

## 周期性荷重を受ける骨組構造物の弾性安定解析

ANALYSIS OF ELASTIC STABILITY OF FRAMED STRUCTURES  
SUBJECTED TO THE PERIODIC LOADS

會田 忠義\*・佐伯 博三\*\*・窪田 彰\*\*\*

By Tadayoshi AIDA, Hiromi SAEKI and Akira KUBOTA

## 1. ま え が き

柱や骨組構造物が周期性荷重を受けるとき、その構造物の臨界荷重は周期性荷重の影響を受けることは周知の通りである。Fig. 1(a) のように水平方向の周期性荷重を受ける柱については、小沢<sup>1)</sup>や Puwein<sup>2)</sup> らにより明らかにされており、面内変形アーチに対しては、F. Stüssi<sup>3)</sup> が固有振動数と鉛直荷重との関係を明らかにし、C.F. Kollbrunner<sup>4)</sup> は実験によりそれを確かめている。これらは、いずれも、振動変位の大きさを考慮して解析され、固有振動数におよぼす軸力の影響と同一問題になり、比較的容易に計算されている。一方、Fig. 1(b) および (d) のように周期性荷重と非周期性荷重との作用方向が同じ場合は係数励振振動（係数励振形自励振動をいう）となり（Fig. 1(c) の場合も、係数励振振動となる場合がある）、いわゆる、動的安定問題としてこれまでに、棒の力学を用いた多くの研究がなされて

いる<sup>5)~10)</sup>。

係数励振不安定問題において、たとえば、軸方向周期性荷重を受ける柱において、両端単純支持柱の場合、柱の横振動の  $p$  次モードの固有振動数を  $\omega_p$ 、励振振動数を  $\omega$  とするとき、 $\omega = 2\omega_p/k$  ( $p, k=1, 2, \dots$ ) の励振振動数の近傍に、いわゆる、単純な（単一モードの）係数励振不安定振動が発生することがよく知られている。しかし、他の境界条件の柱の場合では、単純な係数励振不安定振動のほかに、 $\omega = (\omega_p \pm \omega_q)/k$  の励振振動数の近傍に  $p$  次モードと  $q$  次モードの組み合わせである不安定振動（これを混合共振あるいは結合共振 (combination resonance) という) が発生することも明らかにされている<sup>7), 11), 12)</sup>。単純な係数励振不安定振動では、減衰力の影響は比較的大きいため、これらの影響を考慮すべきであり、減衰を考慮することにより、不安定領域が縮小されることが知られている<sup>7)</sup>。また、荷重の振動数が構造物の固有振動数、特に、周期性荷重による振動形と同じ振動数の基準振動の固有振動数（軸方向周期性荷重を受ける柱の場合は縦振動の固有振動数）に近い場合、周期性荷重による強制振動が動的安定性に影響をおよぼすが、これらの2つの振動数が十分に離れている場合はこの影響を無視してよいことも知られている<sup>7)</sup>。

本研究は、連続弾性体としての棒の力学をそのまま適用しにくい骨組構造物を対象にし、単純な係数励振不安定振動となる場合の安定性の解析を試みたもので、ここでは減衰の影響を無視し、さらに、強制振動の影響を無視した基本的な場合の解析を主眼とした。

骨組構造物の動的安定解析に有限要素法を用いることは可能であり、比較的容易に適用できる<sup>13)</sup>。また、柱やアーチなどのように単一材からなる構造物については、可容な質量マトリックスを用いることにより慣性力を正しく計算することができるので望ましい方法である。本研究では、骨組構造物の節点に従動力 (follower force) が作用する場合、あるいは、周期性従動力が作用する場

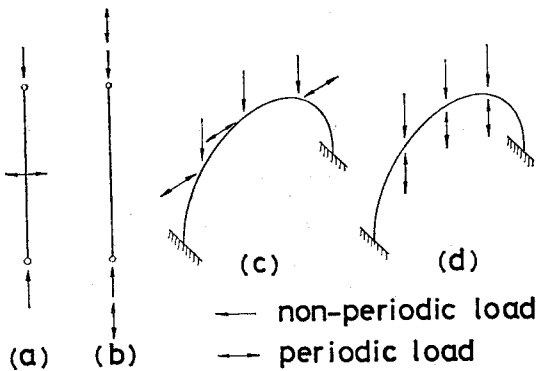


Fig. 1 Columns and structures subjected to the non-periodic and periodic loads.

\* 正会員 工博 山口大学助教授、工学部土木工学科  
\*\* 正会員 工修 日本道路公団  
\*\*\* 正会員 工修 兵庫県土木部

合などの非保存的弾性安定問題<sup>14)</sup>に、本研究の考え方を比較的容易に展開できるとの観点から、構造物を集中質量系として一般の骨組構造物の解析によく用いられる変形法を応用拡張した。

解析にあたり下記に示す仮定を入れ、現象の安定、不安定を論ずる運動の微分方程式を次の手順で導いた。まず初めに、安定な微小振動状態の節点の運動方程式を求めた。次に、この状態に外乱、すなわち、変位変分を加えた状態について、変形の大きさを考慮した節点の運動方程式を求め、これより変位変分に関する微分方程式を求めた。この周期係数をもつ微分方程式の解の安定および不安定条件により、動的安定および不安定領域の境界値を求めた。かく乱状態の運動方程式を導くにあたり、線形化した有限変形法理論を適用した。

- ① 外力はすべて構造物の節点に作用する。
- ② 周期性荷重はすべて一定の周期をもつ。
- ③ 周期性荷重の振幅および非周期性荷重の大きさは、それぞれ一定の割合で漸変する。
- ④ 荷重は質量をもたない。
- ⑤ 骨組については、骨組構造物一般の仮定が成立する。
- ⑥ 内力はすべて比例限内にある。
- ⑦ 局所的な不安定現象は生じない。
- ⑧ 構造物の質量は節点に集中する。

また、上記の境界値の計算において、不安定領域の境界では調和振動に近い振動が生ずると仮定したが、この仮定について、杉山<sup>15)</sup>は主不安定領域の上限ではビートが生ずるため適正ではないが、定常運動状態を考えれば、適正であることを両端単純支持の柱について確認している。

本文の最後に、本研究の方法を用いて柱および放物線アーチを解析し、これらの結果を、柱の力学を用いて、すでに解析された両端単純支持柱の結果と比較し、検討を加えた。

## 2. 運動方程式

非周期性荷重の大きさおよび周期性荷重の振幅あるいは振動数の大きさが構造物固有のある限界内、すなわち、安定領域内にある場合、これらのわずかな変化に対してわずかな変位変化があるだけで、時間の経過に伴う変位の増加はない。しかし、上記の値がある限界を越えると、すなわち、不安定領域に入ると、これまでの変形様式と異なった振動が生じ、時間の経過に伴い振動変位が無限大に増大する不安定現象が生ずる。安定領域では、近似的に微小振幅の運動方程式が成立するが、不安定領域では、微小振幅の運動方程式は成立せず、有限振

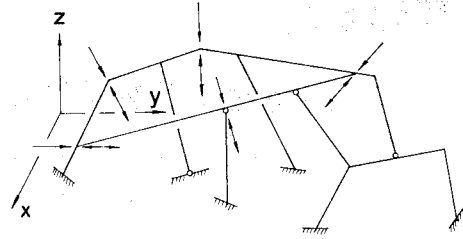


Fig. 2 Framed structure subjected to the non-periodic and periodic loads.

幅の運動方程式が成立することになる。

本研究では、まず初めに、非周期性荷重の大きさおよび周期性荷重の振幅あるいは振動数の大きさが安定領域の境界近傍のある値を取り、安定振動状態にある場合を想定する。次に、これらの諸値の微小変化により不安定領域に入り、不安定振動状態になった場合を想定する。不安定振動状態の節点の運動方程式、すなわち、有限振幅時の運動方程式を構造物の変形後の節点の動的つり合い式より求める。以下、Fig. 2のように全体座標軸をとり、節点総数  $m$  の立体的剛結構造物について運動方程式を示す。

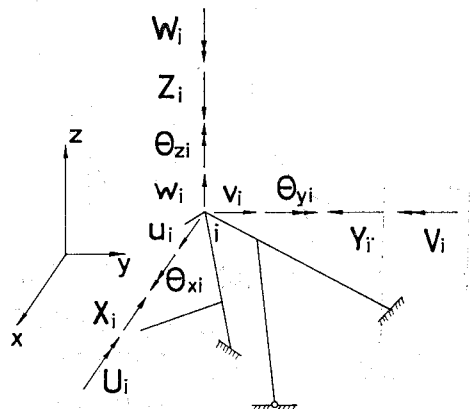
### (1) 微小振幅時の運動方程式

節点  $i$  に作用する非周期性荷重ベクトルを  $P_{oi}$ 、周期性荷重ベクトルを  $\bar{P}_i \sin \omega t$  とする。ここで、 $\omega$  は円振動数である (Fig. 3 を参照)。

$$P_{oi} = \{X_{oi}, Y_{oi}, Z_{oi}, U_{oi}, V_{oi}, W_{oi}\}^T \dots (1)$$

$$\bar{P}_i = \{\bar{X}_i, \bar{Y}_i, \bar{Z}_i, \bar{U}_i, \bar{V}_i, \bar{W}_i\}^T \dots (2)$$

節点  $i$  の変位をベクトル  $d_i$  で表わす。特に、非周期性荷重による変位をベクトル  $d_{oi}$  で、周期性荷重による変位をベクトル  $\bar{d}_i$  で表わす。



— force and displacement  
 — moment and rotation

Fig. 3 Nodal displacements and nodal forces.

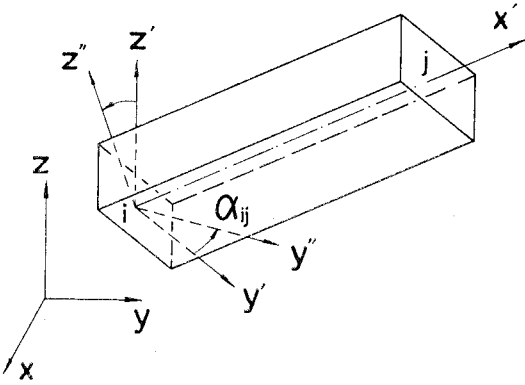


Fig. 4 Rotation angle of the principal axes.

$$d_i = \{u_i, v_i, w_i, \theta_{xi}, \theta_{yi}, \theta_{zi}\}^T \dots\dots\dots (3)$$

$$d_{oi} = \{u_{oi}, v_{oi}, w_{oi}, \theta_{xoi}, \theta_{yoi}, \theta_{zoi}\}^T \dots\dots\dots (4)$$

$$\bar{d}_i = \{\bar{u}_i, \bar{v}_i, \bar{w}_i, \bar{\theta}_{xi}, \bar{\theta}_{yi}, \bar{\theta}_{zi}\}^T \dots\dots\dots (5)$$

節点  $i$  の座標をベクトル  $f_i$  で表わし、部材  $ij$  の  $i$  端における断面の主軸回転角を  $\alpha_{ij}$  で表わす。

$$f_i = \{x_i, y_i, z_i\}^T \dots\dots\dots (6)$$

ここで、 $\alpha_{ij}$  とは、部材  $ij$  の  $ij$  方向の  $x'$  軸と、Fig. 4 に示すように、 $x'$  軸に直交する  $i$  端の断面主軸に一致した  $y'$  および  $z'$  軸からなる右手系の局部座標を考慮するとき、 $y'$  および  $z'$  軸を  $x'$  軸まわりに回転させ、 $y'$  軸を  $x-y$  平面に平行にするために必要な回転角である。

部材  $ij$  の  $i$  端における局部座標系での材端力ベクトルを  $N_{ij}'$ 、材端変位ベクトルを  $d_i'$  とするとき、 $N_{ij}'$  は次式で表わされる (Fig. 5 を参照)。

$$N_{ij}' = S_{iij} \cdot d_i' + S_{jij} \cdot d_j' \dots\dots\dots (7)$$

ここで、

$$N_{ij}' = \{Q_{xi}', Q_{yi}', Q_{zi}', M_{xi}', M_{yi}', M_{zi}'\}^T \dots\dots\dots (8)$$

$$d_i' = \{u_i', v_i', w_i', \theta_{xi}', \theta_{yi}', \theta_{zi}'\}^T \dots\dots\dots (9)$$

曲げモーメントに対する軸力の影響を無視すると、

$$S_{iij} = \begin{bmatrix} EA/l_{ij} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 12EI_z/l_{ij}^3 & 0 & 0 & 0 & 6EI_z/l_{ij}^2 \\ 0 & 0 & 12EI_y/l_{ij}^3 & 0 & -6EI_y/l_{ij}^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & GJ/l_{ij} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -6EI_y/l_{ij}^2 & 0 & 4EI_y/l_{ij} & 0 \\ 0 & 6EI_z/l_{ij}^2 & 0 & 0 & 0 & 2EI_z/l_{ij} \end{bmatrix} \dots\dots\dots (10)$$

$$S_{jij} = \begin{bmatrix} -EA/l_{ij} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -12EI_z/l_{ij}^3 & 0 & 0 & 0 & 6EI_z/l_{ij}^2 \\ 0 & 0 & -12EI_y/l_{ij}^3 & 0 & -6EI_y/l_{ij}^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -GJ/l_{ij} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6EI_y/l_{ij}^2 & 0 & 2EI_y/l_{ij} & 0 \\ 0 & -6EI_z/l_{ij}^2 & 0 & 0 & 0 & 2EI_z/l_{ij} \end{bmatrix} \dots\dots\dots (11)$$

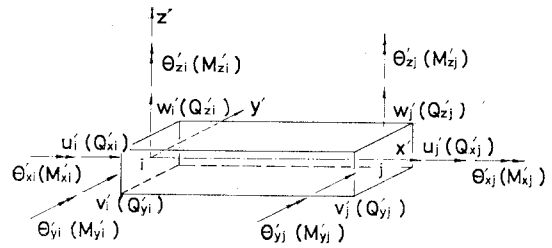


Fig. 5 End forces and displacements of member in reference to the local coordinate.

また、局部座標軸方向の諸量を全体座標軸方向の諸量に変換するための座標変換マトリックスを  $t_{ij}$  とすると、 $N_{ij}'$  は次式で表わされる。

$$N_{ij}' = S_{iij} \cdot T_{ij}^{-1} \cdot d_i + S_{jij} \cdot T_{ij}^{-1} \cdot d_j \dots\dots\dots (12)$$

ここで、

$$T_{ij} = \begin{bmatrix} t_{ij} & 0 \\ 0 & t_{ij} \end{bmatrix} \dots\dots\dots (13)$$

$$t_{ij} = \begin{bmatrix} \lambda_{ij} & -\mu_{ij} & -\nu_{ij}\bar{l}_{ij} \\ \mu_{ij} & \bar{\lambda}_{ij} & -\nu_{ij}\bar{\mu}_{ij} \\ \nu_{ij} & 0 & \bar{l}_{ij}/l_{ij} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha_{ij} & \sin \alpha_{ij} \\ 0 & -\sin \alpha_{ij} & \cos \alpha_{ij} \end{bmatrix} \dots\dots\dots (14)$$

$$\lambda_{ij} = (x_j - x_i)/l_{ij}, \quad \mu_{ij} = (y_j - y_i)/l_{ij},$$

$$\nu_{ij} = (z_j - z_i)/l_{ij}, \quad \bar{\lambda}_{ij} = (x_j - x_i)/\bar{l}_{ij},$$

$$\bar{\mu}_{ij} = (y_j - y_i)/\bar{l}_{ij},$$

$$l_{ij} = \{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2 + (z_j - z_i)^2\}^{1/2},$$

$$\bar{l}_{ij} = \{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2\}^{1/2}$$

すると、節点  $i$  の運動方程式は  $T_{ij}$  が  $f_i, f_j$  および  $\alpha_{ij}$  の関数であり、 $N_{ij}'$  が  $f_i, f_j, \alpha_{ij}, d_{oi} + \bar{d}_i$  および  $d_{oj} + \bar{d}_j$  の関数であることより次のように表わされる。

$$W_i \frac{d^2 d_i}{dt^2} = - \sum_{j=1}^m T_{ij}(f_i, f_j, \alpha_{ij}) \times N_{ij}'(d_{oi} + \bar{d}_i, d_{oj} + \bar{d}_j, f_i, f_j, \alpha_{ij}) - P_{oi} - \bar{P}_i \sin \omega t \dots\dots\dots (15)$$

ここで、 $W_i$  は節点  $i$  の質量マトリックスで、式 (16) で表わされ、対角要素  $M_i$  は節点  $i$  の集中質量、 $J_{xi}, J_{yi}$  および  $J_{zi}$  はそれぞれ節点  $i$  を通り  $x, y$  および  $z$  軸に平行な軸まわりの節点  $i$  の質量慣性モーメントである。

$$W_i = \text{diag}(M_i, M_i, M_i, J_{xi}, J_{yi}, J_{zi}) \dots\dots\dots (16)$$

式 (15) を構造物の各節点に適用することにより、一連の

運動方程式が得られる。拘束条件を考慮し、マトリックス表示すると、運動方程式は次式となる。ただし、式中、 $n$  は  $n < m$  である。

$$W \frac{d^2 \bar{d}}{dt^2} + K_1 (\bar{d}_0 + \bar{d}) = -\bar{P}_0 - P \sin \omega t \quad \dots (17)$$

$$W = \begin{bmatrix} W_1 & & & \\ & W_2 & & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & & & W_n \end{bmatrix}, \quad P_0 = \begin{bmatrix} P_{01} \\ P_{02} \\ \vdots \\ P_{0n} \end{bmatrix}, \quad \bar{P} = \begin{bmatrix} \bar{P}_1 \\ \bar{P}_2 \\ \vdots \\ \bar{P}_n \end{bmatrix}$$

$$\bar{d}_0 = \begin{bmatrix} \bar{d}_{01} \\ \bar{d}_{02} \\ \vdots \\ \bar{d}_{0n} \end{bmatrix}, \quad \bar{d} = \begin{bmatrix} \bar{d}_1 \\ \bar{d}_2 \\ \vdots \\ \bar{d}_n \end{bmatrix} \quad \dots (18)$$

$K_1$ : 剛性マトリックス

## (2) 有限振幅時の運動方程式

いま、非周期性荷重の大きさおよび周期性荷重の振幅あるいは振動数の大きさが微小量だけ変化し、動的不安定領域の境界近傍のある値を取る場合を想定する。この場合、変位が増加する。この変位の増加量を  $\Delta \bar{d}_i$  で表わすと、節点  $i$  の運動方程式は近似的であるが、次式で表わされる。

$$W_i \frac{d^2}{dt^2} (\bar{d}_i + \Delta \bar{d}_i) = - \sum_{j=1}^m T_{ij} (f_i + \Delta f_i, f_j + \Delta f_j, \alpha_{ij}) N_{ij}' (\bar{d}_{0i} + \bar{d}_i + \Delta \bar{d}_i, \bar{d}_{0j} + \bar{d}_j + \Delta \bar{d}_j, f_i, f_j, \alpha_{ij}) - P_{0i} - \bar{P}_i \sin \omega t \quad \dots (19)$$

ここで、

$$\Delta f_i = \{\Delta u_i, \Delta v_i, \Delta w_i\}^T,$$

$$\Delta f_j = \{\Delta u_j, \Delta v_j, \Delta w_j\}^T$$

$$\Delta \alpha_{ij} = \lambda_{ij} \Delta \bar{\theta}_{xi} + \mu_{ij} \Delta \bar{\theta}_{yi} + \nu_{ij} \Delta \bar{\theta}_{zj}.$$

式 (19) の右辺の第 1 項の  $T_{ij}$  および  $N_{ij}'$  を展開して、 $\Delta \bar{d}_i$  の 2 次以上の項を無視し、さらに、微小振幅時の運動方程式 (15) を考慮して、 $\Delta \bar{d}_i$  を新たに  $\bar{d}_i$  とおくと、式 (19) は次のように整理される。

$$W_i \frac{d^2 \bar{d}_i}{dt^2} = - \sum_{j=1}^m T_{ij} (f_i, f_j, \alpha_{ij}) \left( \frac{\partial N_{ij}'}{\partial u_i} u_i + \frac{\partial N_{ij}'}{\partial v_i} v_i + \frac{\partial N_{ij}'}{\partial w_i} w_i + \frac{\partial N_{ij}'}{\partial \theta_{xi}} \theta_{xi} + \frac{\partial N_{ij}'}{\partial \theta_{yi}} \theta_{yi} + \frac{\partial N_{ij}'}{\partial \theta_{zi}} \theta_{zi} + \frac{\partial N_{ij}'}{\partial u_j} u_j + \frac{\partial N_{ij}'}{\partial v_j} v_j + \frac{\partial N_{ij}'}{\partial w_j} w_j + \frac{\partial N_{ij}'}{\partial \theta_{xj}} \theta_{xj} + \frac{\partial N_{ij}'}{\partial \theta_{yj}} \theta_{yj} + \frac{\partial N_{ij}'}{\partial \theta_{zj}} \theta_{zj} \right) - \sum_{j=1}^m \left( \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_i} u_i + \frac{\partial T_{ij}}{\partial y_i} v_i + \frac{\partial T_{ij}}{\partial z_i} w_i + \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} u_j + \frac{\partial T_{ij}}{\partial y_j} v_j + \frac{\partial T_{ij}}{\partial z_j} w_j \right)$$

$$+ \frac{\partial T_{ij}}{\partial \alpha_{ij}} \beta_{ij} \left( N_{ij}' (\bar{d}_{0i} + \bar{d}_i, \bar{d}_{0j} + \bar{d}_j, f_i, f_j, \alpha_{ij}) \right) \dots (20)$$

ここに、

$$\beta_{ij} = \lambda_{ij} \theta_{xi} + \mu_{ij} \theta_{yi} + \nu_{ij} \theta_{zj}$$

非周期性荷重  $P_0$  および周期性荷重  $\bar{P} \sin \omega t$  が作用したときの部材  $ij$  の  $i$  端の局部座標系での材端力ベクトルをそれぞれ  $N_{0ij}'$  および  $\bar{N}_{ij}'$  とするとき、次のように、式 (20) は整理される。

$$W_i \frac{d^2 \bar{d}_i}{dt^2} = - \sum_{j=1}^m T_{ij} (f_i, f_j, \alpha_{ij}) \times N_{ij}' (\bar{d}_i, \bar{d}_j, f_i, f_j, \alpha_{ij}) - \sum_{j=1}^m \{ H_{ijj} (f_i, f_j, \alpha_{ij}, N_{0ij}' + \bar{N}_{ij}') \bar{d}_i + H_{jij} (f_i, f_j, \alpha_{ij}, N_{0ij}' + \bar{N}_{ij}') \bar{d}_j \} \quad \dots (21)$$

ここで、

$$H_{ijj} (f_i, f_j, \alpha_{ij}, N_{0ij}' + \bar{N}_{ij}')$$

$$= \left\{ \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_i} (N_{0ij}' + \bar{N}_{ij}'), \frac{\partial T_{ij}}{\partial y_i} (N_{0ij}' + \bar{N}_{ij}'), \frac{\partial T_{ij}}{\partial z_i} (N_{0ij}' + \bar{N}_{ij}'), \right.$$

$$\lambda_{ij} \frac{\partial T_{ij}}{\partial \alpha_{ij}} (N_{0ij}' + \bar{N}_{ij}'), \mu_{ij} \frac{\partial T_{ij}}{\partial \alpha_{ij}} (N_{0ij}' + \bar{N}_{ij}'),$$

$$\nu_{ij} \frac{\partial T_{ij}}{\partial \alpha_{ij}} (N_{0ij}' + \bar{N}_{ij}') \left. \right\}$$

$$H_{jij} (f_i, f_j, \alpha_{ij}, N_{0ij}' + \bar{N}_{ij}')$$

$$= \left\{ \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} (N_{0ij}' + \bar{N}_{ij}'), \frac{\partial T_{ij}}{\partial y_j} (N_{0ij}' + \bar{N}_{ij}'), \right.$$

$$\left. \frac{\partial T_{ij}}{\partial z_j} (N_{0ij}' + \bar{N}_{ij}'), \mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0} \right\}$$

いま、非周期性荷重の基準となる荷重 (基準荷重とよぶ) 状態における節点  $i$  に作用する荷重ベクトルを  $\hat{P}_{0i}$  で、周期性荷重の基準荷重状態における節点  $i$  に作用する荷重ベクトルを  $\hat{P}_i \sin \omega t$  で表わすと、 $P_{0i}$  および  $\bar{P}_i$  はそれぞれ次の関係を満たす。

$$P_{0i} = P_0 \hat{P}_{0i}, \quad \bar{P}_i = \bar{P} \hat{P}_i \quad \dots (22)$$

( $i=1, 2, \dots, m$ )

ここで、

$$\hat{P}_{0i} = \{\tilde{X}_{0i}, \tilde{Y}_{0i}, \tilde{Z}_{0i}, \tilde{U}_{0i}, \tilde{V}_{0i}, \tilde{W}_{0i}\}^T \quad \dots (23)$$

$$\hat{P}_i = \{\tilde{X}_i, \tilde{Y}_i, \tilde{Z}_i, \tilde{U}_i, \tilde{V}_i, \tilde{W}_i\}^T \quad \dots (24)$$

$P_0$  および  $\bar{P}$  はそれぞれ非周期性荷重および周期性荷重について、実荷重と基準荷重との比を表わす。すなわち、実荷重  $P_{0i}$  および  $\hat{P}_i$  は、それぞれの基準荷重の  $P_0$  倍および  $\bar{P}$  倍である。したがって、非周期性荷重の基準荷重状態における部材  $ij$  の  $i$  端の局部座標系での材端力ベクトルを  $\tilde{N}_{0ij}'$  で表わすと、 $N_{0ij}'$  は次式で表わされる。

$$N_{0ij}' = P_0 \tilde{N}_{0ij}' \quad \dots (25)$$

同様に、周期性荷重の基準荷重状態における同部材端の

局部座標系での材端力ベクトルの振幅を  $\tilde{N}_{ij}'$  で表わすと、 $\bar{N}_{ij}'$  は次式で表わされる。

$$\bar{N}_{ij}' = \bar{P} \tilde{N}_{ij}' \sin \omega t \dots\dots\dots (26)$$

$\tilde{N}_{ij}'$  は  $\tilde{P}_i \sin \omega t$  ( $i=1, 2, \dots, m$ ) なる荷重が作用した状態での材端力ベクトルの振幅であるから、 $\omega$  の関数となるが、 $\omega$  が構造物の固有振動数から十分に離れている場合は  $\omega$  の影響は小さく、また、既述のように強制振動の影響を無視する場合、 $\tilde{N}_{ij}'$  は非周期性荷重としての  $P_i$  ( $i=1, 2, \dots, m$ ) が載荷されているときの材端力ベクトルに等しいと見なすことができる。したがって、式 (21) 中の  $N_{0ij}' + \bar{N}_{ij}'$  は次のように書き表わすことができる。

$$N_{0ij}' + \bar{N}_{ij}' = P_0 \tilde{N}_{0ij}' + \bar{P} \tilde{N}_{ij}' \sin \omega t$$

ゆえに、式 (21) は次式に整理される。

$$\begin{aligned} W_i \frac{d^2 \mathbf{d}_i}{dt^2} = & - \sum_{j=1}^m T_{ij}(\mathbf{f}_i, \mathbf{f}_j, \alpha_{ij}) \\ & \times N_{ij}'(\mathbf{d}_i, \mathbf{d}_j, \mathbf{f}_i, \mathbf{f}_j, \alpha_{ij}) \\ & - P_0 \sum_{j=1}^m \{ \mathbf{H}_{ij}(\mathbf{f}_i, \mathbf{f}_j, \alpha_{ij}, \tilde{N}_{0ij}') \mathbf{d}_i \\ & + \mathbf{H}_{ji}(\mathbf{f}_i, \mathbf{f}_j, \alpha_{ij}, \tilde{N}_{0ij}') \mathbf{d}_j \} \\ & - \bar{P} \sin \omega t \sum_{j=1}^m \{ \mathbf{H}_{ij}(\mathbf{f}_i, \mathbf{f}_j, \alpha_{ij}, \tilde{N}_{ij}') \mathbf{d}_i \\ & + \mathbf{H}_{ji}(\mathbf{f}_i, \mathbf{f}_j, \alpha_{ij}, \tilde{N}_{ij}') \mathbf{d}_j \} \dots\dots\dots (27) \end{aligned}$$

上式が節点  $i$  の、有限振幅時の変位の増加量に関する運動方程式である。これを骨組構造物の各節点に適用することにより一連の運動方程式が得られる。拘束条件を考慮し、マトリックス表示するとき、一連の運動方程式は次式となる。

$$W \frac{d^2 \mathbf{d}}{dt^2} + P_0 \mathbf{K}_3 \mathbf{d} + \bar{P} \sin \omega t \mathbf{K}_2 \mathbf{d} + \mathbf{K}_1 \mathbf{d} = 0 \dots\dots\dots (28)$$

ここで、

$$\mathbf{d} = \begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_n \end{Bmatrix} \dots\dots\dots (29)$$

$W, \mathbf{K}_1$ : 式 (17) のそれぞれと同じ。

$\mathbf{K}_2$ : 非周期性荷重としての  $\tilde{P}_i$  ( $i=1, 2, \dots, m$ ) が作用したときの初期応力マトリックス。

$\mathbf{K}_3$ : 非周期性荷重としての  $\tilde{P}_0$  ( $i=1, 2, \dots, m$ ) が作用したときの初期応力マトリックス。

### 3. 境界振動数と臨界荷重

式 (28) は Mathieu-Hill の方程式である。この方程式の解について、外力の周期と同じ周期かあるいは2倍の周期をもつ周期解が安定領域と不安定領域を区分する

こと、さらに厳密にいうと、同じ周期をもつ2つの解が不安定領域を区分し、異なった周期をもつ2つの解が安定領域を区分することは周知の通りである<sup>7)</sup>。

変位ベクトル  $\mathbf{d}$  を周期性荷重の周期の2倍の周期をもつ次の周期関数で表わすとき、

$$\mathbf{d} = \boldsymbol{\alpha} \sin \frac{1}{2} \omega t + \boldsymbol{\beta} \cos \frac{1}{2} \omega t \dots\dots\dots (30)$$

ここで、 $\boldsymbol{\alpha}$  および  $\boldsymbol{\beta}$  は時間に無関係な量である。動的主不安定領域の境界振動数は次の境界振動数方程式より近似的に求められる。

$$|\mathbf{K}_1 \pm \frac{1}{2} \bar{P} \mathbf{K}_2 + P_0 \mathbf{K}_3 - \frac{1}{4} \omega^2 \mathbf{W}| = 0 \dots\dots\dots (31)$$

さらに、変位ベクトル  $\mathbf{d}$  を周期性荷重の周期と等しい周期をもつ次の周期関数で表わすとき、

$$\mathbf{d} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\beta}_0 + \boldsymbol{\alpha} \sin \omega t + \boldsymbol{\beta} \cos \omega t \dots\dots\dots (32)$$

ここで、 $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$  および  $\boldsymbol{\beta}_0$  も時間に無関係な量である。第2不安定領域の境界振動数は次の境界振動数方程式より近似的に求められる。

$$|\mathbf{K}_1 + P_0 \mathbf{K}_3 - \omega^2 \mathbf{W}| = 0 \dots\dots\dots (33)$$

$$\begin{vmatrix} \mathbf{K}_1 + P_0 \mathbf{K}_3 & \bar{P} \mathbf{K}_2 \\ \frac{1}{2} \bar{P} \mathbf{K}_2 & \mathbf{K}_1 + P_0 \mathbf{K}_3 - \omega^2 \mathbf{W} \end{vmatrix} = 0 \dots\dots\dots (34)$$

特に、一定の周期性荷重  $\bar{P} \sin \omega t$  ( $\bar{P}$ =一定、 $\omega$ =一定) が作用しているときの動的主不安定領域の臨界荷重 ( $P_0$ ) の大きさ  $P_0$  を求めるには、次式によればよい。動的主不安定領域の臨界荷重に対して、

$$\left| \left( \mathbf{K}_1 \pm \frac{1}{2} \bar{P} \mathbf{K}_2 - \frac{1}{4} \omega^2 \mathbf{W} \right)^{-1} \mathbf{K}_3 + \frac{1}{P_0} \mathbf{E} \right| = 0 \dots\dots\dots (35)$$

動的第2不安定領域の臨界荷重に対して

$$\left| (\mathbf{K}_1 - \omega^2 \mathbf{W})^{-1} \mathbf{K}_3 + \frac{1}{P_0} \mathbf{E} \right| = 0 \dots\dots\dots (36)$$

$$\left[ \begin{bmatrix} \mathbf{K}_1 & \bar{P} \mathbf{K}_2 \\ \frac{1}{2} \bar{P} \mathbf{K}_2 & \mathbf{K}_1 - \omega^2 \mathbf{W} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{K}_3 & 0 \\ 0 & \mathbf{K}_3 \end{bmatrix} + \frac{1}{P_0} \begin{bmatrix} \mathbf{E} & 0 \\ 0 & \mathbf{E} \end{bmatrix} \right] = 0 \dots\dots\dots (37)$$

上式中  $\mathbf{E}$  は単位マトリックスである。

### 4. 適用例

#### (1) 柱

Fig. 6 に示す断面をもち、柱長が 60 cm のアルミニウム柱を対象にして、Fig. 7 に示す3種類の柱について、断面の  $y$  軸に関する動的主不安定領域の境界値を本研究の方法により求めた。その結果を次に示す。Fig. 7 中の Case I は両端固定柱、Case II は一端固定、他端ヒンジ柱、Case III は両端ヒンジ柱である。

解析にあたり、Fig. 8 に示すように、7 節点からなる

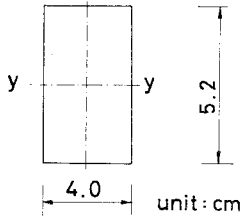


Fig. 6 Cross section of column.

集中質量系に柱を置換した。また、柱の上端に下向きに単位の荷重が作用する状態を非周期性の基準荷重状態とし、大きさが  $1 \times \sin \omega t$  の周期性荷重が同じよう

に作用する状態を周期性の基準荷重状態とした。各柱の静的座屈時の  $P_0$  値である  $P_*$  値および固有円振動数  $\omega_1$  を Fig. 7 に示す。

不安定領域の境界値の計算は、与えられた  $\bar{P}$  作用時の荷重振動数  $\omega$  の変化に伴う非周期性荷重の大きさ  $P_0$  の臨界値を式 (35), (36) および (37) より求める方法によった。計算では、 $\bar{P}$  としては静的座屈荷重より小さい値の方が実際的であることを考慮して、両端単純支持柱のオイラ-座屈荷重の 20% の値 18 246 kg を  $\bar{P}$  値に選んだ。結果を、荷重振動数を表わす  $\omega/2\Omega$  ( $\Omega$  は非周期性荷重  $P_0$  が作用した状態の固有円振動数である) と励振パラメーター  $\mu = \bar{P}/2(P_* - P_0)$  で表わし、計算結果の一部を Table 1, 2 および 3 に示した。これらの表中、 $\omega/2\Omega$  の欄の括弧内の数値は、棒の力学より近似的に求められた両端単純支持柱の境界振動数方程式 (38), (39) および (40) より計算した結果である。

$$\text{動的} \text{主} \text{不安定} \text{領域} \cdots \frac{\omega}{2\Omega} = \sqrt{1 \pm \mu} \cdots (38)$$

$$\text{動的} \text{第} 2 \text{ 不安定} \text{領域} \cdots \frac{\omega}{2\Omega} = \frac{1}{2} \cdots (39)$$

Table 1 Boundary values of the regions of dynamic instability for a column of case I.

	Upper bound		Lower bound	
	$\mu$	$\omega/2\Omega$	$\mu$	$\omega/2\Omega$
Principal	0.725	1.334(1.313)	0.364	0.810(0.798)
	0.474	1.233(1.214)	0.296	0.852(0.839)
	0.340	1.175(1.158)	0.203	0.907(0.893)
	0.259	1.138(1.122)	0.171	0.924(0.911)
	0.117	1.064(1.057)	0.095	0.964(0.952)
Second	0.322	0.508(0.500)	0.539	0.329(0.323)
	0.142	0.507(0.500)	0.191	0.489(0.482)
	0.080	0.506(0.500)	0.102	0.501(0.495)
	0.042	0.504(0.500)	0.051	0.503(0.499)
	0.026	0.501(0.500)	0.026	0.500(0.500)

case	I	II	III
boundary condition			
$P_*$	3993 20	1954 70	93 333
$\omega_1$	4642.7	3203.4	2061.6

$P_* : \text{kg}, \quad \omega_1 : \text{rad/sec.}$

Fig. 7 Columns subjected to the non-periodic and periodic loads.

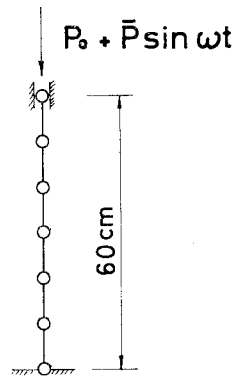


Fig. 8 Lumped mass system of column.

Table 2 Boundary values of the regions of dynamic instability for a column of case II.

	Upper bound		Lower bound	
	$\mu$	$\omega/2\Omega$	$\mu$	$\omega/2\Omega$
Principal	3.897	2.241(2.213)	0.443	0.756(0.746)
	0.682	1.312(1.297)	0.288	0.853(0.844)
	0.384	1.163(1.151)	0.197	0.906(0.896)
	0.159	1.085(1.076)	0.140	0.935(0.927)
	0.112	1.061(1.054)	0.091	0.959(0.953)
Second	0.310	0.506(0.500)	0.266	0.468(0.463)
	0.198	0.505(0.500)	0.184	0.487(0.483)
	0.100	0.503(0.500)	0.098	0.498(0.495)
	0.040	0.499(0.500)	0.040	0.499(0.499)
	0.024	0.496(0.500)	0.024	0.496(0.500)

Table 3 Boundary values of the regions of dynamic instability for a column of case III.

	Upper bound		Lower bound	
	$\mu$	$\omega/2\Omega$	$\mu$	$\omega/2\Omega$
Principal	0.869	1.363(1.367)	0.401	0.772(0.774)
	0.519	1.229(1.232)	0.317	0.824(0.826)
	0.356	1.160(1.164)	0.207	0.888(0.890)
	0.201	1.093(1.096)	0.143	0.923(0.926)
	0.132	1.061(1.046)	0.104	0.944(0.946)
Second	0.465	0.499(0.500)	0.650	0.196(0.197)
	0.262	0.499(0.500)	0.507	0.347(0.348)
	0.167	0.499(0.500)	0.351	0.433(0.434)
	0.116	0.499(0.500)	0.159	0.486(0.487)
	0.065	0.499(0.500)	0.084	0.495(0.496)

$$\frac{\omega}{2\Omega} = \frac{1}{2} \sqrt{1 - 2\mu^2} \quad (40)$$

Table 1, 2 および 3 の結果を図示すると、Fig. 9 の通りである。図中、実線は式 (38), (39) および (40) を示す。

これらの結果より明らかなように、境界振動数は柱の境界条件に関係なく、上記の近似式より算出した値に対

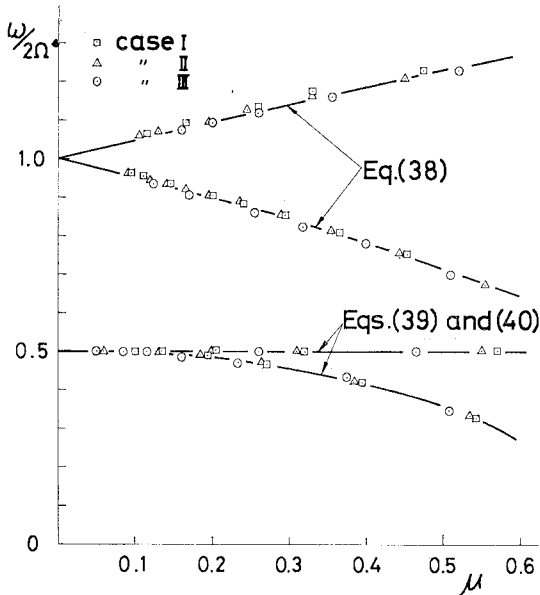


Fig. 9 Regions of dynamic instability of the columns.

して 1% 程度の差異を生ずるだけである。柱の動的不安定領域が一致することは、すでに Brown ら<sup>13)</sup>により確かめられており、柱の自由振動モードと静的座屈モードが類似し近接している場合は、両端単純支持柱の不安定領域とよく一致するが、これらのモードが類似しない場合は異なった領域になることが明らかにされている。

(2) アーチ

Fig. 10 に示す共通の軸線形をもち、Fig. 11 に示す断面をもつ 2 種類のアルミニウム製の放物線アーチの動的不安定領域を本研究の方法により求めた。その結果を次に示す。

解析にあたり、アーチを y 軸方向に 10 等分割し、各節点に質量を集中させた。さらに、Fig. 10 に示しているように、アーチの各節点に鉛直下向きに大きさ 1 の荷重が作用した状態を非周期性の基準荷重状態とし、同

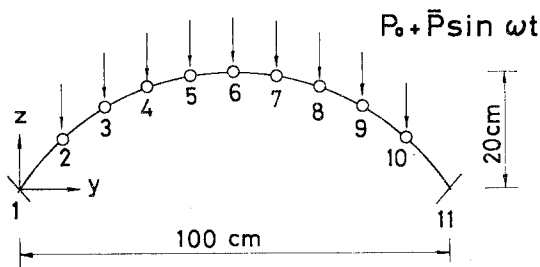


Fig. 10 Lumped mass system of arch.

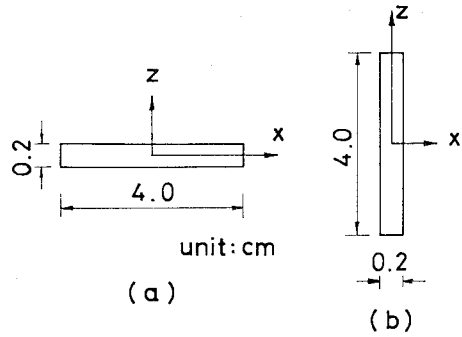


Fig. 11 Cross sections of arches.

じく、大きさが  $1 \times \sin \omega t$  の荷重が作用した状態を周期性の基準荷重状態とした。

a) 面内変形アーチ

Fig. 11 (a) の断面をもち、Fig. 12 に示す境界条件をもつ 3 種類のアーチを対象とした。図中、Case I は両端固定アーチ、Case II は一端固定、他端ヒンジャーチ、Case III は両端ヒンジャーチである。

アーチの静的座屈時の  $P_*$  値および 1 次の固有円振動数  $\omega_1$  は Fig. 12 の通りであり、自由振動モードおよ

case	I	II	III
boundary condition			
$\bar{P}$	1.0	1.0	0.2
$P_*$	2.0999	1.3406	0.9049
$\omega_1$	135.53	107.36	84.13

$\bar{P}$  and  $P_*$  : kg ,  $\omega_1$  : rad/sec.

Fig. 12 Arches subjected to the non-periodic and periodic loads.

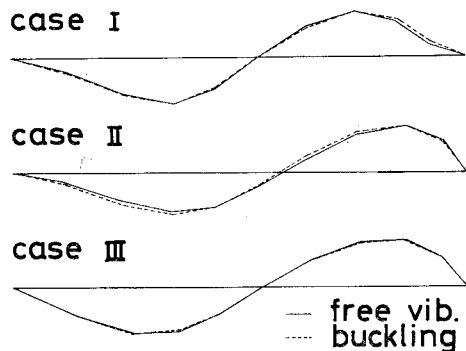


Fig. 13 Free vibration and static buckling modes of the arches deforming in this plane.

**Table 4** Boundary values of the regions of dynamic instability for case I of arches deforming in its plane.

	Upper bound		Lower bound	
	$\mu$	$\omega/2\Omega$	$\mu$	$\omega/2\Omega$
Principal	0.632	1.284(1.278)	0.484	0.727(0.719)
	0.526	1.240(1.235)	0.365	0.803(0.797)
	0.447	1.206(1.203)	0.305	0.839(0.834)
	0.337	1.157(1.156)	0.236	0.877(0.874)
	0.264	1.123(1.124)	0.172	0.909(0.909)
Second	0.573	0.503(0.500)	0.580	0.289(0.286)
	0.438	0.502(0.500)	0.457	0.385(0.381)
	0.345	0.502(0.500)	0.338	0.442(0.439)
	0.278	0.502(0.500)	0.245	0.470(0.469)
	0.191	0.499(0.500)	0.179	0.482(0.484)

**Table 5** Boundary values of the regions of dynamic instability for case II of arches deforming in its plane.

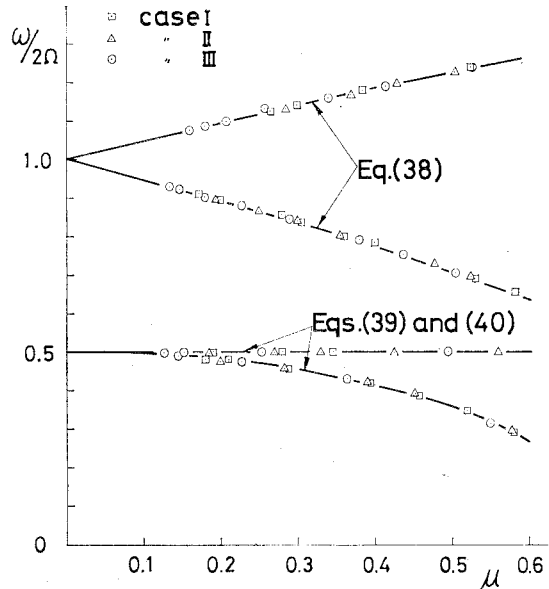
	Upper bound		Lower bound	
	$\mu$	$\omega/2\Omega$	$\mu$	$\omega/2\Omega$
Principal	0.745	1.323(1.321)	0.525	0.694(0.689)
	0.606	1.267(1.268)	0.478	0.729(0.723)
	0.505	1.226(1.227)	0.394	0.782(0.778)
	0.430	1.193(1.196)	0.299	0.839(0.837)
	0.324	1.145(1.150)	0.197	0.892(0.896)
Second	0.426	0.501(0.500)	0.631	0.228(0.225)
	0.335	0.499(0.500)	0.517	0.344(0.342)
	0.270	0.498(0.500)	0.453	0.387(0.384)
	0.222	0.497(0.500)	0.333	0.442(0.441)
	0.186	0.496(0.500)	0.204	0.476(0.479)

**Table 6** Boundary values of the regions of dynamic instability for case III of arches deforming in its plane.

	Upper bound		Lower bound	
	$\mu$	$\omega/2\Omega$	$\mu$	$\omega/2\Omega$
Principal	0.528	1.239(1.236)	0.332	0.819(0.817)
	0.415	1.191(1.190)	0.257	0.864(0.862)
	0.339	1.159(1.157)	0.202	0.894(0.893)
	0.240	1.115(1.114)	0.162	0.916(0.915)
	0.159	1.077(1.077)	0.133	0.932(0.931)
Second	0.496	0.500(0.500)	0.632	0.226(0.223)
	0.345	0.501(0.500)	0.456	0.384(0.382)
	0.253	0.500(0.500)	0.289	0.458(0.457)
	0.194	0.500(0.500)	0.227	0.474(0.473)
	0.124	0.500(0.500)	0.147	0.490(0.489)

び静的座屈モードは **Fig. 13** となる。

不安定領域の境界値の計算手順は柱の場合と同じで、与えられた  $\bar{P}$  作用時の、荷重振動数  $\omega$  の変化にともなう  $P_0$  値の臨界値を求め、その結果を  $\omega/2\Omega$  および  $\mu$  により表わした。本計算では、既述のように静的座屈時の  $P_0$  値より小さい  $\bar{P}$  値が実際的であることを考慮して **Fig. 12** に示す  $\bar{P}$  値を用いた。計算結果を **Table 4, 5** および **6** に示した。表中、 $\omega/2\Omega$  の欄の括弧内の数



**Fig. 14** Regions of dynamic stability in the arches deforming in its plane.

値は両端単純支持柱の境界振動数の近似式 (38), (39) および (40) より算出した結果である。上表の一部を図示すると、**Fig. 14** の通りである。

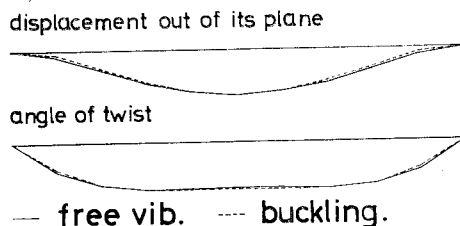
これらの結果より明らかなように、境界振動数は境界条件の種類に関係なく、既述の近似式 (38), (39) および (40) より算出した値に対して 1% 程度の差異を生ずるだけである。

**b) 面外変形アーチ**

**Fig. 11(b)** の断面をもつ 両端固定アーチを対象とした。本アーチの静的座屈時の  $P_*$  値および 1 次の固有円振動数  $\omega_1$  は次の通りであり、自由振動モードおよび静的座屈モードを **Fig. 15** に示す。

$$P_* = 0.8196 \text{ kg}, \omega_1 = 50.265 \text{ rad/sec}$$

不安定領域の境界値の計算手順は柱の場合と同じで、 $\bar{P} = 0.2 \text{ kg}$  のときの、荷重振動数  $\omega$  の変化にともなう  $P_0$  値の臨界値を算出し、その結果を  $\omega/2\Omega$  と  $\mu$  で表わした。**Table 7** に結果の一部を、近似式 (38), (39) および (40) より計算した  $\omega/2\Omega$  値とともに示す。これより、面外変形アーチの動的不安定領域も両端単純支持柱



**Fig. 15** Free vibration and static buckling modes of an arch deforming out of its plane.



**Table 7** Boundary values of the regions of dynamic instability for an arch deforming out of its plane.

	Upper bound		Lower bound	
	$\mu$	$\omega/2\Omega$	$\mu$	$\omega/2\Omega$
Principal	0.460	1.214(1.208)	0.469	0.735(0.729)
	0.279	1.133(1.131)	0.331	0.823(0.818)
	0.189	1.090(1.091)	0.240	0.876(0.872)
	0.138	1.063(1.067)	0.137	0.929(0.929)
	0.083	1.031(1.041)	0.071	0.955(0.964)
Second	1.992	0.505(0.500)	0.593	0.276(0.273)
	0.495	0.503(0.500)	0.364	0.432(0.429)
	0.218	0.501(0.500)	0.200	0.481(0.479)
	0.059	0.491(0.500)	0.121	0.498(0.493)
	0.075	0.493(0.500)	0.077	0.495(0.497)

のそれとよく一致することがわかる。

以上の結果から明らかなように、上記の面内および面外変形アーチの Fig. 10 に示す荷重に対する動的不安定領域の境界値を両端単純支持柱の境界振動数の近似式 (38), (39) および (40) より算出して差し支えないことがわかる。

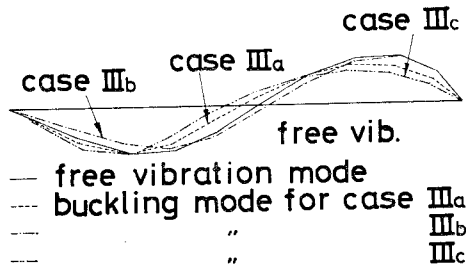
上記の諸アーチの動的不安定領域が両端単純支持柱のそれと一致することと、Fig. 13 および Fig. 15 に示されるように、これらのアーチの自由振動モードと静的座屈モードとが類似し接近していることから、Brown らの研究<sup>18)</sup>の結果をアーチについて確かめることができ

case	III <sub>a</sub>	III <sub>b</sub>	III <sub>c</sub>
loading condition	$P_0 + \bar{P} \sin \omega t$ 	$M_0 + \bar{M} \sin \omega t$ 	$M_0 + \bar{M} \sin \omega t$ 
$P_*$	6.5370	413.60	97.657

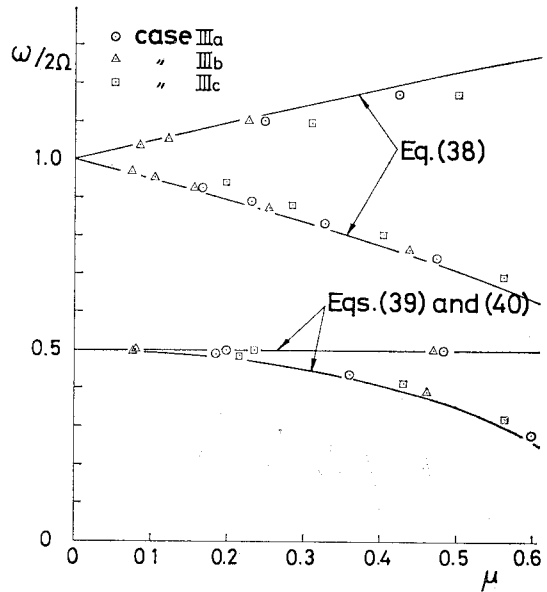
$P_*$ ... kg for case III<sub>a</sub>,

kgcm for case III<sub>b</sub> and III<sub>c</sub>.

**Fig. 16** Two hinged arches subjected to the non-periodic and periodic loads.



**Fig. 17** Free vibration and static buckling modes of the two hinged arches deforming in its plane.



**Fig. 18** Regions of dynamic instability of the two hinged arches deforming in its plane.

る。さらに、Fig. 16 に示す 2 ヒンジアーチについても確かめることができる。図中の Case III<sub>a</sub> は節点 3 に鉛直下向きの集中荷重が、Case III<sub>b</sub> は節点 4 に図示の方向に集中モーメントが、Case III<sub>c</sub> は両支点に図示の方向に等しい集中モーメントが作用するアーチである。すなわち、これらのアーチの自由振動モードと静的座屈モードは Fig. 17 に示されるように、類似ではあるが、接近していない。また、動的不安定領域も Fig. 18 に示されるように既述のアーチほど、両端単純支持柱のそれと一致していないことがわかる。

## 5. 結 び

線形化した有限変形法理論を用い、有限振幅時の運動方程式を導くことにより、周期性荷重を受ける一般的な骨組構造物の動的弾性安定性の一解析法を提示した。

本研究の方法を柱およびアーチに適用し、不安定領域の境界値を算定した。両端単純支持柱について、棒の力学を用い近似的に解析された結果と比較した。その結果、本研究の方法が骨組構造物の動的弾性安定性の解析に十分適用できることが明らかになった。また、種々の境界条件をもった柱およびアーチについて、不安定領域を  $\omega/2\Omega - \mu$  平面で表わした結果、Brown らの研究結果、すなわち、自由振動モードと静的座屈モードが類似し接近する場合は、不安定領域は同じになり、これらのモードが類似しない場合は、異なった領域になることを、一部確かめることができた。

本研究の適用例に示すように、非周期性の基準荷重状態と周期性の基準荷重状態が等しい場合、動的不安定領域を  $\omega/2$   $\Omega$ - $\mu$  平面で表わすことができるが、これらの荷重状態が異なる場合は、必ずしも  $\omega/2$   $\Omega$ - $\mu$  平面で表わし得ないことに注意すべきである。

本研究の適用例では柱とアーチについての結果を示したが、本研究の方法は任意の骨組構造物に適用することが可能である。したがって、係数励振不安定振動を起こす各種の骨組構造物の動的弾性安定性の解析が、近似的あるがなされ得る。本研究の数値計算は九州大学大型計算機センターの FACOM 236-60 および 75 を用いて行った。

謝 辞 本研究にあたり、山口大学工学部機械工学科の清水茂俊教授および鳥取大学工学部機械工学科の杉山吉彦助教授から貴重な助言を賜ったことを記し謝意を表します。

## 記 号

$A$ : 部材  $ij$  の断面積,  
 $d$ : 構造物の変位ベクトル,  
 $\bar{d}_0, \bar{d}$ : 非周期性および周期性荷重による構造物の変位ベクトル,  
 $\bar{d}_i$ : 節点  $i$  の変位ベクトル,  
 $\bar{d}_{0i}, \bar{d}_i$ : 非周期性および周期性荷重による節点  $i$  の変位ベクトル,  
 $\bar{d}'_i$ : 部材  $ij$  の  $i$  端における局部座標系での節点  $i$  の変位ベクトル,  
 $EL_y, EL_z$ : 部材  $ij$  の曲げ剛性,  
 $E$ : 単位マトリックス,  
 $f_i$ : 節点  $i$  の座標ベクトル,  
 $GJ$ : 部材  $ij$  のねじり剛性,  
 $i, j$ : 注目の節点とそれに隣接した節点番号,  
 $K_1$ : 構造物の剛性マトリックス,  
 $K_2, K_3$ : 非周期性荷重としての基準荷重  $\bar{P}$  および  $\bar{P}_0$  作用時の初期応力マトリックス,  
 $l$ : 部材  $ij$  の材長,  
 $m$ : 構造物の総節点数  
 $M_i$ : 節点  $i$  の集中質量,  
 $M_{xi}', M_{yi}', M_{zi}'$ : 部材  $ij$  の  $i$  端の局部座標軸まわりの材端モーメント,  
 $n$ : 拘束条件を考慮したときの節点の数,  
 $N_{ij}, \bar{N}_{ij}'$ : 全体座標系および局部座標系で表

わした部材  $ij$  の  $i$  端の材端力ベクトル,

$N_{0ij}', \bar{N}_{ij}'$ : 非周期性および周期性荷重作用下での、局部座標系で表わした部材  $ij$  の  $i$  端の材端力ベクトル,

$\bar{N}_{0ij}', \bar{N}_{ij}'$ : 非周期性の基準荷重  $\bar{P}_0$  および  $\bar{P}$  が作用した状態での、局部座標系で表わした部材  $ij$  の  $i$  端の材端力ベクトル,

$\bar{P}$ : 構造物に作用する周期性荷重ベクトルの振幅,

$\bar{P}_i, \bar{P}'_i$ : 節点  $i$  に作用する周期性実荷重および基準荷重ベクトルの振幅,

$P_0$ : 構造物に作用する非周期性荷重ベクトル,

$P_{0i}, \bar{P}'_{0i}$ : 節点  $i$  に作用する非周期性実荷重および基準荷重ベクトル,

$P_0, \bar{P}$ : 非周期性および周期性荷重作用状態での基準荷重に対する実荷重の比率,

$P_*$ : 静的座屈時の  $P_0$  値,

$Q_{xi}', Q_{yi}', Q_{zi}'$ : 部材  $ij$  の  $i$  端の局部座標軸方向の材端力,

$T_{ij}$ : 座標変換マトリックス,

$U_{0i}, V_{0i}, W_{0i}$ : 節点  $i$  に作用する  $x, y$  および  $z$  軸まわりの非周期性モーメント荷重,

$\bar{U}_i, \bar{V}_i, \bar{W}_i$ : 節点  $i$  に作用する  $x, y$  および  $z$  軸まわりの周期性モーメント荷重の振幅,

$u_i, v_i, w_i$ : 節点  $i$  の  $x, y$  および  $z$  軸方向の変位,

$u_{0i}, v_{0i}, w_{0i}$ : 非周期性荷重による、節点  $i$  の  $x, y$  および  $z$  軸方向の変位,

$\bar{u}_i, \bar{v}_i, \bar{w}_i$ : 周期性荷重による、節点  $i$  の  $x, y$  および  $z$  軸方向の変位,

$u_i', v_i', w_i'$ : 部材  $ij$  の  $i$  端の局部座標軸方向の変位,

$W$ : 構造物の質量マトリックス,

$W_i$ : 節点  $i$  の質量マトリックス,

$X_{0i}, Y_{0i}, Z_{0i}$ : 節点  $i$  に作用する  $x, y$  および  $z$  軸方向の非周期性荷重,

$\bar{X}_i, \bar{Y}_i, \bar{Z}_i$ : 節点  $i$  に作用する  $x, y$  および  $z$  軸方向の周期性荷重の振幅,

$x, y, z$ : 全体座標軸,

$x_i, y_i, z_i$ : 節点  $i$  の全体座標,

$x', y', z'$ : 局部座標軸,

$\alpha_{ij}$ : 部材  $ij$  の  $i$  端の断面主軸の回転角,

$\Delta \vec{d}_i, \Delta \vec{f}_i, \Delta \alpha_{ij}$ :  $\vec{d}_i, \vec{f}_i$  および  $\alpha_{ij}$  の増加量,

$\theta_{xi}, \theta_{yi}, \theta_{zi}$ : 節点  $i$  の  $x, y$  および  $z$  軸まわりの回転変位,

$\theta_{x0i}, \theta_{y0i}, \theta_{z0i}$ : 非周期性荷重による節点  $i$  の  $x, y$  および  $z$  軸まわりの回転変位,

$\bar{\theta}_{xi}, \bar{\theta}_{yi}, \bar{\theta}_{zi}$ : 周期性荷重による節点  $i$  の  $x, y$  および  $z$  軸まわりの回転変位,

$\theta_{xi'}, \theta_{yi'}, \theta_{zi}'$ : 部材  $ij$  の  $i$  端の局部座標軸まわりの回転変位,

$\lambda_{ij}, \mu_{ij}, \nu_{ij}$ : 部材  $ij$  の方向余弦,

$\mu$ : 励振パラメーター,

$\omega$ : 周期性荷重の円振動数,

$\Omega$ : 非周期性荷重を受けた構造物の第 1 固有円振動数,

参 考 文 献

- 1) 小沢久太郎: 抗圧材の強制振動, 土木学会誌, Vol. 19, No. 4, pp. 239~248, 1933-8.
- 2) Puwein M.G.: Die Verminderung der Knicklast eines Stabes durch Querschwingungen, Der Bauingenieur, Jg. 20, Heft 1/2, S. 14~18, 1939-1.
- 3) Stüssi F.: Aktuelle baustatische Probleme der Konstruktionspraxis, Schweizerische Bauzeitung, Bd. 106, Nr. 12, S. 132~136, 1935.
- 4) Kollbrunner C.F.: Versuche über die Knicksicherheit und die Grundschwingungszahl vollwandiger Bogen, Die Bautechnik, Jg. 14, Heft 12, 1936-5.
- 5) 西野吉次: 周期的に変化する力を軸方向に受ける棒の振動, 東京帝国大学航空研究所彙報, No. 176, pp. 93~

100, 1939-4.

- 6) Utida I. and Sezawa K.: Dynamical Stability of a Column under Periodic Longitudinal Forces, Report of the Aeronautical Research Institute, Tokyo Imperial Univ., No. 193, pp. 139~183, 1940-8.
- 7) Bolotin V.V.: The Dynamic Stability of Elastic Systems, Holden-Day Inc., San Francisco, 1964.  
日本語版 (近藤誠治・中田和夫訳, 弾性系の動的安定, コロナ社, 昭和 47 年 6 月).
- 8) 杉山吉彦・藤原直史・関谷 壮: アナログ計算機による柱の非保存的不安定問題の研究, 日本機械学会論文集, Vol. 37, No. 297, pp. 931~940, 1971-5.
- 9) 深沢泰晴: アーチの係数励振型振動, 土木学会第 20 回年次学術講演会概要集, pp. 30-1~2, 1965-5.
- 10) 築地恒夫: 周期荷重による円弧はりの面外不安定, 長崎大学工学部研究報告, No. 4, pp. 45~54, 1973-12.
- 11) Mettler E.: Stability and Vibration Problems of Mechanical System under Harmonic Excitation, Dynamic Stability of Structures, ed. Herrmann, G., Pergamon Press, Oxford and New York, 1967, pp. 169~188.
- 12) 杉山吉彦・岩壺卓三・石原国彦: 接線方向周期力を受ける柱の係数励振不安定領域, 日本機械学会論文集, Vol. 39, No. 322, pp. 1850~1853, 1973-6.
- 13) Brown J.E., Hutt J.M. and Salama A.E.: Finite Element Solution to Dynamic Stability of Bars, AIAA Journal, Vol. 6, No. 7, pp. 1423~1425, 1968-7.
- 14) 會田忠義・波木健一: 骨組構造物の非保存的弾性安定解析, 山口大学工学部研究報告, Vol. 26, No. 2, pp. 7~13, 1976.
- 15) Sugiyama Y.: On Nonsteady-State Motions in the Vicinity of the Boundaries of Principal Region of Dynamic Instability, Reports of the Faculty of Engineering Tottori Univ., Vol. 2, No. 2, pp. 28~37, 1972-3.

(1975.6.13・受付)