土木学会論文報告集
第 250 号・1976 年 6 月

最適ネットワーク構成に関する一考察

SOME CONSIDERATIONS ABOUT THE OPTIMAL NETWORK PROBLEM

西 村 昂*・日 野 泰 雄**
By Takashi NISHIMURA and Yasuo HINO

1. まえがき

交通網計画のための最適ネットワーク問題を考える場合，交通網の評価要因を検討し，それぞれの交通網・交通需要に適した目的関数に対しその解法を考える必要がある．たとえば，従来の場合，総移動距離（時間）の最小化あるいは建設費（総建設延長距離）の最小化というようにその評価要因をとらえていることが多い．しかし，いずれの場合にも，1つの制約条件式の下に1つの目的関数を最適化するといった単純化されたものであった．そこで本研究では，1つの（建設費）制約条件式の下に2つの目的関数（平均走行距離，処理交通量）の組み合わせ最適化を考えることにした．これによって，利用者および建設者の両サイドからの最適性を追求することを考えたわけである．

また，その解法については，孤立することのないいくつかの地点をもついくつかの地域において，その地点間距離と OD 交通量および建設費制約量が与えられている場合に，建設費と交通容量の関係で設定した3ケースに対し forward 法，backward 法および任意の初期グラフからの改良法の3つの解法を(既存の解法を修正し，あるいは提案して）適用した．解法のプロセス上の要点は，解法の各ステップでの交通需要に比例した制約量（建設費）の配分による実行可能解の設定，解の改良過程および最終解の判定である．実行可能解の設定は，与えられたグラフに対する各区間の処理交通量，建設費の算出のための基礎となるものであり，その後の改良過程には「近傍グラフ」,「入れ換えグラフ」および2つの目的指数を組み合わせた目的関数を導入した．この組み合わせ目的関数に対して絶対効用による改良プロセスを示したが，このほかに平均効用（単位建設費当りの効用），限界効用（追加建設費に対する増加効用の比）などの効用による改良も可能であり，これらを比較しその特徴をも論じた．

* 正会員　工修　大阪市立大学助教授　工学部土木工学科
** 学生会員　大阪市立大学大学院工学研究科在学中

2. ネットワーク評価と従来の研究

(1) ネットワーク評価要因と最適ネットワーク問題

はじめに，交通網を評価するために考える必要のあると思われる要因を次に挙げてみよう．

a) 直接的評価要因

i) 建設者側からみた評価要因……建設費，処理交通量（最大フロー）など

ii) 利用者側からみた評価要因……走行距離（時間，費用），安全性，快適性など

b) 間接的評価要因

i) 交通網投資による経済効果

ii) 交通網建設による開発効果

iii) 交通網建設による環境変化（自然破壊，公害など）

これらのネットワーク評価要因により問題をいろいろに定義することができるが，ここでは，もっとも一般的な場合の問題のとらえ方を述べる．すなわち「最適ネットワーク問題とは，与えられた交通需要を満たすように地点間を結んだ路線の建設費が上限値を越えないよう（できるだけ多くの路線をつけて）目的関数を最大あるいは最小ならしめるような路線の集合（交通ネットワーク）を探索することである」と定義することができる．ネットワーク評価のための目的関数については，その問題へのアプローチの方向によってとらえ方が異なる．従来の場合では，総移動距離（各地点間の延長距離と地点間の OD 交通量の積の和で，たとえば，道路網ならば自動車の台数と地点間の走行距離の積で〔台・キロ〕の単位となり，鉄道網ならば〔人・キロ〕となる）が最小となる

ように設定した場合が多かったといえよう．一般に大別すれば，次のようになろう．

（i） 走行台キロ（総走行距離，時間）の最小化

（ii） 建設費（総建設延長距離）の最小化

（iii） 容量，平均走行距離をそれぞれ可能範囲内でできるだけ大きく，および小さくする組み合わせ最適化

(i) については A.J. Scott[1]，佐佐木・前島[2]，飯田[3]，柿木[4),5)]らの研究があり，(ii) についても計画交通量を処理することのできる（一定のネットワーク容量をもつ[6),7)]）あるいは，平均走行距離が一定値以内となるような制約条件下で建設費最小のネットワークを探索する問題として一般に取り扱われている．(iii) については，本研究で取り扱うものであるが，**3.** で詳しく述べる．(i), (ii) については，次のように定式化することができる．

（i）の定式化（総走行台キロ最小化）

代表的な定式化の例を示すと，OD 交通量（あるいは OD パターン）およびノード相互間距離 l，リンク建設費単価が与えられている場合に，建設費制約 S_c 式（2）および非負制約式（3）を満たして目的関数 K 式（1）を最小化するリンクの集合を探索することとなる．

目的関数

$$K=\sum_p\sum_q \chi_{pq}\cdot d_{pq}=\sum_i\sum_j q_{ij}\cdot l_{ij}\ \text{（最小化）} \qquad \cdots\cdots(1)$$

建設費制約

$$S=\sum_i\sum_j \boldsymbol{S}_{ij}=\sum_i\sum_j S_{ij}\cdot l_{ij}\leqq S_c \qquad \cdots\cdots(2)$$

非負制約

$$\chi_{pq}\ \text{or}\ q_{ij}\geqq 0 \qquad \cdots\cdots(3)$$

ここに，

χ_{pq}：地点 p から地点 q への OD 交通量

d_{pq}：地点 p から地点 q へのパスの距離（走行距離）

q_{ij}：ネットワークを構成するリンク (i, j) のリンク交通量で，一定の実用的配分原則によって配分されたもの（路線のないとき $q_{ij}=0$）

l_{ij}：ネットワークを構成するリンク (i, j) のリンク距離（路線のないとき $l=\infty$）

S：ネットワーク全体の建設費

$\boldsymbol{S}_{ij}$：ノード i とノード j を結ぶリンクの建設費

S_{ij}：ノード i とノード j を結ぶリンクの単位長さ当りの建設費（路線のないとき $S_{ij}=0$）

（ii）の定式化（建設費最小化）

この問題の定式化は，制約条件の種類によっていくつかの定式化ができるが，いま平均走行キロ数が一定値 K_0 以内となるような最小費用のネットワーク構成問題として定式化の例を述べる．すなわち，制約式（5）を満たしながら目的関数 S 式（4）を最小化するリンクの集合の探索となる．

目的関数

$$S=\sum_i\sum_j S_{ij}\cdot l_{ij}\ \text{（最小化）} \qquad \cdots\cdots(4)$$

制約条件

$$K=\sum_i\sum_j p_{ij}\cdot l_{ij}\leqq K_0 \qquad \cdots\cdots(5)$$

ただし，p_{ij} は全発生交通量に対するリンク (i, j) の交通量の比を表わす．別の表現をすれば，全発生交通量が1の時のリンク (i, j) の配分交通量を表わし，OD 間には一定の実用的配分原則によって配分されたものとする．また，一定の交通処理能力をもつ費用最小のネットワーク問題は，ネットワークのすべてのカットにおいて，カット容量がカットの通過交通量を上まわるという制約条件下で，建設費最小のネットワーク形成を定式化したものである[6),7)]．

以上のいずれの定式化の場合にも，建設費は地価・道路構造等の影響により異なると思われるが，単純化して幅員（または交通容量）の関数であると設定している場合が多い．この費用関数の形によって計算法にも影響を与える．

（2） 従来の研究

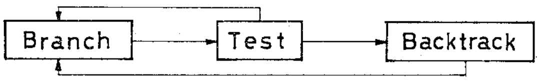
最適ネットワーク問題の解法には，従来から理論上の厳密解法と近似解法が考えられている．ここでいう厳密解法とは，すべてのネットワークを重複することなく系統的に取り出し，逐一評価する方法で，組み合わせ問題として，分岐限界法（branch and bound algorithm[1),4),8)~10)]），あともどり法（backtrack programming algorithm）[1),4),9)]，数理計画問題として，0-1 変数問題（zero-one programming problem[11)]）などがよく知られている．たとえば，分岐限界法については Land and Doig (1960)[12)]，Lawler and Wood (1966)[13)]，Mitten (1970)[14)]らが十分な記述を与えており，Stairs (1968)[15)]，Ridley (1965, 1968)[8)]，Ochoa-Rosso (1968)[9)]，Scott (1969, 1970)[1)]，Chan (1969)[10)] らは輸送ネットワーク最適化において，この方法を利用してきた．また，あともどり法については，Golomb and Baumert (1965)[16)] が，さらに 0-1 変数問題については，Balas (1965)[11)] がその研究の跡を残している．しかし，これらの方法は，分岐限界法に必要な大きな記憶容量を改良したあともどり法についても，依然として非常に長い算術上の操作が必要で，実際の必要性から生じる多くの大規模の問題には合わないことが多く，事実上実行不可能であると思われる．そこで形式的論証と heuristic な論証とを結び合わせることによって得られる最適に近い解を探索す

る近似解法が考案されている．以下に，厳密解法と近似解法について簡単に述べる．たとえば，これまでに，分岐限界法を改良した飯田の近似解法[3]，あともどり法を改良した Scott の近似解法[1]，佐佐木・前島の近似解法[2]などが考案されこれらの方法により，計算量の減少およびそれに伴う実用化への可能性が示されるようになった．また柿木ら[4),5)]は，Scott の解法を修正し，限界効用を導入した解法を提案している．

a）厳密解法

これらの解法は，整数線型計画として定成化されるものが多く，0-1 変数によるものは組み合わせ木（combinatorial tree）をシステム的に探索し，段階的に最適解に近づけてゆく方法である．

あともどり法：この方法では，組み合わせ木の branching プロセスが利用される．その探索過程は，外の方へ，上方へ各ノードで分岐を進め，あともどりした後は右まわりの方向に各ノードで分岐する．また，その各ノードにおいて tree を経て外側に分岐を続けるかあともどりする（すなわち，前に調べられたあるノードに引き返し，そのノードから新しい分岐を始める）かということを判定しなければならない．そこで，このアルゴリズムは次の3つの主な段階に分解される（図—1）．ここで，組み合わせ木の根となるノードから分岐して最初のノードでネットワークが実行可能解であれば，建設費（S）を計算し，$S>S_c$ ならさらに分岐を続け，$S\leqq S_c$ なら目的関数を計算し，その値がいままでの探索過程の上限値 U より小さいならあらたにその値を U にかえる．また U より大きいなら U はそのままにしあともどりする．これらの探索を繰り返してすべての分岐を終えれば，そのとき残った U を持つ解が最適解となる．



図—1 あともどり法のアルゴリズム

分岐限界法：最初に最適ネットワークの目的関数（K とする）が，ある上限値 U と下限値 L の間にあるとし，U と L の値を任意に決めておく．

$$L\leqq K^*\leqq U \cdots\cdots(6)$$

組み合わせ木の作り方に従って1段目のノードをつくり，それが実行可能解かどうか調べる．1段目の解が実行可能なら，その解のうち最大の K を上限値 U に，最小の K を下限値 L に置き換える．以後，2段目，3段目……と順次 K の値を U, L に置き換える．この変換操作を繰り返すと，L の値は一定か増加，U の値は一定か減少という傾向を持つようになり，$U=K=L$ なるノードが得られたとき，そのノードのネットワークが最適解となる．

b）近似解法

一般に最適解を得るためには膨大な計算量を伴うが，実際の交通ネットワークにおいては，最適解でなくともそれに近い解で十分に実用的に有用である場合があろう．このような実用的な近似解を得る方法を近似解法という．それらを以下に簡単に紹介する．

Scott の近似解法：この解法は与えられたノードの集合に対し最短ツリーを設定し，それにアークをつけ加えていくことによって最適解に向う forward 法（追加法）と完全連結グラフを設定し，アークを順次削除することによって最適解に向う backward 法（削除法）の2つのアルゴリズムから構成されている．これら2つのアルゴリズムは，ネットワーク変換サブルーチン "NETRUN" を持っており，これによりアーク削除の反復過程および与えられた任意のネットワークに改良を進めるための再割り当ての過程を担当させるものである．そして，その操作は簡単に次のように示される．すなわち，「任意のグラフとその co-graph（そのグラフ以外のリンクの集合）との間で任意の路線の交換を行い，それぞれの解（K）を計算する．そして，各段階での最小解 K^* に対し $K^*<K$ なるまで，その操作を繰り返すものである」．

Scott の追加法：minimal spanning tree をつくりサブルーチン "NETRUN" に入れる．サブルーチンの繰り返しが終って出たネットワークに1本の路線を加える．この路線の追加は，建設費が制限値を越えないように，しかも目的関数 K の値が最適となるようにする．この操作を繰り返し，あらたな路線が加えられなくなると，この操作は終了し，このときのネットワークが最終解となる．

Scott の削除法：完全連結グラフをつくり，ネットワークから各ノードが絶対に孤立することのないように路線を削除していく．そしてそのたびにサブルーチンに入れ，出てきた解が建設費の制限値より初めて小さくなったときにこの操作は終了し，このときのネットワークが最終解となる．

飯田の近似解法Ⅰ：建設費の制限値内でなるべく目的関数が小さくなるように，つまり全体的な最小値になるべく近い局地的最小値を探索する．このため建設可能な最大のネットワークから路線を1本除去した初期状態から出発し，建設費が初めて制限値内になったとき1つの初期状態に対する最適解とする．そしてこれらの解のうち目的関数の最小のものを全体の最適解とする．

飯田の近似解法Ⅱ：近似解法Ⅰに DP 的な探索法を加えて，2段階の組み合わせによる多段階決定を行う．いま k 段階で路線 x_m を除去して得られる最適近似解は $k-1$ 段階で路線 x_i を除去して得られる最適ネットワ

ークの状態ベクトル（路線の集合ベクトル），$X(x_i^{k-1})$ から路線 x_m を取り除いたネットワークの集合のうち目的関数 K の最小のものである．もし $k-1$ 段階のネットワークの総建設費が上限値よりも小さくなれば，k 段階の変換は行わずに，各路線についての最適解から目的関数 K が最小となるネットワークを最適解とする．

佐佐木・前島の近似解法：この問題では目的関数を総移動距離とせずに建設費（経験的にこれらは比例するとして）においている．また簡単化のために，まずOD交通量を一点集中発散型にして，順次周辺OD交通を増加させていく方法をとっている．1点核交通ネットワークの場合は，treeを乱数で与えて確率的にいくつかのネットワークを探索し，その中で目的関数の最小となるネットワークを最適ネットワークとする方法である．また，もう1つは中心核となる点に各地点を連結した tree から出発し，建設費を少なくするように近傍 tree を探索する方法である．多点核交通ネットワークの場合の解法は，いかなるノードも孤立することのないようにOD交通量の大なる地点間から順次連結された tree から出発し，ネットワークの改良により，建設費が減少するようになるべくOD交通量の大なる地点間から路線のつけ加えを繰り返し，建設費が減少しなくなればその解を最適解とする．

柿木の近似解法：ここでは2つのタイプのアプローチを示している．第1のタイプは，OD交通量のパターンが比較的平均化され，面的な交通特性を示す場合または各地点が比較的散在し独立して発展している都市を代表地点に選んだ場合などで，削減法と名づけている．第2のタイプは，OD交通量のパターンがある中心地点に集中または発生地点をもつ交通量が，他のODペアの交通量に比して特に多い場合または各地点の幾何学的位置関係が線状を示す場合などで，追加法と名づけている．そして，それぞれの場合に対し近傍グラフおよび限界効用を導入している．ここでいう限界効用（M）は，総延長距離の変化（または総建設費の変化）に対する目的関数の変化の割合を示すもので，初期実行可能解から順次改良し近似解を見つけようとするものである．ネットワークを構成する路線の総延長距離がある制限値以内にあって，目的関数の総移動距離を最小にする問題の場合，限界効用は，次のように表わされ，M^+ が最大または M^- が最小となる方向に探索を進めていく．

正の近傍グラフに対し

$$M^+=\frac{\text{総移動距離の減分}}{\text{総延長距離の増分}}=\frac{K_0-K}{L-L_0} \quad \cdots\cdots\cdots(7)$$

負の近傍グラフに対し

$$M^-=\frac{\text{総移動距離の増分}}{\text{総延長距離の減分}}=\frac{K-K_0}{L_0-L} \quad \cdots\cdots\cdots(8)$$

3．最適ネットワーク問題への1つのアプローチ

(1) 解　　法

本研究においては，前章までに紹介した各近似解法を考慮し，従来の研究とは異なった角度から問題の設定（目的関数，制約条件等）を行うことにより，問題の多様化をはかった．さらに，改良プロセスに，入れ換えグラフ，近傍グラフおよび絶対効用，平均効用，限界効用の概念を導入するとともに，任意の初期状態グラフからの改良アルゴリズムを考察し，計算量をさらに減少させるなど従来の研究から，より実用化に近づくことを目指した．以下，本研究におけるアプローチを紹介する．ここでは，平均走行距離および最大フローの両者を同時に考察するために次のように問題を定義する．すなわち，「地点間を結んだ路線の総建設費がある上限値を越えないように，できるだけ多くの路線をつけて，しかも平均走行距離 d（あるいは最大フロー T）のある制限値を満足したうえで，目的関数である最大フロー T（あるいは平均走行距離 d）が最大（あるいは最小）となるような路線の集合を導き出すことである．」これを定式化すると次のようになる．

平均走行距離

$$d=\sum(\chi_{pq}\cdot d_{pq})/T=\sum(q_{ij}\cdot l_{ij}) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(9)$$

最大フロー

容量と費用が比例する場合

$$T=\min T_{ij}=\min(C_{ij}/q_{ij}) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(10.1)$$

容量と費用がステップ関数で表わされる場合

$$T=\min T_m=\min(C_m/q_m) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(10.2)$$

建　設　費

$$S=\sum_i\sum_j S_{ij}=\sum_i\sum_j S_{ij}\cdot l_{ij} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(11)$$

ここで最適ネットワーク問題は，

$S\leqq S_c$ の条件の下で＜(1) $T\rightarrow$ 最大化，(2) $d\rightarrow$ 最小化＞なる l_{ij} の集合の探索となる．

ただし，

C_{ij}：地点 i と地点 j を結ぶアーク (i, j) の交通容量

T_{ij}：地点 i と j を結ぶアーク (i, j) のフロー

T_m：カット m の処理可能フロー

C_m：カット m のカット容量

q_m：カット m の通過交通量

ただし，最大フローとアークフローについて，厳密にいえば，$\min T_{ij}\fallingdotseq T$ である．しかし，容量と費用が線形関係にある場合は，すべてのアークを同じ混雑度にすることが可能であるから，1つのアークでネットワーク全体を代表させることができる．また，ステップ関数

の場合は，このようにはいかないが，アークによる混雑度のアンバランスは不都合と考えれば式（10.1）によって T_{ij} の極端に小さい場合，ネットワークの最適化から除外されることが妥当であり，最大フローとして T_{ij} で代表させることができ，また式（10.2）のようにカット容量で表わすこともできる．

このような問題のとらえ方は，**2**．で述べた一般的定式化に制約条件を増加させたものであるが，さらに次のように目的関数をかえて定義することもできる．すなわち「地点間を結んだ路線の総建設費がある上限値を越えないようにできるだけ多くの路線をつけて，T/d が最大（あるいは d/T が最小）となるような路線の集合を求めることである」．これは，2つの目的関数を含む新しい総合評価関数をつくり，それを最適化しようとするものである．これを定式化すると次のようになる．式（9）～(11) より，最適ネットワーク問題は，

$S \leqq S_c$ の条件の下で，$T/d \rightarrow$ 最大化なる l_{ij} の集合探索となり，以上の定式化に対し，Scott の近似解法および任意の初期状態からの改良アルゴリズムを適用した解法を示そう．また容量と費用の関係は種々の設定が考えられるが，ここでは容量費用関数を次に示す3つのケースで考察してみる．

ケース（1） 費用が容量のステップ関数（図—**6** 参照）

ケース（2） 費用が容量の線形関数（図—**6** 参照）

ケース（3） 固定費部分をもつ線形関数（図—**6** 参照）

本研究においては，Scott の近似解法を修正して，ネットワークの改良過程に入れ換えグラフと近傍グラフを導入する．いま，ある路線数 k をもつネットワークを $g(k)$ とすると，$g(k)$ の入れ換えグラフとは $g(k)$ に $g(k)$ の co-graph から路線を1本追加したグラフから他の路線を1本削除したグラフの集合をいい，近傍グラフとは $g(k)$ に $g(k)$ の co-graph から路線を1本追加したグラフの集合または，$g(k)$ から路線を1本削除したグラフの集合をいい，前者を正の近傍グラフ $(g(k+1))$，後者を負の近傍グラフ $(g(k-1))$ とする．以下に，本研究の近似解法のアルゴリズムを述べる．

a） 追 加 法

この場合の解法は，次のような4ステップで行われる．

ステップ1（初期解の設定）どの点も孤立することなく連結した最短ツリー（m.s.t.）を求め，それに対する $T_0, d_0, \varphi_0(=T_0/d_0)$ を計算する．

ステップ2（入れ換えルーチンによる改良）m.s.t. の入れ換えグラフを求め，φ の最大なるネットワークを探索する．このとき，

$$\begin{cases}\varphi_{\max} > \varphi_0 \text{ なら } \varphi_{\max} \rightarrow \varphi^* \\ \varphi_{\max} \leqq \varphi_0 \text{ なら } \varphi_0 \rightarrow \varphi^*\end{cases}$$

とし，この φ^* なるグラフを $g^*(n-1)$ とする．

ステップ3（近傍ルーチンによる改良）$g^*(n-1)$ の正の近傍グラフ $g_i^+(n)$ を探索する．この場合，

$$\begin{cases}\varphi_i^+(n) > \varphi^* \text{ なら } \varphi_i(n) \rightarrow \varphi^* \\ \varphi_i^+(n) \leqq \varphi^* \text{ なら } \varphi^* \rightarrow \varphi^*\end{cases}$$

とし，φ^* なるグラフを $g^*(n)$ とする．

ステップ4（終了条件による判定）以後，順次ステップ3の近傍グラフを探索し，建設費の制限を越えるか，あるいは $\varphi_i^+(n+m) \leqq \varphi^*$ となればこの操作は終了し，その直前のグラフが最適ネットワークとして与えられる．

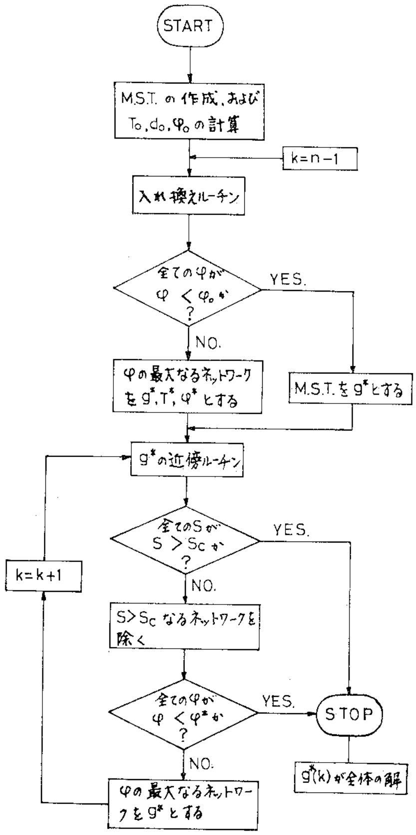
以上の計算操作をフローチャートとして示すと図—**2** のようである．

b） 削 除 法

この解法は次のようなステップで行われる．各ステップ中に示した各ケースは，費用関数の形による操作の相違を示す．

ステップ1（初期解の設定）

ケース1：完全連結グラフ（c.c.g.）を作成し，すべて1車線として建設費 S を計算する．



図—2 追加法のフローチャート

1) $(S-S_c)>$(最短路線の建設費 $S_{ij\text{-min}}$) ならステップ2へ.
2) $S\leqq S_c$ or $S-S_c\leqq S_{ij\text{-min}}$ ならばステップ3へ.

ケース 2, 3 : c.c.g. または建設可能最大グラフを作成し，T^*, d^*, φ^* を計算する.

ステップ2（近傍ルーチンによる改良）

ケース1：c.c.g. より最長路線を1本削除した（負の近傍）グラフについて，ステップ1の操作を行う.

ケース 2, 3：ステップ 1 で作成したグラフより距離の長い路線から順次削除した（負の近傍）グラフを探索し，$\varphi_i^->\varphi^*$ なるグラフがあれば φ_i^- を φ^* としてステップ3へ，なければステップ4へ.

ステップ3（終了の判定）

ケース1：ステップ1の 2) を満足するまで路線を削除し，$\varphi_i^-<\varphi^*$ となればステップ4へ.

ケース 2, 3 : $\varphi_i^-<\varphi^*$ なるまでステップ2を繰り返し，$\varphi_n^-<\varphi^*$ なればステップ4へ.

ステップ4（最適解）φ^* をもつグラフ g^* が全体の最終解として与えられる.

c） 任意の初期解からの改良法

先に述べた追加法および削除法では初期グラフが m.s.t. または c.c.g.（あるいは建設可能最大グラフ）のいずれかと決まっていたが，m.s.t. から最適グラフに向かってグラフは拡大され，c.c.g. からは縮小されることから，最適グラフは必ずその両極端の間に存在することがわかる．したがって，かりにその最適グラフになるべく近い任意のグラフから改良することができるなら，計算量および時間も著しく減少されることになる．このような任意の初期グラフを設定し，これを改良することをここで考えてみよう．もちろん，この初期グラフの設定を誤れば，局所解に陥り，全体の最適解から離れた解しか得られなくなることもあり，この設定に対し何らかの指針を付す必要があると思われる．そこで本研究では，与えられた問題に対してそのおのおのに一定の方向を与えることを考えた．その代表的な例を次にあげる．それぞれ，制約条件，目的関数およびそれに対する設定方法を示す.

（i） 建設費 $S\leqq S_c$, 走行台キロ最小化：a) 地点間 OD 交通量の大きいものに対する路線順に建設費制約内で可能なだけ路線を連結する．b) 地点間距離の小さい路線順に制約内で連結する．c) 上記以外の基準によるもの.

（ii） 建設費 $S\leqq S_c$, 走行距離最小化：(i) b) の方法による.

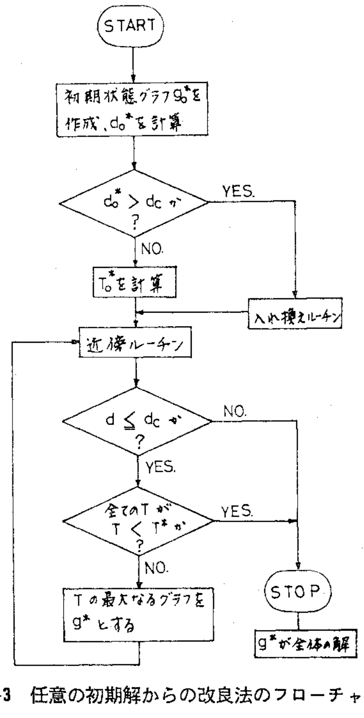
（iii） 建設費 $S\leqq S_c$, 処理交通量最大化：(i) a) の方法による.

このほかにも目的関数として走行時間，走行費用などが考えられるが，これらは混雑度の影響なども考慮しなければならず実際上，解析が困難と思われる．したがって，最終的には (i) a) あるいは b) のいずれかを考えれば良い．そこで本研究では，(ii) と (iii) の組み合わせを考えた．すなわち第1段階では，走行距離を目的関数とし，それらの解について処理交通量を目的関数とした第2段階の改良を加えるわけである．以下にその手順を示す．ただし，制約建設費 S_c, 制約平均走行距離 d_c（たとえば，$d_c=\frac{1}{2}(d_{\text{m.s.t.}}+d_{\text{c.c.g.}})$，ここに $d_{\text{m.s.t.}}$ は最短ツリーの場合，$d_{\text{c.c.g.}}$ は完全連結グラフの場合の平均走行距離）を与えておく.

ステップ1（初期解の設定）まず，ネットワークの1つのパターンを決定するという意味からすべての車線を1車線とし，建設費の許す限り地点間距離の短い順に路線を連結する．これが初期状態グラフ (g_0) で，このときの平均走行距離 (d_0) を計算し，$d_0>d_c$ ならステップ2へ，$d_0\leqq d_c$ ならステップ3へ.

ステップ2（入れ換えルーチンによる改良）g_0 の入れ換えグラフを探索し，それぞれ d, S を計算する．$d>d_c$ なるグラフは除外し，処理交通量の最大なるグラフを g^* とする.

ステップ3（近傍ルーチンによる改良）g^* の負の近傍グラフを探索し，d, T を求める．$d\leqq d_c$ なるグラフのうち T の最大なるグラフ（ただし $T\geqq T^*$）$g_i^-(n)$ を $g^*(n)$ とする.



図—3 任意の初期解からの改良法のフローチャート

ステップ4（終了の判定）$g^*(n)$ の負の近傍グラフをさらに探索し，$d>d_c$ あるいは $T<T^*$ となればこの操作は終了し，その直前のグラフが全体の解となる．

同様に d_c を T_c におきかえ，g_0 を作成し $T_0<T_c$，$T_0 \geqq T_c$ を考えれば，$T^* \geqq T_c$ なるグラフのうち $d \leqq d^*$ なるグラフを探索することも考えられる．このいずれの方法にしても，制約値 d_c，T_c の設定により同じ解に至らない場合も予想される．以上の計算操作をフローチャートとして示すと図—3 のようである．

（2） 問 題 点

a） 各種効用と改良基準について

（1）で述べた各解法では，各ステップでの最適ネットワークの決定に対し絶対効用（T/d）を用いたが，このほかに平均効用，限界効用を利用することも可能である．平均効用は単位建設費当りの効用額を表わし，限界効用はある状態（S_0, φ_0）からの建設費の増分の単位額当りの効用の増分を表わし次式のように表わされる．

限界効用

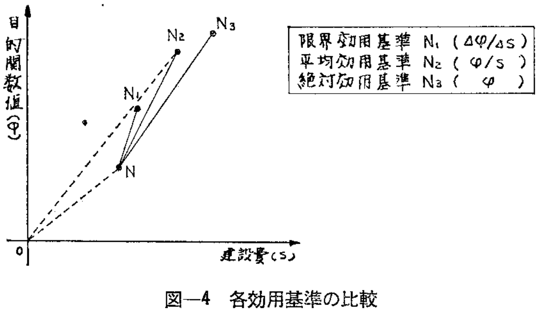
$$(U^+)=\frac{\text{絶対効用の増分}}{\text{建設費の増分}}=\frac{\varphi-\varphi_0}{S-S_0}\rightarrow \max \qquad \cdots\cdots(12)$$

限界効用

$$(U^-)=\frac{\varphi_0-\varphi}{S_0-S}\rightarrow \min \qquad \cdots\cdots(13)$$

絶対効用同様に限界効用（U^+）は追加法において，この値の最大なる方向の，または，（U^-）は削除法において，この値の最小なる方向のグラフがそのステップでの改良解として与えられる．これは，他の目的関数の場合にも同様に利用できる．

次に，絶対効用，平均効用および限界効用に関する考察をしてみよう．一般にこれらの効用は次のように説明されるが，これを図—4 に示す．限界効用基準は，近傍グラフの集合に対してもっとも傾きが大きく，しかもその集合の最外周をまわるように改良ルートが進む．また，絶対効用は，近傍グラフの集合に対して目的関数の最大なるグラフを順次選ぶことになる．さらに平均効用は，その中間的な性質あるいは後述の例題に示すような絶対効用に酷似した性質を持つものと思われる．また，図中 N に対する平均効用が，N_2 に対するそれより大であれば平均効用と限界効用は一致する．したがって，改良基準としては，限界効用はたとえば建設費投資に対し目的関数の最大なるネットワークを探索する場合に，また絶対効用は，ある水準以上の目的達成が必要とされるときの建設費推定に，さらに平均効用は，ある建設費に対し目的関数の最大なるネットワークを探索する場合に，その有効性を発揮すると思われる．例題におけるこれら3種の効用を用いた探索過程を図—15〜17 に示した．ここで，絶対効用と平均効用に関する探索過程が一致しているのは，ケース 2，3 においては常に建設費が $S=S_c$ となる性質によるものであり，ケース 1 についても φ の大きいネットワークは効率の良いネットワークを示し，建設費も比較的小さいか，φ の小さいネットワークとそれほど変わらないといった傾向によると考えられる．また，ケース 2，3 で限界効用による探索ルートがいずれも2本あるのは，そのステップでの限界効用（U^+）の値がまったく等しいグラフが2つ存在することを意味し，特にケース3においては，そのルートの1本は最適解に至らず，局所解に陥っている．しかし，こういう現象は，他の2つの効用の場合にも生じる可能性があり，これからの結果からいずれの効用基準がすぐれているか判断することは困難であろう．したがって，本例題からは，いずれの優劣も判定し難い面があり，問題によって検討すべきであろう．また，さらに多くのノードを持つネットワークについても検討することが望ましい．



図—4 各効用基準の比較

b） 本研究における問題のとらえ方について

本研究で目的関数としてとらえた T, d が，従来の総移動距離（K）とどう違うのか，またどういう関連性があるのか，さらにはケース 1〜3 の場合分けのもつ意味について考えてみる．

まず目的関数としての T, d であるが，T すなわち処理交通量は，建設費とともに建設側からみた評価要因であり，d すなわち平均走行距離は，使用側からみた評価要因であると考えられる．したがって，本研究では建設費の制限の下で，この両サイドからの評価を十分満足させるようなネットワークを探索するということになる．それでは，従来の総移動距離（K）を目的関数とした場合とでは，その解となるネットワークが異なるのであろうか．この点について少し考えてみよう．

ケース2の場合：

区間単位建設費

$$S_{ij}=\frac{\text{区間交通量}}{\text{総単位走行台キロ}}\times\text{制約建設費}$$

$$= \frac{q_{ij}}{\sum(q_{ij} \cdot l_{ij})} S_c \quad \cdots\cdots(14)$$

区間交通容量

$$C_{ij} = \alpha \cdot S_{ij} \quad \cdots\cdots(15)$$

処理交通量

$$T_{ij} = C_{ij}/q_{ij} \quad \cdots\cdots(16)$$

以上式 (14)～(16) より，

$$T_{ij} = (\alpha \cdot S_c)/\sum(q_{ij} \cdot l_{ij}) = \alpha \cdot S_c/d \quad \cdots\cdots(17)$$

となり，処理交通量と単位総走行台キロとの関係は，反比例の関係にあり，総移動距離を最小にすることと処理交通量を最大にすることとは同義であると考えられる．

ケース3の場合：

区間交通容量

$$C_{ij} = \alpha \cdot S_{ij} - \beta \quad \cdots\cdots(18)$$

式(18)は，ケース2の場合の式 (15) に定数項が加えられているが，β が小さければケース2の場合に近いわけで，この場合にも同様の考え方ができよう．またケース1の場合には，ステップ関数という形のために上記のようには説明できないが，考え方に差はないであろう．このように，総移動距離を最小にすることと処理可能交通量を最大にすることとは矛盾せず，ほとんど同じ方向に向かったものと考えられる．本研究の場合，これに対して平均走行距離が加えられるため，より有効な解が与えられるのではないだろうか．

次に3つのケースについては，ケース1で道路網の新設，ケース 2，3 で既存道路網の改善と，それぞれなるべく実際に対応できるようなケース・スタディーを考えた．

c） 建設費の配分について

3.(1) の解法において，その過程で問題となる建設費の配分について以下に説明する．まず，ケース1では，容量が必ず各段階で一定値となるため，制約値に対し建設費に過不足が生じることがある．そのような場合，直接それらの数値を適用するとそのネットワークが不合理になるため，これをいかに処理するかという問題点があるが，ここでは次のような修正を考えた．

建設費に余裕のある場合には，その余裕分をリンク距離に比して容量のもっとも余裕の小さい区間に再配分する．また，建設費制約を超過する場合には，1車線の建設費に満たないリンクの不足建設費を補えるまで2車線以上建設可能リンクの建設費を順次削減する．

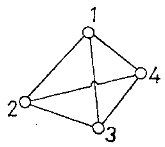
次にケース3では，あらかじめ付加分の建設費が必要であるため，ケース 1，2 のように走行台キロに比例した配分法では，容量の与えられない（建設費が配分できない）リンクが生じ，ネットワークの形態そのものが変化することもあり，合理的な考え方とはいえない．そこでこの場合には，容量の余裕を均等に配分する方法（配分交通量に比例して建設費を配分する方法）を用いる．

以上のような修正を加えたことにより，アルゴリズムの各ステップにおける改良プロセスは改善されるといえよう．また，上述した配分法の違いによるプロセスの違いを図―**5** に示す．

4. 数値計算例

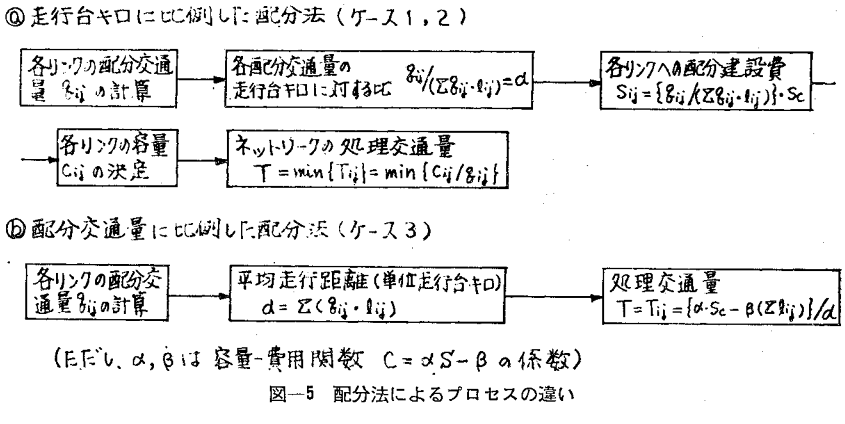
（1） 例題と計算結果

ここでは，簡単な例題を通じてアルゴリズムの説明と問題点の検討を行ってみよう．地点数が4点の例をとりあげ，各地点の幾何学的位置関係は図―**6** に，また各地点間の OD パターン（および OD 交通量）と各地点間距離，さらに交通容量当りの建設費（ケース 1～3）をそれぞれ，表―**1**，表―**2**，図―**7** に示す（ただし，OD 交通の対称性を仮定し，三角 OD 交通のみを計算する．）．計算例のネットワークに対する総建設費の制約値は，26 億円とする．

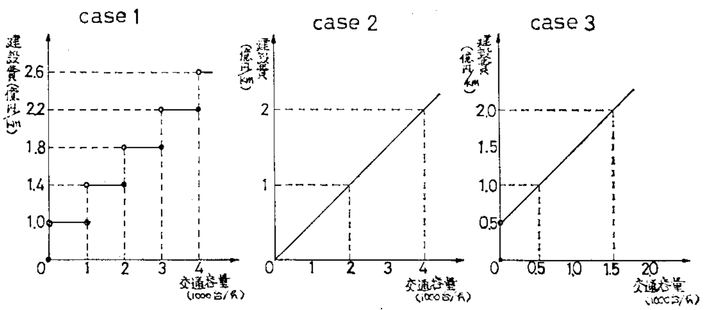


図―6 各地点の位置

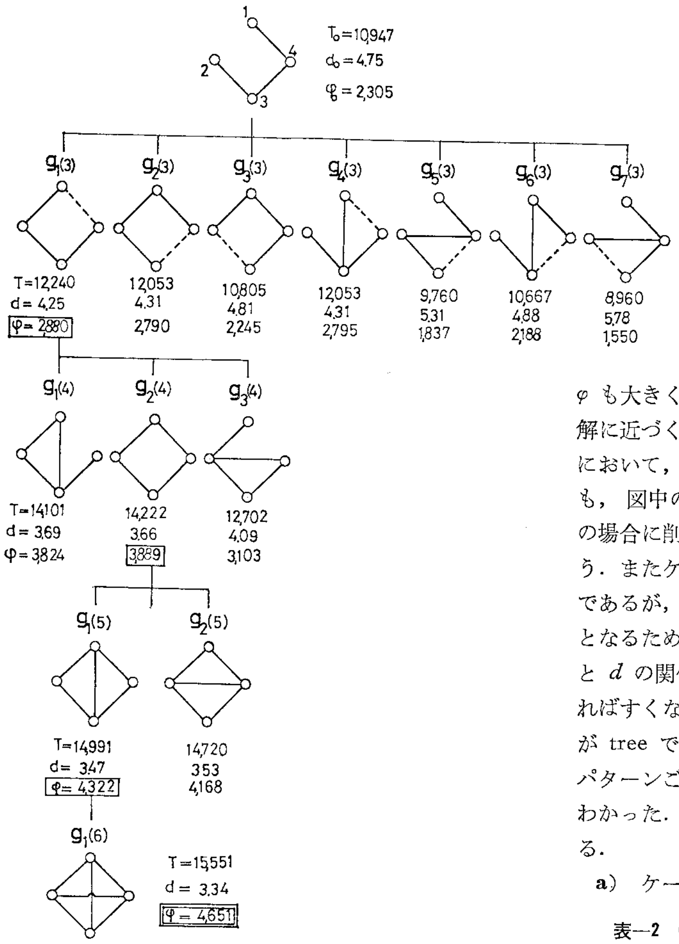
紙面の都合により，追加法にはケース2，削除法にはケース 3，任意の初期解からの改良法にはケース1をそ



図―5 配分法によるプロセスの違い



図—7　建設費-容量関数



図—8　追加法（ケース 2）探索結果

表—1　地 点 間 距 離

	1	2	3	4
1		7	6	4
2			5	9
3				5
4				

れぞれ適用した計算例を以下に示す（図—8～10 参照）．または任意の初期解からの改良法は，追加法，削除法のように両極端のネットワークからの改良ではなく，任意の与えられたネットワークからの改良を目的とするもので，指定されたアークを含む解や既存のネットワークからの改良など実用的には有用と考えられるが，本計算例においては，目的関数を考慮して初期グラフの設定から始めるものとする．

（2）考　　察

3.（2）b）で目的関数 T, d について説明してきたが，ここでは，この T, d 相互間の関連性について探索途中のネットワークを通して考えてみよう．

まず，T, d の関係を計算例より図—11～13 に示す．ここでケース 2 については，tree から c.c.g. に至るにしたがってほぼ右下りの直線が得られ，c.c.g. に近づくほど T は大きく d は小さく，φ も大きくなる．すなわち，c.c.g. に近づくほど，最適解に近づくことがわかった．計算例の追加法の探索過程において，その操作が確実に最適解に向かっていることも，図中の探索ルートより明らかである．ただし，この場合に削除法を考えることは，意味のないことであろう．またケース 1 に関して，これはステップ関数の特徴であるが，容量および T があるパターンごとに一定値となるため，図のような結果になった．これからは，T と d の関係は明らかではないが，そのパターン別にみればすくなくともパターンの上部を占めるネットワークが tree であることは，はっきりしており，このようなパターンごとについては tree は，非最適であることがわかった．これらの結果を以下に，数式により説明する．

a）ケース 2 について

表—2　OD パターン（カッコ内は OD 交通量を示す）

（台/h）

	1	2	3	4
1		0.15625 (1 000)	0.06250 (400)	0.03125 (200)
2			0.09375 (600)	0.12500 (800)
3				0.03125 (200)
4				

Σ 1.00000
(Σ 6 400)

式 (14)～(17) より，T は d の関数で表わされる．そこで d を考えると，各地点を直接結ぶ路線があれば，それが最短路となるはずで，c.c.g. の場合に d は最小となることは明らかである．

b)　ケース3について

式 (14)，(16)，(18) より

$$T=(\alpha\cdot S_c)/d-\beta/(\sum q_{ij}) \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(19)$$

となり，式 (17) に $-\beta/(\sum q_{ij})$ なる項が追加された．そこで，この付加項について考えてみると，$(\sum q_{ij})$ は区間 (i, j) を流れる単位 OD 交通量の和であるから，路線数が多いほど分散してその値は小さく，逆の場合ほど集中してその値は大きい．最初の項についても同様のことがいえるが，付加項には負の符号制約があり，T の最大なる場合を一意的に決定することは難しい．

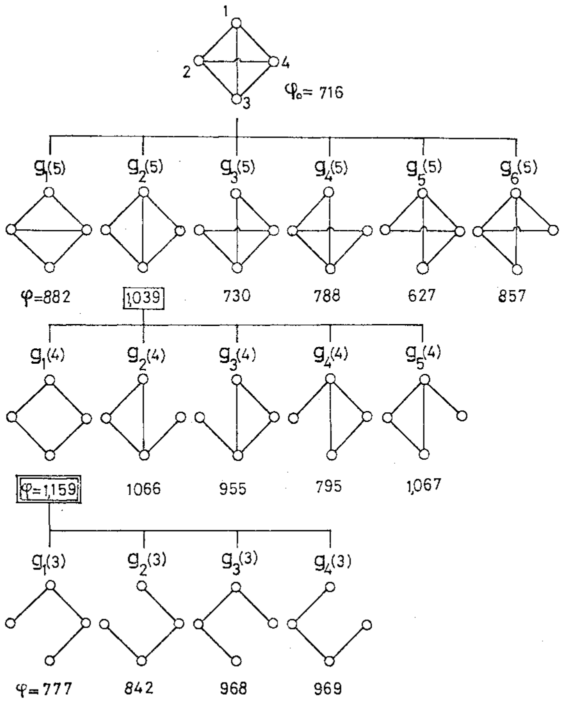
c)　ケース1について

この場合，数式での表示では説明できず，初めの考察の域を出ていない．

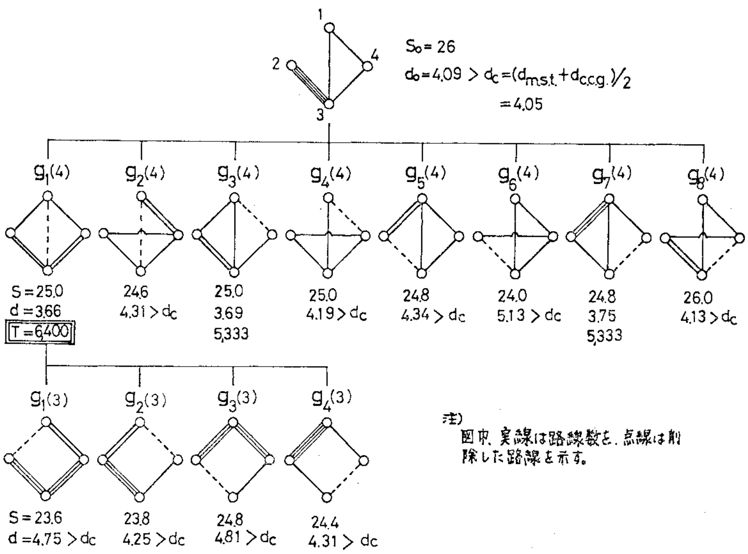
以上のような考察を通じて，$T, d, \varphi(=T/d)$ がそれぞれ目的関数の場合，その解はどう変わるのか考えてみる．計算例としては量が多すぎて示し得なかったが，費用関数がステップ関数の場合について，OD パターン，建設費制約（計算例と同じ）下で，d が最小となるネットワーク G_1，T が最大となるネットワーク G_2 および φ が最大となるネットワーク G_3 を比較すると図―**14** のようになり，一般にそれぞれ相違する．しかし，各アークへの初期投資額の大きさによりネットワークは変化し，G_1 はアークの多いネットワークに，G_2 は初期投資額が大きい場合はアークの少ないツリー形に近づく傾向があり，G_3 はその中間に位置するといえよう．したがって，G_3 は実用的にも有用なネットワークを提供するものと思われる．

次に，この計算例において各アルゴリズムに関する計算量を厳密解法と比較すると表―**3** のようになる．厳密解法の（ ）内の数は，理論的な最大数（組み合わせ木，ノード 4，アーク 6 で $2^6=64$）である．

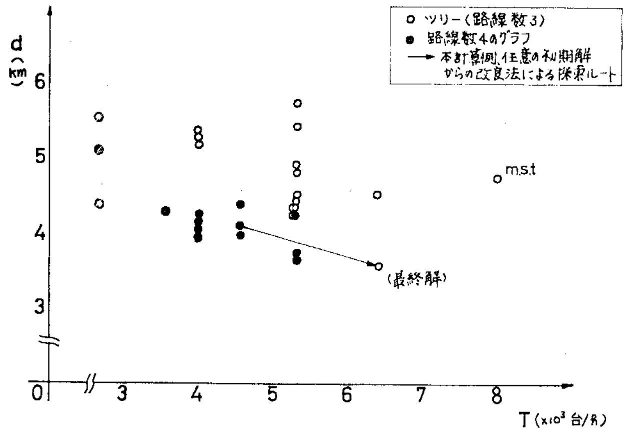
本論文に掲載し得なかったが，5-nodes system の場合の計算例の結果，追加法が 28，削除法が 26 に対し，



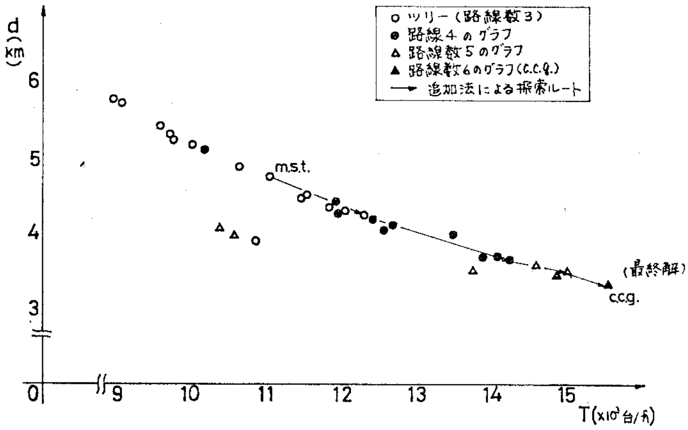
図―**9**　削除法（ケース 3）の探索結果



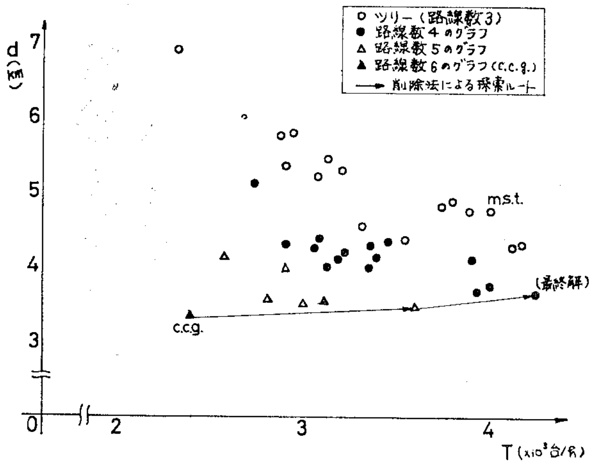
図―**10**　任意の初期解からの改良法（ケース 1）の探索結果



図—11　フローと平均走行距離（case 1）



図—12　フローと平均走行距離（case 2）



図—13　フローと平均走行距離（case 3）

任意の初期解からの改良法では 16 とかなり計算量が減少し，この方法の有効性が示されている．このことから，ネットワークがさらに拡大され，大規模ネットワーク最適化問題を取り扱う場合により一層その効果がみられよう．

さらに，各種効用基準による探索過程は図—15～17 に示す（この説明は，3．(2) a）を参照）．

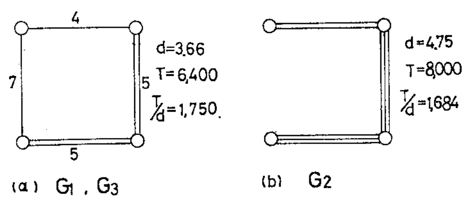
以上のように，従来の方法に対し，問題設定の多様化，改良プロセスにおける改良基準，および任意の初期解からの改良法（初期状態グラフの設定基準も含め）を提案するなどの修正により，すくなからずその妥当性が示されたと考えられよう．

5．むすび（問題点と今後の課題）

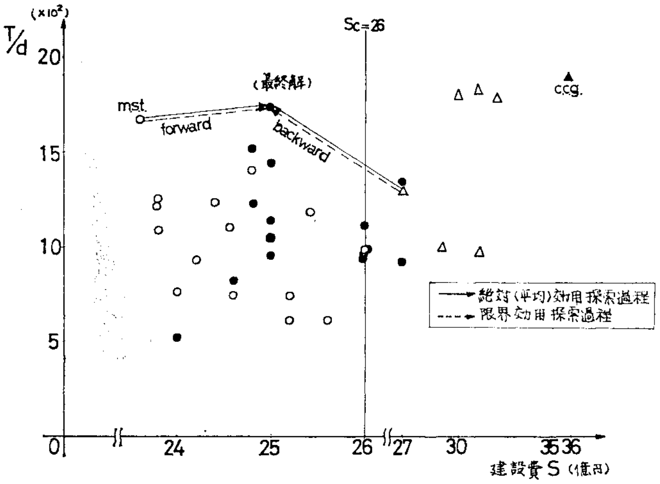
3．(1) で 3 つの解法について説明したが，これらの解法にはまだまだ問題点があると思われる．たとえば，追加法と削除法についてみれば，与えられたネットワークに対していずれの解法を用いれば合理的かという点である．これには，柿木が次のような目安を与えている．すなわち，OD 交通量のパターンが比較的平均化され，面的な交通特性を示す場合には前者を，また OD 交通量のパターンがある中心地点に集中または発生地点をもつ交通量が，他の OD ペアの交通量に比して特に多い場合には後者を用いるべきとしている．しかし，これも与えられたネットワークに対し，これらの識別に対する熟練を要し明確性に乏

表—3　各解法の計算量の比較

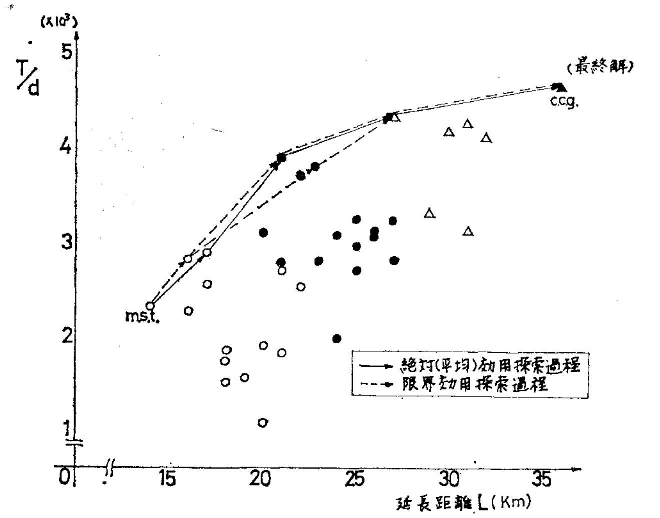
	各解法名	ケース1	ケース2	ケース3
本研究における近似解法	追　加　法	13	14	14
	削　除　法	10	—	—
	任意の初期解からの改良法	13	—	—
厳密解法	分岐限界法	15 (64)		
	あともどり法	16 (64)		



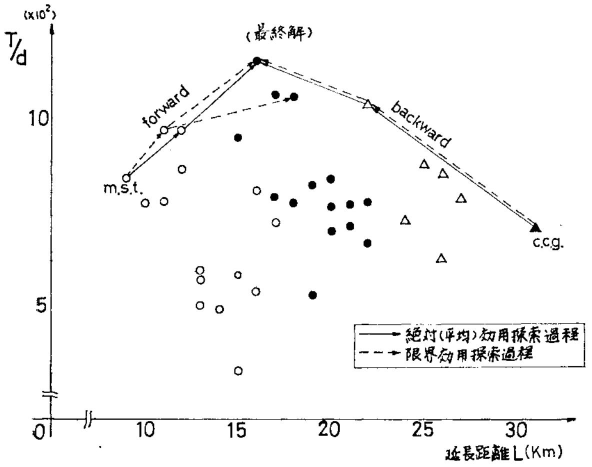
図—14　目的関数による最適解の違い
（ただし，図中，実線は車線数を，アークに付した数は区間距離を表す）．



図—15 (平均) 絶対効用と限界効用の探索過程 (case 1)



図—16 絶対 (平均) 効用と限界効用の探索過程 (case 2)



図—17 絶対 (平均) 効用と限界効用の探索過程 (case 3)

しい．ここで，任意の初期解からの改良法がその柔軟性から有効性を発揮するわけであるが，**3.** (**1**) でも述べたように，ネットワーク評価の要因によりその初期解の設定が多様であり，その設定条件についてもまだ研究，改良の余地があると思われる．さらに，いずれの解法も本研究のように容量を考えた場合，線形問題とはならないため，ノード数の増加に伴いその計算量は著しく増加することは否めない．しかし，それに伴い，任意の初期解からの改良法の有効性が増大することも事実である．したがって，この改良法をより一般化することが望ましいであろう．また，いずれの場合にも近似解法である以上，それらの解が局所的解ではないといい切ることはできない．したがって，できるだけ全体の最適解に近い解が常に得られるように，各解法の各ステップにおいて何らかの制約を与えること，また与えられた OD パターンに対し代表的ネットワークパターンを割り当て，そのネットワークから改良をすすめるといった方法を考えていくことも，意味のあることであろう．そして，本研究では従来とその評価要因を異なった方向から考えてみたが，これらの評価要因を様々な角度から検討し，問題の特性とを考え合わせ，それにもっとも適した解法を考えることが必要であろう．

次に，本研究をも含めて従来の解法は，ネットワークを新設することを前提に考えられることが多いが，都市化が進む中ではネットワークの新設は難しく，今後既存のネットワークに対する改良評価および手法を検討するような方向性が必要かつ重要となろう．この意味からも任意の初期解からの改良法に意味があると思われる．また，交通ネットワークはその性質から長期間の年月を必要とするため，その間のさまざまな状況の変化を考慮した多段的な手法を考えていく必要があると思われるが，これらは今後の課題として残されている．

参考文献

1) Soctt, A. J. : The optimal network problem, some computational procedures, Transpn Res. Vol. 3, pp. 201～210, 1969.
2) 佐佐木綱・前島忠文： 道路網形態に関する一考察，土木学会論文集 163 号，1969.
3) 飯田恭敬 ：最適道路網の探索法について—最適解と

近似解―，土木学会第 25 回年次学術講演会概要第Ⅳ部，pp. 31～32 (1970).
4) 西村 昂・柿木浩一：最適ネットワーク問題に関する一考察，土木学会第 27 回年次学術講演会概要第Ⅳ部，pp. 65～67 (1972).
5) 西村 昂・柿木浩一：最適ネットワークに関する一考察，土木学会関西支部年次学術講演概要 (1973).
6) 西村 昂：道路網容量の増加方法に関する一考察，第 27 回土木学会年次学術講演会概要第Ⅳ部 (1972).
7) 西村 昂：道路網容量からみた交通制御の考え方について，第 28 回土木学会年次学術講演会概要第Ⅳ部 (1973).
8) Ridley, T.M. : An Investment Policy to Reduce Travel Time in a Transportation Network, Operation Research Centre Report ORC 65-34, University of California, Berkeley, Cal. (1965).
9) Ochoa-Rosso, F. and Silva, A:Optimum Project Addition in Urban Transportation Networks via Descriptive Traffic Assignment Models, Research Report R 68-44, M.I.T., Department of Civil Engineering, Cambridge, Mass. (1968).
10) Chan, Y-P. : Optimal Travel Time Reduction in a Transport Network; An Application of Network Aggregation and Branch and Bound Techniques, Research Report R 69-39, M.I.T., Department of Civil Engineering, Cambridge, Mass. (1969).
11) Balas, E. : An additive algorithm for solving linear programs with zero-one variables. Opns. Res. 13, 517 ～549 (1965).
12) Land and Doig : An automatic method for solving discrete programming problem. Econometrica, 28, 497 (1960).
13) Lawler and Wood : Branch-and-bound methods; a survey. Operations Research, 14, 699 (1966).
14) Mitten, L.G. : Branch-and-bound methods; General Formulation and Properties. Operations Research, 21, No. 1 (January/February) (1970).
15) Stairs, S. : Selecting an optimal traffic network. Journal of Transport Economics and Policy, 2, 218 (1968).
16) Golomb and Baumert : Backtrack programming. Journal of the Association of Computing Machinery, 12, 516 (1965).

(1975.10.2・受付)