  $\zeta$  が大きくなっても強度のばらつきの大きさおよび分布型とレベル超過率との関係は定性的には変わらない結果が得られている.

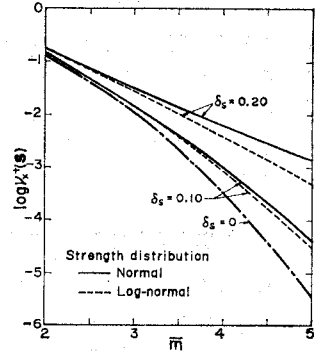


図-7  $\bar{m}$  と  $\nu_{x^+}(S)$  との関係 ( $\zeta=0.01$ )

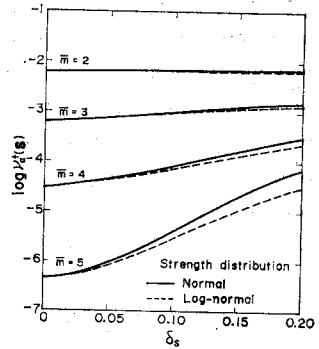


図-8  $\delta_s$  と  $\nu_{x^+}(S)$  との関係 ( $\zeta=0.01$ )

c) 応答過程と包絡線過程とのレベル超過率の比較

図-9 は材料強度を対数正規分布としたときの応答過程および包絡線過程のレベル超過率を比較したものである. 図より振動系の減衰定数および  $\bar{m}$  の値が小さいほど両者の差異が大きくなることわかる. 特に減衰定数の影響が著しい. これは減衰定数が小さくなるほど応答は狭帯域の周波数特性を示し, さらに強度と応答との差が小さくなるにしたがって, 前述した clump が平均的な意味で大きくなるため

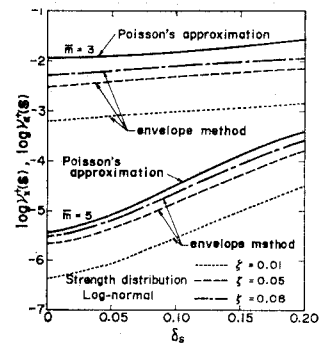


図-9  $\nu_{x^+}(S)$  と  $\nu_{e^+}(S)$  との比較

である。この傾向は材料強度の変動係数にはあまり関係しないことも図より明らかである。したがって限界レベルが高く、応答過程が広帯域であるほどポアソン近似による方法の精度が期待でき、応答過程が狭帯域である場合には、包絡線過程による方法がより合理的なアプローチになるというレベル超過率に対する従来の研究結果は、材料強度のばらつきの大きさを問わず成立するものと思われるが、両近似法の精度については、シミュレーションなどの方法により検討しなければならないと考えている。

(2) 初通過破壊確率に関する結果と考察

前節の計算結果を用いて、3. の各式にしたがって初通過破壊確率を計算した。図10 (a)~(d) は材料強度が正規分布として求めた結果であり、振動の継続時間  $\tau$  を系の固有周期  $T_0$  で除した無次元継続時間に対する変化を示している。材料強度が対数正規分布をなす場合についてもほとんど同様である。以下図に基づいて考察を進めるが、破壊確率が1に近い時間領域における考察は、実存するあるいは将来構築される建造物の破壊確率がそれよりもはるかに小さい値で設計され、あるいはされることを考えるとき、あまり意味がないように思われる。したがって破壊確率がそれほど大きくない振動の継続時間領域における結果について考察する。図から、 $\bar{m}$  が大きいほど破壊確率は小さくなるという当然の結果はともかく、前述の2つの方法による近似解は  $\bar{m}$  と系の減衰定数が小さいほど著しい差異を示し、この傾向が材料強度のばらつきの大きさにはほとんど無関係であることがわかる。たとえば  $\bar{m}$  が 3.0,  $\zeta$  が 0.01 の場合 (図10 (a)) には、 $\delta_s$  の大きさにかかわらず  $\tau/T_0 < 100$  の領域で両近似解に約1桁以上も

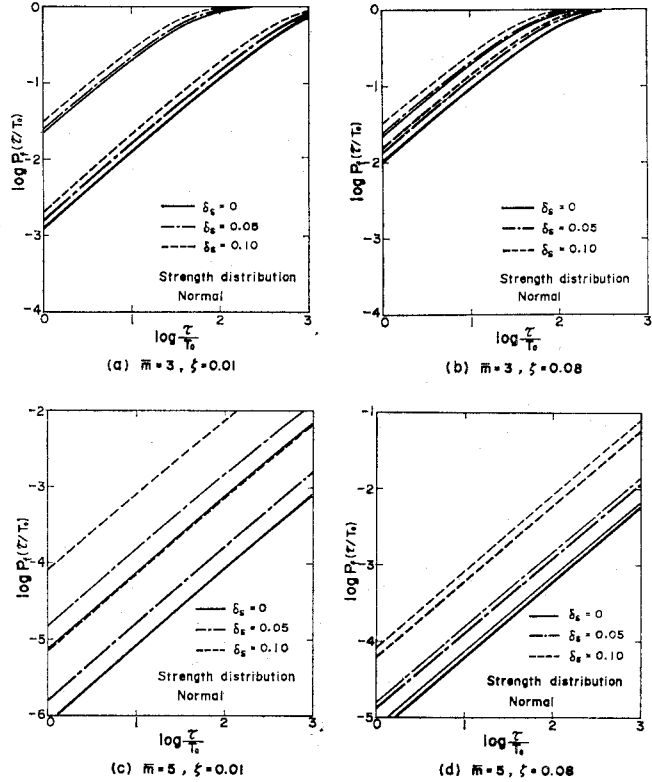


図10 初通過破壊確率 (細線：ポアソン近似による方法，太線：包絡線過程による方法)

の差が認められるのに対して、 $\bar{m}$  が 5.0,  $\zeta$  が 0.08 の場合 (図10 (d)) には両者にほとんど差異が認められない。

次に材料強度のばらつきが破壊確率におよぼす影響を考察するために、特に  $\tau/T_0$  が 100 のときの破壊確率と強度の変動係数との関係を 図11 (a)~(c) に示す。 $\bar{m}$  の値が大きいときほど破壊確率が強度のばらつきの大きさに鋭敏に影響されていることは、レベル超過率の場合と同様である。一例として 図11 (a) に示したくが 0.01 である場合を例にとりて、包絡線過程による結果

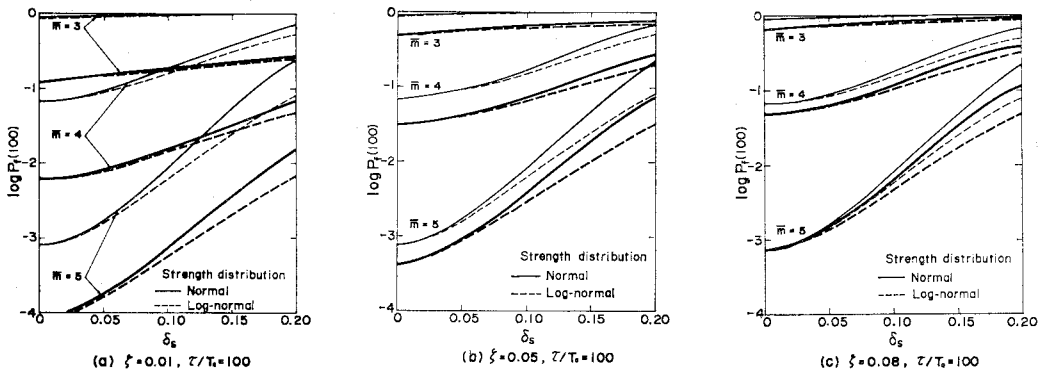


図11  $\delta_s$  と初通過破壊確率との関係 (細線：ポアソン近似による方法，太線：包絡線過程による方法)



に基づき具体的な説明を加える。いま  $\bar{m}$  を 3.0 とするとき、強度にばらつきがないものとするれば  $P_f=1.19 \times 10^{-3}$ 、強度が変動係数が 0.20 であるような正規分布をするものとするれば  $P_f=2.69 \times 10^{-3}$  で両者にそれほど大きな差異は認められない。それに対して  $\bar{m}$  を 5.0 とすれば、おのおの  $8.47 \times 10^{-5}$ 、 $1.54 \times 10^{-2}$  と顕著な差異が生ずることがわかる。したがってこのような場合、材料強度のばらつきを無視して動的破壊確率の推定値を求めることは不相当であると思われる。

次に材料強度の確率分布型の影響についても、これらの図をもって考察することができる。すなわち、 $\bar{m}$ 、 $\delta_S$  が小さい場合には分布型の影響はあまり見られない。しかし  $\bar{m}$  が 4.0 を越え、 $\delta_S$  が 0.1 よりも大きくなるとわずかながら両分布型による差異が大きくなる。たとえば  $\zeta=0.01$ 、 $\bar{m}=5.0$ 、 $\delta_S=0.20$  の場合 (図-11 (a))、包絡線過程による結果では正規分布、対数正規分布に対して  $P_f=1.54 \times 10^{-2}$ 、 $6.41 \times 10^{-3}$  となって、強度を正規分布とする方がかなり大きな破壊確率を与えることがわかる。

(3) 信頼性設計によるばね剛度について

さてスペクトル強度が  $S_0$  なる不規則外力を受ける振動系の所要ばね剛度  $k$  は、信頼性設計によれば当然材料強度のばらつきに影響されるはずである。以下数値計算によって、強度のばらつきの大きさと、系に所定の信頼度を与える所要ばね剛度との関係を検討する。なお設計条件は  $\zeta=0.01$ 、 $\tau=100 T_0$  とし、材料強度は正規分布するものとする。

いま質量を  $m$  とすると、応力すなわち応答の r.m.s. 値  $\sigma_x$  は、式 (45) から直ちに与えられる。すなわち

$$\sigma_x = \left( \frac{\pi c^2 S_0}{2 \zeta \omega_0^3} \right)^{1/2} = \left( \frac{\pi c^2 S_0}{2 \zeta} \right)^{1/2} \left( \frac{m}{k} \right)^{3/4} \dots (49)$$

となり、よって次式が成立する。

$$\bar{m} = \frac{\bar{S}}{\sigma_x} = \bar{S} \left( \frac{2 \zeta}{\pi c^2 S_0} \right)^{1/2} \left( \frac{k}{m} \right)^{3/4} \dots (50)$$

したがってばね剛度は次式により与えられる。

$$k = \left( \frac{\pi^2 c^4 S_0^2 m^3}{4 \zeta^2 \bar{S}^4} \right)^{1/3} \bar{m}^{4/3} \dots (51)$$

さて 図-12 は材料強度が正規分布するとして、前述の設計条件下における初通過破壊確率と  $\bar{m}$  との関係を示す。包絡線過程による方法によって算出した結果である。設計条件としてある信頼度を設定すれば、この図より  $\bar{m}$  を求めることができるので、式 (51) によりその信頼度に対する所要ばね剛度を決定することができる。いま材料強度のばらつきを無視し、設計時の信頼度を  $1-10^{-3}$  としたときの  $\bar{m}$  およびばね剛度をそれぞれ  $\bar{m}_0$ 、 $k_0$  とすれば、他の力学量が確定量として与えられるときには、式 (51) より次式が得られる。

表-1 設計ばね剛度 ( $\times 1/k_0$ )

信頼度 $\delta_S$	0	0.05	0.10	0.15	0.20
$1-10^{-3}$	1.000	1.038	1.136	1.376	2.005
$1-10^{-4}$	1.153	1.199	1.376	1.812	3.423
$1-10^{-5}$	1.311	1.364	1.610	2.369	7.415

$$k = \left( \frac{\bar{m}}{\bar{m}_0} \right)^{4/3} k_0 \dots (52)$$

信頼度を  $1-10^{-3}$ 、 $1-10^{-4}$ 、 $1-10^{-5}$  と設定し、図-12 と式 (52) とにより計算した設計ばね剛度を表-1 に示す。信頼度を高く設定するほど剛性の大きいばねが必要であることはいうまでもない

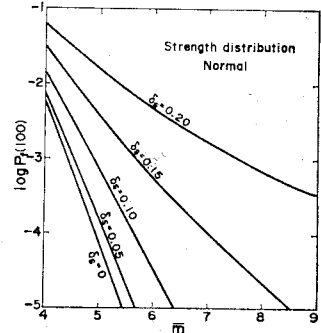


図-12  $\bar{m}$  と初通過破壊確率との関係 (包絡線過程による方法、 $\tau/T_0=100$ 、 $\zeta=0.01$ )

が、材料強度のばらつきが大きい場合には、その割合が著しいことが表より読み取れる。たとえば強度にばらつきがないものとした場合、 $1-10^{-3}$  の信頼度を  $1-10^{-5}$  にまで向上させるためには、約 30% 程度剛度を増加させればよい。ところが  $\delta_S=0.20$  とすると、約 270% 程度の剛度の増加が必要であることがわかる。端的に言えば、強度のばらつきの大い材料を使用する場合には、多少ばね剛度を高めても、振動系の信頼性はそれほど向上しないと見える。

次に信頼度を高く設定すれば、強度のばらつきの大きさが敏感に設計ばね剛度に影響することがわかる。たとえば信頼度を  $1-10^{-3}$  に設定してみる。このとき強度のばらつきがないものとしたときのばね剛度は  $k_0$  であり、 $\delta_S=0.20$  のときのそれは  $2.005 k_0$  である。それに対して信頼度を  $1-10^{-5}$  とした場合には、おのおの  $1.311 k_0$ 、 $7.415 k_0$  と著しい差異が認められる。このように高信頼度が要求される設計条件下では、経済上の問題にも絡んで、材料強度のばらつきの評価が非常に重要となる。

(4) 材料強度が保証される場合の信頼性の向上について

さて材料強度には、規定された元素成分、製造過程に応じて、明らかに上限値、下限値が存在するが、それが明確に定められない以上、前節の所要ばね剛度の設計例のように、設計段階では強度を無条件確率分布とせざるを得ない。ところがたとえば実際にばねが製作された際には、製品試験などによって欠陥が存在しないことを確認すれば、強度がある値以下でないという条件を設定す

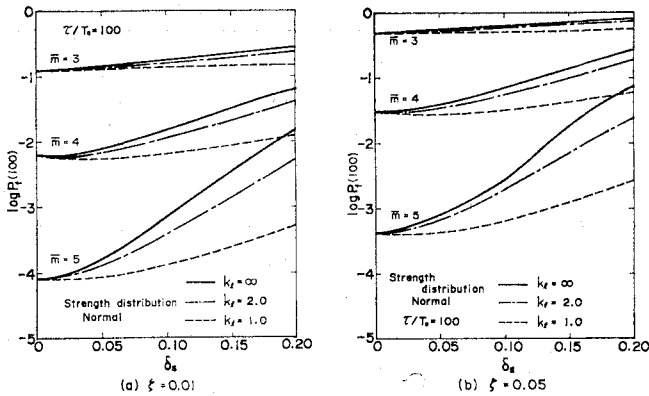


図-13 製品試験あるいは荷重試験による信頼性向上効果 (包絡線過程による方法)

ることができる。したがってその点だけを考慮すれば、少なくとも設計の時点よりも振動系の信頼性は向上するはずである。これはそのまま構造物の信頼性に対してもあてはまり、この効果は、いわば製品試験あるいは荷重試験による信頼性向上効果とでもよぶことができる。以下 2, 3 の計算例に基づき、この信頼性向上効果について考察する。

図-13 (a), (b) は、前節の振動系の  $\tau=100 T_0$  における初通過破壊確率と材料強度の変動係数との関係を示したもので、図により  $k_f=1.0$ ,  $k_f=2.0$  のように強度の下限に条件をつけた場合と、 $k_f=\infty$  のように条件をつけない場合の結果を比較できる。前二者が製品または荷重試験後の、後者が設計時における破壊確率の推定値を与えることはいうまでもない。ただしこれらは、材料強度が正規分布するものとして、包絡線過程による方法にしたがった計算結果である。いま  $\delta_s$  が 0.10 の場合の信頼性向上効果について考えてみる。図-13 (a) によれば、 $\bar{m}$  を 5.0 とした設計段階では、信頼度は  $1-7 \times 10^{-4}$  (破壊確率は 7/10 000) であるが、製品または荷重試験によって、材料強度の下限が  $\bar{S}-1.0 \sigma_S$  と設定された時点では、 $1-1 \times 10^{-4}$  (破壊確率は 1/10 000) に向上することは明らかである。これに対して  $\bar{m}$  を 3.0 とした場合の信頼度は、それぞれ 0.8244 (破壊確率は 1 756/10 000), 0.8687 (破壊確率は 1 313/10 000) であり、両者に顕著な差異は認められない。また  $\delta_s$  が大きいほど、この向上効果が大きいこともこれらの図よりわかる。以上の 2 点より、慎重な製品試験または荷重試験による信頼性向上効果は、設計時の信頼度の設定が高く、材料強度のばらつきが大きいときほど顕著であるといえる。したがって構造部材の強度劣化を伴うようなレベルまでの製品あるいは荷重試験は当然避けるべきであるが、少なくともそのような支障をきたさない程度の荷重による試験は、特に土木構造物のような注

文生産の場合には、その意義が大きいものと思われる。

### 5. 動的信頼性理論による材料強度の特性値の算定

本章の目的は、本研究結果を用いて、ばらつきを示す材料強度の特性値を、信頼性工学上より合理的に決定しようとするものである。

いま定常正規不規則外力を受ける構造物の材料強度の特性値を次のように定義する。すなわち材料強度を確率量としたときの初通過破壊確率と等価になるような確定量をもって、ばらつきを示す強度の特性値  $S_c$  とする。ところが応答が定常過程であれば、前述のように破壊確率とレベル超過率の間には明確な関係がある。したがって本研究では、応答過程のレベル超過率を等価にすることによって  $S_c$  を算定する。

材料強度を確率量および確定量としたときの応答過程のレベル超過率をそれぞれ  $\nu_{x,p}^+(S)$ ,  $\nu_{x,d}^+(S_c)$  とすると、 $\nu_{x,p}^+(S)$  は 2. ですでに与えられており、 $\nu_{x,d}^+(S_c)$  は周知の通り次式で与えられる。

$$\nu_{x,d}^+(S_c) = \frac{\sigma_{\dot{x}}}{2\pi\sigma_x} \exp\left(-\frac{S_c^2}{2\sigma_x^2}\right) \dots\dots\dots (53)$$

いま  $S_c = \bar{S} - \xi\sigma_S$  とすると、 $S_c$  は  $\xi$  によって決定される特性値である。これを式 (53) へ代入して次式を得る。

$$\nu_{x,d}^+(S_c) = \frac{\sigma_{\dot{x}}}{2\pi\sigma_x} \exp\left\{-\frac{(\bar{S} - \xi\sigma_S)^2}{2\sigma_x^2}\right\} \dots (54)$$

ここで、 $\nu_{x,p}^+(S) = \nu_{x,d}^+(S_c)$  とおくと、 $\xi$  が次のように求まる。

$$\xi = \frac{\bar{S} \pm \sigma_x \sqrt{-2 \ln\{(2\pi\sigma_x/\sigma_{\dot{x}})\nu_{x,p}^+(S)\}}}{\sigma_S} \dots\dots\dots (55)$$

しかるに  $S_c > 0$  より  $\xi < \bar{S}/\sigma_S$  であるから、この条件に合致する負号を選び、さらに  $\bar{m}$  と  $\delta_s$  を用いて式 (55) を書き直すと次式が得られる。

$$\xi = \frac{\bar{m} - \sqrt{-2 \ln\{(2\pi\sigma_x/\sigma_{\dot{x}})\nu_{x,p}^+(S)\}}}{\bar{m}\delta_s} \dots (56)$$

式 (56) と式 (20), (28) により、材料強度が正規分布および対数正規分布するときの  $\xi$  は  $\bar{m}$  と  $\delta_s$  のみの関数であることがわかる。したがって図-14 のような  $\xi$  を決定するためのダイアグラムが得られる。なお図中の  $\lambda$  は、特性値の平均値に対する比の値を表わす。

さて西村<sup>22)</sup>は種々の鋼材の降伏点のばらつきを調査・検討している。その結果を見れば変動係数は 5~10% のようであるが、中には 16.2% (SS 41) に達するデータ

表-2 材料強度（降伏点）の特性値

鋼種	平均値 $\bar{S}$ (kg/cm <sup>2</sup> )	変動係数 $\delta_S$	正規分布			対数正規分布		
			$\bar{m}$			$\bar{m}$		
			4	5	6	4	5	6
SS41	3189.7	0.162	2715.4 0.92	2529.9 1.28	2334.0 1.66	2797.9 0.76	2658.7 1.03	2529.9 1.28
SM50A	3678.3	0.051	3611.1 0.36	3553.2 0.67	3525.2 0.82	3614.8 0.34	3579.4 0.53	3553.2 0.67
耐候性	4197.1	0.093	3957.4 0.61	3819.8 0.96	3670.5 1.34	3973.1 0.57	3867.0 0.84	3760.9 1.11

(注) 上段：特性値  $S_c$  (kg/cm<sup>2</sup>) 下段： $\epsilon$

も得られている。これらの中から、ばらつきの大きさによって3種類の鋼材を選び図-14のダイアグラムによって、それぞれの特性値を決定した。結果を表-2および図-15に示す。表よりばらつきが大きくなるほど、特性値の平均値に対する割合が小さくなっていることがわかる。これはわれわれの感覚にも一致する結果である。また同一のばらつきを有する場合は、 $\bar{m}$ の値が大きいきほど特性値を低目にとらなければならないことも表より明らかである。このようにして材料強度の特性値  $S_c$  を決定すれば、この特性値を確定量として、従来通り初通過破壊確率を計算することができる。

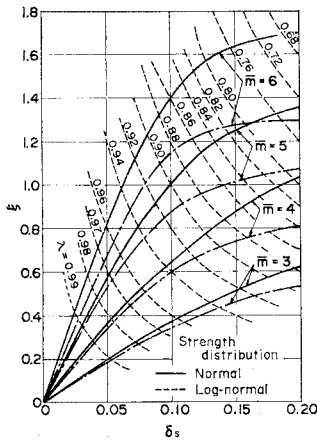


図-14 材料強度の特性値を決定するためのダイアグラム

## 6. 結 言

以上の考察の結果、得られた結論を要約すると次の通りである。

(1) 本文中の算定式によって、定常不規則振動系の応答過程および包絡線過程のレベル超過率および初通過破壊確率を、材料強度のばらつきも考慮して計算できる。

(2) 材料強度の平均値と応答の r.m.s. 値との比  $\bar{m}$  および材料強度の変動係数  $\delta_S$  が大きい場合ほど、強度のばらつきがないものとする従来の初通過破壊確率の値と本計算結果との差は著しくなる。したがって  $\bar{m}$  および  $\delta_S$  が大きいときには、構造物の動的信頼性評価に際して、材料強度のばらつきを無視することは適当でない。

(3) 材料強度の確率分布を正規分布とすれば、対数正規分布とするよりも大きなレベル超過率、初通過破壊確率が得られる。したがって対数正規分布とする明確な資料のない場合には、正規分布として信頼度を評価しておくことが、構造設計上安全側の立場をとることになる。

(4) 応答過程と包絡線過程とのレベル超過率、初通過破壊確率の差異は、 $\bar{m}$  と振動系の減衰比によって決まり、材料強度のばらつきの大きさにはほとんど無関係である。

(5) 構造物の動的設計において材料強度のばらつきの大きい材料を使用する場合には、断面性能を高める割には信頼度が向上しないという経済上の効率の悪さが伴う。

(6) 構造物の設計段階における信頼性の評価値を、製作後の製品試験および建設後の載荷試験によって向上させ得ることは当然予想されるが、材料強度の確率分布として条件付分布関数を用いた初通過破壊確率の算定式によって、この信頼性向上効果を定量的に算定することができる。

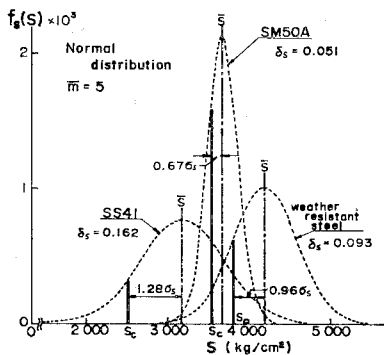


図-15 各種鋼材の降伏点の特性値

(7) 上述の信頼性向上効果は、設計時の信頼度を高く設定するほど、また材料強度のばらつきが大きいときほど著しく、したがって製品試験および載荷試験の意義もより大きくなると思われる。

(8) ばらつきを示す材料強度の特性値を、確率分布型と平均値および標準偏差、さらに応答の r.m.s. 値によって定義する一方法を提案した。

(9) 金属・冶金学的論拠により材料強度の上限・下限を設定することは、適確な信頼性評価値を得るために重要である。

なお非定常正規過程のレベル超過率も定常過程の場合と同様の方法で計算できるので<sup>1)</sup>、(2)~(9)の結論は、非定常過程においても成立するものと考えている。

終わりに臨み、本研究の遂行に際して、広島工業大学桜井季男教授にはいろいろと便宜を与えていただいた。

記して深甚なる謝意を表する次第である。

#### 参考文献

- 1) 鶴戸口英善：安全率と設計の安全性，金属，pp. 33~36, 1970-12.
- 2) 松尾 稔：土構造物の安全性評価における土質力学の役割，土木学会誌，Vol. 58, No. 2, pp. 18~24, 1973-2.
- 3) 高岡宣善・星谷 勝：信頼性理論と確率論の土木工学への応用，土木学会誌，Vol. 60, No. 9, pp. 61~69, 1975-8.
- 4) 亀田弘行：地震時における最大地動の確率論的研究，土木学会論文報告集，No. 159, pp. 1~12, 1968-11.
- 5) Rice, S.O. : Mathematical analysis of random noise, Selected papers on noise and stochastic processes, ed. Wax, N., Dover, New York, pp. 136-246, 1955.
- 6) Eringen, A.C. : Response of tall buildings to random earthquakes, Proc. of the 3rd U.S. Natl. Congr. for Applied Mech., p. 141, 1958.
- 7) Rosenblueth, E. and J.I. Bustamante : Distribution of structural response to earthquakes, Proc. of ASCE, Vol. 88, No. EM. 3, pp. 75-106, June, 1962.
- 8) Shinozuka, M. : Probability of structural failure under random loading, Proc. of ASCE, Vol. 90, No. EM. 5, pp. 147-170, Oct., 1964.
- 9) 小松定夫：長大吊橋の耐風設計法と安全性について，土木学会論文集，No. 142, pp. 10~19, 1967-6.
- 10) 後藤尚男・亀田弘行：構造物の不規則振動における最大応答の確率分布について，京大防災研究所年報，No. 11-A, p. 239~253, 1968-3.
- 11) 南井良一郎：擬定常外乱による統計的線型非定常応答のレベル超過回数について，日本建築学会大会学術講演要旨集，p. 8, 1962-9.
- 12) Crandall, S.H., K.L. Chandiramani and R.G. Cook: Some first-passage problems in random vibration, Jour. of Applied Mech., Vol. 33, No. 3, pp. 532-538, Sept., 1966.
- 13) Shinozuka, M. and J.N. Yang : On the bound of first excursion probability, Proc. of ASCE, Vol. 95, No. EM. 2, pp. 363~377, April, 1969.
- 14) Gallot, S. : A bound for the maximum of a number of random variables, Jour. of Applied Probability, Vol. 3, pp. 556~558, 1968.
- 15) Yamada, Y. and H. Takemiya : Studies on the statistical aseismic safety of relatively long period structures, Proc. of JSCE, No. 172, pp. 63~78, Dec., 1969.
- 16) Lin, Y.K. : First-excursion failure of randomly excited structures, AIAA Jour., Vol. 8, No. 4, pp. 720~725, April, 1970.
- 17) Lin, Y.K. : First-excursion failure of randomly excited structures II, AIAA Jour., Vol. 8, No. 10, pp. 1888-1890, Oct., 1970.
- 18) Stratonovich, R.L. : Topics in the Theory of Random Noise, Vol. 1, Gordon and Breach, New York, Chap. 6, pp. 143~176, 1963.
- 19) Yang, J.N. and M. Shinozuka : On the first-excursion probability in stationary narrow-band random vibration, Jour. of Applied Mech., Vol. 38, No. 4, pp. 1017~1022, Dec., 1971.
- 20) Raciocot, R.L. and F. Moses : A first-passage approximation in random vibration, Jour. of Applied Mech., Vol. 38, No. 1, pp. 143~147, March, 1971.
- 21) Lyon, R.H. : On the vibration statistics of a randomly excited hard-spring oscillator II, Jour. of Acoust. Soc. of America, Vol. 33, No. 10, pp. 1395~1403, 1961.
- 22) 西村 昭：鋼材の機械的性質のばらつきについて，JSSC, Vol. 5, No. 48, pp. 68~74, 1969.
- 23) Hoshiya, M. and H.C. Shah : Free vibration of stochastic beam-column, Proc. of ASCE, Vol. 97, No. EM 4, pp. 1239~1255, Aug., 1971.
- 24) 星谷 勝・千葉利晃：弾性せん断ばりの自由振動に与える不確定要因の影響，土木学会論文報告集，No. 234, pp. 23~31, 1975-2.
- 25) Rabinowitz, P. and G. Weies : Tables of abscissas and weights for numerical evaluation of integrals of the form  $\int_0^{\infty} e^{-x} x^n f(x) dx$ , Math. Comp., Vol. 13, pp. 285~294, 1959.
- 26) たとえば，Crandall, S.H. and W.D. Mark : Random vibration in mechanical systems, Academic Press, New York and London, 1963.
- 27) Yang, J.N. and M. Shinozuka : On the first-excursion probability in stationary narrow-band random vibration II, Jour. of Applied Mech., Vol. 39, No. 3, pp. 733~738, Sept., 1972.

(1975.11.21・受付)