

## 4 辺単純支持変厚板の曲げたわみに関する研究

NOTE ON THE BENDING OF RECTANGULAR PLATE WITH  
VARIABLE STIFFNESS

中 川 建 治\*

By Kenji NAKAGAWA

## 1. ま え が き

曲げ剛さが緩やかに変化する薄板が面外力を受けてたわむ問題については、その理論的な解析は比較的少ないようである。Olsson と Reissner の研究<sup>1)~3)</sup>は、曲げ剛さあるいは板厚が 1 次変化する 4 辺単純支持板が特殊な分布荷重を受ける場合を対象にしている。熊井<sup>4)</sup>は曲げ剛さが指数関数と三角関数変化の場合を取り扱っている。これらはいずれも分布荷重の場合であり、exponential integral を含んだものであって一般性に欠ける解である。4 辺形差分で数値計算する基本式は Bergfelder<sup>5)</sup>によって示されているが、計算手段の発達した現在では差分法や有限要素法で計算する方法が最も実用であろう。

著者は曲げ剛さが  $x, y$  の 1 次関数で表わされる板が 4 辺で単純支持されている場合について、面外力によるたわみ影響面の理論解を得た。たわみに関する微分方程式を  $x, y$  方向に差分法で展開して線型連立方程式を求め、この剛性行列の逆行列を理論的に誘導して差分法による完全解をまず求めた。この解を有限から無限へ至る過程を用いて変形して微分方程式の完全解を得た。この過程で有限級数和无級数を経て連続関数の積分に変換したが、この積分は数式としては積分できず、積分記号のまま理論解に残存しているので、この解を微分方程式の完全解と表現するのは異論があると思われる。したがって本文では差分解と区別するために連続解と仮称する。

この連続解は 2 重積分と 4 重級数（曲げ剛さが、 $x$  あるいは  $y$  のいずれか一方の 1 次式ならば、1 方向積分と 3 重級数）を含むので、解の数値を実際に決定する数値計算上の見地からはあまり有効な形ではない。数値のみを目的とする場合には剛性行列を作成して逆行列を求め

る方法が簡単で優れている。これらの関係を示すべく、本文では連続解を誘導するのみならず、Olsson が扱った  $y$  方向にのみ 1 次変化する曲げ剛さをもつ正方形板を例にして、簡単な計算例ではあるが、連続解中の積分を Simpson の数値積分法で表わして、無限級数を有限で打切った場合のたわみの変化状態を示す。さらに、Olsson の扱った不等分布荷重に対するたわみをこの連続解で求め、剛性行列を作成して逆行列を求める差分法による結果とともに比較してよい一致が見られることを示す。

## 2. たわみの微分方程式

曲げ剛さが変化する薄板のたわみに関する微分方程式<sup>1)</sup>は、

$$D^2 D^2 W + D^2 D \cdot D^2 W + 2 \left( D_x \frac{\partial}{\partial x} + D_y \frac{\partial}{\partial y} \right) D^2 W - (1-\nu) (D_{xx} W_{yy} - 2 D_{xy} W_{xy} + D_{yy} W_{xx}) = q(x, y)$$

であるが、曲げ剛さ  $D(x, y)$  が  $x, y$  の 1 次関数で

$$D(x, y) = D_0(1 + \alpha x + \beta y) \dots \dots \dots (1)$$

と表わされるものとする、たわみに関する微分方程式は次のようになる。

$$D^2 D^2 W + D^2 D \cdot D^2 W + 2 D_y (D^2 W)_y + 2 D_x (D^2 W)_x = q(x, y) \\ D^2 (D \cdot D^2 W) = q(x, y) \dots \dots \dots (2)$$

ここで、 $W$  はたわみ、 $q(x, y)$  は荷重であり、 $x, y$  に関する微分を右下の添字で表わす。ただし、 $x, y$  の 1 次関数である曲げ剛さ  $D(x, y)$  は、誤解のない場合には  $D$  と略記する。さらに本文では、 $D_x, D_y$  を  $D$  の  $x, y$  の 1 階微分とするが、 $D_{ij}$  を  $x = jh_x, y = ih_y$  における曲げ剛さ、 $D_i$  は  $y = ih_y$  線上の曲げ剛さ、 $D_{i1} \sim D_{im}$  を対角元とする対角行列、 $[D]$  は  $D_i$  を対角小行列とする対角大行列というように使い分ける (式 (4))

\* 正会員 工博 岐阜大学助教授 工学部土木工学教室

参照).

式(2)は  $\alpha=0, \beta=0$  も含んだ  $x, y$  の1次変化を許す形である。板は図-1に示すように  $x, y$  方向の長さが  $a, b$  の矩形板で4辺が単純支持されているものとする。

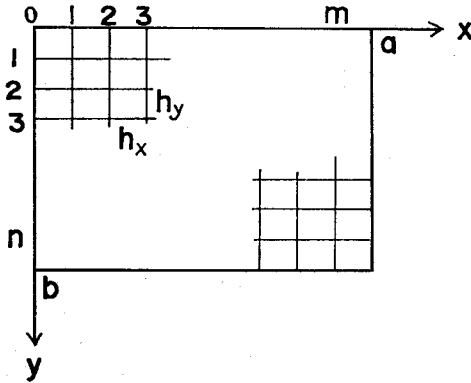


図-1

### 3. 差分解

矩形板を  $x$  方向に  $m+1$  等分  $y$  方向に  $n+1$  等分する分割点上のたわみ  $W_i, (i=1, 2, \dots, mn)$  によって式(1)の微分方程式を差分法で表現すると次のようになる。

$$[S]\{W\} = \{q\}h_y^4 \quad \dots\dots\dots(3)$$

$$[S] = [B][D][B]$$

$$[B] = \begin{bmatrix} A & E & & 0 \\ E & A & E & \\ & E & A & E \\ 0 & & E & A \end{bmatrix}$$

$$[D] = \begin{bmatrix} D_1 & & & 0 \\ & D_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & D_n \end{bmatrix}$$

$$[A] = \begin{bmatrix} -2(1+1/c^2), & 1/c^2 & & & & 0 \\ & 1/c^2, & -2(1+1/c^2), & 1/c^2 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & & & 1/c^2, & -2(1+1/c^2), & 1/c^2 \\ & & & & \ddots & \ddots \\ & & & & & 1/c^2, & -2(1+1/c^2) \end{bmatrix}$$

$c = h_x/h_y$   
 $h_x = a/(m+1), h_y = b/(n+1)$

$$\dots\dots\dots(4)$$

ここに  $\{W\}, \{q\}$  は各点のたわみと分布荷重強度であり,  $[S], [B], [D]$  は  $m$  元小行列を要素とする  $n$  元正方大行列である。  $[A]$  は  $m$  元正方行列,  $[E]$  は  $m$  元単位行列,  $[D_i]$  は  $y = ih_y$  線上の各点の曲げ剛さ  $D_{ij}$  を対角元とする  $m$  元対角行列である。この剛性行列

$[S]$  の逆行列を  $m$  元正方行列  $F_{ij} = [f_{st}^{ij}]$  を要素とする大行列  $F = [F_{ij}]$  で表現すると, 次のような理論値  $f_{st}^{ij}$  が得られる。

$$\left. \begin{aligned} [S]^{-1} &= [F] = [F_{ij}] \quad i, j=1, 2, \dots, n \\ F_{ij} &= [f_{st}^{ij}] \quad s, t=1, 2, \dots, m \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(5)$$

$$f_{st}^{ij} = \sum_{u=1}^m \sum_{v=1}^m \sum_{w=1}^m \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \sum_{r=1}^n \frac{ZU(c, D, u, v, w, k, l, r)_{st}^{ij}}{ZL(c, D, u, v, w, k, l, r)_{st}^{ij}}$$

$$ZU_{st}^{ij} = 16 \sin \frac{ik\pi}{n+1} \sin \frac{j l \pi}{n+1} \sin \frac{rk\pi}{n+1}$$

$$\cdot \sin \frac{rl\pi}{n+1} \sin \frac{su\pi}{m+1} \sin \frac{tv\pi}{m+1}$$

$$\cdot \sin \frac{uw\pi}{m+1} \sin \frac{vw\pi}{m+1}$$

$$ZL_{st}^{ij} = (m+1)^2(n+1)^2 D_{rw}$$

$$\cdot \left\{ 2 \left( \frac{1}{c^2} \cos \frac{u\pi}{m+1} + \cos \frac{k\pi}{n+1} \right) - 2 \left( 1 + \frac{1}{c^2} \right) \right\}$$

$$\times \left\{ 2 \left( \frac{1}{c^2} \cos \frac{v\pi}{m+1} + \cos \frac{l\pi}{n+1} \right) - 2 \left( 1 + \frac{1}{c^2} \right) \right\}$$

$$\dots\dots\dots(6)$$

この  $f_{st}^{ij}$  を誘導する過程は非常に煩雑な行列演算を含む。最終目的は連続解を得ることであるから証明は補遺にゆずることにする。

### 4. 連続解

連続解を得るには  $m, n \rightarrow \infty$  とすればよい。式(6)における  $ZL_{st}^{ij}$  の  $\{ \}$  は次のように変換される。

$$\left\{ 2 \left( \frac{1}{c^2} \cos \frac{u\pi}{m+1} + \cos \frac{k\pi}{n+1} \right) - 2 \left( 1 + \frac{1}{c^2} \right) \right\}$$

$$= -h_y^2 \left\{ \frac{2}{h_x^2} \left( 1 - \cos \frac{u\pi}{m+1} \right) + \frac{2}{h_y^2} \left( 1 - \cos \frac{k\pi}{n+1} \right) \right\}$$

$$= -\pi^2 h_y^2 \left[ \left\{ \frac{u}{(m+1)h_x} \right\}^2 + \left\{ \frac{k}{(n+1)h_y} \right\}^2 - \frac{\pi^2}{6 h_x^2} \left( \frac{u}{m+1} \right)^4 - \frac{\pi^2}{6 h_y^2} \left( \frac{k}{n+1} \right)^4 + \dots \right]$$

$$= -\pi^2 h_y^2 \left\{ \left( \frac{u}{a} \right)^2 + \left( \frac{k}{b} \right)^2 \right\}$$

$$+ \frac{\pi^4}{6} h_y^2 \left\{ \left( \frac{u^2}{a} \right)^2 \frac{1}{(m+1)^2} + \left( \frac{k^2}{b} \right)^2 \frac{1}{(n+1)^2} \right\} + \dots$$

$$= -\pi^2 h_y^2 \left\{ \left( \frac{u}{a} \right)^2 + \left( \frac{k}{b} \right)^2 \right\} (1 - \varepsilon_{ku}) \dots\dots(7)$$

$$\varepsilon_{ku} = \left\{ \frac{u^4}{(m+1)^2} + \frac{c^2 k^4}{(n-1)^2} \right\} \frac{\pi^2}{6(u^2 + c^2 k^2)} \rightarrow 0 \dots\dots(8)$$

さらに  $m, n \rightarrow \infty$  とともに有限級数和を

$$\sum_{w=1}^m \frac{h_x}{D_{rw}} \sin \frac{u\pi}{m+1} w \sin \frac{v\pi}{m+1} w \\ \doteq \int_0^a \frac{1}{D(x,y)} \sin \frac{u\pi}{a} x \sin \frac{v\pi}{a} x \cdot dx \dots\dots(9)$$

という連続関数の積分で表わしてよい。

さて  $f_{st}^{ij}$  は点  $\xi = th_x, \eta = jh_y$  に荷重を載荷した場合の点  $x = sh_x, y = ih_y$  におけるたわみに相当するので、 $P = qh_x h_y = 1$  が点  $\xi \eta(t, j)$  に載荷した場合の点  $xy$  のたわみ影響関数  $W(x, y; \xi, \eta)$  は式(6)の  $f_{st}^{ij}$  を式(7)~(9)をもって変形することによって得られる。

$$W(x, y; \xi, \eta) \\ = \frac{16P}{a^2 b^2 \pi^4} \sum_{u=1}^{\infty} \sum_{v=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} H(D, k, l, u, v) \\ \cdot \sin \frac{u\pi}{a} x \sin \frac{k\pi}{b} y \sin \frac{v\pi}{a} \xi \sin \frac{l\pi}{b} \eta \dots\dots(10)$$

$$H(D, k, l, u, v) \\ = \frac{1}{\left( \frac{u^2}{a^2} + \frac{k^2}{b^2} \right) \left( \frac{v^2}{a^2} + \frac{l^2}{b^2} \right)} \\ \cdot \int_0^a \int_0^a \frac{1}{D(s,t)} \sin \frac{u\pi s}{a} \sin \frac{v\pi s}{a} \sin \frac{k\pi t}{b} \\ \cdot \sin \frac{l\pi t}{b} ds dt \dots\dots(11)$$

$q(x, y)$  という分布荷重によるたわみ  $W_q(x, y)$  は  $q(x, y)$  が、

$$q(x, y) = \sum_{v=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} p_{vl} \sin \frac{v\pi}{a} x \sin \frac{l\pi}{b} y \dots\dots(12)$$

と表わせるならば

$$W_q(x, y) = \frac{4}{ab\pi^4} \sum_{u=1}^{\infty} \sum_{v=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} H(D, k, l, u, v) \\ \cdot p_{vl} \sin \frac{u\pi}{a} x \sin \frac{k\pi}{b} y \dots\dots(13)$$

となる。以後は煩雑さを避けるために、誤解のない場合は式(11)の  $H(D, k, l, u, v)$  を  $H$  と略記する。

式(11)の  $H$  は  $D(x, y)$  がいずれの方向に1次変化でも、あるいはその他の変化でもよい形をもっている。すなわち、式(10)と式(13)は曲げ剛さが1次変化でなく任意に変化しても偏微分方程式(2)の完全な解であり、曲げ剛さが1次変化する(等断面も含む)場合にのみ板の微分方程式が式(2)に一致するので式(10)と式(13)は板の解になる(偶然4辺単純支持の

条件は満足されている)とみなしてよい。

### 5. 連続解の検証

差分表示の式(5)より式(6)の完全解を得た過程はさて置き、連続解  $W_q(x, y)$  が式(2)を満足することは次のようにして簡単に検証される。

$$D(x, y) \cdot \nabla^2 W_q(x, y) \\ = \frac{4D(x, y)}{ab\pi^2} \sum \sum \sum \left( \frac{u^2}{a^2} + \frac{k^2}{b^2} \right) H \\ \cdot p_{vl} \sin \frac{u\pi}{a} x \sin \frac{k\pi}{b} y \\ = \frac{4D(x, y)}{ab\pi^2} \sum_v \sum_l \frac{p_{vl}}{\left( \frac{v^2}{a^2} + \frac{l^2}{b^2} \right)} \\ \cdot \left[ \sum_u \sum_k \int_0^a \int_0^a \left\{ \frac{1}{D(s, t)} \sin \frac{v\pi s}{a} \sin \frac{l\pi t}{b} \right\} \right. \\ \left. \cdot \sin \frac{u\pi s}{a} \sin \frac{k\pi t}{b} ds dt \times \sin \frac{u\pi}{a} x \sin \frac{k\pi}{b} y \right] \dots\dots(14)$$

となるが式(14)の [ ] 内は { } 内の関数  $\sin(v\pi x/a) \sin(l\pi y/b)/D(x, y)$  という関数をフーリエ級数に展開して総和をとったものである。 $D(x, y)$  がなめらかな関数であるからこの級数は収束する。恒等変換で正規化係数  $ab/4$  が乗じられたことになるだけであるから、

$$D \nabla^2 W_q = \frac{4D(x, y)}{\pi^2 ab} \sum_v \sum_l \frac{p_{vl}}{\left( \frac{v^2}{a^2} + \frac{l^2}{b^2} \right)} \\ \times \frac{ab}{4} \frac{1}{D(x, y)} \sin \frac{v\pi}{a} x \sin \frac{l\pi}{b} y \\ = \sum_v \sum_l \frac{p_{vl}}{\left( \frac{v^2}{a^2} + \frac{l^2}{b^2} \right)} \sin \frac{v\pi}{a} x \sin \frac{l\pi}{b} y$$

となり、この関係より  $\nabla^2 (D \nabla^2 W_q) = q(x, y)$  が成立することは容易に認められる。同様にして式(10)の  $W(x, y; \xi, \eta)$  が、 $q(x, y)$  が  $x = \xi, y = \eta$  点の集中荷重である場合のたわみ曲面で式(2)を満足することがわかる。

等断面の場合は三角関数の直交性より式(11)の  $H$  が、

$$H(D, k, l, u, v) = \frac{\delta_{uv} \cdot \delta_{kl}}{\left( \frac{u^2}{a^2} + \frac{k^2}{b^2} \right)^2 D_0} \times \frac{ab}{4}$$

となって Navier の解<sup>1)</sup>に完全に一致することがわかる。ここに  $\delta_{uv}$  は Kronecker の delta である。

### 6. 差分解と連続解の比較

点 ( $\xi = th_x, \eta = jh_y$ ) に載荷した  $P$  による点 ( $x = sh_x, y = ih_y$ ) におけるたわみの差分解を  $W^*(x, y; \xi,$

$\eta$ ) と表現して連続解  $W(x, y; \xi, \eta)$  と比較しよう. 式 (7) の  $\varepsilon_{ku}$  をもって式 (6) の関係を表現すると

$$W^* = \frac{16P}{a^2 b^2 \pi^4} \sum_{u=1}^m \sum_{v=1}^m \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n H^* \sin \frac{u\pi}{a} x \cdot \sin \frac{v\pi}{a} \xi \sin \frac{k\pi}{b} y \sin \frac{l\pi}{b} \eta \dots (15)$$

$$H^* = H \frac{(1-\theta)}{(1-\varepsilon_{uk})(1-\varepsilon_{vl})} = (1+\varepsilon^*)H \dots (16)$$

$\theta$ : 式 (11) の 2 重積分を  $h_x, h_y$  間隔の値でリーマンの和で近似する場合の相対誤差.

ここで  $W^*, H^*, H$  の右側の ( ) は冗長であるから省略している.  $\varepsilon^*$  は  $x, y$  方向の連続関数を  $h_x, h_y$  間隔で量子化して扱うことによる相対誤差とも称すべきものである. したがって,  $W$  と  $W^*$  との相違は次のように 2 つの成分に大別される. 第 1 は  $H$  を求めるについての量子化誤差である. 第 2 は  $x, y$  方向の級数和を第  $(m+1)$  項, 第  $(n+1)$  項以上を省略することによる誤差である.  $x$  方向の辺長  $a_x$  を  $m+1$  等分点で代表する差分法を用いることはフーリエ級数解の第  $m$  項までを計算することに相当し, これに量子化誤差と電子計算機で逆行列演算を行う際の丸めの誤差が入ることになる.  $y$  方向については第  $n$  項まで計算するに相当することは断るまでもない.  $\varepsilon_{ku}$  は  $m, n$  の 2 乗に逆比例したオーダーであることは式 (7) より推察される.

### 7. 計算例

Olsson<sup>1),2)</sup> は曲げ剛さ  $D$  が

$$D(x, y) = D_0(1 + 0.07 y/b) \dots (17)$$

と  $y$  方向にのみ 1 次変化して, さらに  $D(x, y)$  に比例する分布荷重  $q(x, y) = q_0 D(x, y)$  が載荷する周辺単純支持正方形板のたわみを求めているので, 著者の方法によって同じ条件のもとにたわみを計算して示そう. 式 (11) の積分は  $s$  に関する積分が可能になり, 直交性より,  $u \neq v$  では  $H=0$  となる. したがってたわみ影響関数は,

$$H^0(D, k, l, u, v) = \frac{a \delta_{uv}}{2 \left( \frac{u^2}{a^2} + \frac{k^2}{b^2} \right) \left( \frac{v^2}{a^2} + \frac{l^2}{b^2} \right)} \int_0^b \frac{1}{D_0 \left( 1 + \frac{0.07}{b} t \right)} \cdot \sin \frac{k\pi t}{b} \sin \frac{l\pi t}{b} dt \dots (18)$$

$$W^0(x, y; \xi, \eta) = \frac{8P}{a b^2 \pi^4} \sum_{u=1}^{\infty} \sum_{v=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} H^0 \sin \frac{u\pi}{a} x \sin \frac{k\pi}{b} y \sin \frac{v\pi}{a} \xi \sin \frac{l\pi}{b} \eta \dots (19)$$

表-1  $x=0.5a$  におけるたわみ比  $w/w_0$

$y/a$	A 連続解 $N=10$ $N_s=100$	B $8 \times 8$ 差分法	$(B-A)/A \times 100$ 相 対 誤 差 (%)
1/8	0.41186	0.42324	2.77
2/8	0.73837	0.75695	2.52
3/8	0.94914	0.98332	3.62
4/8	1.00000	1.06548	6.55
5/8	0.81478	0.84239	3.41
6/8	0.54972	0.56188	2.20
7/8	0.27297	0.27787	1.80

表-2  $N_s$  による変化

(集中荷重中心載荷  $N=10, x=0.5a, y=0.25a$  におけるたわみ)

$N_s=100$  に対する比

$N_s$	$w/w (N_s=100)$	$N_s$	$w/w (N_s=100)$
20	1.000383	60	1.000002
40	1.000010	80	1.000000

表-3  $N$  による変化

(集中荷重中心載荷  $N_s=100, x=0.5a, y=0.25a$  におけるたわみ)

$N=10$  に対する比

$N$	$w/w (N=10)$	$N$	$w/w (N=10)$
5	0.99855	15	0.99844
7	0.99778	17	0.99861
10	1.00000		

と表わされる.  $H^0$  の  $t$  に関する積分は関数表示は不可能であるから辺長  $b$  を  $N_s$  等分して Simpson の数値積分法を適用した. 辺長比は  $a/b=1$  として中央点集中荷重載荷とした. 比較のために  $8 \times 8$  分割 ( $n=m=7$ ) の差分法による [S] (式 (3)) を求めて電子計算機によって掃出法で逆行列を計算した. 式 (6) の  $f_{st}^{ij}$  は直接計算したものではないから式 (16) の誤差に計算機の丸めの誤差を含んでいる. 表-1 の連続解は級数和を  $N=10$  項まで, Simpson 積分区間数は  $N_s=100$  としたものであり,  $x=a/2$  線上のたわみを中心点たわみ  $w_0=2.7031 Pa^2/D_0$  で割った値である.  $8 \times 8$  差分法のたわみも  $w_0$  で割って比較し易くしてある. 表-2 は連

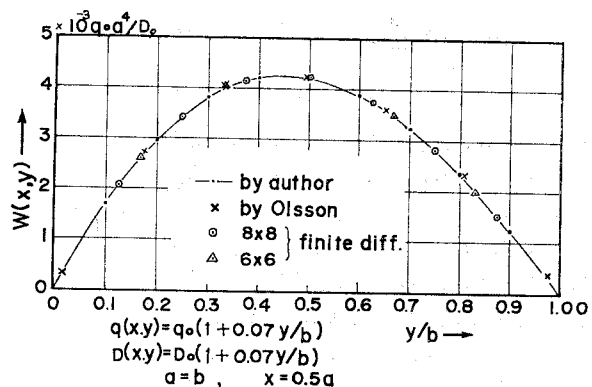


図-2

統解の  $N_s$  を変化させた場合の  $x=a/2, y=a/4$  点のたわみの変化を示したもので、 $N_s=100$  の場合に対する比率を与えている。級数和は  $N=10$  としている。表—3 は  $N_s=100$  として  $N=5\sim 17$  とする場合の  $x=a/2, y=a/4$  点のたわみを  $N=10$  の値を基準にして示したものである。

これらの計算で得られた影響面を用いて Olsson と同じ分布荷重に対する  $x=a/2$  線上のたわみを求めて図—2 に示した。6×6 分割差分法によるものも併記したが、計算の都合上着目点がそれぞれ相違しているため数表として比較はできない。しかし図上でおおよそ一致を認められよう。

### 8. む す び

著者の得た連続解は無限級数和と数値積分を含むので、数値計算において  $x, y$  方向にそれぞれ  $m, n$  項をとり、数値積分は  $N_s$  区間分割としても 1 点のたわみを得るためには式 (18), (19) の示すように  $mn^2N_s$  項の総和が必要である。載荷点と着目点の組み合わせが  $m^2n^2$  個あるので全体として  $m^2n^4N_s$  項となる。

他方  $m \times n$  分割の差分法で  $[S]$  を作り掃出し法で逆行列を求めると  $(mn)^3$  のオーダーの四則演算で結果が得られる。その精度は計算例に示したが、連続解よりは差分法の方が実用的であることが推察される。連続解はあくまでも数学的な解としての意義を持つだけである。

本研究には名古屋大学 成岡教授の適切なご指導を賜った。数値計算では徳田稔夫 (山口大工修, (株) 大林組), 藤原 治 (岐大卒, (株) 大林組) 両氏にご尽力を仰いだ。ここに深く感謝の意を表したい。

### 【補 遺】

著者は次に示すような過程を経て  $[S]$  の逆行列  $[F]$  を得た。  $[F]$  は連続解を得るための手段でしかなく連続解は正しいことはすでに検証済みであるから  $[F]$  の証明は蛇足であろう。証明するにしても  $[S][F]=[E]$  を直接示す効率のよい方法があるかと検討したが、著者のたどった過程が結局最良のように思われるのであえてここに示す。冗長さを避けるために途中の数式の展開を省いた部分があって納得し難い点があると思われるが、あくまでも補遺として了解していただきたい。

#### (1) 連分数と 3 項行列の逆行列

$x$  の連分数を  $Z_0(x), Z_1(x), \dots, Z_k(x)$  と定義する。

$$\begin{aligned} Z_0(x) &= 1 \\ Z_1(x) &= x \end{aligned}$$

$$Z_2(x) = x - 1/Z_1(x)$$

$$Z_3(x) = x - 1/Z_2(x)$$

$$Z_k(x) = x - 1/Z_{k-1}(x) \dots \dots \dots (1.1)$$

この  $Z_k(x)$  は  $x$  の有理式になり、代数式  $g_k(x)$  によって

$$Z_k(x) = g_k(x)/g_{k-1}(x) \dots \dots \dots (1.2)$$

とすると

$$g_k(x) = \sum_{i=0}^{[k/2]} (-i) \binom{k-i}{i} x^{k-2i} \dots \dots \dots (1.3)$$

$$g_0 = 1, \quad g_1 = x$$

となる。

次に、 $[X]$  を  $n$  元 3 項行列

$$[X] = \begin{bmatrix} x & 1 & & & 0 \\ 1 & x & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & & 1 & x & 1 \\ & & & 1 & x \end{bmatrix} \dots \dots \dots (1.4)$$

とすると逆行列  $[X]^{-1} = [\xi_{ij}]$  は式 (1.1) と式 (1.3) で定義した  $Z_k(x)$  と  $g_k(x)$  とによって表わされる。

$$[X]^{-1} = [U][Z]^{-1}[U]^T \dots \dots \dots (1.5)$$

$$\left. \begin{aligned} [U] &= [G][E_u][G]^{-1} \\ [G] &= \begin{bmatrix} -g_0(x) & & & & 0 \\ & g_1(x) & & & \\ 0 & & \ddots & & \\ & & & (-1)^n g_{n-1}(x) & \\ & & & & \end{bmatrix} \\ [E_u] &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ & & 1 & & & 1 \\ & & & \ddots & & \\ & & & & 1 & 1 \\ & & & & & 1 \end{bmatrix} \\ [Z] &= \begin{bmatrix} Z_1(x) & & & & 0 \\ & Z_2(x) & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & Z_n(x) & \\ = & \begin{bmatrix} g_1(x)/g_0(x) & & & & 0 \\ 0 & & \ddots & & \\ & & & g_n(x)/g_{n-1}(x) & \end{bmatrix} \end{bmatrix} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (1.6)$$

結局  $[X]^{-1}$  の各要素  $\xi_{ij}$  は次のように表わされる。

$$\xi_{ij} = \sum_{k=j}^n (-1)^{i+j} g_{i-1}(x) g_{j-1}(x) / g_{k-1}(x) g_k(x) \dots \dots \dots (1.7)$$

#### (2) 固有行列による逆行列の表示

式 (1.4) で示す 3 項行列  $[X]$  の固有行列  $[\psi_{ij}]$  と固有値  $\alpha_i$  は次のように与えられている<sup>7)</sup>。

$$\left. \begin{aligned} \alpha_i &= x + 2 \cos \frac{i\pi}{n+1} \\ \psi_{ij} &= \sqrt{\frac{2}{n+1}} \sin \frac{ij\pi}{n+1} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (2.1)$$

したがって  $[X]^{-1}$  は

$$[X]^{-1} = [\psi_{ij}] [a_i]^{-1} [\psi_{ij}]^T \dots\dots\dots (2.2)$$

$$\xi_{ij} = \frac{2}{n+1} \sum_{k=1}^n \frac{1}{x + 2 \cos \frac{k\pi}{n+1}} \cdot \sin \frac{ik\pi}{n+1} \sin \frac{jk\pi}{n+1} \dots\dots\dots (2.2)'$$

となる。同じ  $\xi_{ij}$  の表示として式 (1.7) と式 (2.2)' のようなまったく異なったものが与えられたが、以下において必要に応じて都合のよいものを引用する。

(3)  $[S]^{-1} = [F]$  の誘導

式 (4) より

$$[S]^{-1} = [B]^{-1} [D]^{-1} [B]^{-1} \dots\dots\dots (3.1)$$

が得られるが、 $[D]$  は対角行列であるから  $[B]^{-1}$  を求めよう。 $[B]$  は式 (4) に示すように  $m$  元の 3 項行列  $[A]$  と  $[E]$  を要素とした 3 項の大行列である。したがって前節の  $[X]$  の固有行列による表示にならって

$$\left. \begin{aligned} [A] &= [\varphi] [R] [\varphi]^T \\ [R] &= \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_m \end{bmatrix} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (3.2)$$

$$\left. \begin{aligned} \lambda_i &= -2 \left( 1 + c^2 - \cos \frac{i\pi}{m+1} \right) / c^2 \\ \varphi_{ij} &= \sqrt{\frac{2}{m+1}} \sin \frac{ij\pi}{m+1} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (3.3)$$

$$[B] = \begin{bmatrix} \varphi & & & & & \\ & \varphi & & & & \\ & & \ddots & & & \\ 0 & & & \varphi & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & \varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R & E & 0 \\ E & R & E \\ & E & R & E \\ 0 & & E & R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi^T & & & & & 0 \\ & \varphi^T & & & & \\ & & \ddots & & & \\ 0 & & & \varphi^T & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & \varphi^T \end{bmatrix} \dots\dots\dots (3.4)$$

と表わされることが容易にわかる。式 (3.4) の逆行列をとると

$$\left. \begin{aligned} [B]^{-1} &= \begin{bmatrix} \varphi & & & & & \\ & \varphi & & & & \\ & & \ddots & & & \\ 0 & & & \varphi & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & \varphi \end{bmatrix} [F]^{-1} \begin{bmatrix} \varphi^T & & & & & 0 \\ & \varphi^T & & & & \\ & & \ddots & & & \\ 0 & & & \varphi^T & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & \varphi^T \end{bmatrix} \\ [F]^{-1} &= \begin{bmatrix} R & E & 0 \\ E & R & E \\ & E & R & E \\ & & E & R \end{bmatrix}^{-1} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (3.4)$$

となる。ここに  $[F]$  は  $m$  元対角行列  $[R]$  と  $[E]$  を要素とする 3 項大行列である。 $[R]$  が対角行列であることは  $[F]^{-1}$  を求めるについて要素  $m$  元小行列  $[R]$  と  $[E]$  を単位にして演算する限り要素行列の四則演算はすべて交換可能で、最終的には対角小行列になるということである。したがって  $[X]^{-1}$  を得る演算過程をそのまま適用して 1 と  $x$  を  $E$  と  $R$  に対応させて式 (1.3) に定義した  $g_k(x)$  を行列演算の代数式として

$$G_k(R) = \sum_{i=0}^{[k/2]} (-1)^i \binom{k-i}{i} R^{k-2i} = \begin{bmatrix} g_k(\lambda_1) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & g_k(\lambda_m) \end{bmatrix} \dots\dots\dots (3.5)$$

を定義してよい。このような対応関係より  $[F]^{-1}$  は式 (1.7) に基づいて求めると

$$\left. \begin{aligned} [F]^{-1} &= [T_{ij}] \\ T_{ij} &= \sum_{k=j}^n (-1)^{i+j} G_{i-1}(R) G_{j-1}(R) \cdot G_{k-1}^{-1}(R) G_{k-1}(R) \\ &= \begin{bmatrix} t_{11}^{ij} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & t_{mm}^{ij} \end{bmatrix} \\ t_{11}^{ij} &= \sum_{k=j}^n (-1)^{i+j} g_{i-1}(\lambda_i) g_{j-1}(\lambda_i) / g_{k-1}(\lambda_i) g_k(\lambda_i) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (3.6)$$

となる。すなわち、 $F^{-1}$  の要素である小行列  $T_{ij}$  は対角行列  $R$  の積より成り対角行列となるので、 $T_{ij}$  の各要素は  $G_i(R)$  と  $g_i(x)$  との対応より式 (3.7) のように与えられる。さてここで  $g_i(x)$  を式 (2.2)' に置換する。 $F^{-1}$  を求めるまでは  $g_i(x)$  のアルゴリズムが都合が良かったが、ここからは式 (2.2)' の表示の方が都合がよいので式 (2.2)' で  $t_{ij}$  を表現すると

$$t_{ij}^{ij} = \frac{2}{n+1} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\lambda_l + 2 \cos \frac{k\pi}{n+1}} \cdot \sin \frac{ik\pi}{n+1} \sin \frac{jk\pi}{n+1} \dots\dots\dots (3.7)'$$

となる。これらの関係を逐次代入すると  $[F]$  が得られる。式 (3.4) の  $[B]^{-1}$  の表現で用いた  $\varphi$  は  $m$  元小行列で式 (3.3) の  $\varphi_{ij}$  という要素をもつ直交行列であるから式 (3.1) へ式 (3.4) を代入すると

$$\left. \begin{aligned} [S]^{-1} &= [F] = [F_{ij}] \\ &= \begin{bmatrix} \varphi & & & & & \\ & \varphi & & & & \\ & & \ddots & & & \\ 0 & & & \varphi & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & \varphi \end{bmatrix} [T_{ij}] \begin{bmatrix} \varphi^T & & 0 \\ & \varphi^T & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \varphi^T \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & \varphi^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_1^{-1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & D_n^{-1} \end{bmatrix} \\ &\cdot \begin{bmatrix} \varphi^T & 0 \\ 0 & \varphi^T \end{bmatrix} [T_{ij}] \begin{bmatrix} \varphi & 0 \\ 0 & \varphi \end{bmatrix} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (3.8)$$

となる。 $D_i$  は  $y = ih_y$  線上の  $m$  個の節点の曲げ剛さを対角要素とする  $m$  元対角行列であり、小行列  $D_i$  の第  $s$  対角元を  $f_{st}^{ij}$  にならって  $D_r^i$  と記すべきであるが  $D_{ri}$  とすると次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} F_{ij} &= [f_{st}^{ij}] \\ s, t &= 1, 2, \dots, m \\ i, j &= 1, 2, \dots, n \\ f_{st}^{ij} &= \left\{ \frac{4}{(m+1)(n+1)} \right\}^2 \sum_{u=1}^m \sum_{v=1}^m \sum_{w=1}^m \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \sum_{r=1}^n \\ &\cdot \frac{1}{D_{ur} \left( \lambda_u + 2 \cos \frac{k\pi}{n+1} \right) \left( \lambda_v + 2 \cos \frac{l\pi}{n+1} \right)} \end{aligned} \right\}$$

$$\begin{aligned} & \cdot \sin \frac{ik\pi}{n+1} \sin \frac{rk\pi}{n+1} \sin \frac{rl\pi}{n+1} \sin \frac{j\pi}{n+1} \\ & \cdot \sin \frac{su\pi}{m+1} \sin \frac{uw\pi}{m+1} \sin \frac{vm\pi}{m+1} \sin \frac{tv\pi}{m+1} \\ & \dots\dots\dots(3.9) \end{aligned}$$

分母の  $\lambda_u$  は式 (3.3) で与えられているので式 (6) と式 (3.9) は完全に一致する。これで式 (6) が差分法による完全な解であることが証明された。

参 考 文 献

1) Timoshenko S. and Woinowsky-Krieger S. : Theory of Plate and Shells, McGraw-hill, 1959, pp. 173~179.  
 2) Olsson R.G. : Biegung der Rechteckplatte bei linear veränderlicher Biegesteifigkeit, Ing. Arch. 5,

1934, S 363.  
 3) Reissner R.E. : Remark on the Theory of Bending of Plate of Variable Thickness, Jour. Math. Phys., Vol. 16, 1937, p. 43.  
 4) Toyoji Kumai : Note on the Bending of Rectangular Plate with Variable Stiffness, Reports of Research Institute for Applied Mechanics of Kyushu Univ., Vol. 19, No. 63, 1971, pp. 187~195.  
 5) Bergfelder J. : Berechnung von Platten veränderlicher Steifigkeit nach dem Differenzenverfahren, Konstruktiver Ingenieurbau Berichte, Ruhr Univ., Bochum, Heft 4, 1968, pp. 21~42.  
 6) 島田静雄 : 土木応用数学, 共立出版.  
 7) 徳田・中川 : 4 辺単純支持された変断面矩形板の解析, 土木学会第 26 回学術講演会概要集 1971, pp. 465~466.

(1975.6.2・受付)