

# 正方形断面を持つ直線水路の速度分布 に関する基礎的研究

## FUNDAMENTAL STUDY ON THE VELOCITY DISTRIBUTION IN STRAIGHT CHANNEL WITH SQUARE CROSS SECTION

吉川 秀夫\*・池田 駿介\*\*

By Hideo KIKKAWA and Syunsuke IKEDA

### 1. 序

非円形断面を持ち、流下方向に一樣な水路（開水路または管水路）を流れる乱流では等流速線は境界に平行とはならず、特に隅角部において流速が増大することが知られている。また、開水路では水路幅と水深の比がある値（約 3）よりも小さくなると流れの最大流速が水面下に生ずることが古くから知られており、水路断面の幾何学形状と最大流速が生ずる位置との関係を実験的に調べた研究もある。このような現象が二次流の存在と結びついていることは Nikuradse<sup>1)</sup> の測定値に基づいて Prandtl<sup>2)</sup> によって指摘され、Prandtl はこの現象を「流体は水路の中心から隅角部へ向って流れ、その後外向きに流れる。この二次流は水路中心における大きな運動量を隅角部へ運びその点の流速を増大させる」と説明した。このような流れが存在すると、掃流砂量の分布、浮遊砂の濃度分布に影響があることが指摘され<sup>3), 4)</sup>、特に水路床付近では水路中央向きの流れがあるために護岸、根固め土の根元付近で洗掘が生じやすいことが知られている。このように実際問題と密接な関係があり、その発生原因の合理的な説明、あるいは定量的な把握が望まれているにもかかわらず、長い間定性的な議論の域を出ることができなかったのは、その理論的取り扱いの困難さも勿論であるが、主として流れの速度場を正確に決定することのできる測定器がなかったためであると思われる。ところが 1960 年代に入り、熱線流速計が次第に実用、一般化するにつれてこのような二次流、あるいは Reynolds 応力の測定が行われ、二次流の速度分布、あるいはこのような流れが Reynolds 応力の不均衡によることなどが次第に明らかにされてきた<sup>5)~7)</sup>。理論的研究は Einstein & Li<sup>8)</sup> によって恐らく始めて行われた

が、彼らはある条件下では二次流の存在しない流れは不安定であることを示し、間接的にこのような流れの存在を証明した。理論上定量的な取り扱いは筆者の知る限りでは Chiu<sup>9)</sup> によってなされているのみであるが、その取り扱いに際して、主流に関する Reynolds の方程式を用いたために二次流を精度よく決定することができず、また二次流が主流の速度分布をひずませる機構についても解明できなかったと思われる。このように実験室における測定値のデータは次第に蓄積されつつあるにもかかわらず、その理論的研究は未だに不十分であるといわざるを得ない。

本論文ではこのような現況に鑑みてその理論的展開に際して二次流自身に関する Reynolds の方程式から出発し、まずこのような流れを引き起こす原因について考察を行い、ついでその速度分布を求め、最後にこの二次流が Prandtl の述べた機構によって主流の速度分布をひずませることを示す。また、これらの結果を用いてこれまでに得られている測定結果と比較し、その妥当性を示そうとするものである。

### 2. 一般的考察

いま、時間的に平均された水理量が  $x$  方向に変化しない（ただし平均圧力  $\bar{P}$  は除く）完全に発達した流れを考えると、二次流の成分に関する Reynolds の方程式は図-1 に示されている座標系、および記法を用いて次のように書き表わされる。

$$\bar{V} \frac{\partial \bar{V}}{\partial y} + \bar{W} \frac{\partial \bar{V}}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{P}}{\partial y} - \frac{\partial \bar{v}^2}{\partial y} - \frac{\partial \bar{v}'w'}{\partial z} + \nu \left( \frac{\partial^2 \bar{V}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \bar{V}}{\partial z^2} \right) \dots \dots \dots (1)$$

$$\bar{V} \frac{\partial \bar{W}}{\partial y} + \bar{W} \frac{\partial \bar{W}}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{P}}{\partial z} - \frac{\partial \bar{v}'w'}{\partial y} - \frac{\partial \bar{w}^2}{\partial z} + \nu \left( \frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial z^2} \right) \dots \dots \dots (2)$$

\* 正会員 工博 東京工業大学教授 工学部土木工学科  
\*\* 正会員 工博 埼玉大学講師 理工学部建設基礎工学科

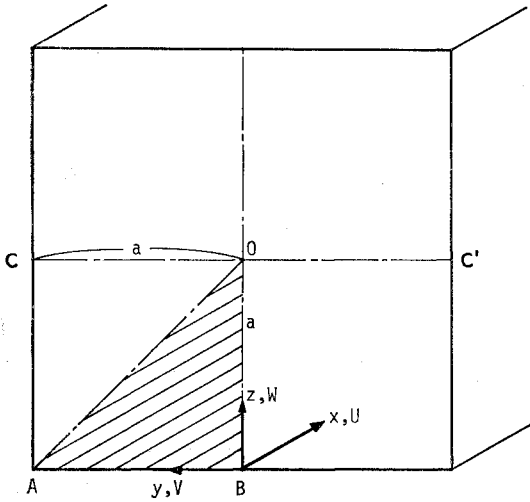


図-1 水路の断面図

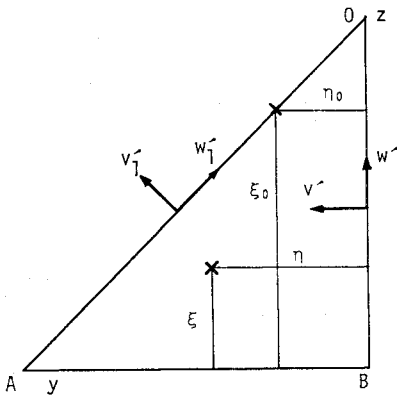


図-2 座標系および乱れ成分の定義

ただし  $\rho$  は流体の密度， $\nu$  は動粘性係数である．また，連続条件は

$$\frac{\partial \bar{V}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{W}}{\partial z} = 0 \dots\dots\dots (3)$$

$$\frac{\partial v'}{\partial y} + \frac{\partial w'}{\partial z} = 0 \dots\dots\dots (4)$$

であり，“ $\bar{\quad}$ ” は時間平均値を，“ $'$ ” は乱れの成分を表わし

$$V = \bar{V} + v'$$

$$W = \bar{W} + w'$$

である．ここで注意すべきは，いま考えているような流れでは乱れの成分  $v'$ ,  $w'$  は平均流成分  $\bar{V}$ ,  $\bar{W}$  に比べて必ずしも小さくはなく，むしろ乱れの成分の方が数倍程度大きいことが知られている．

式 (1), (2) から  $\bar{P}$  を消去すると次式を得る．

$$\bar{V} \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial \bar{V}}{\partial z} - \frac{\partial \bar{W}}{\partial y} \right) + \bar{W} \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial \bar{V}}{\partial z} - \frac{\partial \bar{W}}{\partial y} \right)$$

$$= -\frac{\partial^2}{\partial y \partial z} (\overline{v'^2} - \overline{w'^2}) - \left( \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \overline{v'w'}$$

$$+ \nu \left( \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \left( \frac{\partial \bar{V}}{\partial z} - \frac{\partial \bar{W}}{\partial y} \right) \dots\dots\dots (5)$$

ここで，式 (3) から二次流に関する流関数  $\psi$  を定義する．

$$\bar{V} = \frac{\partial \psi}{\partial z}, \quad \bar{W} = -\frac{\partial \psi}{\partial y} \dots\dots\dots (6)$$

また，Reynolds 応力  $-\rho \overline{v'w'}$  を Boussinesq 近似すると

$$-\rho \overline{v'w'} = \rho \epsilon_{yz} \left( \frac{\partial \bar{V}}{\partial z} + \frac{\partial \bar{W}}{\partial y} \right)$$

$$= \rho \epsilon_{yz} \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right)$$

と表わされる．ここに  $\epsilon_{yz}$  は渦動粘性係数である．これらの表示を式 (5) に代入し整理すると二次流を表わす基礎式として次式を得る．

$$\nu \left( \frac{\partial^4 \psi}{\partial y^4} + 2 \frac{\partial^4 \psi}{\partial y^2 \partial z^2} + \frac{\partial^4 \psi}{\partial z^4} \right)$$

I

$$+ \epsilon_{yz} \left( \frac{\partial^4 \psi}{\partial y^4} - 2 \frac{\partial^4 \psi}{\partial y^2 \partial z^2} + \frac{\partial^4 \psi}{\partial z^4} \right)$$

II

$$= \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \right) \left( \frac{\partial \psi}{\partial z} - \frac{\partial \psi}{\partial y} \right)$$

III

$$+ \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} (\overline{v'^2} - \overline{w'^2}) \dots\dots\dots (7)$$

IV

ここで式 (5) から式 (7) への誘導の過程で  $\epsilon_{yz}$  は断面内で一定の値を持つとした．式 (7) の各項はそれぞれ次の意味を持つ．

- I. 粘性による抵抗項．
- II. 乱れに起因する shear stress による抵抗項．
- III. convective な加速度項．
- IV. 乱れによる normal stress 項で二次流をひきおこす原動力となる．

式 (7) について調べてみると以下の場合に  $\psi = \text{const.}$  の特解を持つことがわかる．

- (1) 流れが層流の場合には Reynolds stress は存在しないから  $\overline{v'^2} = \overline{w'^2} = 0$  である．
- (2) 等方性乱流の場合には  $\overline{v'^2} = \overline{w'^2}$  である．
- (3) 円管内の乱流では， $\overline{v'^2} \neq \overline{w'^2}$  であるが， $\overline{v'^2} - \overline{w'^2}$  の円周方向の微分が 0 となり，結局  $\frac{\partial^2 (\overline{v'^2} - \overline{w'^2})}{\partial y \partial z} = 0$  である．
- (4) 非常に幅の広い水路のような側壁の効果が無視できる場合にも  $\frac{\partial^2 (\overline{v'^2} - \overline{w'^2})}{\partial y} = 0$  となる．

式 (7) は非線型方程式であって， $\psi = \text{const.}$  の特解が唯一の解であるかどうかを議論するのはなかなか困難であるが，上の考察の結果が実測と一致すること，また，二次流をひきおこす原動力のない場で二次流が存在するという他の解を得ても物理的に意味があるかどうか明らか

かでないことなどから恐らく  $\phi = \text{const.}$  (すなわち二次流がない) が唯一解であるように思われる. ここで注意すべきは (4) の場合であって非常に広い水路の全域にわたって横断方向に Reynolds stress が一様となることは実際上考えられず, 極く微小な不均一性によって不安定 (Benney-Lin 不安定) となり, 二次流を発生することが知られている. この発生機構はここで考えているものとはやや異なった機構であり, 以下では取り扱わないものとする.

### 3. 二次流の速度分布

いま, 図-1 に示されている断面の 1/8 の部分, 三角形 OAB, を取り出してみると, 時間平均された水理量は隅角の二等分線 OA に関して線対称であるから乱流理論の教えるところにより, OA 上では

$$\overline{v_1' w_1'} = 0 \dots\dots\dots (8)$$

でなければならない. ただし, suffix 1 は OA 上での値であることを表す.

また, OB 上についても同様であって,

$$\overline{v' w'} = 0 \dots\dots\dots (9)$$

となる. また,  $\overline{v'^2 - w'^2}$  についても OA 上では対称性から,

$$\overline{v'^2} = \overline{w'^2} \dots\dots\dots (10)$$

OB 上でも

$$\overline{v'^2} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial y} \overline{w'^2} = 0 \dots\dots\dots (11)$$

でなければならない. これらの考察は Brundrett & Baines<sup>5)</sup> によって実験的にも確かめられており (図-4 参照), 結局全断面の 1/8 の二等辺直角三角形の部分は互いに力学的に独立となり, したがって二次流の流線もこの三角形の内部で閉じなければならないことになる.

二次流の速度分布を求めるには式 (7) を具体的に解かねばならないが, そのためには式 (7) の右辺第 2 項の値が与えられねばならない. これについては, Brundrett & Baines によって正方形断面を持つ風洞内で詳細に測定されており, ここでもその値を用いることとする. 式 (7) の右辺第 1 項の非線型項については先にも述べたように, 平均流の速度成分は乱れの自乗平方速度成分の約 1/5 程度であり, また, 積の形になっているので, 左辺の高階項と比較してもかなり小さいことが予想される. 実際, これらの各項については, 図-3 に示されているように一つの二次流の流線上で Gessner & Jones<sup>6)</sup> によって詳細に測定されており, convection 項は非常に小さく最もその値が大きくなる無次元化された位置,  $s^* = 0.3 \sim 0.4$  付近でも shear stress や normal stress の各項に比べても約 1% 程度であることがわか

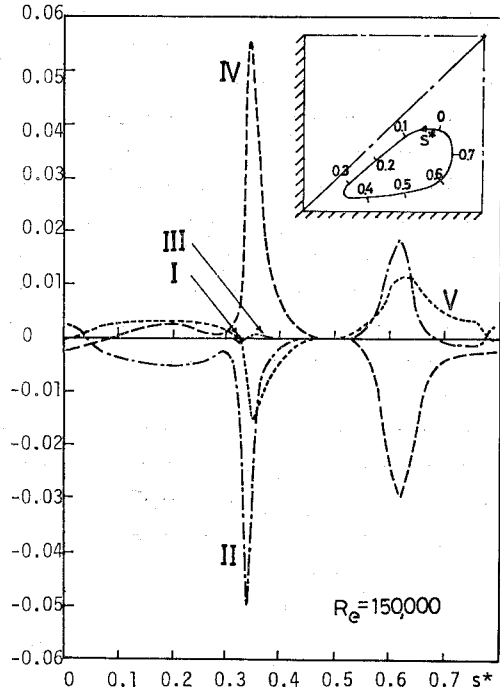


図-3 二次流の流線に沿うレイノルズ方程式 (無次元化されている) の各項の比較, I. 粘性項, II. 乱れによる shear stress 項, III. convective な加速度項, IV. 乱れによる normal stress 項, V. 圧力項 (Gessner & Jones による)

る. したがって, ここでは右辺第 1 項については無視して計算をすすめることにする. また, 粘性項も 図-3 中に示されているように convection 項よりもさらに小さく, したがって無視することができ, 結局式 (7) は単純化され,

$$\frac{\partial^4 \phi}{\partial y^4} - 2 \frac{\partial^4 \phi}{\partial y^2 \partial z^2} + \frac{\partial^4 \phi}{\partial z^4} = \frac{1}{\epsilon_{yz}} \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} (\overline{v'^2} - \overline{w'^2}) \dots\dots\dots (12)$$

となる. この偏微分方程式を下記の境界条件の下に解けばよいことになる. すなわち, 境界上で

$$\phi = 0, \quad \frac{\partial^2 \phi}{\partial n^2} = 0 \dots\dots\dots (13)$$

である. ただし  $n$  は境界の法線方向を表す. この境界条件のうち, 後者の条件は次のような考察から導き出される. 図-2 に戻って考えると境界 OA, OB 上では他の領域と流速分布が滑らかにつながらなければならないから自動的にこの境界条件が満たされねばならない. 次に境界 AB 上で物理的考察によってこの境界条件が近似的に満たされていることを示す. 厳密には AB 上では non-slip の条件から  $\partial \phi / \partial n = 0$  でなければならないが, 二次流の速度分布の測定例 (たとえば Launder & Ying, あるいは Gessner & Jones) を見ると速度分

布は壁のごく近くで一定値（すなわち  $\partial^2\phi/\partial n^2=0$ ）となっている。このことは二次流の流速の極大値が壁のごく近傍で成立することを意味し、速度が壁に近づくにつれ減少していく領域は非常に薄いことを示している。また、この領域は非常に薄く測定されていない。一方、このような壁に近い領域では式 (12) 中で無視された粘性項はもはや小さくはなく、このときは式 (12) は近似的にも満足されない。ここでは乱れによってのみ流れが規定される領域を対象としており、また、 $\partial^2\phi/\partial n^2=0$  となる高さが壁に非常に近いことを利用して近似的に AB 上でこの境界条件が成立するものとした。

この方程式の解法については差分法、Fourier 級数展開による方法などがあるが、ここでは右辺の  $\bar{v}'^2, \bar{w}'^2$  に実験値を用いねばならないために差分法では精度に問題があり、Fourier 級数展開による方法を用いることとする。式 (13) の境界条件下における式 (12) の解は、

$$\phi(y, z) = \frac{4a^2}{\pi^4 \epsilon_{yz}} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_{mn}}{(m^2 - n^2)^2} \times \sin \frac{m\pi y}{a} \sin \frac{n\pi z}{a} \dots\dots\dots (14)$$

$$A_{mn} = \int_0^{\eta_0} \int_0^{\xi_0} \frac{\partial^2(\bar{v}'^2 - \bar{w}'^2)}{\partial \xi \partial \eta} \left\{ \sin \frac{m\pi \xi}{a} \sin \frac{n\pi \eta}{a} + (-1)^{m+n+1} \sin \frac{m\pi \eta}{a} \sin \frac{n\pi \xi}{a} \right\} d\xi d\eta$$

によって与えられる。  $A_{mn}$  の表示を簡単化するために部分積分を行うと結局  $A_{mn}$  は

$$A_{mn} = \frac{mn\pi^2}{a^2} \int_0^{\eta_0} \int_0^{\xi_0} (\bar{v}'^2 - \bar{w}'^2) \cos \frac{m\pi \xi}{a} \cos \frac{n\pi \eta}{a} d\xi d\eta + (-1)^{m+n+1} \frac{mn\pi^2}{a^2} \int_0^{\eta_0} \int_0^{\xi_0} (\bar{v}'^2 - \bar{w}'^2) \times \cos \frac{m\pi \eta}{a} \cos \frac{n\pi \xi}{a} d\xi d\eta$$

となる\*1。ただし  $\xi_0, \eta_0$  は二等分線 OA 上の座標を表わす。この表示を式 (14) に代入すると二次流に関する流関数  $\phi$  は次のように表わされる。

$$\phi(y, z) = \frac{4u_*^2 a^2}{\pi^2 \epsilon_{yz}} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{mn}{(m^2 - n^2)^2} \times \left[ \frac{1}{a^2} \int_0^{\xi_0} \int_0^{\eta_0} \frac{\bar{v}'^2 - \bar{w}'^2}{u_*^2} \left\{ \cos \frac{m\pi \xi}{a} \cos \frac{n\pi \eta}{a} + (-1)^{m+n+1} \cos \frac{m\pi \eta}{a} \cos \frac{n\pi \xi}{a} \right\} d\xi d\eta \right] \times \sin \frac{m\pi y}{a} \sin \frac{n\pi z}{a} \dots\dots\dots (15)$$

式 (15) 中の  $(\bar{v}'^2 - \bar{w}'^2)/u_*^2$  は 図-4 から与えられる。式 (15) から明らかなように流関数  $\phi$  の値は  $\epsilon_{yz}$  の影響を大きく受けるのでこの値を正確に見積ることが非常に重要となる。

Boussineq は渦動粘性係数はスカラー量であると考え

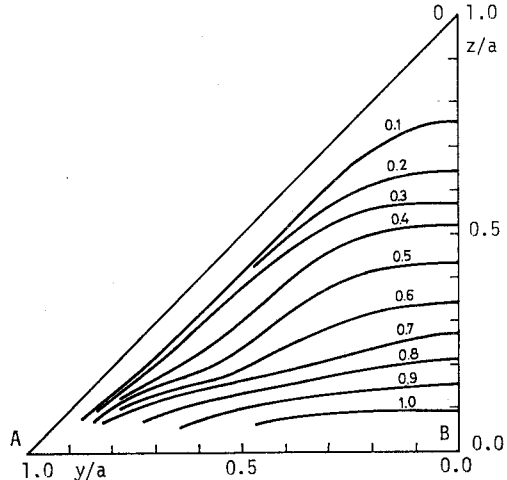


図-4  $(\bar{v}'^2 - \bar{w}'^2)/u_*^2$  の値  $Re=83,000, a=1.5 \text{ in.}, U_{CL}=65.9 \text{ ft/s}, U_a=54.8 \text{ ft/s}$  (Brundrett & Baines による)

たが、よく知られているように渦動粘性係数は一般的には

$$-u'_i u'_j = \epsilon_{ij} \left( \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{U}_j}{\partial x_i} \right)$$

のようにテンソル量として取り扱われねばならない。けれどもこのように一般的に表示してもその値がわからなければ意味がなく、したがってここでは近似的にスカラー量として取り扱ってよいのかどうかを実験値を用いて検討してみることにした。Brundrett & Baines<sup>5)</sup> は正方形断面の風路内で  $\bar{u}'\bar{v}', \bar{v}'\bar{w}', \bar{u}'\bar{w}', \bar{U}, \bar{V}, \bar{W}$  を詳細に測定しているが、表-1 はそれらの測定値から逆算された渦動粘性係数の値を示している。境界 OA, OB, AB に近い点では  $\partial \bar{V}/\partial z, \partial \bar{W}/\partial y$  等の値が小さく、読み取りに正確さを欠くために計算を行っていないが、計算の行われた範囲では  $\epsilon_{yz}$  は  $\epsilon_{xz}$  とよく一致し、しかも  $-\bar{u}'\bar{w}'$  として直線分布、主流の速度分布として対数分布に従うとした場合の渦動粘性係数の分布式、

$$\epsilon_{xz} = \kappa u_* z \left( 1 - \frac{z}{a} \right) \dots\dots\dots (16-a)$$

から求められる値ともほぼ大きさが等しいことがわかる。したがってここでは渦動粘性係数はスカラー量として取り扱い、しかも式の誘導の過程で渦動粘性係数が断面内で一定としているので式 (16-a) の断面平均値を採用し、

$$\epsilon_{yz} = \frac{2}{a^2} \int_0^{\eta_0} \int_0^{\xi_0} \kappa u_* z \left( 1 - \frac{z}{a} \right) dy dz = \frac{\kappa u_* a}{6} \dots\dots\dots (16-b)$$

を用いることとする。ただし  $\kappa$  は Kármán の定数である。

これらから二次流の成分を (15), (16-b), および (6) の各式を用いて求めることができ、それぞれ

\* 付録 参照。

表-1 実測値 (Brundrett & Baines) から求められる渦動粘性係数と  $\kappa u_* z(1-z/a)$  の値の比較  
 $a=1.5$  inch,  $U_{CL}=65.9$  f/s,  $u_*=2.55$  f/s

y (inch)	z (inch)	$\frac{\overline{u'w'}}{u_*^2}$	$\frac{\overline{v'w'}}{u_*^2}$	$\frac{\overline{u'v'}}{u_*^2}$	$\frac{1}{u_*} \left( \frac{\partial \overline{V}}{\partial z} + \frac{\partial \overline{W}}{\partial y} \right)$	$\frac{1}{U_{CL}} \frac{\partial \overline{U}}{\partial z}$	$\epsilon_{xz} = -\frac{\overline{u'w'}}{u_*^2} / \frac{\partial \overline{U}}{\partial z}$	$\epsilon_{yz} = -\frac{\overline{v'w'}}{u_*^2} / \left( \frac{\partial \overline{V}}{\partial z} + \frac{\partial \overline{W}}{\partial y} \right)$	$\epsilon_{xz}$ 式(16-a)
					(inch <sup>-1</sup> )	(inch <sup>-1</sup> )	(f <sup>2</sup> /s)	(f <sup>2</sup> /s)	(f <sup>2</sup> /s)
1.1	0.7	-0.907	-0.066	-0.093	0.325	0.18	0.041	0.043	0.0277
"	0.5	-1.14	-0.053	-0.139	0.175	0.25	0.039	0.064	0.0248
"	0.3	-1.35	-0.040	-0.139	0.45	0.35	0.032	0.019	0.0179
0.9	0.5	-1.01	-0.079	-0.159	0.975	0.62	0.013	0.017	0.0248
"	0.3	-1.29	-0.040	-0.159	0.625	0.80	0.013	0.014	0.0179
0.7	0.3	-1.21	-0.066	-0.079	0.80	0.47	0.021	0.018	0.0179

$$\frac{\overline{V}}{u_*} = \frac{2A}{\kappa\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{m^2 n}{(m^2 - n^2)^2} \times \left[ \frac{1}{a^2} \int_0^a \int_0^a \frac{\overline{v'^2} - \overline{w'^2}}{u_*^2} \left\{ \cos \frac{m\pi\xi}{a} \cos \frac{n\pi\eta}{a} + (-1)^{m+n+1} \cos \frac{m\pi\eta}{a} \cos \frac{n\pi\xi}{a} \right\} d\xi d\eta \right] \times \cos \frac{m\pi y}{a} \sin \frac{n\pi z}{a} \dots (17-a)$$

$$\frac{\overline{W}}{u_*} = -\frac{2A}{\kappa\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{mn^2}{(m^2 - n^2)^2} \times \left[ \frac{1}{a^2} \int_0^a \int_0^a \frac{\overline{v'^2} - \overline{w'^2}}{u_*^2} \left\{ \cos \frac{m\pi\xi}{a} \cos \frac{n\pi\eta}{a} + (-1)^{m+n+1} \cos \frac{m\pi\eta}{a} \cos \frac{n\pi\xi}{a} \right\} d\xi d\eta \right] \times \sin \frac{m\pi z}{a} \cos \frac{n\pi y}{a} \dots (17-b)$$

によって与えられる。正方形断面を持つ風洞内における Launder & Ying<sup>7)</sup> の実験によれば、 $\overline{V}$ ,  $\overline{W}$  の値は

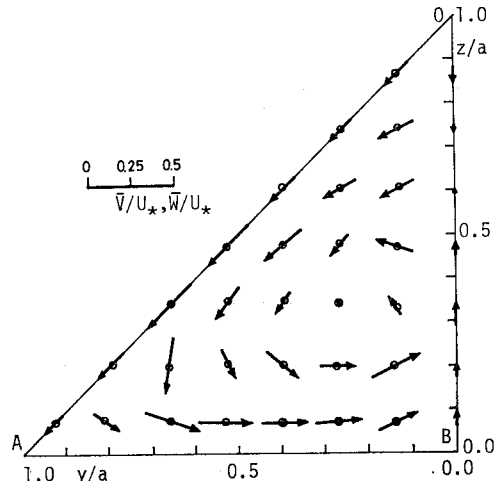


図-5 (b) 測定された流速ベクトル図。  $R_e=83000$  (Brundrett & Baines による)

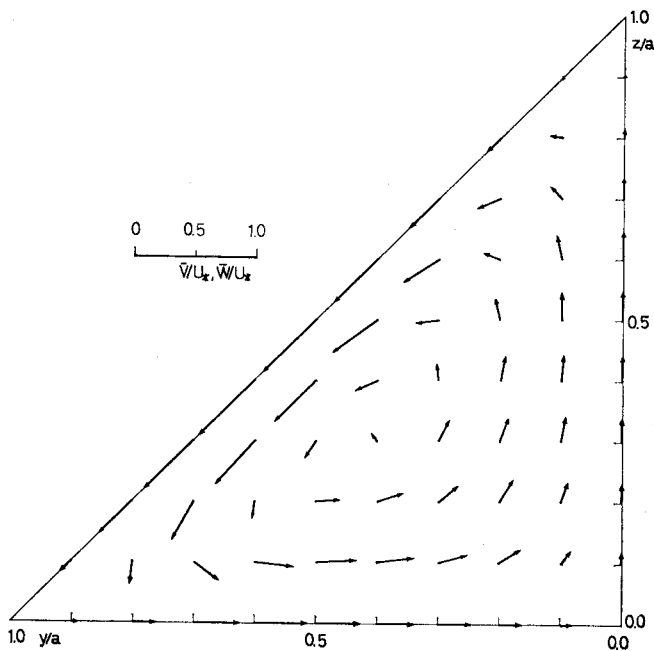


図-5 (a) 計算によって求められた二次流のベクトル図 (矢印の根元における値を表わす)

側壁の滑粗, Reynolds 数によって変化するが,  $\overline{V}/u_*$ ,  $\overline{W}/u_*$  についてはこれらに關係なく一定の分布形を有することが知られている。(17-a), (17-b) の両式においても  $(\overline{v'^2} - \overline{w'^2})/u_*^2$  の値がある断面内で水路の滑粗, Reynolds 数に關係なく一定の分布形を有していればこの実験結果をうまく説明できることになる。摩擦速度  $u_*$  は乱れの強さの尺度であることを考えるとこの分布形は断面形状のみの関数となり, 滑粗, Reynolds 数に無關係となることが予想されるが, この点についてはさらに詳細な実験的検討が必要である。

式 (17-a), (17-b) の両式を用いて得られた二次流の速度ベクトルを 図-5(a) に示す。セル構造が現われ, また, その流速は最も大きい所でも  $0.5u_*$  程度であり, 一般に乱れの自乗平均  $\sqrt{\overline{u'^2}}$ ,  $\sqrt{\overline{v'^2}}$ ,  $\sqrt{\overline{w'^2}}$  等は  $(1\sim 2)u_*$  であるので乱れのスケールと比較してもかなり小さいことがわかる。けれどもこのような二次流は先にも考察し

たように乱れそのものによってひきおこされることを考えればこのように小さい値を持つことは当然であるともいえる。図-5 (b) はこの Brundrett & Baines<sup>5)</sup> によって風洞内で測定された実測値である。計算値と実測値の一致は大略良好である。なお計算に際しては  $m, n$  ともにおおの 10 項までとり、 $\kappa$  の値については後に示されるようにこの場合の主流の速度分布から得られる値、 $\kappa = 0.35$  を用いた。また、 $m=n$  の場合には式 (14) 中の  $A_{mn}$  は 0 となるので式 (14) 中の  $A_{mn}/(m^2-n^2)$  は不定となるが、これは計算から除いた。計算の収束性については最も収束性の悪い例、すなわち  $n=m+1$  の場合について 図-9 に示してみた (付録参照)。これから  $m, n$  ともに 10 項程度で十分収束しているものと考えられる。

4. 主流の速度分布

ここでは先に得られた二次流の存在によって主流の速度分布がどのような影響を受けるかについて考察を加える。まず、このような流れがないとして考える。図-1 の三角形 OAB について考えると先に考察したように OA, OB 線を通して運動量の交換は平均的に 0 であるから、渦度は底 AB のみから輸送されることとなり、等流速線は底に平行で、流速分布は対数速度分布となることが予想される。この仮説を検証するために 図-7 (b) に示されている実測によって得られた等流速線を平均的に境界に平行な直線で近似し、この値を片対数上にプロットしてみた。その結果は 図-6 に示されているが、分布はほぼ対数速度分布となっていることがわかる。これを速度欠損則で表わすと次のように表現される。すな

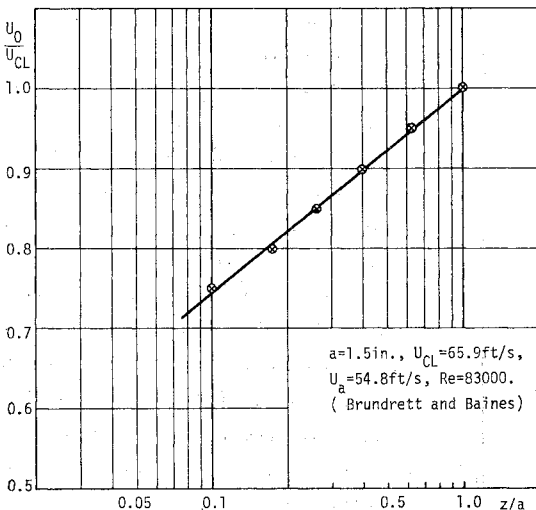


図-6 U<sub>0</sub> の流速分布

わち

$$\frac{\bar{U}_0}{U_{CL}} = 1 + \frac{U_*}{U_{CL}} \frac{1}{\kappa} \log_e \frac{z}{a} \dots \dots \dots (18)$$

$\kappa = 0.35$

である。ここに  $U_{CL}$  は水路中心 O 点における流速であり、 $\bar{U}_0$  は二次流に影響されなかった場合の主流の流速を示し

$$\bar{U} = \bar{U}_0 + \bar{u} \dots \dots \dots (19)$$

の関係があり、 $\bar{U}_0 \gg \bar{u}$  である。したがって、 $\bar{u}$  が二次流によって歪められる流速分となる。次にこの  $\bar{u}$  について調べてみる。x 方向の Reynolds 方程式は次式によって与えられる。

$$\bar{V} \frac{\partial \bar{U}}{\partial y} + \bar{W} \frac{\partial \bar{U}}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} (-\bar{u}'\bar{w}') + \frac{\partial}{\partial y} (-\bar{u}'\bar{v}') \dots \dots \dots (20)$$

式 (20) の各項の内  $\partial(-\bar{u}'\bar{w}')/\partial y$  は先にも考察したように渦度が底 AB からのみ輸送されるので y 方向の変化は小さく第一近似としてこの値は  $\partial(-\bar{u}'\bar{w}')/\partial z$  に比べて無視しうる。事実、Brundrett & Baines の実験でもこの値は非常に小さい。したがって以下の考察ではこの項は無視する。 $-\bar{u}'\bar{w}'$  については主流の速度分布を対数速度分布で表現しているので混合距離の概念を用いて、

$$-\bar{u}'\bar{w}' = \epsilon_{xz} \frac{\partial \bar{U}}{\partial z} = l^2 \frac{\partial \bar{U}}{\partial z} \left| \frac{\partial \bar{U}}{\partial z} \right| \dots \dots \dots (21)$$

と表わす。式 (20) に (19), (21) の両式を代入すると

$$\bar{V} \frac{\partial \bar{U}_0}{\partial y} + \bar{V} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \bar{W} \frac{\partial \bar{U}_0}{\partial z} + \bar{W} \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \kappa^2 z^2 \frac{\partial (\bar{U}_0 + \bar{u})}{\partial z} \frac{\partial (\bar{U}_0 + \bar{u})}{\partial z} \right\}$$

を得る。ここで  $\bar{V}, \bar{W}$  は  $\bar{u}$  と同じ order であり、 $\bar{U}_0$  と比較して非常に小さいので上式中の二次の微小項を無視し、また  $\partial \bar{U}_0/\partial z = u_* / \kappa z$  であることを考えると上式は

$$\frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial z^2} + \frac{1}{z} \left( 1 - \frac{1}{2\kappa} \hat{W} \right) \frac{\partial \hat{u}}{\partial z} - \frac{1}{2\kappa z} \hat{V} \frac{\partial \hat{u}}{\partial y} - \frac{1}{2\kappa^2 z^2} \hat{W} = 0 \dots \dots \dots (22)$$

となる。ここに

$$\hat{u} = \frac{\bar{u}}{u_*}, \quad \hat{V} = \frac{\bar{V}}{u_*}, \quad \hat{W} = \frac{\bar{W}}{u_*}$$

である。 $\bar{V}/u_*, \bar{W}/u_*$  についてはそれぞれ (17-a), (17-b) によって与えられるので、式 (22) をこれらの値を用いてしかるべき境界条件の下に解けば  $\hat{u}$  が与えられることとなる。式 (22) を解くために数値計算を行う。偏微分の近似として中央差分を用いると、

$$\frac{\partial \hat{u}}{\partial z} = \frac{\hat{u}(i+1, j) - \hat{u}(i-1, j)}{2 \Delta z}$$

$$\frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial x^2} = \frac{\hat{u}(i+1, j) - 2\hat{u}(i, j) + \hat{u}(i-1, j)}{\Delta x^2}$$

$$\frac{\partial \hat{u}}{\partial y} = \frac{\hat{u}(i, j+1) - \hat{u}(i, j-1)}{2\Delta y}$$

として表現される。ここに  $i, j$  はそれぞれ  $x, y$  方向の格子点を表わす。これらの表現を式 (22) に代入し整理すると

$$\begin{aligned} \hat{u}(i, j) = & \frac{1}{2} \{ \hat{u}(i+1, j) + \hat{u}(i-1, j) \} \\ & + \frac{\Delta x}{4z(i)} \left\{ 1 - \frac{\hat{W}(i, j)}{2\kappa} \right\} \{ \hat{u}(i+1, j) \\ & - \hat{u}(i-1, j) \} - \frac{\hat{V}(i, j)}{8\kappa z(i)} \frac{\Delta x^2}{4y} \\ & \times \{ \hat{u}(i, j+1) - \hat{u}(i, j-1) \} \\ & - \frac{\hat{W}(i, j)}{4\kappa^2} \frac{\Delta x^2}{z^2(i)} \dots\dots\dots (23) \end{aligned}$$

となる。式 (23) を最初にすべての  $\hat{u}(i, j)$  は 0 として (17-a), (17-b) の両式から得られる  $\hat{V}(i, j), \hat{W}(i, j)$  の値を代入してリラクゼーション法で解いた。このとき境界条件は他の領域と滑らかにつながるように OA, OB 上ではすぐ内側の格子点と同じ値を持つとした。これによって得られる  $\hat{u}(i, j)$  に式 (18) で表現される  $\bar{U}_0$  を加えると二次流によって歪められた主流の流速分布が得られることとなる。その計算結果は 図-7 (a) に示されている。等流速線は実際には OA 上で滑らかにつながらなければならないから OA に直交しなければならないが、この問題は二つの平行平板の間を流れる乱流の

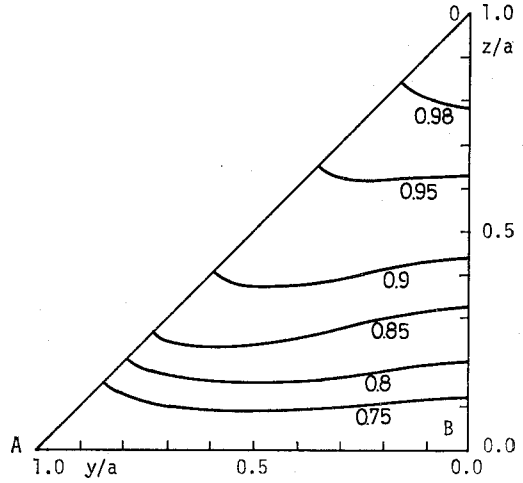


図-7 (b) 測定された等流速線。  $Re = 83,000$  (Brundrett & Bainesによる)

Poiseuille 流れにおいて両方の境界から対数則で速度分布を決めた場合に中央で滑らかにつながらないのと同等であり、この OA 線近傍の乱れ自身の問題であってここでは簡単に取り扱えないものであるし、また重要な問題ではないと思われるのでそのままにしておいた。図-7 (b) は同一の水理条件における Brundrett & Baines による実測値であり、等流速線が境界に平行でなく、歪められていることが示され、計算によって得られた値と傾向はよく一致していることがわかる。なお、数値計算に際しては  $\Delta y = \Delta z = 0.05a$  とし、収束の判定条件は

$$\frac{\sum_{i,j} |\hat{u}_{k+1}(i, j)| - \sum_{i,j} |\hat{u}_k(i, j)|}{\sum_{i,j} |\hat{u}_k(i, j)|} = 0.0001$$

とした。ただし  $k$  はリラクゼーションの繰り返し回数を表わす。

### 5. 検 討

ここで明らかにされたように個々のセルは時間平均的に力学的に独立であり、したがって長方形断面内の速度分布を近似する場合によく行われるように底および側壁から対数則を仮定し、これらを積の形に表わす方法、すなわち

$$u = u_0 \log z \log y$$

のように表現する方法は誤りであることがわかる。また、ここでは計算に際して開水路における乱れの計測のデータがないために風洞内の値を用いて計算をすすめ、また、その結果の検証も風洞内で得られた流

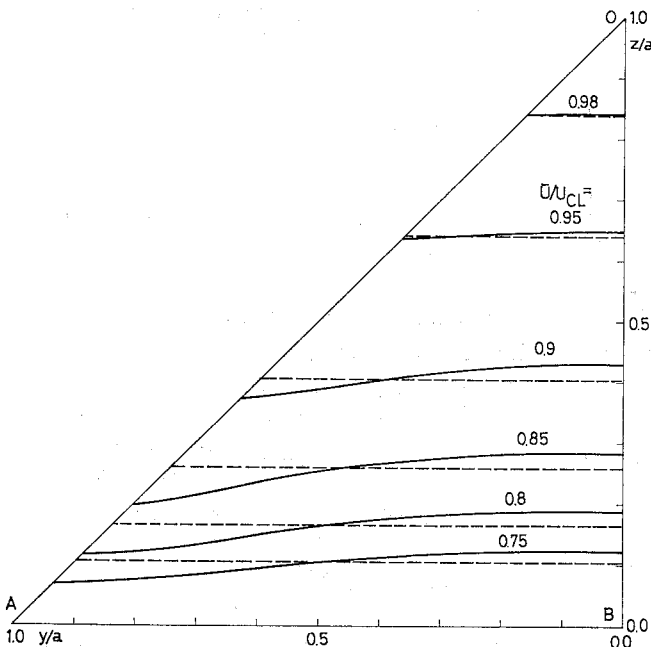
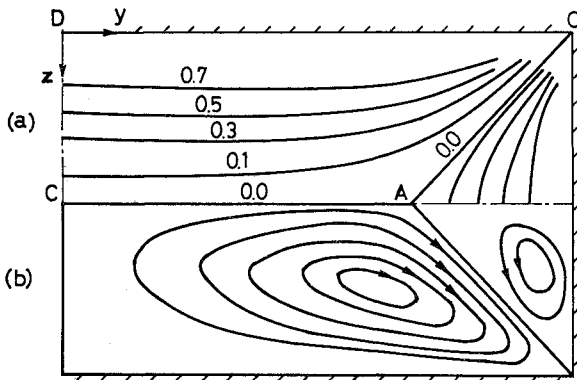


図-7 (a) 二次流によって歪められた主流の等流速線 (計算値) 破線は  $\bar{U}_0/U_{CL}$  の値を表わす。



図—8 長方形断面における  $(\overline{v'^2} - \overline{w'^2})/u_*^2$  と二次流の流線の概略図 (Brundrett & Baines)

- (a)  $(\overline{v'^2} - \overline{w'^2})/u_*^2$ ,  $U_a D_e / \nu = 20\,000$ .  
 (b) 二次流の流線  $U_a D_e / \nu = 60\,000$ .

速分布を用いたが、その原理は開水路においてもまったく同じであり、本論文の取り扱いによって流速分布のひずみを正しく説明できると思われる。

断面形が正方形でなく、任意の縦横比を持つ長方形断面形の管路内の二次流については  $(\overline{v'^2} - \overline{w'^2})/u_*^2$  の分布形が詳細には明らかではなく、またこのような断面形の場合には Fourier 級数展開によって解を求めることができず、式 (12) を直接差分法等を用いて数值的に解かねばならなくなる。このとき式 (12) 右辺の normal stress 項の値が実験によって与えられていたとしても差分法によって解かねばならないので、値がなめらかにならなければならない。したがって  $(\overline{v'^2} - \overline{w'^2})/u_*^2$  の大きさの分布を曲面近似によって表現しなければならないであろう。これらの理由からここでは長方形断面を持つ管路内の流れについては取り扱わなかった。ただ、文献 5) には 図—8 に示されているような縦横比 1×3 の長方形断面を持つ風洞で測定された二次流の流線が描かれており、これを見ると Prandtl が予想したように一つの領域で複数のセルは存在せず、各領域でおのの一個ずつのセルが存在することが示されている。これは式 (12) の右辺が台形 OACD の領域全面で負の値を持つべきことを示しているが、このためには 図—8 の分布形がそうなっているように  $(\overline{v'^2} - \overline{w'^2})/u_*^2$  の分布形が  $y, z$  方向にそれぞれ単調に減少、および増加していればよい。したがって Brundrett & Baines が示したように計算上も唯一個のセルができると思われる。しかし、これらについては今後に残された課題であり、さらに詳細な実験データの蓄積が望まれるところである。

## 6. 結 論

以上の考察によって以下のことが明らかとなった。

- (1) 非円形断面を持つ直線水路の乱流の流れでは二次流が発生し、その原因は無次元 Reynolds 応力  $(\overline{v'^2} - \overline{w'^2})/u_*^2$  の不均衡である。
- (2) 渦動粘性係数  $\epsilon_{yz}$  を一定とし、Reynolds 方程式の非線型項を無視するなど簡略化した取り扱いを行ったにもかかわらず、二次流の分布形をよく表わすことができた。
- (3) その速度分布形は摩擦速度  $u_*$  で無次元化すると境界の滑、粗および Reynolds 数に関係なく一定の分布形を有する。この結果は Launder & Ying の測定結果とほぼ一致する。
- (4) 二次流自身の値は最大でも  $0.5 u_*$  程度であり、乱れの成分よりもかなり小さいが、流線がセル状となるために運動量の交換が大きく、主流の速度分布をひずませる。その結果、隅角部では主流の流速が増大する。
- (5) 開水路では水面で Reynolds stress が 0 となることは多くの実験によって確かめられているので、力学的には 図—1 の二等分線 CC' を持って開水路の水表面に対応させることができ、したがって開水路においてもここで考察したような機構によって二次流が発生しているものと思われる。

## 【付 録】

$A_{mn}$  の各項は次のように変形できる。

$$\begin{aligned} & \int_0^a \int_0^{\eta_0} \frac{\partial^2 (\overline{v'^2} - \overline{w'^2})}{\partial \xi \partial \eta} \sin \frac{m\pi \xi}{a} \sin \frac{n\pi \eta}{a} d\xi d\eta \\ &= \int_0^a \frac{\partial (\overline{v'^2} - \overline{w'^2})}{\partial \xi} \Big|_{\eta_0} \sin \frac{n\pi \eta_0}{a} \sin \frac{m\pi \xi}{a} d\xi \\ & - \frac{n\pi}{a} \int_0^a \int_0^{\eta_0} \frac{\partial (\overline{v'^2} - \overline{w'^2})}{\partial \xi} \cos \frac{n\pi \eta}{a} \sin \frac{m\pi \xi}{a} d\xi d\eta \\ &= (-1)^{n+1} \int_0^a \frac{\partial (\overline{v'^2} - \overline{w'^2})}{\partial \xi} \Big|_{\eta_0} \sin \frac{n\pi \xi}{a} \sin \frac{m\pi \xi}{a} d\xi \\ & + \frac{mn\pi^2}{a^2} \int_0^a \int_0^{\eta_0} (\overline{v'^2} - \overline{w'^2}) \cos \frac{n\pi \eta}{a} \cos \frac{m\pi \xi}{a} d\xi d\eta \end{aligned}$$

となる。ただし subscripts  $\eta_0$  は OA 上の  $\eta_0$  における値を表わす。まったく同様にして

$$\begin{aligned} & (-1)^{m+n+1} \int_0^a \int_0^{\eta_0} \frac{\partial^2 (\overline{v'^2} - \overline{w'^2})}{\partial \xi \partial \eta} \sin \frac{m\pi \eta}{a} \sin \frac{n\pi \xi}{a} d\xi d\eta \\ &= (-1)^{m+n+1} \left\{ (-1)^{m+1} \int_0^a \frac{\partial (\overline{v'^2} - \overline{w'^2})}{\partial \xi} \Big|_{\eta_0} \right. \\ & \times \sin \frac{m\pi \xi}{a} \sin \frac{n\pi \xi}{a} d\xi + \frac{mn\pi^2}{a^2} \int_0^a \int_0^{\eta_0} (\overline{v'^2} - \overline{w'^2}) \\ & \left. \times \cos \frac{m\pi \eta}{a} \cos \frac{n\pi \xi}{a} d\xi d\eta \right\} \end{aligned}$$

を得る。したがって  $A_{mn}$  は

$$A_{mn} = \{ (-1)^{n+1} + (-1)^{2m+n+2} \} \int_0^a \frac{\partial (\overline{v'^2} - \overline{w'^2})}{\partial \xi} \Big|_{\eta_0}$$



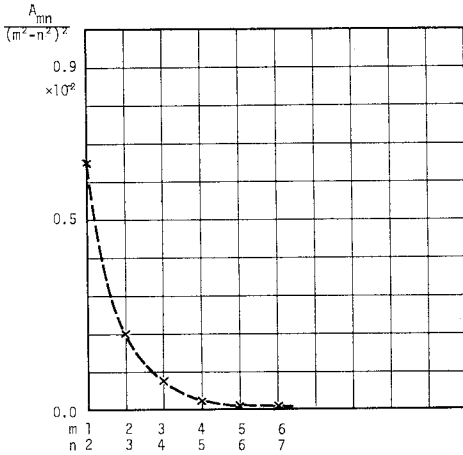


図-9  $A_{mn} / (m^2 - n^2)^2$  の値

$$\begin{aligned} & \times \sin \frac{m\pi\xi}{a} \sin \frac{n\pi\xi}{a} d\xi \\ & + \frac{mn\pi^2}{a^2} \left\{ \int_0^a \int_0^{\xi_0} (\overline{v'^2} - \overline{w'^2}) \cos \frac{m\pi\xi}{a} \cos \frac{n\pi\eta}{a} d\xi d\eta \right. \\ & \left. + (-1)^{m+n+1} \int_0^a \int_0^{\xi_0} (\overline{v'^2} - \overline{w'^2}) \cos \frac{m\pi\eta}{a} \cos \frac{n\pi\xi}{a} d\xi d\eta \right\} \end{aligned}$$

となる。ところが右辺第1項はすべての  $m, n$  の組み合わせに対して0であり、結局第2項のみが残る。

図-9 に式 (14) 中の係数  $A_{mn} / (m^2 - n^2)^2$  の値を示

す。

参考文献

- 1) Nikuradse, J. : Untersuchungen über die Geschwindigkeitsverteilung in turbulenten Strömungen, Diss. Göttingen (1926). Schlichting, H., Boundary-Layer Theory, McGRAW-HILL (1968).
- 2) Prandtl, L. : Essentials of Fluid Dynamics, Hafner Publishing (1960).
- 3) Shen, H.W. (Editor) : River Mechanics, Colorado, U.S.A. (Published by Shen).
- 4) Chiu, C.L. and J.E. McSparran : Effect of Secondary Flow on Sediment Transport, Proc. ASCE, Jour. of Hy. Div., Hy 5 (1966).
- 5) Brundrett, E. and W.D. Baines : The Production and Diffusion of Vorticity in Duct Flow, Jour. of Fluid Mech., Vol. 19 (1964).
- 6) Gessner, F.B. and J.B. Jones : On Some Aspects of Fully-developed Turbulent Flow in Rectangular Channels, Jour. of Fluid Mech., Vol. 23 (1965).
- 7) Launder, B.E. and W. M. Ying : Secondary Flows in Ducts of Square Cross-Section, Jour. of Fluid Mech., Vol. 54 (1972).
- 8) Einstein, H.A. and H. Li : Secondary Currents in Straight Channels, Trans. A.G.U., Vol. 39 (1958).
- 9) Chiu, C.L. : Mechanics of Secondary Flow in Corners of Straight Conduits, Ph. D Thesis, Cornell Univ. (1964).
- 10) 足立昭平 : 長方形断面水路の側壁効果に関する研究, 土木学会論文集, 81 号 (1962).

(1975.11.21・受付)