

## 衝撃に対する砂利道床軌道の応答について

RESPONSE OF THE RAILWAY TRAK TO THE IMPULSIVE LOAD

小野 一良\*・伊藤 義男\*\*

By Kazuyoshi ONO and Yoshio ITOO

## 1. 緒 言

著者らは前報告<sup>1)</sup>において鉄道線の軌道は車輪踏面または軌道に欠陥のある場合に走行車両によって非常に大きな衝撃が加えられることを述べた。今回の報告では車輪を落とすことによって試験軌道に衝撃を加え、軌道の各部に生ずる変形および応力を測定し、軌道の衝撃に対する性質を明らかにした。これまでも軌道に車輪を落として軌道の振動その他を調査した報告が発表されているが<sup>2)</sup>、本報告の特徴はあらかじめ軌道に種々の大きさの静荷重を加えた状態で軌道に衝撃を加えたので実際の軌道が走行車両より衝撃を受ける条件に近い状態で実験を行った点にある。

本報告の後半においては軌道が衝撃を受けた場合に衝撃の波が軌道より路盤に伝播する過程について理論的解析を行った。この解法の特徴は軌道が受けた荷重は下にいくほど広く路盤中に分散して支持されると仮定し、その路盤の質量を分散した状態で考慮に入れたことである。従来行われていたように車両のばね下重量と軌道と路盤を代表する質量がそれぞれ集中して存在し、これが上下方向にばねで連結されていると仮定したのでは衝撃波の伝播が考慮されないため、内部摩擦のない限り軌道が衝撃を受けた後に永久に同じ大きさの振動を繰り返すこととなる<sup>3), 4)</sup>。

## 2. 実験装置

衝撃に対する軌道の応答を解析するために種々の高さから試験軌道に車輪を落としてこのときに軌道の各部に生ずる応力、変形、振動を測定し、また振動の伝播状態を観察することとした。試験軌道の一部を図-1に示す

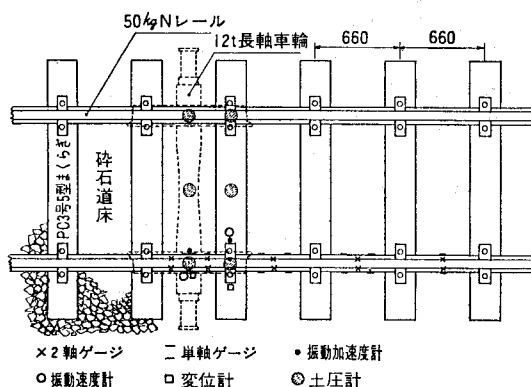


図-1 試験軌道ならびに測定計器の取り付け位置

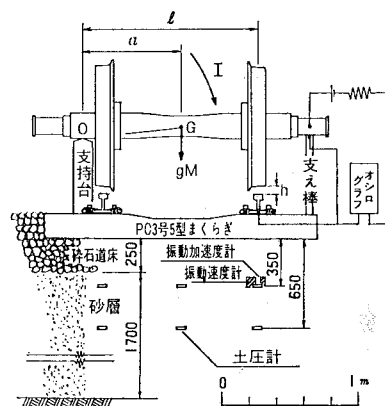


図-2 試験軌道の断面図

が、延長 8 m, 50 kg N レール敷設, PCまくらぎを 66 cm 間隔に配置し、砕石道床の厚さ 250 mm で路盤材料として砂を用いた。レールと PCまくらぎの間には厚さ 6 mm の第 2 種軌道パッドを挿入した。

図-2 に示すごとく 12 t 長軸の一端を支持台で支え、他端を支え棒で受け、この棒を打撃によって外すことによって片側車輪のみをまくらぎ間合の中間においてレール面上に落とした。この車輪によってレールに加わる静

\* 正会員 工博 金沢工業大学教授 土木工学科

\*\* 正会員 石川工業高専助手 土木工学科

荷重は 560 kg であった。車輪の落下高さを 10, 15, 25 mm の 3 段階とした。この高さを  $h$  とすれば車輪がレール面につき当る速度  $v$  は次式によって計算することができる<sup>3)</sup>。

$$v = cgt = \sqrt{2cgh}$$

$t$  は車輪が落下を始めてからレールにつき当るまでの時間 (秒) であり,  $c$  は車軸の重心から支持点までの距離, 車軸の質量および車軸に直角をなす軸のまわりの回転慣性によって決定される定数であり, 今回の測定においては  $c = 1.095$  となっていた。この数値を用いて計算すれば車輪の落下高さが 10, 15, 25 mm となる時, 落下速度はそれぞれ 46.3, 56.8, 73.2 cm/sec となる。しかし実際問題としては上式における  $h$  を正確に予定通りの高さとしてとることができないためオシログラフの記録より  $t$  を求め, これより  $v$  を算出した。なお実際の軌道においては静的的車輪荷重が軌道に作用している状態において軌道に衝撃が加わるのでこの状態に近くするために写真-1 に示すような方法で片側レール当りに加えるべき 0, 2, 4, 6, 8 t の垂直荷重を 2 分し, この荷重をコイルばねを通して車輪落下点両側のまくらぎ直上のレール面に加えた。この状態を軌道の変形および応力が 0 であるとみて以下に述べる各種の計器を用いて衝撃による影響を測定した。

### 3. レールに生ずるせん断力の測定

図-1 に示すごとく車輪落下点を含むまくらぎ間合いおよびこれに続く 3 個のまくらぎ間合いにおいてレール

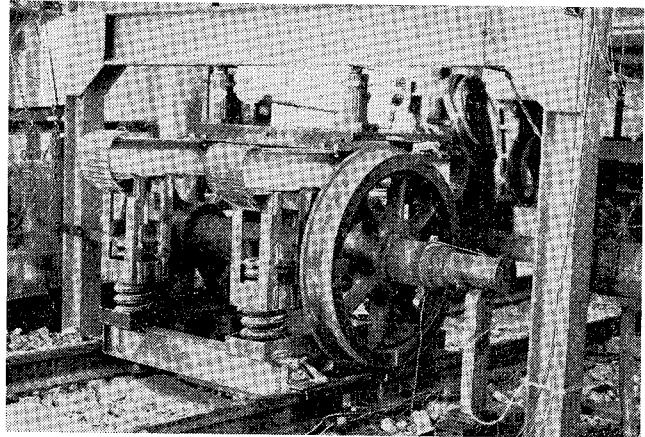


写真-1 車輪の落下試験装置

腹部に 2 軸型ストレインゲージを貼り付けて車輪落下によってレールに生ずるせん断応力を測定した。これより前に車輪落下点に静的的の載荷試験を行うことによって荷重とせん断応力との関連が求められているので車輪落下時に得られたせん断応力をせん断力の大きさに換算することができる。測定記録の一例を 図-3 に示す。この図の最上段は車輪と支持棒との間および車輪とレールとの間の接触状態を示すスイッチである。まず支持棒が外されると接点が開き, 車輪がレールに接触すると接点が開閉, 次に車輪がレール面から離れて跳ね上ると再び接点が開くような配線になっている。図-3 によれば車輪がレール面で 2 回反発されたことを示している。このスイッチの記録の下に続く 5 本の記録はいずれもレール腹部で測定したせん断応力であり, 数字 0, 1, 2, 3 はまくらぎ間合いの番号である。車輪落下点を含む間合いを

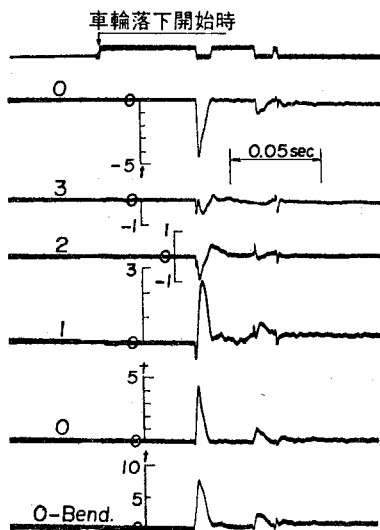


図-3 レール腹部に生ずるせん断力の測定記録 (垂直荷重  $V=4t$ , 車輪の落下高さ  $h=10\text{ mm}$ )

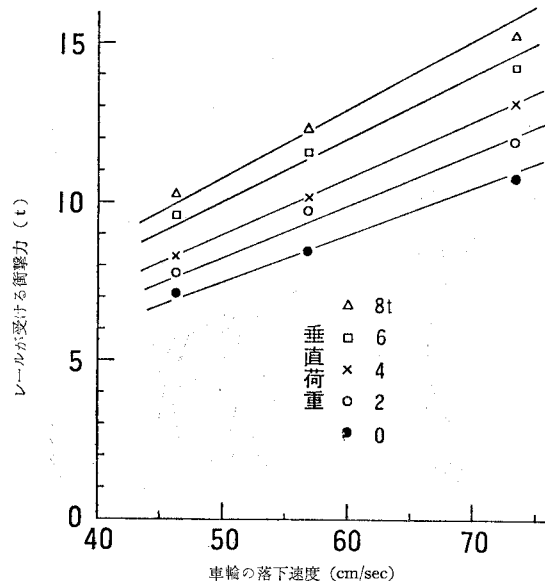


図-4 レールが受ける衝撃力 (せん断力より換算)

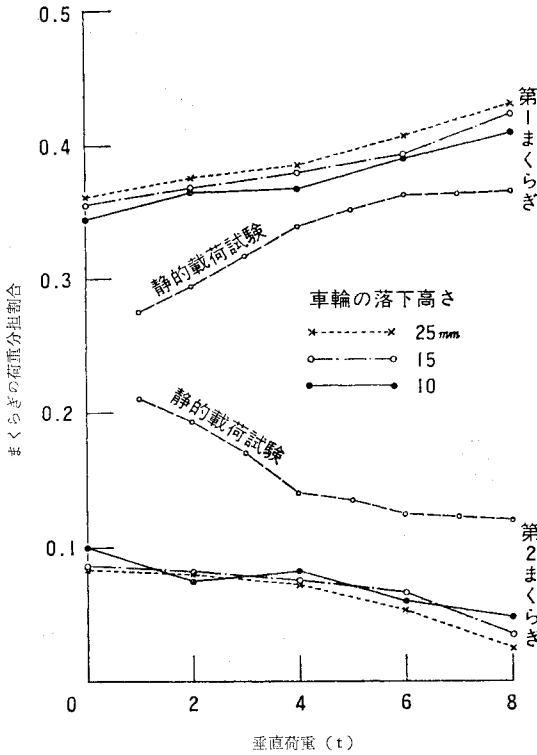


図-5 静荷重または衝撃力に対するまぐらぎの荷重分担割合

番号0としている。またおのおのの記録につけた目盛りはせん断応力をせん断力に換算した値である。

番号0のまぐらぎ間合いで車輪落下点を挟む2箇所のせん断力の和より車輪の打撃によってレールが受ける衝撃力が求められ、車輪の落下速度と衝撃力との関係を図-4に示した。あらかじめ試験軌道の上に片側レール当り0, 2, 4, 6, 8 tの垂直荷重を静的に加えて実験を行ったが、いずれの場合にも衝撃力は車輪の落下速度に比例することが認められる。また静的に加えた垂直荷重が大きいほど衝撃力の増すことが認められるが、この理由として道床および路盤の弾性定数は一定でなく、静的に加えた垂直荷重が大きいほど増加するためと考えられる。

図-4によれば片側レール当り4 tの静荷重を加えた状態において車輪を25 mmの高さから落した場合の衝撃力は13 tとなり、これに静荷重を加えれば17 tとなる。さきの報告<sup>1)</sup>によればクハ481, サシ481, サシ581型式車両の車輪にはこの程度の衝撃を発生するような傷を持つ可能性が1%程度はあることを示している。

車輪の落下点を挟んで連続した数個のまぐらぎ間合いでレールに生ずるせん断力を測定したので順次にその差を計算すればおのおののまぐらぎが受ける衝撃力の分担割合が判明する。車輪落下点に最も近いまぐらぎを第1まぐらぎとし、その次のまぐらぎを第2まぐらぎとして

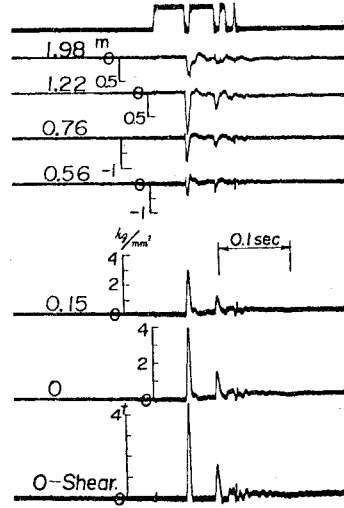


図-6 レール底部に生ずる曲げ応力の測定記録 (V=8 t, h=10 mm)

これらのまぐらぎが受ける荷重分担割合を図-5に示した。この図によれば静的載荷試験においては荷重が大きくなるほど第1まぐらぎの荷重分担割合が大きくなっている。また衝撃的に加わる荷重に対しては静荷重に比べて第1まぐらぎの荷重分担割合ははるかに大きくなっている。これは軌道の慣性抵抗によって衝撃荷重を受けたためと考えられる。

#### 4. レール底部に生ずる曲げ応力の測定

図-1に示すごとく車輪落下点を中心として数個のまぐらぎ間合いでレール底部にもストレインゲージを貼り付けて車輪落下時における曲げ応力の変化を測定した。記録の一例を図-6に示すが、おのおのの記録の左に示した数値は車輪落下点からの距離である。車輪落下点の隣のまぐらぎ間合いでは最初に負の曲げ応力を生じ、これに続いて正の曲げ応力を生ずることが認められる。このような記録から得られた正負の最大の曲げ応力の分布状態の一例を図-7に示す。この図には車輪落下点に2~10 tの静荷重を加えた場合にこれら各点に生ずる曲げ応力の測定値も併せて点線で示した。車輪を25 mmの高さから落とした場合に車輪落下点に生ずる曲げ応力は9 tの静荷重によって生ずる曲げ応力にほぼ等しくなり、レールのせん断力の測定より得られた衝撃力に比べてはるかに少ない。この理由として曲げ応力測定位置と車輪落下点との間に位置のずれがある場合には曲げ応力の測定値は急速に小さくなることおよびさきにも述べたごとく衝撃荷重は静荷重に比べて第1まぐらぎで支持される分担割合が大きいいため同一の荷重でも曲げ応力が小さくなるためと考えられる。

図-7によれば衝撃によって生ずる正の曲げ応力の分布形状は静荷重による分布にはほぼ等しいが、衝撃によって生ずる負の曲げ応力の分布形状は静荷重の場合と異なり、車輪落下点の近くまで広がっていることが認められる。

5. レールおよびまくらぎのたわみの測定

図-1に示すごとくレールに対しては車輪落下点、まくらぎに対してはこれに最も近い点において相対変位計（インダクタンス型）を用いて車輪落下時におけるレールおよびまくらぎのたわみを測定した。測定記録の一例を図-8に示す。上段はレールのたわみを示し、中段はまくらぎのたわみである。レールまくらぎともに車輪の打撃を受けて大きくたわみ、レールにはこのたわみ運動の上に約500 Hzの振動が重なっていることが認められる。

種々の高さから車輪を落とした場合に車輪落下速度とたわみ量との関連を測定し、その結果を図-9に示した。レール、まくらぎともにたわみは車輪落下速度に比例することが認められる。垂直荷重が0のときのたわみは垂直荷重が加わっている場合に比べていくらか大きい、垂直荷重が0のときにはまくらぎと道床との間にこれだけの隙があったためと考えられる。まくらぎのたわみはレールのたわみの約1/2であるが、レールのたわみはまくらぎのたわみに軌道パッドの圧縮およびレールの曲げによる影響が加わるためと考えられる。

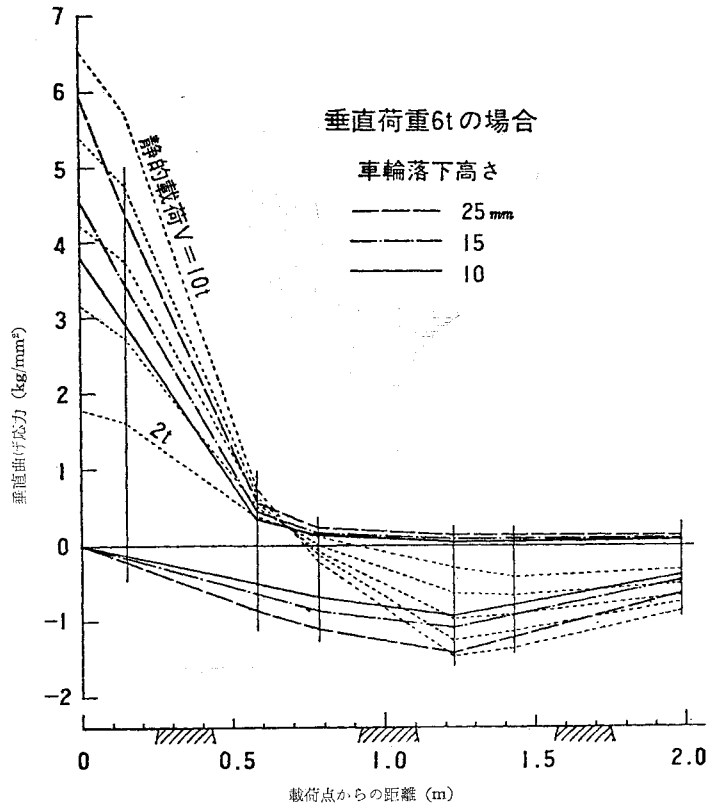


図-7 静荷重または衝撃力によってレール底部に生ずる曲げ応力

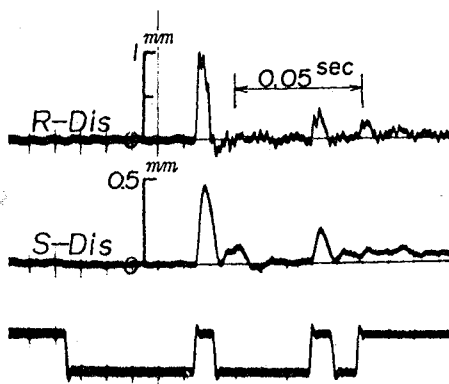


図-8 レールおよびまくらぎに生ずるたわみの測定記録 (V=6t, h=15mm)

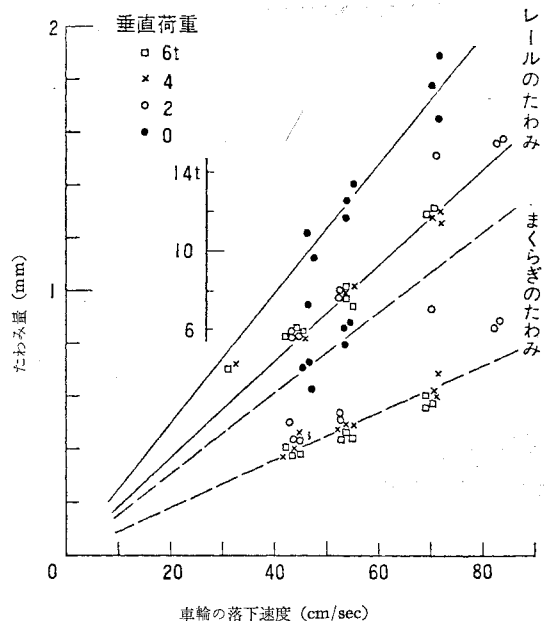


図-9 レールおよびまくらぎに生ずるたわみ

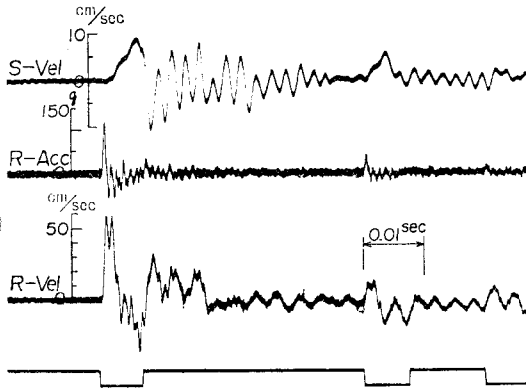


図-10 レールおよびまくらぎに生ずる振動速度の測定記録 (V=6t, h=15mm)

まくらぎ間合いの中間においてレール上に静的に垂直荷重を加えてレールのたわみを測定した結果に対比すればこのたわみ量を衝撃力に換算することができ、その目盛も併せて図-9に示した。垂直荷重を4または6t加えた状態で25mmの高さから車輪を落とした場合の衝撃力は11tとなり、この場合にもレールのせん断力より求めた衝撃力より幾分か小さい。

### 6. レールおよびまくらぎに生ずる振動速度の測定

図-1に示すごとく車輪落下点近くのレールには固有振動数30Hzの振動速度計(可動コイル型)をつけ、まくらぎには固有振動数1Hzの振動速度計(可動コイル型)をつけて車輪落下時の振動速度を測定した。記録波形の一例を図-10に示した。この図の最上段はまくらぎに生ずる振動速度であり、次はレールに生ずる振動加速度であり、その下はレールに生ずる振動速度である。レールは打撃を受けてより0.001sec後に最大の振動速度に達するが、まくらぎはそれよりさらに0.005sec遅れて最大の振動速度に達することが認められる。振動速度が0となったときが最大のたわみとなったときであり、それより上向き速度となる。車輪がレールに接触してより0.0065sec後にレールの上向き速度が最大となり、このときに車輪がレール面を離れ飛び上がることが記録より読みとれる。それに続いてレールとまくらぎは自由振動を始める。レールの振動数は約250Hzであり、この上にさらに高周波が重なっている。まくらぎの振動数は約400Hzであり、これはまくらぎの固有振動であると考えられる。

図-10にはレールに取り付けた加速度計の記録も併せて示されているが、車輪落下時の最大加速度は120gであり、これに続いて約1000Hzの振動が認められる。

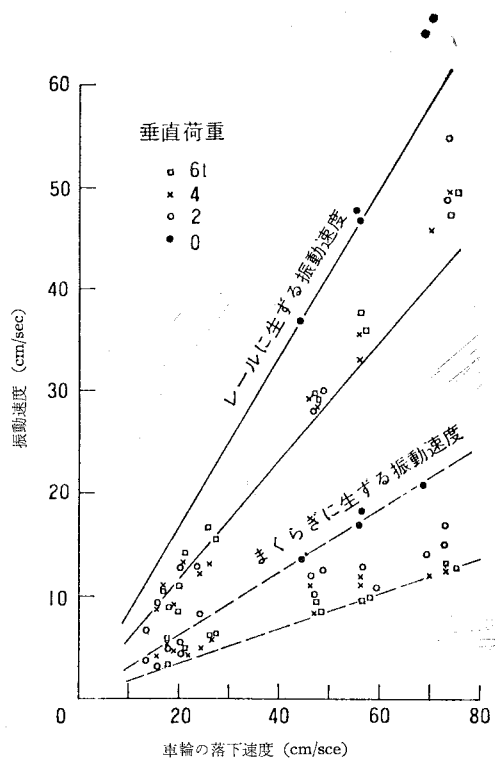


図-11 レールおよびまくらぎに生ずる振動速度

この振動数は換振器の固有振動数1300Hzよりは少ないが、増幅器の限界周波数に近い。したがってさらに高い振動数を持つ振動が含まれていてもほとんど記録には現われない。

図-11に車輪落下速度とレールおよびまくらぎに生ずる最大の振動速度との関連を示した。レールに生ずる振動速度は車輪の落下速度の60~80%に達している。レール上の載荷が小さくなるに従って振動速度の値はわずかに大きくなっている。まくらぎに生ずる振動速度も車輪の落下速度に比例するが、レールの振動速度の1/4~1/5となっている。

### 7. レール、まくらぎおよび路盤に生ずる振動加速度の測定

図-1に示すごとく車輪落下点の近くにおいてレールおよびまくらぎに振動加速度計を取り付け、また図-2に示すごとく路盤中にも加速度計を埋込んで車輪落下時にこれらの点に生ずる振動加速度を測定した。測定に使用した換振器および増幅器の性能を表-1に示したが、この信号電圧を磁気記録計(応答周波数0~20kHz)に入れた後再生速度を記録速度の1/20として電磁オシログラフ(応答周波数0~700Hz)に記録した。記録波形の一例を図-12に示した。この図を図-10に示した

表-1 加速度測定用換振器および増幅器

測定箇所	換振器		増幅器
	容量	応答周波数	応答周波数
レール	1,000 g	0~3,500 Hz	0~5,000 Hz
まくらぎ	100	0~1,300	0~1,000
路盤	20	0~380	0~1,000

レールの加速度記録に比すれば 図-12 の記録は振動数のはるかに高く、また加速度の大きさも3~4倍となっている。これは表-1に示すごとく高い周波数の振動まで測定できる計器を使用したためと考えられる。しかしこのような計器を使用したにもかかわらずレールに生ずる振動加速度の振動数は非常に高く、換振器の応答周波数の限界に近い。したがってさらに高い固有振動数を持つ換振器を使用すればさらに大きな加速度で記録される可能性がある。まくらぎに生ずる振動加速度の記録においても応答周波数の限界に近い振動を示しており、果してこれがまくらぎに生ずる最大の加速度であるかどうか疑われる。路盤に生ずる加速度はその振動数が200~300 Hz となっているので換振器の測定範囲内にある。

以上に述べたごとく測定上の疑問が多く含まれるが、レール、まくらぎおよび路盤内で測定して得た最大の加速度と車輪落下速度との関係を 図-13 に示した。車輪落下速度が大きくなれば加速度もいくらか増すが、この間に比例関係は認められない。また静的に加えた垂直荷重との関連も明らかでない。まくらぎに生ずる最大の振動加速度はレールに生ずる最大の振動加速度の約1/10であり、路盤に生ずる最大の振動加速度はまくらぎに生ずる最大の振動加速度のさらに1/5となっている。

8. 路盤中に生ずる圧力の変化

図-2 に示すごとくまくらぎの下面より350 および 650 mm の深さにおいて路盤中に土圧計を埋設し、車輪落下時に路盤中に生ずる土圧の変化を測定した。測定記録の一例を 図-14 に示した。測定記録中のUは上層、Lは下層の土圧計を指し、添字cはまくらぎ直下、mはまくらぎ中間の土圧応答記録である。その下の記録はレールに生ずるせん断応力および曲げ応力である。

衝撃による最大土圧と車輪落下速度との関係を 図-15 に示した。下層における土圧の大きさは上層における土圧の約2/3であるが、いずれも車輪落下速度に比例することが認められる。垂直荷重の少ない場合には衝撃による土圧がいくらか少ないが、

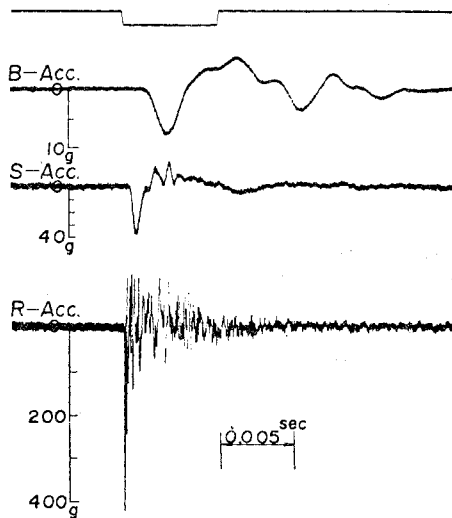


図-12 レール、まくらぎおよび路盤に生ずる振動加速度の測定記録 (V=6t, h=10 mm)

4 t 以上の荷重ではその差は認められない。静的の試験荷重を加えた場合の土圧測定値に比較することによって衝撃による土圧変化を衝撃力の大きさに換算することができ、その場合の目盛を図の右側に付した。レールのせん断力より得た衝撃力にほぼ等しいことが認められる。

図-14 によればレール面が衝撃を受けてから土圧計が衝撃の波を受けるまでにいくらかの時間差があり、また上段の土圧計と下段の土圧計の間にも時間差が認められる。これより路盤中を衝撃波が伝播する速度を求め

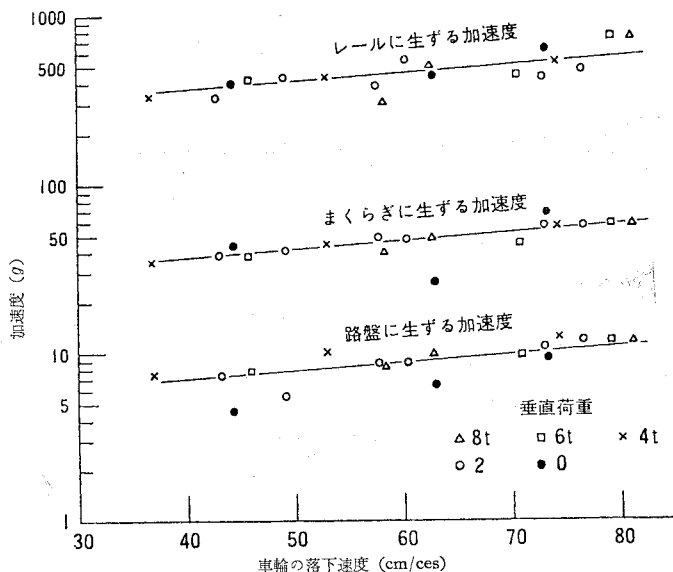


図-13 レール、まくらぎおよび路盤に生ずる振動加速度

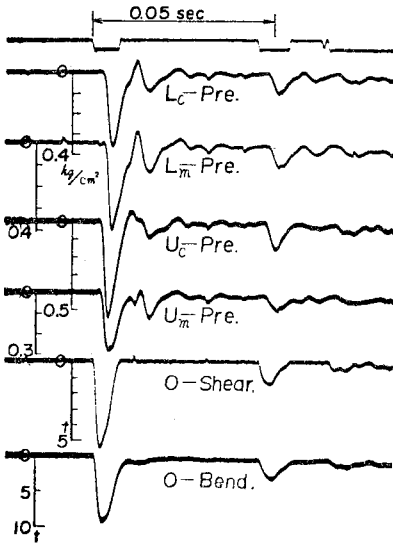


図-14 路盤内に生ずる土圧の測定記録  
( $V=6t$ ,  $h=15mm$ )

表-2 衝撃波の路盤中における伝播速度

レール面上に加えた垂直荷重	衝撃波の伝播速度	路盤の弾性係数
0t	250 m/sec	1150 kg/cm <sup>2</sup>
2	270	1340
6	375	2580
8	430	3400

ことができ、その結果を表-2に示した。この表によれば垂直荷重の大きいほど衝撃波の伝播速度が増加することが認められる。

### 9. 反発係数および接触時間

走行列車の車輪によって軌道に衝撃が加えられる場合には車軸の上にばねを介して車体の重量が加えられているので車輪がレール面を離れて飛び上ることは比較的少ないが、今回の実験においては車軸の上に荷重を加えることができなかつたため車輪はレール面に打撃を加えた後飛び上がった。車輪の落下速度に対する飛び上がりの速度を反発係数とよび、車輪がレール面に接してより飛び上がるまでの経過時間を接触時間とよぶこととする。この反発係数および接触時間は軌道の性質を知るうえで重要な要素になると考えられるので静荷重を種々の大きさとした場合および落下高さを変えた場合について測定し、その結果を図-16に示した。図に示すごとく静荷重の大きさが増すに従って反発係数は増大し、8tの静荷重を加えた場合には反発係数は0.36となった。また接触時間は反発係数の増加とともに減少し、8tの静荷重を加えた場合には0.0063secとなった。しかし車輪の落下高さによる差はほとんど認められなかつた。

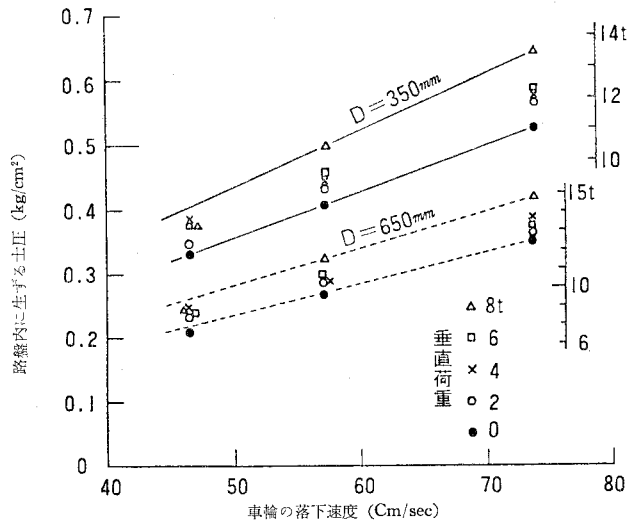


図-15 路盤内に生ずる土圧(まくらぎ直下)

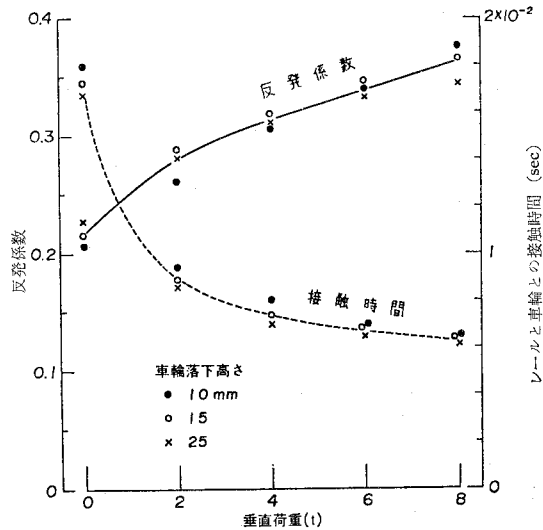


図-16 反発係数およびレールと車輪との接触時間

### 10. 理論的考察

軌道が車輪の落下によって衝撃を受けた場合に軌道に生ずる振動を図-17に示すとき模型を用いて理論的に解析する。図においてMは車輪を示し、その質量をMとする。Rは車輪と一体となって上下に振動するレールの質量とする。Kはレールの曲げおよび軌道バ

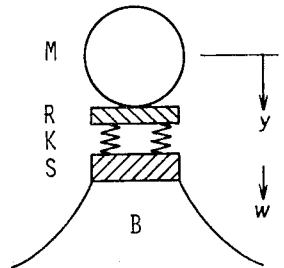


図-17 衝撃に対する軌道の模型

ッドの弾性圧縮を代表するばねであり、ばね定数を  $K$  とする。  $S$  はまくらぎの質量とする。  $R$  および  $S$  として考慮すべき軌道延長  $l$  は長さ  $l$  の有限長軌道においてレールを剛体と仮定した場合のたわみが同一の荷重に対してレールの曲げを考慮に入れた場合の無限長軌道のたわみに等しくなるという条件から求めるのも一案である<sup>3)</sup>。  $B$  は  $S$  を通して上部の荷重を支持する道床および路盤の面積を示し、まくらぎ下面より深さ  $z$  における支持面積は次式によってあらわされる。

$$B = B_0 \exp(2\varphi z) \dots\dots\dots(1)$$

ここに  $\varphi$  は道床および路盤の性質によって定まる定数とする。衝撃または振動による路盤の下方の変位を  $w$  とし、路盤材料の弾性係数を  $k$  とすれば振動による路盤内の圧力の変動  $p$  は道床および路盤の内部摩擦を無視するとき次式によって表わすことができる。

$$p = -k \frac{\partial w}{\partial z} \dots\dots\dots(2)$$

また路盤の単位体積重量を  $\rho$  とすれば次の運動方程式が成立する。

$$B\rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = -g \frac{\partial}{\partial z} (Bp) \dots\dots\dots(3)$$

車輪がレールに接触する瞬間を  $t=0$  とし、このときにレールおよび路盤はたわみが 0 の状態から急に下方に移動を開始したと仮定すれば  $y$  および  $w$  は次式によってあらわすことができる。

$$y = y_0 \sin \omega t \dots\dots\dots(4)$$

$$w = w_0 \exp(\mu z) \sin \omega t \dots\dots\dots(5)$$

道床および路盤の内部摩擦を考慮しないときには上式における  $\omega$  は実数になる。上式に含まれる  $\mu$  は一般に複素数となり、路盤の下方に振動が伝播する場合に生ずる振動の減衰および位相のおくれを示す係数となる。路盤の変形および運動のエネルギーは次式

$$\frac{1}{2} \int_0^\infty Bgk \left( \frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 dz + \frac{1}{2} \int_0^\infty B\rho \left( \frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 dz$$

によって表わされ、路盤に加えられた衝撃の大きさが有限であることよりしてこれらのエネルギーは有限でなければならない。よって次の不等式の成立することが要求される。

$$\operatorname{Re}(\mu + \varphi) < 0 \dots\dots\dots(6)$$

式 (3) に式 (1), (2), (5) を代入すれば次式が得られる。

$$\omega^2 = -c^2 \mu (2\varphi + \mu) \dots\dots\dots(7)$$

ただし

$$c^2 = \frac{gk}{\rho} \dots\dots\dots(8)$$

$M$  が  $R$  と一体となって運動する場合には  $z=0$  において次の運動方程式が成立する。

$$(M+R) \frac{d^2 y}{dt^2} = gK(w-y) \dots\dots\dots(9)$$

$$S \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = -gB_0 p + gK(y-w) \dots\dots\dots(10)$$

このような境界条件のもとに軌道に生ずる振動として次の 2 種類が考えられる。

a) 第 1 類の振動

式 (2), (4) および (5) を式 (9) および (10) に代入すれば

$$-(M+R)y_0\omega^2 = gK(w_0 - y_0) \dots\dots\dots(11)$$

$$-S\omega^2 w_0 = gk B_0 \mu w_0 + gK(y_0 - w_0) \dots\dots\dots(12)$$

式 (11), (12) の  $\omega^2$  を式 (7) により  $\mu$  をもってあらわし、かつ

$$\frac{\varphi(M+R)}{B_0\rho} = n_1, \quad \frac{\varphi S}{B_0\rho} = n_2 \dots\dots\dots(13)$$

$$\frac{\varphi^2 k(M+R)}{K\rho} = m \dots\dots\dots(14)$$

$$\mu = \varphi \kappa \dots\dots\dots(15)$$

と置けば式 (11), (12) より次式が導かれる。

$$mn_2\kappa(\kappa+2)^2 + (n_1+n_2-m\kappa)(\kappa+2) - 1 = 0 \dots\dots\dots(16)$$

上式は  $\kappa$  の 3 次式であり、 $\kappa$  として 3 個の根が得られる。この  $\kappa$  を式 (15), (7) に代入すれば  $\mu$  および  $\omega$  が得られるのであるが、 $\omega$  が実数となり、かつ  $\mu$  が式 (6) の条件を満足するためには  $\kappa$  は実数となり、かつ次の不等式を満足することが要求される。

$$-2 < \kappa < -1 \dots\dots\dots(17)$$

式 (16) の 3 個の根の中でこれらの条件を満足する根があればこれを  $\kappa_0$  と置く。  $n_1$  と  $m$  が小さい場合には  $\kappa_0$  が存在しない場合もある。

上記の方法で振動の形が決まるのであるが、式 (4), (5) における振幅  $y_0, w_0$  を決定するには“運動エネルギー分配の法則”<sup>6)</sup> を使うと便利である。車輪がレールにつきあたる速度を  $V$  とすればレールに加わる衝撃の大きさ  $P$  は

$$P = MV \dots\dots\dots(18)$$

となる。いまここに

$$V' = \frac{M}{M+R} V \dots\dots\dots(19)$$

$$Z = \varphi z, \quad T = \varphi ct \dots\dots\dots(20)$$

と置けば、 $y$  および  $w$  は次式によってあらわされる。

$$y = \frac{V'}{\varphi c} Y_1, \quad w = \frac{V'}{\varphi c} W_1 \dots\dots\dots(21)$$

ここに  $Y_1$  は  $T$  の関数であり、 $W_1$  は  $T, Z$  の関数であり、いずれも係数  $n_1, n_2$  および  $m$  によって決定される。

$$Y_1 = \frac{n_1 \sin \theta_0 T}{\theta_0 \left[ n_1 + (1 - m\theta_0^2)^2 \left\{ n_2 - \frac{1}{2(1 + \kappa_0)} \right\} \right]}$$



$$W_1 = (1 - m\theta_0^2) \exp(\kappa_0 z) Y_1 \quad ] \dots\dots\dots (22)$$

ただし

$$\theta_0^2 = -\kappa_0(\kappa_0 + 2) \dots\dots\dots (23)$$

**b) 第2類の振動**

$\psi$  を任意の実数とすると

$$\mu = -\varphi \pm i\psi \dots\dots\dots (24)$$

と置けば

$$\omega = c(\varphi^2 + \psi^2)^{1/2} \dots\dots\dots (25)$$

となり、 $\omega$  は実数となる。この値を式 (5) に代入すれば  $w$  の一般解として次式が得られる。

$$w = [A_1 \exp\{(-\varphi + i\psi)z\} + A_2 \exp\{(-\varphi - i\psi)z\}] \sin \omega t \dots\dots\dots (26)$$

式 (4) および (26) を式 (9), (10) に代入すれば次式が得られる。

$$\left. \begin{aligned} -(M+R)y_0\omega^2 &= gK(A_1 + A_2 - y_0) \\ -S(A_1 + A_2)\omega^2 &= gkB_0\{A_1(-\varphi + i\psi) \\ &+ A_2(-\varphi - i\psi)\} + gK(y_0 - A_1 - A_2) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (27)$$

$A$  を任意の定数とすると式 (27) より次式が導かれる。

$$y_0 = \frac{2gK}{gK - (M+R)c^2(\varphi^2 + \psi^2)} A \dots\dots\dots (28)$$

$$\left. \begin{aligned} A_1 &= (1 + i\lambda)A \\ A_2 &= (1 - i\lambda)A \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (29)$$

ただしここに

$$\lambda = \frac{\varphi^2 + \psi^2}{B_0\rho\psi} \left\{ \frac{gK(M+R)}{gK - c^2(\varphi^2 + \psi^2)(M+R)} + S \right\} - \frac{\varphi}{\psi} \dots\dots\dots (30)$$

以上に示したごとく任意の  $\psi$  の値に対して境界条件を満足する振動の式を誘導することができる。しかし式 (24) であらわした  $\mu$  は式 (6) を満足せず、軌道および路盤内のエネルギーが無大となる。したがって有限の大きさの衝撃によってこのような振動を発生させることはできない。

以上は  $\psi$  にある固定した値を与えた場合の結論であるが、 $A$  を  $\psi$  の連続関数と考えて式 (4) および (26) の右辺を  $\psi$  で積分した形に書き変えれば変形および運動のエネルギーが有限となる解が存在する。 $A$  が  $\psi$  のいかなる関数となるかは初期条件によって決定され、“運動エネルギー分配の法則”を用いて計算した結果次式が得られた。

$$y = \frac{V'}{\varphi c} Y_2, \quad w = \frac{V'}{\varphi c} W_2 \dots\dots\dots (31)$$

$$\left. \begin{aligned} Y_2 &= \frac{2n_1}{\pi} \int_0^\infty \frac{\kappa^2 \sin \theta T}{\theta(\alpha^2 + \beta^2)} d\kappa \\ W_2 &= \frac{2n_1}{\pi} \exp(-Z) \\ &\quad \times \int_0^\infty \frac{\kappa(\alpha \cos \kappa Z + \beta \sin \kappa Z) \sin \theta T}{\theta(\alpha^2 + \beta^2)} d\kappa \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (32)$$

ただしここに  $\theta, \alpha, \beta$  は  $\kappa$  の関数であって次式によって示される。

$$\left. \begin{aligned} \theta^2 &= 1 + \kappa^2 \\ \alpha &= \kappa(1 - m - m\kappa^2) \\ \beta &= 1 - (n_1 + n_2 + m)(1 + \kappa^2) + n_2 m(1 + \kappa^2)^2 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (33)$$

また  $Z$  および  $T$  は式 (20) に示すごとく  $z$  および  $t$  を無次元化した量である。

以上の計算過程においては軌道が衝撃を受けた後に軌道に生ずる振動を第1類の振動と第2類の振動とに分けて解いたが、実際に軌道に発生する運動はこれらの振動の和となる。しかし第1類の振動が存在しない場合もあり、このときには  $Y_1 = 0, W_1 = 0$  となる。いま

$$Y = Y_1 + Y_2, \quad W = W_1 + W_2 \dots\dots\dots (34)$$

と置けば

$$y = \frac{V'}{\varphi c} Y, \quad w = \frac{V'}{\varphi c} W \dots\dots\dots (35)$$

となる。衝撃後における車輪および道床、路盤の振動速度および加速度は上式を  $T$  で微分して求められる。

$$\frac{dy}{dt} = V' \frac{dY}{dT}, \quad \frac{\partial w}{\partial t} = V' \frac{\partial W}{\partial T} \dots\dots\dots (36)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 y}{dt^2} &= \varphi c V' \frac{d^2 Y}{dT^2} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= \varphi c V' \frac{\partial^2 W}{\partial T^2} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (37)$$

路盤内の圧力  $p$  は次式によって計算される。

$$p = -k \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{kV'}{c} \frac{\partial W}{\partial Z} \dots\dots\dots (38)$$

第1類の振動は式 (22) に示すごとく一定の振幅を持つ振動となる。しかるに第2類の振動は式 (32) で示すごとく振動数の連続的に変化する振動を無限の範囲内で積分した形であらわされ、式の形のうえでは多数の自由振動の和とも見られるが、実際に計算した結果によれば振幅の次第に減衰する振動となった。振幅の減衰する理由としては内部摩擦によるのではなく、振動のエネルギーが次第に広い範囲に拡散するためである。

式 (22) によれば第1類の振動はすべての深さにおいて同一の位相をもって振動することが示されている。しかるに第1類の振動に第2類の振動を加えるとき、すなわち  $W_1 + W_2$  は  $Z \geq T$  において恒等的に0となることが計算結果によって判明した。このことは道床および路盤内を衝撃の波が速度  $c$  で下方に伝播するため波が到達するまでは変位を生じないことをあらわしており、物理的には了承される。

$n_1, n_2, m$  に種々の値を代入して計算した結果によれば  $n_1$  と  $m$  が大きくなるほど総体の運動エネルギーの

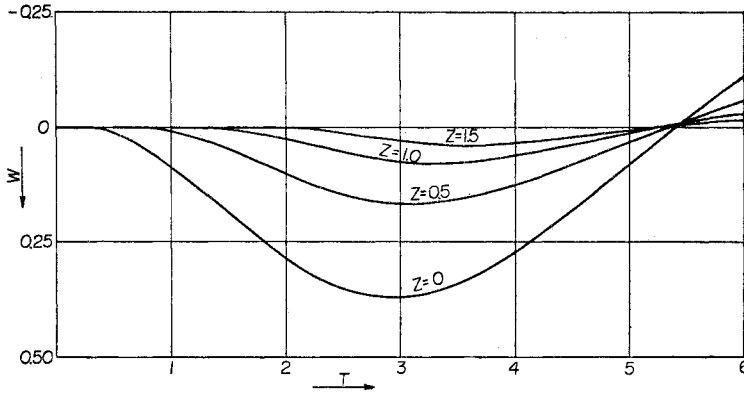


図-18 種々の深さにおけるたわみの時間的変化

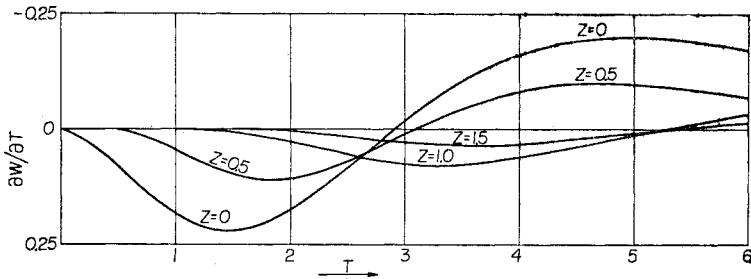


図-19 種々の深さにおける振動速度の時間的変化

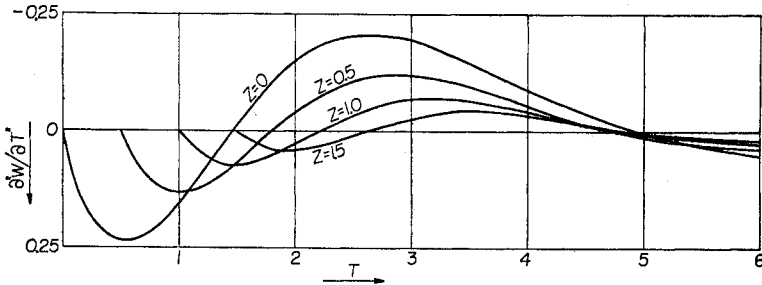


図-20 種々の深さにおける加速度の時間的変化

中で第1類の振動に含まれる運動エネルギーの割合が大きくなる。逆に  $n_1$  と  $m$  がある限界値より小さくなれば第1類の振動は生じないで第2類の振動のみとなることが判明した。

試験軌道を例にとり  $M=560$  kg,  $R=100$  kg,  $S=265$  kg,  $\rho=0.0018$  kg/cm<sup>3</sup>,  $B_0=6\ 600$  cm<sup>2</sup>,  $\varphi=0.018$  cm<sup>-1</sup>,  $k=3\ 400$  kg/cm<sup>2</sup>,  $K=160\ 000$  kg/cm と置けば  $c=43\ 000$  cm/sec,  $n_1=1.0$ ,  $n_2=0.4$ ,  $m=2.5$  となる。式 (16) より  $\kappa$  を求めた結果

$$\kappa = -1.822 \text{ または } 0.161 \pm 0.981 i$$

が得られた。この中の実数根が式 (17) を満足している。

式 (22) および (32) を用いて種々の  $Z$  に対する  $W$ ,  $\partial W/\partial T$  および  $\partial^2 W/\partial T^2$  の時間的変化を計算した結果を 図-18, 19, 20 に示した。これらの図に示すごとく

$T \leq Z$  において  $W$ ,  $\partial W/\partial T$ ,  $\partial^2 W/\partial T^2$  はすべて 0 となっている。

計算結果によれば  $z=0$  における  $Y-W$  は  $T=2.65$  において最大値に達し、1.321 となる。  $V=73.2$  cm/sec として軌道パッドに加わる最大の圧力を計算すれば  $K(y-w)=17\ 000$  kg となった。これは 図-4 に示す測定値にほぼ近い値となっている。  $Y-W$  はこれより次第に小さくなり、 $T=5.56$  において 0 となる。このときに  $dY/dT$  は負の最大値  $-0.955$  となる。今回の実験においては車輪の上に車体の荷重が作用していないのでこのときに車輪はレール面を離れて飛び上がることになる。よってこれから後の計算は実験結果を説明するうえで意味を持たない。しかし実際の車輪はこの上にならず車体の荷重が作用しているので車輪とレール面との間の圧力がいくらか変動してもこの変動が車体の荷重を越えない限り車輪がレール面を離れることはない。したがって上記の計算式は引き続いてそのまま適用できる。車輪の反発係数は上記の  $dY/dT$  の値に  $M/(M+R)$  を乗じて求め

られ、0.81 となった。測定結果によれば 図-16 に示すごとく反発係数は 0.21~0.37 となり、計算値よりはるかに小さい。このような差を生じた原因は理論計算において軌道および路盤の内部摩擦を無視したことにあると考えられる。従来行われた理論計算においては反発係数が 1 より小さくなる原因のすべてを軌道および路盤の内部摩擦に帰していたが、以上の計算に示すごとく反発係数の 1 より小さくなる原因の 25~30% は振動の拡散に帰することができる。

計算結果によれば  $Z=1$  に対する  $-\partial W/\partial Z$  は  $T=2.9$  において最大値 0.1266 に達している。  $V=73.2$  cm/sec として式 (38) により路盤の中の圧力を計算すれば  $p=0.62$  kg/cm<sup>2</sup> が得られる。  $Z=1$  は  $z=55.5$  cm に相当する。 図-15 にはまくらぎ下 35 cm および 65 cm における土圧の測定値が示されているが、計算結

果はまくらぎ下 35 cm における測定値に近い。

## 11. 結 論

レール面または車輪踏面に傷がある場合に軌道は走行車両によって大きな衝撃を受けることが知られているが、衝撃によって軌道に生ずる応力、変形および振動の伝播の様相を解析するために試験軌道に車輪を落として種々の測定を行った。実際の軌道が衝撃を受ける場合に近い状態になるようにあらかじめ種々の大きさの静荷重を試験軌道にかけたうえで衝撃を加えることとした。

衝撃の大きさはレール腹部に生ずるせん断応力を測定することによってもっとも精度を高く知ることができ、車輪の落下速度に比例することが確かめられた。またあらかじめ静的に加えた垂直荷重が大きいほど衝撃力は増すが、この理由として道床および路盤の弾性係数は一定でなく、静的に加えた垂直荷重が大きいほど大きくなるためと考えられる。片側レール当り 4 t の静荷重を加えた状態において 12 t 長軸の車輪を 25 mm の高さから落とした場合の衝撃力は 13 t となり、このような衝撃は特急電車が 120 km/h で走行するときにクハ 481, サシ 481, サシ 581 型式車両の車輪によって加えられる可能性が少なくも 1% あることが現場実験によって判明した。

レール底部に生ずる曲げ応力およびレール、まくらぎのたわみを測定することによっても衝撃の大きさを知ることができるが、この場合にはせん断力から得た値より幾分小さくなる。このような差を生ずる理由は軌道の慣性による影響と考えられる。

車輪落下時にレールおよびまくらぎに生ずる振動速度を測定した結果によればレールの振動速度は車輪の落下速度よりいくらか小さく、まくらぎの振動速度はこの 1/4~1/5 となった。

車輪はレールに接触してから 0.006~0.009 sec 後にレール面を離れて飛び上がり、これに続いてレールおよびまくらぎは自由振動を生ずることが認められた。しかし実際の軌道においては車輪の上に車体の重量が加わっているので車輪がレール面を離れることはそれほどなく、レール、まくらぎが自由振動を生ずる可能性は比較的少ないと考えられる。

レール、まくらぎおよび路盤に生ずる加速度も測定したが、レールでは測定計器の限界 3 500 Hz に近い振動数を持つ振動が最大の加速度を示した。さらに高い固有振動数を持つ加速度計および増幅器を使えばさらに大きな加速度が得られる可能性がある。しかるにこれらの振動振幅は 1/100 mm 以下であり、このように微小な振動は軌道の劣化に関連をもつというよりもむしろ騒音の発生源として問題になるであろう。

路盤中の種々の深さに埋込んだ土圧計によっても衝撃の大きさを知ることができ、車輪の落下速度に比例する土圧の変化が認められた。またレール面が打撃を受けてより土圧計が衝撃の波を受けるまでの経過時間によって路盤中を衝撃波の伝播する速度が求められ、この速度はあらかじめレール面に加えられた垂直荷重によって大きく変ることが認められた。片側レール当り 8 t の垂直荷重を加えた場合には 430 m/sec の伝播速度となった。

以上の実験結果を理論的に説明するためには荷重を支持する路盤の重量が下に行くほど広く分散して存在することを考慮に入れる要があり、このような仮定のもとに解析を行った結果レール面が打撃を受けた後衝撃の波が伝播する過程をよく説明することができた。従来は軌道が衝撃を受けてからその振動が減衰をする原因のすべてを軌道の内部摩擦によるとしていたのであるが、今回の計算結果によってその 25~30% は振動が路盤の下方に拡散するためであることが推定される。

## 参 考 文 献

- 1) 小野一良・伊藤義男：砂利道床軌道が走行車両より受ける衝撃の測定および解析，土木学会論文報告集，第 240 号，昭 50.8.
- 2) 佐藤 裕：軌道への車輪落下実験，鉄道技術研究資料，第 14 卷 14 号，昭 33.2.
- 3) 佐藤 裕：軌道構造と振動との関係についての理論的考察，鉄道業務研究資料，第 13 卷 8 号，昭 31.4.
- 4) 佐藤 裕：軌道に加わる垂直衝撃圧力，鉄道技術研究報告，第 16 号，昭 33.7.
- 5) 小野一良・伊藤義男：コンクリート道床に使用された軌道パッドの効果について，土木学会論文報告集，第 192 号，昭 46.8.
- 6) 小野一良：運動エネルギーの分配に関する法則，土木学会論文集，第 33 号，昭 31.4.

(1975.6.9・受付)