【討　議】

後藤茂夫
羽根悟朗 共著
田中達朗

“接線剛性法による骨組構造物の大変形解析”への討議

（土木学会論文報告集第 238 号・1975 年 6 月掲載）

▶討議者（*Discussion*）————西　野　文　雄（東京大学）・阿　井　正　博（東京大学）・倉　方　慶　夫（新日本技研）

By Fumio Nishno, Masahiro Ai and Yoshio Kurakata

本論文のみならず既応の論文[1),2)] を含めて著者の平面骨組構造物の幾何学的非線形性に関する研究報告を興味深く読ませていただいた．本論文の主旨は平面骨組の問題であると思われるが，そのなかで二軸曲げ，ねじりおよび軸方向力を受ける部材の接線部材剛性方程式にもふれられている．平面骨組とまったく同じ手法で立体骨組を解析できると考えてこの剛性方程式を導かれたのではないかと思われる．剛性方程式が求まれば立体骨組が解析できるのは当然であるが，著者が論文中で誘導している式を有限変位を考えた剛性方程式とするには多くの疑問が残る．計算機を用いて構造解析を行う場合，剛性方程式が最も基本となり，その誘導に注意を払うのは当然である．わが国の土木学会の論文集のみをとり上げても，筆者[17)]を含め，坂井[18)]，築地[19)]，結城・前田[20)]らが二軸曲げ，ねじりおよび軸力を受ける部材について研究報告をおこなっている理由もここにある．

有限変位の問題ではどの程度の大きさの変位を扱うかが重要であり，これによって取り扱う非線形次数が決まる[17),21)~23)]．さらに理論の出発点となる仮定も重要であり，理論的に，あるいは実験によって実用上問題がないとされるものでなければならないのは当然であろう．著者は仕事をする断面力として，$M\eta$, M_ζ, M_s, $M\omega$, R の 5 つをあげ，これらと変位との関係を式 (27)～(29) で与えている．文献を引用されていないことから，著者が式 (27)～(29) を用いられた根拠は明確でないが，すでに述べた文献 17)～20) での議論の一つは有限変位問題での仕事をする断面力はどのような力であるかということであり，またこの断面力と変位の関係でもある．すでに発表された論文でもあり，著者の関心をいただきたかった点である．

本論文で求められている断面力と変位の関係式 (27)～(29) およびつり合い式 (31)～(34) に相当する式を筆者の文献 17) から写し，著者の記号を用いて表わすと

$$M_\eta=-EI_\eta\left(\frac{d^1\zeta}{d\xi^2}-\tau\underline{\frac{d^2\eta}{d\xi^2}}\right)+\underline{\frac{1}{2}EIp\eta\left(\frac{d\tau}{d\xi}\right)^2}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\text{(84 a)}$$

$$M_\zeta=-EI_\zeta\left(\frac{d^2\eta}{d\xi^2}+\underline{\tau\frac{d^2\zeta}{d\xi^2}}\right)+\underline{\frac{1}{2}EI_{p\zeta}\left(\frac{d\tau}{d\xi}\right)^2}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\text{(84 b)}$$

$$T_s=GJ\frac{d\tau}{d\xi}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\text{(85 a)}$$

$$M_\omega=-EI_\omega\frac{d^2\tau}{d\xi^2}+\underline{\frac{1}{2}EI_{p\omega}\left(\frac{d\tau}{d\xi}\right)^2}\cdots\cdots\text{(85 b)}$$

$$\frac{d^2M_\zeta}{d\xi^2}-\underline{\frac{d^2M_\eta\tau}{d\xi^2}}+\frac{d}{d\xi}\left\{N\left(\frac{d\zeta}{d\xi}+\underline{\eta_s\frac{d\tau}{d\xi}}\right)\right\}=0$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\text{(86)}$$

$$\frac{d^2M_\eta}{d\xi^2}+\underline{\frac{d^2M_\zeta\tau}{d\xi^2}}+\frac{d}{d\xi}\left\{N\left(\frac{d\eta}{d\xi}-\underline{\zeta_s\frac{d\tau}{d\xi}}\right)\right\}=0$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\text{(87)}$$

$$\frac{d^2M_\omega}{d\xi^2}-\underline{M_\eta\frac{d^2\zeta}{d\xi^2}}+\underline{M_\zeta\frac{d^2\eta}{d\xi^2}}+\frac{d}{d\xi}$$
$$\times\left\{N\left(\underline{\eta_s\frac{d\zeta}{d\zeta}}-\underline{\zeta_s\frac{d\eta}{d\xi}}+K\frac{d\tau}{d\xi}\right)\right\}$$
$$+\frac{d\tau_s}{d\xi}=0\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\text{(88)}$$

上式中下線を付した項を無視すると著者の式と一致する．下に点線を付した N は著者の式ではかつこの外に出されている．ラグランジュの手法を用い，応力ベクトルの変位後の基底ベクトル方向の成分を σ で表わす一般的によく用いられる応力の定義を用いて

$$N=\int_A\tau da\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\text{(89)}$$

で軸方向力 N を定義したとき[17),21)]，著者の扱っているように部材中に分布荷重が作用しない場合でも N は定数とはならない．したがって，この N の扱いにもわずかではあるが差が見られる．式 (84)～(88) はオイラー・ベルヌイの仮定のもとで求めた有限変位理論としては最低次数の基本式であり，この式中の一部がさらに無視されている著者の基本式は微小項の扱いに統一性が欠けているのではないかと考えられる．

次に 表―1 で示されている著者の有限変位理論の分類について多少の疑問を感じるので，疑問点を指摘し，問題提起としたい．筆者は著者の手法とは異なっている

が，まったく同じ問題と考えてよい平面骨組部材の有限変位問題を取り扱った[21]．一般に幾何学的非線形性を対象とした構造解析の理論はひずみ，変位の大小関係に応じて分類してよいと考えられる．筆者はこの観点から，1）ひずみが単位の値に比べて小さく無視できる場合（変位には制約なし），2）ひずみが微小のうえに，変位も比較的小さく，幾何学的非線形問題としては最低次数の問題，3）ひずみ，変位ともに小さく，支配方程式ですべて線形となる場合の3つに有限変位理論を分離した[21]．あわせて同じ報告のなかで，いわゆるはり-柱の問題とよばれている骨組材に対する理論[13]は微小項の扱いに統一性がなく，有限変位理論としては不満足なものであるが，主として曲げが問題となる場合には比較的精度の良い数値解が得られることを指摘した．このはり-柱の理論は前記の分類の 2）と 3）の間に位置するものである．

はり-柱の理論をもとに著者の有限変位理論の分類に考察を加えたい．古くからはり-柱の問題とよばれている理論では曲げに関する部分のみが記述されれているのが普通であるが[13]，筆者は次の支配方程式（境界条件は省略する）で記述される問題をはり-柱の理論と定義する[21]．すなわち，つり合い式は

$$M_\zeta''+N\zeta''=q_\zeta \quad\cdots\cdots(90)$$

$$-N'=q_\zeta \quad\cdots\cdots(91)$$

ここに $(\ )'=d(\ )/d\xi$, q_ξ, q_ζ, q_ξ は単位部材軸長当りに作用する外力の ζ, ξ 方向成分である．一般化された力とひずみとの関係は

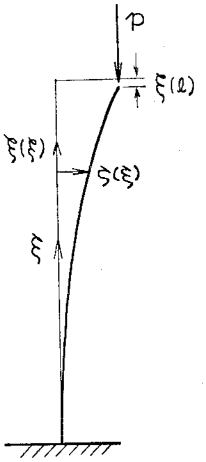
$$M_\zeta=EI_\eta\phi_\zeta \quad\cdots\cdots(92)$$

$$N=EA\varepsilon_\xi \quad\cdots\cdots(93)$$

一般化されたひずみ ϕ_ζ および ε_ξ と変化との関係は

$$\phi_\zeta=-\zeta'' \quad\cdots\cdots(94)$$

$$\varepsilon_\xi=\xi'+\frac{1}{2}(\zeta')^2 \quad\cdots\cdots(95)$$



図—14　柱の座屈

ここに，ξ は変位の部材軸方向成分を表わす．はり-柱の理論を式 (90)〜(95) で表わした一つの理由，なかでも式 (95) に右辺第2項で表わされる非線形項を加えた理由を柱のオイラー座屈を例に説明したい．図—14 に示す柱のオイラー座屈をポテンシャル・エネルギーの定留原理を用いて解くとき，ポテンシャル・エネルギー π は

$$\pi=\int_0^l \frac{M_\zeta^2}{2EI_\eta}d\xi-P(\xi)_{\xi=l} \quad\cdots\cdots(96)$$

と表わされ，座屈にともなって生じる自由端の部材軸方向への変位は

$$(\xi)_{\xi=l}=-\frac{1}{2}\int_0^l(\zeta')^2 d\xi \quad\cdots\cdots(97)$$

と表わされている[13]．座屈時の荷重増分はないものと考えてよく，このとき式 (93) からひずみ増分は0となる．式 (97) は座屈時の軸方向ひずみの増分が0の条件を式 (95) に用いて得られるものである．したがって式 (95) の右辺第2項を無視して線形化するとオイラー座屈の問題をエネルギー原理で扱えなくなり，オイラー座屈を扱う程度の有限変位理論としても不満足なものとなる．ポテンシャル・エネルギーの停留原理からつり合い条件を導くことがよくおこなわれている．この手法で式 (90) のつり合い式を導くとき式 (95) のひずみ-変位関係が必要であり，右辺第2項を無視すると式 (90) の左辺第2項の NS'' が求まらず，微小変位理論でのつり合い式が求まる．このことからも式 (90) のつり合い式を用いるとき，ひずみ-変位関係としては式 (95) を用いなければならないことが理解されよう．

式 (90)〜(95) で表わされる問題では，つり合い式が非線形であるのみならず，ひずみと変位の関係も非線形になっている．したがって著者の表—1の分類での大変形理論に分類されるものであろう．著者の有限変形理論ではつり合い式以外は線形である．したがって式 (95) の右辺第2項を無視し

$$\varepsilon_\xi=\xi' \quad\cdots\cdots(96)$$

とし，この式 (96) と式 (90)〜(94) で表わされる問題に相当する問題を有限変形理論と分類されていると考えられる．著者はこの理論を幾何学的非線形問題の一つとして分類し，表—1，2 のように他と区別している．しかしながら，分類して区別するべき理論的な根拠が明確でないという意味で，この分類の意義に疑問を感じる．

なお著者は変形と変位を区別しないで使っておられるが，この2つを力学的に異なった概念に区別して使うのが好ましいのではないかと考え[21]，この討議のなかでは差し支えのない範囲で著者の有限変形，大変形に相当する語に変位を用いた．

参考文献

17) 西野文雄・倉方慶夫・長谷川彰夫・奥村敏恵：軸力と曲げおよびねじりを受ける薄肉断面部材，土木学会論文報告集，No. 225, pp. 1〜15, 1975-5.

18) 坂井藤一：薄肉断面部材の弾性安定基礎方程式の統一的誘導，土木学会論文報告集，No. 238, pp. 1〜15, 1975-1.

19) Tsuneo TSUIJI : Buckling of columns under axial loads and torsions, Proc. of JSCE, No. 238, pp. 77-84, 1974-3.

20) 結城皓昿・前田幸雄：薄肉断面構造の三次元挙動の解析，土木学会論文報告集，No. 239, pp. 67〜78, 1975-7.

21) 西野文雄・倉方慶夫・後藤芳顕：一軸曲げと軸力を受ける棒の有限変位理論，土木学会論文報告集，No. 237, pp. 11～26, 1975-5.
22) 西野文雄・倉方慶夫・長谷川彰夫・奥村敏恵：前記文献18）への討議，土木学会論文報告集，No. 238, pp. 111～113, 1975-6.
23) 西野文雄・倉方慶夫・長谷川彰夫：前記文献20）への討議，土木学会論文報告集，No. 239, pp. 115～117, 1975-7.

▶回答者（*Closure*）——後藤茂夫・羽根悟朗・田中達朗（日本構造技研）
By Shigeo Goto, Goro Hane and Tatsuro Tanaka

著者の論文に対し，有意義なご討議をいただき，またかかる問題に対する著者の意見を述べる機会を与えられたことに謝意を表する．

討議の第1の論点は，本文の接線部材剛性方程式(56)は，微小項の取り扱いに統一性を欠き，平面の場合と同じようには立体骨組構造物の大変形解析はできないのではないかということにあると思われる．

著者は，本論文において，骨組構造物の大変形挙動の解析を目的とし，プログラム・アルゴリズムの一過程として接線部材剛性方程式（56），（57）を用いている．

この部材剛性方程式は，部材断面力，材端力などから独立な部材力の組み合わせを設定し，これと対応する剛体変位成分を取り除いた部材変位との関係を示す式であり，部材変形（以下，部材の剛体変位成分を除いたものとする）は，構造系における変形前後の部材の移動を表示するものではない．

また，骨組構造物としての大変形挙動の非線形性は，各構成部材の構造系内に占める変形前後の位置と形状の差が力のつり合い式において無視し得ないことに起因し，各部材の位置の差すなわち剛体変位成分がその主要因となっていることは周知である．

一方，形状の差すなわち部材変形については，実際の構造物を対象とした場合，その架設途上においてしばしば見られる極端な大変形挙動時においてすら微小変形とみなし得る場合がほとんどである．

かりに，部材長が大で，部材変形を微小とみなし得ない場合でも，中間格点を設け部材を分割することにより，分割部材としての部材変形を微小とすることが可能である．いいかえれば，格点数をふやし，部材長を短くすることにより，部材力と部材変形との関係を線形に近づけることができる．

事実，骨組構造物を経済的に設計しようとする場合，長大部材での断面変化は不可避であり，たとえば吊橋の主塔など，必然的に断面変化点を格点とした，多部材により構成される骨組構造物としての解析が要求されることとなる．

また，空間部材としての弾性針金の大変形である立体エラスティカの問題にしても，単一材として（両端の境界条件のみで）解析するかぎり，討議者の式(84)～(88)を適用しても正解は得られず，任意の大変形に対する解の精度も保証されない．

しかしながら，部材の中間に適当な数の格点を設け，多部材より構成される立体骨組構造と考えれば，たとえ部材剛性方程式に微小変形理論を用いたとしても，各部材変形と格点変位の適合条件における幾何学的非線形性が，反復アルゴリズム中に正しく考慮されていれば，工学的に十分な精度で解を実際の変形に近づけることが可能となる．

このことは，同一主軸面内で一様な曲げモーメントを受ける長い弾性ばりが，実際は円弧状に変形するにもかかわらず，曲率$=d^2\eta/d\xi^2$を用いるはりの曲げ理論では，分割解析をしないかぎり解が放物線状となることからも首肯されよう．

要するに，骨組構造物の大変形挙動という観点からは，各構成部材の部材力と部材変形間の非線形性は，構成部材の設定の仕方により左右されるものであり，これに対して部材変形と格点変位の適合条件における幾何学的非線形性は，はるかに本質的，支配的であると考えられる．

著者は，構造物の設計においては構造解析は手段であって目的ではないのと同様に，骨組構造解析における構成部材の部材剛性マトリックスの設定は，重要な一過程ではあるが，これも手段の一部分にすぎないと考えている．また，単一部材の大変形でなく，骨組構造物の大変形解析を目的とする場合には，討議者の式（84）～(88)も事実上，下線の部分を省略し得るものと考えられる．

当然，本文の式（29）の2乗項の影響も小さくなるのであるが，これは最小限，軸方向力との達成を考えるものとすれば必要であり，また，われわれの取り扱う構造物では，軸方向力との達成の影響が最も大きく（これは部材内の変位が大きいということよりもEIに対して軸方向力が大きいということに起因する），解としては解析解が得られ，部材剛性マトリックスは，それほど煩雑とはならない．

そして，この部材剛性マトリックスは，実際に大変形挙動を示す骨組構造物の各構成部材の部材変形に対しても十分に接線部材剛性マトリックスとみなし得るそのものであり，式（56）もまた前記までの理由により立体骨

組構造解析においても，精度上の障害はまったく考えられないものである．

著者は，構造解析理論の評価は，目的とする解が必要な精度でいかに効率よく計算され得るか否かで判断されるべきものであり，また最終成果の質を低下させずに，理論の簡明な定式化をはかり，合理的なアルゴリズムによる経済性の高い構造解析プログラムを開発することがわれわれ実務にたずさわる技術者としての矜持であろうと考えている．

もちろん，単一部材の挙動に関する討議者らおよび他諸氏の既応の論文に示された諸理論には，深甚なる敬意と関心を払うとともに，高い学術的な評価を認めることにやぶさかではない．

ただ，著者の骨組構造物の大変形解析理論では，そのプログラム化に際し，たとえ完璧な厳密理論に立脚する部材剛性方程式を用いたとしても，いたずらにプログラム・アルゴリズムの煩雑化を助長するのみで，演算コストおよび開発コストの逓減と解の精度向上には，大きな期待は抱けないのではないかと考えているものである．

なお，そりの影響を考えた立体骨組構造物の大変形解析においては，部材剛性マトリックスの設定以上に大きな障壁が存在する．

実際の骨組構造物において，多部材が集結する格点では，各部材のせん断中心軸はもとより，重心軸でさえ，一点に交わっていることはまれであり，格点構造の力学モデル化の問題と絡んで，格点における適合条件と断面力のつり合い条件の導入など，未解決な問題に直面することになる．

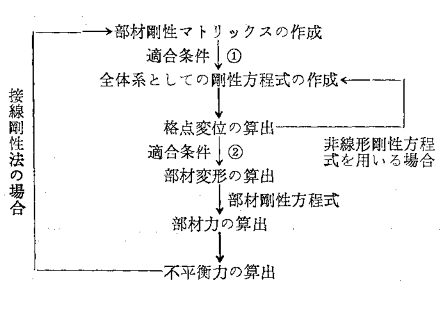
次に理論の分類についてお答えしたい．

本文においても述べているように，著者は，骨組構造物の個々の構成部材についての解析理論すなわち部材剛性方程式の理論区分について言及しているのではない．

あくまでも全体系としての骨組構造物の解析理論について論じている．

そして，著者の理論の区分は，前述の理由により，利用する部材剛性方程式の理論いかんによらず，部材変形と格点変位との間の適合条件における幾何学的非線形性の処理法によって分類されるものである．

いま，一般に用いられている骨組構造解析の手順を簡単に示せば次のようになる．



微小変形理論では，部材変形と格点変位との適合条件は，①，②とも線形としたものであり，著者の区分による有限変形理論は，②は線形であるが①において，変換マトリックスに格点変位の1次の項が考慮されており，全体系としての剛性マトリックスに先行部材力を含めた合部材力のパラメーターによる二次剛性マトリックスが付加されることになる．

この場合，部材力パラメーターを一定とみなすことにより線形化が可能となるが，部材力増分に関する修正反復法を用いてもその収束性はきわめて良好である．

また，大変形理論では，②の適合条件はその幾何学的非線形性は十分に厳密なものでなければならず，①は接線剛性法を用いる場合には有限変形理論と同様でよいが非線形剛性方程式を用いる場合には②と同様な厳密性が要求される．

以上の区分により，得られた解としての部材力は，微小変形理論の場合，変形前の部材方向に作用しているとして格点の外力とつり合っており，有限変形理論の場合は，合部材力として，解としての格点変位の一次の項までを考えて修正された変形後の部材方向に作用させたとき，格点の合外力（先行外力を加えたもの）とつり合っている．

さらに大変形理論では，合部材力は，解としての格点変位を忠実に考えた変形後の部材方向に作用しているとした場合に合外力とつり合っていることになる．

このように，著者の理論区分は，各骨組構造解析理論の解の感覚的な精度による分類ともうまく合致しており，また，理論的根拠もきわめて明確である．

たしかに，単一の曲げ軸力部材のみに着目するかぎりにおいては，討議者のご意見は妥当であり著者にも異論はない．

しかしながら，著者の目的としている骨組構造物の解析にまで適用しようとすれば，大きな矛盾を生じる．

たとえば，トラス構造など構成部材に軸方向力のみが作用する構造系では，部材力（軸方向力）と部材変形（部材の伸び）との関係は，材料非線形を考えないかぎり完全な線形となるので，討議者の分類によれば，この種の構造物に対する有限変形理論というものは存在し得なくなってしまう．

また，いかに極端な大変形挙動を呈する構造物であっても，部材の応力・ひずみ関係が弾性関係を保っているかぎり，その構成部材を適当に細分化して考えれば，個々の部材力と部材変形との関係を線形とみなすことが可能となり，構成部材への適用理論の差による解への影響は生じ得ない．

したがって，構成部材に適用する理論によって骨組構

造物の解析理論を分類することは不可能となり，構造変形（格点変位）と部材変形間の適合条件の幾何学的非線形性の処理いかんによるとする著者の理論区分の方が至当ではないかと考えられる．

最後に，骨組構造解析における，変形，変位などの用語について著者の考えを述べる．

骨組構造物に作用する格点荷重や支点反力などを外力と総称し，各外力と対応して仕事をする各格点の変位を総称して構造変形あるいは構造物の変形とよぶ．

すなわち，構造物に外力が作用して変形を生じる，など一般的抽象的な表現に用いる．

また，骨組構造物は，各部材によって構成され，各部材の端部は格点に連結されている．

部材には各断面や材端力が作用しており，これらを部材力とよぶが，通常の部材内のすべての断面力を表わし得る必要最小な個数の組み合わせを選ぶ．

この独立な部材力の組み合わせに対応する，剛体変位成分を除いた部材の変形を部材変形とよぶ．

たとえば，曲げ軸力部材の場合，両端の曲げモーメントと両端を結ぶ弦の方向の材端力を部材力とすれば，弦に対する両端における部材の接線角および弦長の伸縮量が部材変形となる．

要するに，変形とか部材力などは具体的なものを指すのでなく，より一般的抽象的なものとして用いている．