土木学会論文報告集
第 249 号・1976 年 5 月

力学における変分原理の一般化について

ON A UNIFIED THEORY OF VARIATIONAL PRINCIPLES IN MECHANICS

坂　井　藤　一*
By Fujikazu SAKAI

1. はじめに**

数理物理学の発展の歴史において変分原理は計り知れないほど大きな役割を果たしてきた．その役割の第一は基礎理論それ自身（定式化や解の安定性などの議論を含めて）に関するものであり，第二は近似解を直接的に求めることに関するものである．特に後者については，今世紀初頭の Rayleigh-Ritz 法以来次第にその比重が増大しつつあり，近年の有限要素法の展開においては電子計算機の利用と関連してこの点が強く認識されるに至っている．

変分原理は特に力学の分野において典型的な姿を示しているが，他のいろいろな分野の問題にも現われる．そこにおいて共通する顕著な特質はその相反（dual, reciprocal, complementary）性であり，これを利用することにより多くの有意義な成果が得られた．変分原理に相反原理が初めて登場したのは，Laplace 方程式における Dirichlet 原理に対する Kelvin（=Thomson）原理であるといわれており，固有値問題においては Ritz 原理に対する Temple 原理が良く知られている[1),2)]．

この相反関係を一般的に述べるには，Friedrichs 変換（接触変換）によるのが普通であるが，正準変換によることもできる[3)]．たとえば，鷲津[4)]は前者に基づいて弾性論における変分原理を展開しているし，また Noble[5)]は後者に基づいて広範囲な問題を正準形式の変分原理によって組織的に展開し得ることを述べている．この考え方は最近における Arthurs[1)], Robinson[6)] そして Noble と Sewell[7)] の仕事においても踏襲されて一つの流れとなっている[8)]．一方，線形境界値問題に限れば Prager・Synge[9)] による hypercircle 法や Oden[10)] による共役射影アプローチも提示されている．Oden は弾性論における Hellinger-Reissner 原理は正準形式原理であるという Noble の考え方を紹介し，それと同一の結果が共役射影法によっても得られることを示している．

ここではこのような点を従来と異なる観点から論ずることにする．それは最小二乗法あるいはより広い意味で停留二乗原理というべきものに基礎を置く考え方である．これは線形境界値問題の場合には hypercircle 法と密接な関係を有するが，ある種の非線形境界値問題やある種の非線形性を含む初期値問題にも適用され得ることによって，従来の hypercircle 法より一般性があるように思われる．また上述の諸アプローチは主として境界値問題を対象にしており，初期値問題の取り扱いには若干難点がある．したがって，Hamilton 原理を直接利用して時間領域の積分を行うことができないし，また形式も完全に相補とはいい難い面がある．本論の考え方はその点きわめて簡潔に無理のない相補な形式を示すことができる．

本アプローチは境界値・初期値問題の両者を同一の立場から統一的に眺めるうえで一つの参考となろう．そのとき両者の相異も比較的顕著に見られる．近年有限要素法の発展に伴い重みつき残差法が慣用変分原理とともに多用されるに至っている．最小二乗法は前者の一つとして位置づけられるが，本論の取り扱いはこの間の関係を理解するうえでも有用であろう．

2. 線形境界値問題における変分原理の一般化

(1) 微小変位弾性論におけるエネルギー原理

微小変位弾性論は以下のように記述される[14)]．

平衡方程式

$$\sigma_{ij,j}+\bar{F}_i=0 \text{ in } V \cdots\cdots(1)$$

力学的境界条件

* 正会員　工博　川崎重工業（株）　鉄構事業部

** 本論の概要は，すでに発表した文献 11), 12), 13) に述べた．ここではそれを詳細に論じたものである．

$$T_i \equiv n_j \sigma_{ij} = \overline{T}_i \text{ on } S_\sigma \cdots\cdots(2)$$

ひずみ-変位関係式

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \text{ in } V \cdots\cdots(3)$$

幾何学的境界条件

$$u_i = \bar{u}_i \text{ on } S_u \cdots\cdots(4)$$

Hooke 則（応力-ひずみ関係式）

$$\sigma_{ij} = a_{ijkl}\varepsilon_{kl} \text{ または } \boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{A\varepsilon} \text{ in } V \cdots\cdots(5)$$

ここで，σ_{ij} および ε_{ij} はそれぞれ応力およびひずみのテンソルを表わし，u_i は変位 $\boldsymbol{u}$ の成分，$\overline{F}_i$ は物体力 $\overline{\boldsymbol{F}}$ の成分，$\overline{T}_i$ および $\bar{u}_i$ はそれぞれ境界上で指定された境界力 $\overline{\boldsymbol{T}}$ および変位 $\bar{\boldsymbol{u}}$ の成分である．また，V は対象とする全領域，S_σ および S_u はそれぞれ境界力および変位の指定された境界を表わし，n_j は S_σ に対する外法線ベクトル $\boldsymbol{n}$ と座標軸 x_j のなす角度の方向余弦である．ただし，$i, j, k, l=1, 2, 3$ であり，総和規約を用いている．さらに，$\boldsymbol{\sigma}$ および $\boldsymbol{\varepsilon}$ はそれぞれ σ_{ij} および ε_{ij} を成分とするベクトル，$\boldsymbol{A}$ は a_{ijkl} を成分とするマトリックスである．$\boldsymbol{A}$ は正値対称であるから $\boldsymbol{A}^{1/2}$ および $\boldsymbol{B} \equiv \boldsymbol{A}^{-1}$ が存在する．

式（5）を書き換えれば次の式となる．

$$\boldsymbol{A}^{1/2}\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{B}^{1/2}\boldsymbol{\sigma} \text{ in } V \cdots\cdots(6)$$

いま，式（1）および（2）を満足する（力学的に許容な）応力・境界力を $\sigma_{ij}^{**}\cdot T_i^{**}$ などと書き，式（3）および（4）を満足する（幾何学的に許容な）変位・ひずみを $u_i^{*}\cdot\varepsilon_{ij}^{*}$ などと書くことにする．式（6）より次のような汎関数 J を定義する．

$$J(\boldsymbol{\varepsilon}^*(\boldsymbol{u}^*), \boldsymbol{\sigma}^{**}) \equiv \frac{1}{2}\int_V (\boldsymbol{A}^{1/2}\boldsymbol{\varepsilon}^* - \boldsymbol{B}^{1/2}\boldsymbol{\sigma}^{**})^2 dV \cdots\cdots(7)$$

ここで divergence 定理と付帯条件（1）～（4）を考慮すると次の式が成立する．

$$\int_V \boldsymbol{\sigma}^{**t}\boldsymbol{\varepsilon}^* dV = \int_V \overline{\boldsymbol{F}}^t \boldsymbol{u}^* dV + \int_{S_\sigma} \overline{\boldsymbol{T}}^t \boldsymbol{u}^* dS + \int_{S_u} \boldsymbol{T}^{**t}\bar{\boldsymbol{u}} dS \cdots\cdots(8)$$

これを一般仮想仕事の原理と呼ぶ注1)．この式を式（7）に代入すれば次の式を得る．

$$J(\boldsymbol{u}^*, \boldsymbol{\sigma}^{**}) = \pi(\boldsymbol{u}^*) - \pi_c(\boldsymbol{\sigma}^{**}) \cdots\cdots(9)$$

ただし，π および π_c はそれぞれ次の式で定義される全ポテンシャルエネルギーおよび全コンプリメンタリエネルギーである．

注1) これは Prager[15] や Hodge[16] の立場に近い．これに対して鷲津の表現は次の変分形式をそれぞれ仮想仕事の原理および補仮想仕事の原理とする．

$$\int_V \boldsymbol{\sigma}^{**t}\delta\boldsymbol{\varepsilon}^* dV = \int_V \overline{\boldsymbol{F}}^t \delta\boldsymbol{u}^* dV + \int_{S_\sigma} \overline{\boldsymbol{T}}^t \delta\boldsymbol{u}^* dS$$

$$\int_V \delta\boldsymbol{\sigma}^{**t}\boldsymbol{\varepsilon}^* dV = \int_{S_u} \delta\boldsymbol{T}^{**t}\bar{\boldsymbol{u}} dS$$

$$\pi(\boldsymbol{u}^*) \equiv \int_V \left(\frac{1}{2}\boldsymbol{\varepsilon}^{*t}\boldsymbol{A}\boldsymbol{\varepsilon}^* - \overline{\boldsymbol{F}}^t\boldsymbol{u}^*\right) dV - \int_{S_\sigma} \overline{\boldsymbol{T}}^t \boldsymbol{u}^* dS \cdots\cdots(10)$$

$$\pi_c(\boldsymbol{\sigma}^{**}) \equiv -\int_V \left(\frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}^{**t}\boldsymbol{B}\boldsymbol{\sigma}^{**}\right) dV + \int_{S_u} \boldsymbol{T}^{**t}\bar{\boldsymbol{u}} dS \cdots\cdots(11)$$

これより $\boldsymbol{u}^*$ および $\boldsymbol{\sigma}^{**}$ は独立であるから次の変分原理が成立する．

$$\delta J(\boldsymbol{u}^*, \boldsymbol{\sigma}^{**}) = \delta\pi(\boldsymbol{u}^*) = \delta\pi_c(\boldsymbol{\sigma}^{**}) = 0 \cdots\cdots(12)$$

この場合，式（6）に対する最小二乗法は慣用の最小ポテンシャルエネルギー原理や最大コンプリメンタリーエネルギー原理と一致することが分かる．

式（7）より明らかに，$J \geq 0$ であり，この場合正解を $\boldsymbol{u}_0$, $\boldsymbol{\sigma}_0$ とすると次の周知の上下界公式が成立する．

$$\pi(\boldsymbol{u}^*) \geq \pi(\boldsymbol{u}_0) = \pi_c(\boldsymbol{\sigma}_0) \geq \pi_c(\boldsymbol{\sigma}^{**}) \cdots\cdots(12)$$

ここで，任意の $\boldsymbol{u}^*$, $\boldsymbol{\sigma}^{**}$ に対して次の関係を満足する実数 γ_1, γ_2 が存在する．

$$\gamma_1^2 \frac{1}{2}\int_V \boldsymbol{\varepsilon}^{*t}\boldsymbol{A}\boldsymbol{\varepsilon}^* dV \geq \|\boldsymbol{u}^*\|^2 \equiv \int_V \boldsymbol{u}^{*t}\boldsymbol{u}^* dV \cdots\cdots(13)$$

$$\gamma_2^2 \frac{1}{2}\int_V \boldsymbol{\sigma}^{**t}\boldsymbol{B}\boldsymbol{\sigma}^{**} dV \geq \|\boldsymbol{\sigma}^{**}\|^2 \equiv \int_V \boldsymbol{\sigma}^{**t}\boldsymbol{\sigma}^{**} dV \cdots\cdots(14)$$

したがってエネルギーノルム $|||\boldsymbol{u}^*|||$ および $|||\boldsymbol{\sigma}^{**}|||$ が次のように定義できる．

$$|||\boldsymbol{u}^*|||^2 \equiv \frac{1}{2}\int_V \boldsymbol{\varepsilon}^{*t}\boldsymbol{A}\boldsymbol{\varepsilon}^* dV \cdots\cdots(15)$$

$$|||\boldsymbol{\sigma}^{**}|||^2 \equiv \frac{1}{2}\int_V \boldsymbol{\sigma}^{**t}\boldsymbol{B}\boldsymbol{\sigma}^{**} dV \cdots\cdots(16)$$

これより，次の誤差評価式が導かれる．

$$\gamma_1^2 J(\boldsymbol{\varepsilon}^*(\boldsymbol{u}^*), \boldsymbol{\sigma}_0) = \gamma_1^2 \frac{1}{2}\int_V (\boldsymbol{A}^{1/2}\boldsymbol{\varepsilon}^* - \boldsymbol{B}^{1/2}\boldsymbol{\sigma}_0)^2 dV = \gamma_1^2\, |||\boldsymbol{u}^* - \boldsymbol{u}_0|||^2 \geq \|\boldsymbol{u}^* - \boldsymbol{u}_0\|^2 \cdots\cdots(17)$$

$$\gamma_2^2 J(\boldsymbol{\varepsilon}_0(\boldsymbol{u}_0), \boldsymbol{\sigma}^{**}) = \gamma_2^2\, |||\boldsymbol{\sigma}^{**} - \boldsymbol{\sigma}_0|||^2 \geq \|\boldsymbol{\sigma}^{**} - \boldsymbol{\sigma}_0\|^2 \cdots\cdots(18)$$

以上のような関係を基本として $\boldsymbol{u}^*$ の張る関数空間および $\boldsymbol{\sigma}^{**}$ の張る関数空間を設定し，その間の幾何学を展開したのが Prager・Synge による hypercircle 法であると見られる．

例—1 はりの曲げ問題

平衡方程式

$$Q' + \bar{q} = 0,\ M' = Q \text{ in } [0, L] \cdots\cdots(19\cdot a, b)$$

力学的境界条件

$$nQ = \overline{Q},\ nM = -\overline{M} \text{ on } E_\sigma \cdots\cdots(20\cdot a, b)$$

ひずみ-変位関係式

$$\kappa = -w'' \text{ in } [0, L] \cdots\cdots(21)$$

幾何学的境界条件

$$w'=\bar{w}',\ w=\bar{w}\ \text{on}\ E_u \quad\cdots\cdots(22\cdot a,b)$$

Hooke 則

$$M=EI\kappa\ \text{in}\ [0,L] \quad\cdots\cdots(23)$$

ここで，はりは $0\leq x\leq L$ にあるものとし，( )′は x に関する微分を表わす．w, w' および Q, M はたわみ，たわみ角およびせん断力，曲げモーメントであり，E_u および E_σ においてそれぞれ指定された値をとる（境界 $x=0$ においては $n=-1$, $x=L$ においては $n=1$ とする）．

式 (19)，(20) を満足する M^{**}, Q^{**} と式 (21)，(22) を満足する w^* に対して次の汎関数を考える．

$$J(w^*,M^{**})=\frac{1}{2}\int_0^L\frac{1}{EI}(EI\kappa^*-M^{**})^2dx \quad\cdots\cdots(24)$$

付帯条件，式 (19)～(22) を考慮すれば上式は，

$$J(w^*,M^{**})=\pi(w^*)-\pi_c(M^{**}) \quad\cdots\cdots(25)$$

ただし，

$$\pi(w^*)=\int_0^L\left[\frac{EI}{2}(w^{*\prime\prime})^2-\bar{q}w^*\right]dx-(\bar{M}w^{*\prime}+\bar{Q}w^*)|_{E_\sigma} \quad\cdots\cdots(26)$$

$$\pi_c(M^{**})=-\int_0^L\frac{M^{**2}}{2EI}dx+n(-M^{**}\bar{w}'+M^{**\prime}\bar{w})|_{E_u} \quad\cdots(27)$$

例—2　弾性基礎上のはり問題

前問題と異なるのは，平衡方程式および Hooke 則である．すなわち，式 (19・a) の代わりに，

$$Q'-R+\bar{q}=0\ \text{in}\ [0,L] \quad\cdots\cdots(19\cdot c)$$

ここで，R は基礎反力であり，次の関係が成立する．

$$R=kw\ \text{in}\ [0,L] \quad\cdots\cdots(28)$$

ただし，k は基礎のばね係数である．

式 (23)，(28) より次の汎関数を考える．

$$J(w^*,M^{**},R^{**})=\frac{1}{2}\int_0^L\left[\frac{1}{EI}(EI\kappa^*-M^{**})^2+\frac{1}{k}(kw^*-R^{**})^2\right]dx \quad\cdots\cdots(29)$$

ここで，新しい変数 R^{**} の付帯条件は式 (19・c) である．したがって，

$$J(w^*,M^{**})=\pi(w^*)-\pi_c(M^{**}) \quad\cdots\cdots(30)$$

ただし，

$$\pi(w^*)=\int_0^L\left[\frac{EI}{2}(w^{*\prime\prime})^2+\frac{k}{2}w^{*2}-\bar{q}w^*\right]-(\bar{M}w^{*\prime}+\bar{Q}w^*)|_{E_\sigma} \quad\cdots\cdots(31)$$

$$\begin{aligned}\pi_c(M^{**})&=-\int_0^L\left[\frac{M^{**2}}{2EI}+\frac{R^{**2}}{2k}\right]dx+n(-M^{**}\bar{w}'+Q^{**}\bar{w})|_{E_u}\\&=-\int_0^L\left[\frac{M^{**2}}{2EI}+\frac{(M^{**\prime\prime}+\bar{q})^2}{2k}\right]dx+n(-M^{**}\bar{w}'+M^{**\prime}\bar{w})|_{E_u}\end{aligned} \quad\cdots(32)$$

(2)　ポテンシャル問題

次の完全流体の非圧縮定常渦無し流れを考えることにする．

連続の式

$$\operatorname{div}\boldsymbol{v}=0\ \text{in}\ V \quad\cdots\cdots(33)$$

境界条件

$$v_n=\bar{v}_n\ \text{on}\ S \quad\cdots\cdots(34)$$

渦無し条件

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{v}=0\ \text{in}\ V \quad\cdots\cdots(35)$$

ここで，$\boldsymbol{v}$ は速度ベクトルであり，v_n は境界における外法線方向速度成分である．

このとき次の速度ポテンシャル ϕ が存在する．

$$\boldsymbol{v}=\operatorname{grad}\phi\ \text{in}\ V \quad\cdots\cdots(36)$$

これより次の汎関数を定義する．

$$J(\boldsymbol{v}^{**},\phi^*)=\frac{\rho}{2}\int_V(\boldsymbol{v}^{**}-\operatorname{grad}\phi^*)^2dV \quad\cdots\cdots(37)$$

ここで，$\boldsymbol{v}^{**}$ の付帯条件は式 (33)，(34) であり，ϕ^* には特別な付帯条件はない．また，ρ は密度である．(1) と同様に divergence の定理を適用して上式は次のように表わせる．

$$J(\boldsymbol{v}^{**},\phi^*)=X(\phi^*)-Y(\boldsymbol{v}^{**}) \quad\cdots\cdots(38)$$

ただし，

$$X(\phi^*)=\frac{\rho}{2}\int_V(\operatorname{grad}\phi^*)^t\operatorname{grad}\phi^*dV-\rho\int_S\bar{v}_n\phi^*dS \quad\cdots\cdots(39)$$

$$Y(\boldsymbol{v}^{**})=-\frac{\rho}{2}\int_V\boldsymbol{v}^{**t}\boldsymbol{v}^{**}dV \quad\cdots\cdots(40)$$

次の変分原理が成立する．

$$\delta J(\boldsymbol{v}^{**},\phi^*)=\delta X(\phi^*)=\delta Y(\boldsymbol{v}^{**})=0 \quad\cdots\cdots(41)$$

また，正解を $\boldsymbol{v}_0$, ϕ_0 とすれば，次の上下界公式を得る．

$$X(\phi^*)\geq X(\phi_0)=Y(\boldsymbol{v}_0)\geq Y(\boldsymbol{v}^{**}) \quad\cdots\cdots(42)$$

X は Dirichlet 原理の汎関数であり，Y はそれに相補な Kelvin 原理の汎関数である．重要なことは，$-Y(\boldsymbol{v}_0)$ が運動エネルギーという明確な物理的意味を表わすことである．したがって，汎関数 $-Y(\boldsymbol{v}^{**})$, $-X(\phi^*)$ は運動エネルギーの上下界を示している注2)．

上述のようなポテンシャル問題はほかにも多くある．次に例を幾つか挙げ，変分原理の適用を考えてみる．

例—1　水中物体の付加質量の問題[18]

上述の説明を直接応用するものとして，**Fig. 1** に示すような速度 $\bar{v}$ で水平軸 x 方向に運動する水中物体の付加質量 m_V を求める．付加質量の定義は次のとおりである．

$$m_V=\rho\int_{S_b}\frac{\partial\phi}{\partial t}n_xdS\bigg/\frac{d\bar{v}}{dt} \quad\cdots\cdots(43)$$

注2) このような仕事は周知のように Trefftz[17] が最初である．

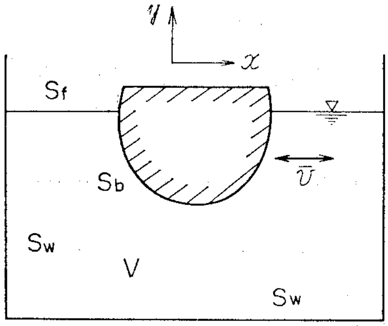

Fig. 1　A body moving in a water

ここで，n_x は S_b の外法線ベクトルと x 軸のなす角度の方向余弦である．

定常周期運動を仮定し，$|\bar{v}|=1$ とすれば，

$$m_V=\rho\int_{S_b}\phi n_x dS=\rho\int_V(\phi,_x{}^2+\phi,_y{}^2)dV \quad \cdots(44)$$

この場合の境界条件は次のようになる．

$$\phi=0 \text{ on } S_f \quad \cdots\cdots(46)$$

$$v_n=n_x \text{ on } S_b \quad \cdots\cdots(47)$$

$$v_n=0 \text{ on } S_w \quad \cdots\cdots(48)$$

したがって，式 (39)，(40) は次のようになる．

$$X(\phi^*)=\frac{\rho}{2}\int_V(\phi,_x{}^{*2}+\phi,_y{}^{*2})dV-\rho\int_{S_b}\phi n_x dS \quad \cdots\cdots(49)$$

$$Y(\boldsymbol{v}^{**})=-\frac{\rho}{2}\int_V(v_x{}^{**2}+v_y{}^{**2})dV \quad \cdots\cdots(50)$$

ただし，ϕ^* の付帯条件式 (46) が追加されている．

この場合には正解 ϕ_0, $\boldsymbol{v}_0$ に対して運動エネルギーは，

$$\frac{m_V}{2}|\bar{v}|^2=\frac{m_V}{2}=-X(\phi_0)=-Y(\boldsymbol{v}_0) \quad \cdots\cdots(51)$$

なる関係があるから，結局式 (42) から次の関係が成立する．

$$m_V{}^*\leq m_V\leq m_V{}^{**} \quad \cdots\cdots(52)$$

例—2　棒のねじり問題[4)]

Fig. 2 のような充実断面を有する一様な棒にトルク $\overline{M}_T$ の作用する問題を考える．x, y, z 方向の変位をそれぞれ u, v, w とし，ねじり角を θ とすれば，

$$u=-y\theta,\ v=x\theta,\ w=W\theta' \quad \cdots\cdots(53\text{・a,b,c})$$

ただし，$W(x, y)$ はそり関数であり，$(\ )'$ は z に関する微分を表わす．

次のような応力関数 U を導入する．

$$\tau_{xz}=-GU,_y,\ \tau_{yz}=GU,_x \text{ in } V \quad \cdots\cdots(54\text{・a,b})$$

V における平衡方程式は自動的に満足され，外力 $\overline{M}_T$ と内力との平衡は次の式で表わされる．

$$\overline{M}_T=G\int_V(U,_y y+U,_x x)dV=-G\int_V 2\,UdV \quad \cdots\cdots(55)$$

境界 S における力学的境界条件は次の式である．

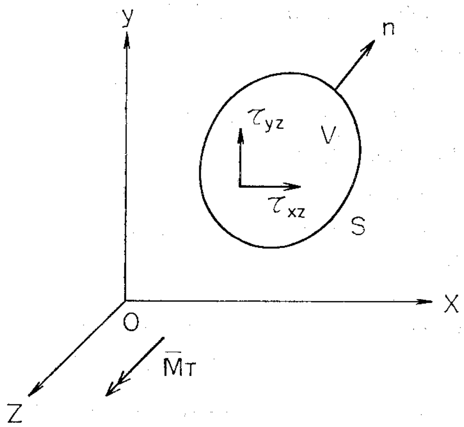

Fig. 2　A bar subjected to a torsion

$$\frac{dU}{ds}=0 \text{ すなわち，} U\equiv\text{const.}\ (=0) \text{ on } S \quad \cdots\cdots(56)$$

Hooke 則は次のようになる．

$$\left.\begin{array}{l}U,_y=-\theta'(W,_x-y)\\ U,_x=\theta'(W,_y+x)\end{array}\right\}\text{ in } V \quad \cdots\cdots(57)$$

上式より次の汎関数を定義する．

$$J(\theta', W^*, U^{**})=\frac{G}{2}\int_V[\{U,_x{}^{**}-\theta'(W,_y{}^*+x)\}^2+\{U,_y{}^{**}+\theta'(W,_x{}^*-y)\}^2]dV \quad \cdots\cdots(58)$$

ここで，U^{**} の付帯条件は式 (55)，(56) であり，θ' と W^* の付帯条件はない．これを考慮すれば，式 (58) は次のように書くことができる．

$$J(\theta', W^*, U^{**})=X(\theta', W^*)-y(U^{**}) \quad \cdots(59)$$

ただし，

$$X(\theta', W^*)=\frac{G\theta'^2}{2}\int_V[(W,_x{}^*-y)^2+(W,_y{}^*+x)^2]dV-\overline{M}_T\theta' \quad \cdots\cdots(60)$$

$$Y(U^{**})=-\frac{G}{2}\int_V(U,_x{}^{**2}+U,_y{}^{**2})dV \quad \cdots\cdots(61)$$

正解を θ_0', W_0 および U_0 として次の公式が成立する．

$$X(\theta', W^*)\geq X(\theta_0', W_0)=Y(U_0)\geq Y(U^{**}) \quad \cdots\cdots(62)$$

ここで，$X(\theta_0', W_0)$ の物理的意味は明らかに全ポテンシャルエネルギーであり，棒のねじり定数を K とすれば正解に対して

$$X(\theta_0', W_0)=Y(U_0)=-\frac{\overline{M}_T{}^2}{2GK} \quad \cdots\cdots(63)$$

また，式 (60) および (61) から最小ポテンシャルエネルギー原理および最大コンプリメンタリエネルギー原

理を適用して，その極値を次のように表現する．

$$X=-\frac{\overline{M}_T^{2}}{2GK^*},\quad Y=-\frac{\overline{M}_T^{2}}{2GK^{**}} \cdots\cdots(64)$$

式 (62) より，次の上下界公式が成立する注3)．

$$K^*\geq K\geq K^{**} \cdots\cdots(65)$$

(3) 一 般 化

次のような一般的な境界値問題を考える．

$$C^tCu+ku+\bar{f}=0 \text{ in } \Omega \cdots\cdots(66)$$

$$D(u-\bar{g})=0 \text{ on } \partial\Omega_1 \cdots\cdots(67)$$

$$D^t(Cu-\bar{h})=0 \text{ on } \partial\Omega_2 \cdots\cdots(68)$$

ここで，C はヒルベルト空間 $H_u\to H_v$ なる線形作用素，C^t は $H_v\to H_u$ なる C の随伴作用素とする．また，D および D^t は互いに随伴する線形作用素である．すなわち，これらの間には次の関係がある．

$$[v,\ Cu]=\{C^tv,\ u\}+[v,\ Du]_{\partial\Omega_1+\partial\Omega_2} \cdots\cdots(69)$$

$$[v,\ Du]_{\partial\Omega_1+\partial\Omega_2}=\{D^tv,u\}_{\partial\Omega_1+\partial\Omega_2} \cdots\cdots(70)$$

ただし，$\{\cdots,\cdots\}$ および $[\cdots,\cdots]$ はそれぞれ H_u および H_v において定義された内積である．k は正の定数，$\bar{f}$, $\bar{g}$, $\bar{h}$ は指定された関数とする．

原問題を次のように変換する．

$$C^tv+R+\bar{f}=0 \text{ in } \Omega \cdots\cdots(71)$$

$$D^t(v-\bar{h})=0 \text{ on } \partial\Omega_2 \cdots\cdots(72)$$

ただし，

$$v=Cu,\ R=ku \text{ in } \Omega \cdots\cdots(73)$$

u^* および v^{**}, R^{**} の付帯条件をそれぞれ (67) および (71)，(72) として，式 (73) より次の汎関数を定義する．

$$\begin{aligned}J(u^*,\ v^{**},\ R^{**})&=\frac{1}{2}\left(\|Cu^*-v^{**}\|^2+\frac{1}{k}\|ku^*-R^{**}\|^2\right)\\&=\frac{1}{2}[Cu^*,\ Cu^*]-[Cu^*,\ v^{**}]+\frac{1}{2}[v^{**},\ v^{**}]\\&\quad+\frac{k}{2}\{u^*,\ u^*\}-\{u^*,\ R^{**}\}+\frac{1}{2k}\{R^{**},\ R^{**}\}\end{aligned} \cdots\cdots(74)$$

式 (69) および (70) を適用し，各付帯条件を考慮すれば，式 (74) は次のように書くことができる．

$$J(u^*,\ v^{**})=X(u^*)-Y(v^{**}) \cdots\cdots(75)$$

ただし，

$$X(u^*)=\frac{1}{2}[Cu^*,\ Cu^*]+\frac{k}{2}\{u^*,\ u^*\}+\{\bar{f},\ u^*\}-\{D^t\bar{h},\ u^*\}_{\partial\Omega_2} \cdots\cdots(76)$$

$$Y(v^{**})=-\frac{1}{2}[v^{**},\ v^{**}]-\frac{1}{2k}\{C^tv^{**}+\bar{f},\ C^tv^{**}+\bar{f}\}+[D\bar{g},\ v^{**}]_{\partial\Omega_1} \cdots\cdots(77)$$

これらは Noble が正準形式 (Hellinger-Reissner) 汎関数から導いた相反汎関数と同一である．普通 $X(u^*)$ を primary，$Y(v^{**})$ を complementary とよぶ．

式 (75) より次の変分原理が成立する．

$$\delta J(u^*,\ v^{**})=\delta X(u^*)=\delta Y(v^{**})=0 \cdots\cdots(78)$$

すなわち，

$$\delta X(u^*)=\{C^tCu^*+ku^*+\bar{f},\ \delta u^*\}+\{D^t(Cu^*-\bar{h}),\ \delta u^*\}_{\partial\Omega_2}=0 \cdots\cdots(79)$$

$$\delta Y(v^{**})=-\left[v^{**}+\frac{1}{k}(C^tCv^{**}+C\bar{f}),\ \delta v^{**}\right]+\left[D\left(\frac{1}{k}C^tv^{**}+\bar{g}\right),\ \delta v^{**}\right]_{\partial\Omega_1}=0 \cdots\cdots(80)$$

これらの変分方程式は Oden[10] が共役射影法において論じている．

いま任意の u^* に対して次の関係を満足する実数 r が存在する（作用素 C^tC+k が正値確定である）ものとする．

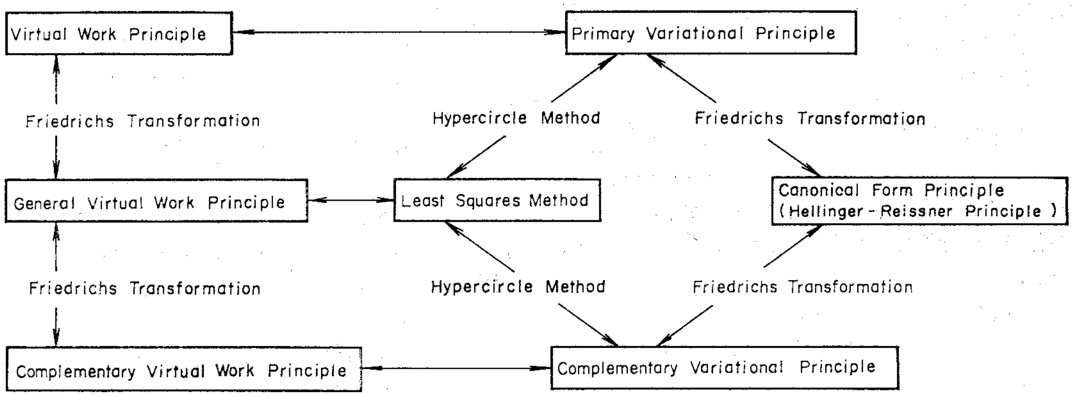

Fig. 3 Flow of variational principles in linear boundary value problems

注3) 同様の議論は Schwarz の不等式を利用して展開することができる．たとえば，文献 19) 参照．

$$\frac{r^2}{2}(\{C^tCu^*, u^*\}+k\{u^*, u^*\})\geq\{u^*, u^*\} \quad \cdots\cdots(81)$$

式 (75) および (81) より正解を u_0 および v_0 とするとき次の上下界公式が成立する．

$$X(u^*)\geq X(u_0)=Y(v_0)\geq Y(v^{**}) \quad \cdots\cdots(82)$$

式 (66) に見られるように自己随伴型の線形作用素を C^tC に分解して変分原理を構成し，その上下界性や近似解の性質を論じたのは，主としてわが国の数学者加藤[20]，藤田[21]のようである．後者は hypercircle 法との関連も論じている．

以上のようなことから，鷲津が微小変位弾性論について示した変分原理変換の図式は本節のような境界値問題に対して **Fig. 3** のように一般化される．

3. 非正値性線形問題における停留二乗変分原理

(1) 初期値問題における Hamilton-Toupin 原理の拡張

次の初期値問題を考える．

$$my^{\cdot\cdot}+ky+\bar{f}=0 \quad 0\leq t \quad \cdots\cdots(83)$$

$$y=\alpha,\quad y^{\cdot}=\beta \quad t=0 \quad \cdots\cdots(84\cdot\mathrm{a,b})$$

ただし，m および k は正の定数であり，$\bar{f}$ は指定された関数，$(\ )^{\cdot}$ は時間 t に関する微分を表わす．

原題を次のように変換する．

$$p+q+F=0 \quad 0\leq t \quad \cdots\cdots(85)$$

$$p=m\beta \quad t=0 \quad \cdots\cdots(84\cdot\mathrm{c})$$

ここで，

$$p=my^{\cdot},\quad q^{\cdot}=ky \quad 0\leq t \quad \cdots\cdots(86\cdot\mathrm{a,b})$$

$$F=\int_0^t\bar{f}\,dt \quad \cdots\cdots(87)$$

y^* の付帯条件を (84・a)，p^{**} および q^{**} の付帯条件を (85) および (84・c) として，式 (86) から次の汎関数を定義する．

$$J(y^*, p^{**}, q^{**})=\frac{1}{2}\int_0^{t'}\left[\frac{1}{m}(my^{*\cdot}-p^{**})^2-\frac{1}{k}(ky^*-q^{**\cdot})^2\right]dt \quad \cdots\cdots(88)$$

ただし，t' は任意の時刻を表わすものとする．

各付帯条件を考慮すれば，式 (88) は次のように表現される．

$$J(y^*, q^{**})=X(y^*)-Y(q^{**})+(q^{**}+F)y^*|_{t=t'}+m\alpha\beta \quad \cdots(89)$$

ここで，

$$X(y^*)=\int_0^{t'}\left(\frac{m}{2}y^{*\cdot 2}-\frac{k}{2}y^{*2}-\bar{f}y^*\right)dt \quad \cdots\cdots(90)$$

$$Y(q^{**})=\int_0^{t'}\left[\frac{1}{2k}q^{**\cdot 2}-\frac{1}{2m}(q^{**}+F)^2\right]dt \quad \cdots\cdots(91)$$

式 (90) は Lagrangian であり，Hamilton 原理の汎関数を表わしている．一方，式 (91) はそれに相補な Toupin 原理[22]の汎関数となっている．次の変分原理，

$$\delta J(y^*, q^{**})=0 \quad \cdots\cdots(92)$$

から以下の Euler 方程式および自然条件を得る．

y^* に関して，

$$my^{*\cdot\cdot}+ky^*+\bar{f}=0 \quad 0\leq t\leq t' \quad \cdots\cdots(93)$$

$$my^{*\cdot}+q^{**}+F=0 \quad t=t' \quad \cdots\cdots(94)$$

q^{**} に関して，

$$mq^{**\cdot\cdot}+k(q^{**}+F)=0 \quad 0\leq t\leq t' \quad \cdots\cdots(95)$$

$$q^{**\cdot}-ky^*=0 \quad t=t' \quad \cdots\cdots(96)$$

Euler 方程式 (93)，(95) は Hamilton, Toupin 両原理から得られるものと一致する．そのうえ，変分原理 (92) から得られる時刻 t' における自然条件は完全に矛盾のない形をしている．従来の二原理では汎関数 X および Y の自然条件は $y^{*\cdot}=0$ および $q^{**\cdot}=0$ となるので矛盾がある．この点は Robinson[6] などの正準形式による一般的取り扱いにおいても明らかにされていない．

このように汎関数 (89) は境界値問題と異なる初期値問題の相反形式を示し，変分原理 (92) は従来の変分原理の一般化に相当している．明らかに式 (88) から汎関数 J は正値性・最小性が保証されない．以後著者はこの形の変分原理を停留二乗原理とよぶことにする[23]．

例―1 弦の振動問題

線密度 ρ，張力 T の弦の振動方程式を考える．

$$\rho\eta^{\cdot\cdot}-T\eta''=0 \quad 0\leq t,\ 0\leq x\leq L \quad \cdots\cdots(97)$$

$$\eta=g_1(x),\quad \eta^{\cdot}=g_2(x) \quad t=0,\quad 0\leq x\leq L \quad \cdots\cdots(98\cdot\mathrm{a,b})$$

$$\eta=0 \quad 0\leq t,\quad x=0,\quad x=L \quad \cdots\cdots(99)$$

原問題を次のように変換する．

$$p-q'=0 \quad 0\leq t,\ 0\leq x\leq L \quad \cdots\cdots(100)$$

$$p=\rho g_2(x) \quad t=0,\ 0\leq x\leq L \quad \cdots\cdots(98\cdot\mathrm{c})$$

ただし，

$$p=\rho\eta^{\cdot},\ q^{\cdot}=T\eta' \quad 0\leq t,\ 0\leq x\leq L \quad \cdots\cdots(101\cdot\mathrm{a,b})$$

η^* の付帯条件を (98・a) および (99)，p^{**} および q^{**} の付帯条件を (100) および (98・c) として，次の汎関数を定義する．

$$J(\eta^*, p^{**}, q^{**})=\frac{1}{2}\int_0^{t'}\int_0^L\left[\frac{1}{\rho}(\rho\eta^{*\cdot}-p^{**})^2-\frac{1}{T}(T\eta^{*\prime}-q^{**\cdot})^2\right]dxdt \quad \cdots\cdots(102)$$

書換えると次のようになる．

$$J(\eta^*, q^{**})=\int_0^{t'}\int_0^L\left[\left(\frac{\rho}{2}\eta^{*\cdot 2}-\frac{T}{2}\eta^{*\prime 2}\right)-\left(\frac{1}{2T}q^{**\cdot 2}-\frac{1}{2\rho}q^{**\prime 2}\right)\right]dxdt+\int_0^L\eta^* q^{**\prime}dx|_{t=t'}+\int_0^L\rho g_1 g_2 dx|_{t=0} \cdots\cdots(103)$$

例―2　はりの振動問題

次のようなはりの振動方程式を考える.

$$\rho w^{\cdot\cdot}+EIw''''=\bar{f}\quad 0\leq t,\ 0\leq x\leq L\cdots(104)$$

$$w=g_1(x),\ w^{\cdot}=g_2(x)\quad t=0,\ 0\leq x\leq L \cdots\cdots(105\cdot a, b)$$

原問題を次のように変換する.

$$p-q''=F\quad 0\leq t,\ 0\leq x\leq L\cdots\cdots(106)$$

$$p=\rho g_2(x)\quad t=0,\ 0\leq x\leq L\cdots\cdots(105\cdot c)$$

ただし,

$$p=\rho w^{\cdot},\ q^{\cdot}=-EIw''\quad 0\leq t,\ 0\leq x\leq L \cdots\cdots(107\cdot a, b)$$

次の汎関数を定義する.

$$I(w^*, p^{**}, q^{**})=\frac{1}{2}\int_0^{t'}\int_0^L\left[\frac{1}{\rho}(\rho w^{*\cdot}-p^{**})^2-\frac{1}{EI}(EIw^{*\prime\prime}+q^{**\cdot})^2\right]dxdt\cdots\cdots(108)$$

付帯条件を考慮して上式は次のように書き換えられる.

$$J(w^*, q^{**})=\int_0^{t'}\left[\int_0^L\frac{\rho}{2}w^{*\cdot 2}dx-\pi(w^*)\right]dt-\int_0^{t'}\left[\int_0^L\left[\frac{1}{2EI}q^{**\cdot 2}-\frac{1}{2\rho}(q^{**\prime\prime}+F)^2\right]dx+n(q^{**\cdot}\bar{w}'-q^{**\cdot}\bar{w})|_{E_u}\right]dt-\int_0^L w^*(q^{**\prime\prime}+F)dx|_{t=t'}-\int_0^L\rho g_1 g_2 dx|_{t=0}\cdots\cdots(109)$$

ここで, $\pi(w^*)$ は式 (26) で定義されている.

この二つの例に見られるように停留二乗原理は初期値-境界値問題に適用される. このような問題の相反原理はたとえば文献 24) などを参照されたい.

(2)　線形化有限変位理論

軸圧縮力 N を受けるはりの曲げ問題を例にとる. **2**. **(1)** の**例―1** と異なるのは次の平衡方程式および境界条件である. すなわち, (19・a) および (20・a) の代わりに,

$$Q'-R'+\bar{q}=0\quad \text{in } [0, L]\cdots\cdots(19\cdot d)$$

$$n(Q-R)=\bar{Q}\quad \text{on } E_\sigma\cdots\cdots(20\cdot c)$$

ここで,

$$R=Nw'\quad \text{in } [0, L]\cdots\cdots(110)$$

式 (23), (110) より次の汎関数を定義する.

$$J(w^*, M^{**}, R^{**})=\frac{1}{2}\int_0^L\left[\frac{1}{EI}(EI\kappa^*-M^{**})^2-\frac{1}{N}(Nw^{*\prime}-R^{**})^2\right]dx\cdots\cdots(111)$$

ただし, R^{**} の付帯条件は (19・d), (20・c) である. したがって, 上式は次のように書き換えられる.

$$J(w^*, M^{**}, R^{**})=\pi(w^*)-\pi_c(M^{**}, R^{**})\cdots\cdots(112)$$

ただし,

$$\pi(w^*)=\int_0^L\left[\frac{EI}{2}(w^{*\prime\prime})^2-\frac{N}{2}(w^{*\prime})^2-\bar{q}w^*\right]dx-(\bar{M}w^{*\prime}+\bar{Q}w^*)|_{E_\sigma}\cdots\cdots(113)$$

$$\pi_c(M^{**}, R^{**})=-\int_0^L\left(\frac{M^{**2}}{2EI}-\frac{R^{**2}}{2N}\right)dx+n[-M^{**}\bar{w}'+(M^{**\prime}-R^{**})\bar{w}]|_{E_u}\cdots\cdots(114)$$

次の変分原理が成立する.

$$\delta J(w^*, M^{**}, R^{**})=\delta\pi(w^*)=\delta\pi_c(M^{**}, R^{**})=0\cdots\cdots(115)$$

式 (111) より常に $J\geq 0$ が成立するとは限らないことが分かる. すなわち, N の値が座屈荷重以下では式 (115) は最小ポテンシャルエネルギー原理および最大コンプリメンタリエネルギー原理になっている ($J\geq 0$). しかし, N の値が座屈荷重に一致するときにはそのようなことはいえない[25]. したがって, 汎関数 (111) の変分原理は停留二乗原理となる.

(3)　固有値問題

例として **3**. **(1)** **例―1** の弦の固有振動を考える. 円振動数を ω とすれば式 (97) の代わりに,

$$T\eta''+\rho\omega^2\eta=0 \text{ in } [0, L]\cdots\cdots(116)$$

次のような変換を行う.

$$P'-R=0\quad \text{in } [0, L]\cdots\cdots(117)$$

ただし,

$$P=-T\eta',\quad R=\rho\omega^2\eta\quad \text{in } [0, L]\cdots\cdots(118)$$

η^* の付帯条件を (99), P^{**}, R^{**} の付帯条件を (117) として次の汎関数を定義する.

$$J(\eta^*, P^{**}, R^{**})=\frac{1}{2}\int_0^L\left[\frac{1}{T}(T\eta^{*\prime}+P^{**})^2-\frac{1}{\rho\omega^2}(\rho\omega^2\eta^*-R^{**})^2\right]dx\cdots\cdots(119)$$

各付帯条件を考慮して書き換えると上式は次のようになる.

$$J(\eta^*, P^{**})=X(\eta^*)-Y(P^{**})\cdots\cdots(120)$$

ここで,

$$X(\eta^*)=\int_0^L\left[\frac{T}{2}(\eta^{*\prime})^2-\frac{\rho\omega^2}{2}\eta^{*2}\right]dx \cdots\cdots(121)$$

$$Y(P^{**})=\int_0^L\left[\frac{1}{2\rho\omega^2}(P^{**\prime})^2-\frac{1}{2T}P^{**2}\right]dx \cdots\cdots(122)$$

汎関数 $X(\eta^*)$ と $Y(P^{**})$ は互いに相反関係にある．周知のように最小固有値はそれぞれ Rayleigh-Ritz 法によって，

$$\omega^{*2}=\int_0^L\frac{T}{2}(\eta^{*\prime})^2dx\Big/\int_0^L\frac{\rho}{2}\eta^{*2}dx \cdots\cdots(123)$$

$$\omega^{**2}=\int_0^L\frac{1}{2\rho}(P^{**\prime})^2dx\Big/\int_0^L\frac{1}{2T}P^{**2}dx \cdots\cdots(124)$$

の最小値として近似される．この近似値は正解に対しいずれも上界を与える．なお，式 (124) からは最小固有値として 0 が計算されるが，これは除外されるべきである[26]．

(4) 熱伝導の問題

熱伝導の問題は（拡散・圧密問題も同様であるが），次のような放物形の方程式で記述される．

$$\kappa\nabla^2\theta=c\frac{\partial\theta}{\partial t}\ \text{in}\ V,\ t>0 \cdots\cdots(125)$$

ここで，κ は熱伝導率，c は比熱，θ は温度である．

初期条件および境界条件を次のとおりとする．

$t=0$ の時

$$\theta=0\ \ \text{in}\ V,\ \ \text{on}\ S \cdots\cdots(126)$$

$t>0$ の時

$$\theta=\bar{\theta}\ \ \text{on}\ S \cdots\cdots(127)$$

演算子法を適用すれば，微分演算子を D として，

$$\frac{\partial\theta}{\partial t}=D\theta-\theta|_{t=0}=D\theta \cdots\cdots(128)$$

したがって，式 (125) は次のようになる．

$$\kappa\nabla^2\theta-cD\theta=0\ \text{in}\ V,\ t>0 \cdots\cdots(129)$$

これを次のように変換する．

$$TD(\mathrm{div}\,\boldsymbol{S})+U=0\ \text{in}\ V,\ t>0 \cdots\cdots(130)$$

ただし，

$$TD\boldsymbol{S}=-\kappa\,\mathrm{grad}\,\theta,\ U=cD\theta\ \text{in}\ V,\ t>0 \cdots\cdots(131\cdot a,b)$$

ここで，T は絶対温度であり，$\mathrm{div}\,\boldsymbol{S}=c\theta/T$ なる量はエントロピー密度とよばれる．

θ^* の付帯条件を式 (127)，$\boldsymbol{S}^{**}$, U^{**} の付帯条件を式 (130) として，次の汎関数を定義する．

$$J(\theta^*,\boldsymbol{S}^{**},U^{**})=\frac{1}{2TD}\int_V\left[\frac{1}{\kappa}(\kappa\,\mathrm{grad}\,\theta^*+TD\boldsymbol{S}^{**})^2+\frac{1}{Dc}(U^{**}-cD\theta^*)^2\right]dV \cdots\cdots(132)$$

各付帯条件を考慮すると，上式は次のようになる．

$$J(\theta^*,\boldsymbol{S}^{**})=X(\theta^*)-Y(\boldsymbol{S}^{**}) \cdots\cdots(133)$$

ただし，

$$X(\theta^*)=\int_V\left[\frac{\kappa}{2TD}(\mathrm{grad}\,\theta^*)^t\,\mathrm{grad}\,\theta^*+\frac{c}{2T}\theta^{*2}\right]dV \cdots\cdots(134)$$

$$Y(\boldsymbol{S}^{**})=-\int_V\left[\frac{T}{2c}(\mathrm{div}\,\boldsymbol{S}^{**})^2+\frac{TD}{2\kappa}\boldsymbol{S}^{**t}\boldsymbol{S}^{**}\right]dV-\int_S\boldsymbol{n}\boldsymbol{S}^{**}\bar{\theta}\,dS \cdots\cdots(135)$$

汎関数 $X(\theta^*)$ および $Y(\boldsymbol{S}^{**})$ は互いに相反関係にある．この問題に対する変分原理を展開した Biot[27] は，式 (134) の第 2 項および式 (135) の第 2 項を自由エネルギーおよび拡散関数の拡張概念とそれぞれ定義する．

(5) 定常波動伝播問題

定常波動問題は Helmholtz 方程式で記述されるが，平行波が無限領域に伝播するような問題では停留二乗原理の適用が可能である．詳細は別論文[28]を参照されたい．

4. ある種の非線形問題における変分原理の一般化

(1) 有限変位弾性論におけるエネルギー原理

2.(1) と同様の記号を用いれば，有限変位弾性論は以下のように記述される．

平衡方程式

$$[\sigma_{ij}(\delta_{kj}+u_{k,j})]_{,i}+\bar{F}_k=0\ \text{in}\ V \cdots\cdots(136)$$

力学的境界条件

$$T_k=\sigma_{ij}n_i(\delta_{kj}+u_{k,j})=\bar{T}_k\ \text{on}\ S_\sigma \cdots\cdots(137)$$

ひずみ-変位関係式

$$\varepsilon_{ij}=\frac{1}{2}(u_{i,j}+u_{j,i}+u_{k,i}u_{k,j})\ \text{in}\ V \cdots\cdots(138)$$

幾何学的境界条件

$$u_k=\bar{u}_k\ \text{on}\ S_u \cdots\cdots(139)$$

ここで，δ_{kj} はクロネッカーのデルタであり，応力は Kirchhoff の応力，ひずみは Green のひずみを用いている．両間の間に Hooke 則を考えて，

$$\sigma_{ij}=a_{ijkl}\varepsilon_{kl}\ \text{または}\ \boldsymbol{\sigma}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{\varepsilon}\ \text{in}\ V \cdots\cdots(140)$$

$\boldsymbol{u}^*$, $\boldsymbol{\varepsilon}^*$ は式 (138)，(139) を，$\boldsymbol{\sigma}^{**}$, $\boldsymbol{T}^{**}$ はそのような $\boldsymbol{u}^*$ を含む式 (136)，(137) を満足するものとして，次の汎関数を考える．

$$J(\boldsymbol{\varepsilon}^*(\boldsymbol{u}^*),\boldsymbol{\sigma}^{**})=\frac{1}{2}\int_V(\boldsymbol{A}^{1/2}\boldsymbol{\varepsilon}^*-\boldsymbol{B}^{1/2}\boldsymbol{\sigma}^{**})^2dV \cdots\cdots(141)$$

式 (136)～(139) の付帯条件を考慮し，divergence の

定理を適用すると上式は次のように書くことができる．

$$J(\boldsymbol{u}^*, \boldsymbol{\sigma}^{**})=\pi(\boldsymbol{u}^*)-\pi_c(\boldsymbol{\sigma}^{**}, \boldsymbol{u}^*) \quad\cdots\cdots\cdots(142)$$

ただし，

$$\pi(\boldsymbol{u}^*)=\int_V\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{\varepsilon}^{*t}\boldsymbol{A}\boldsymbol{\varepsilon}^*-\overline{\boldsymbol{F}}^t\boldsymbol{u}^*\right)dV-\int_{S_\sigma}\overline{\boldsymbol{T}}^t\boldsymbol{u}^*dS \quad\cdots\cdots\cdots(143)$$

$$\pi_c(\boldsymbol{\sigma}^{**}, \boldsymbol{u}^*)=-\int_V\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}^{**t}\boldsymbol{B}\boldsymbol{\sigma}^{**}+\frac{1}{2}\sigma_{ij}^{**}u_{k,i}^*u_{k,j}^*\right)dV+\int_{S_u}\boldsymbol{T}^{**t}\bar{\boldsymbol{u}}dS \quad\cdots\cdots\cdots(144)$$

ここで，$\boldsymbol{u}^*$, $\boldsymbol{\sigma}^{**}$ は式 (136), (137) を満足するから形式的に $\boldsymbol{u}^*=\boldsymbol{u}^*(\boldsymbol{\sigma}^{**})$ と書くことにすると，式 (144)は次のようになる．

$$\pi_c(\boldsymbol{\sigma}^{**}, \boldsymbol{u}^*(\boldsymbol{\sigma}^{**}))=-\int_V\left[\frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}^{**t}\boldsymbol{B}\boldsymbol{\sigma}^{**}+\frac{1}{2}\sigma_{ij}^{**}u_{k,i}^*(\boldsymbol{\sigma}^{**})u_{k,j}^*(\boldsymbol{\sigma}^{**})\right]dV+\int_{S_u}\boldsymbol{T}^{**t}\bar{\boldsymbol{u}}dS \quad\cdots\cdots\cdots(145)$$

式 (143), (145) はそれぞれ有限変位弾性論におけるポテンシャルエネルギーおよびコンプリメンタリエネルギーを示している．

これより次の変分原理が成立する．

$$\delta J(\boldsymbol{u}^*,\boldsymbol{\sigma}^{**})=\delta\pi(\boldsymbol{u}^*)=\delta\pi_c(\boldsymbol{\sigma}^{**})=0 \quad\cdots\cdots(146)$$

この場合，明らかに $J\geq 0$ であるから，

$$\pi(\boldsymbol{u}^*)\geq\pi_c(\boldsymbol{\sigma}^{**}, \boldsymbol{u}^*(\boldsymbol{\sigma}^{**})) \quad\cdots\cdots\cdots(147)$$

は成立する．しかし，周知のように微小変位問題のような π, π_c の上下界性は成立しないので，式 (146) の第 2, 3 式はそれぞれ停留ポテンシャルエネルギー原理，停留コンプリメンタリエネルギー原理とよばれる．したがって，式 (146) の第 1 式も停留二乗原理とよぶのが妥当であろう．

うえのように有限変位弾性論においても微小変位の場合と同様の展開が形式的に可能であることが示された．しかし，$\boldsymbol{\sigma}^{**}$ は付帯条件 (136), (137) において $\boldsymbol{u}^*$ と非線形の関係にあり，両者の間に必ずしも 1 対 1 の対応が保証されないなど複雑な問題が生ずる．

例：はりの有限変位問題

次のようなはりの有限変位の簡単な場合を考える．

平衡方程式

$$\left.\begin{array}{l} Q'+(Nw')'+\bar{q}=0, \quad M'=Q \\ N'+\bar{p}=0 \end{array}\right\} \text{in } [0, L] \quad\cdots\cdots\cdots(148)$$

力学的境界条件

$$\left.\begin{array}{l} nM=-\overline{M}, \quad n(Q+Nw')=\overline{Q} \\ nN=\overline{N} \end{array}\right\} \text{on } E_\sigma \quad\cdots\cdots\cdots(149)$$

ひずみ-変位関係式

$$\kappa=-w'', \quad \varepsilon_x=u'+\frac{1}{2}(w')^2 \quad \text{in } [0, L] \quad\cdots\cdots\cdots(150)$$

幾何学的境界条件

$$w=\overline{w}, \quad w'=\overline{w}', \quad u=\bar{u} \quad \text{on } E_u \quad\cdots\cdots\cdots(151)$$

ただし，u は軸方向変位，ε_x は軸方向ひずみ，N は軸力（引張正），$\bar{p}$ は軸方向分布外力である．その他の記号は **2．(1) 例—1** と同じである．

$w^*, u^*, \kappa^*, \varepsilon_x^*$ を式 (150), (151) を満足するものとし，M^{**}, Q^{**}, N^{**} を式 (148), (149) を満足するものとして次の汎関数を定義する．

$$J(\kappa^*, \varepsilon_x^*, M^{**}, N^{**})=\frac{1}{2}\int_0^L\left[\frac{1}{EI}(EI\kappa^*-M^{**})^2+\frac{1}{EA}(EA\varepsilon_x^*-N^{**})^2\right]dx \quad\cdots\cdots\cdots(152)$$

付帯条件 (148)～(151) を考慮すれば，

$$J(w^*, u^*, M^{**}, N^{**})=\pi(w^*, u^*)-\pi_c(M^{**}, N^{**}) \quad\cdots\cdots\cdots(153)$$

ただし，

$$\pi(w^*, u^*)=\int_0^L\left[\frac{EI}{2}(w^{*\prime\prime})^2+\frac{EA}{2}\left\{u^{*\prime}+\frac{1}{2}(w^{*\prime})^2\right\}^2-\bar{q}w^*-\bar{p}u^*\right]dx-(\overline{M}w^{*\prime}+\overline{Q}w^*+\overline{N}u^*)|_{E_\sigma} \quad\cdots\cdots\cdots(154)$$

$$\pi_c(M^{**}, N^{**})=-\int_0^L\left[\frac{M^{**2}}{2EI}+\frac{N^{**2}}{2EA}+\frac{1}{2}N^{**}(w^*(M^{**}, N^{**}))^2\right]dx+n\{-M^{**}\overline{w}'+(M^{**\prime}+N^{**}w^{*\prime}(M^{**}, N^{**}))\overline{w}+N^{**}\bar{u}\}|_{E_u} \quad\cdots\cdots\cdots(155)$$

(2) 非線形境界値問題における変分原理の一般化

2．(3) と類似の問題として，式 (66) に代わる次の方程式を考える（境界条件は同一とする）．

$$C^tCu+f(u)=0 \quad \text{in } \Omega \quad\cdots\cdots\cdots(156)$$

ただし，f は指定された u の非線形関数とする．

原問題を次のように変換する．

$$C^tv+f(u)=0 \quad \text{in } \Omega \quad\cdots\cdots\cdots(157)$$

ただし，

$$v=Cu \quad \text{in } \Omega \quad\cdots\cdots\cdots(158)$$

式 (157) は逆変換が成立するとして，

$$u=f^{-1}(-C^tv) \quad \text{in } \Omega \quad\cdots\cdots\cdots(159)$$

u^* の付帯条件を (67)，v^{**} の付帯条件を式 (72) および (157) または (159) として，式 (158) から次の汎関数を定義する．

$$J(u^*, v^{**}) = \frac{1}{2}\|C^t u^* - v^{**}\|^2$$

$$= \frac{1}{2}[C^t u^* - v^{**},\ C^t u^* - v^{**}] \quad \cdots\cdots(160)$$

付帯条件を考慮して書換えると，

$$J(u^*, v^{**}) = \frac{1}{2}[C^t u^*,\ C^t u^*] - \{D^t \bar{h},\ u^*\}_{\partial\Omega_2}$$

$$- \{C^t v^{**},\ u^*\} + \frac{1}{2}[u^{**},\ v^{**}]$$

$$- [D\bar{g},\ v^{**}]_{\partial\Omega_1} \quad \cdots\cdots(161)$$

ここで，次のような一種のポテンシャル F を定義する．

$$f(u) \equiv \frac{d}{du}F(u) \quad \cdots\cdots(162)$$

これを用いて式 (161) の J を次のように書く．

$$J(u^*, v^{**}) = X(u^*) - Y(v^{**}, u^*) \quad \cdots\cdots(163)$$

ただし，

$$X(u^*) = \frac{1}{2}[C^t u^*,\ C^t u^*] + \{1,\ F(u^*)\}$$

$$- \{D^t \bar{h},\ u^*\}_{\partial\Omega_2} \quad \cdots\cdots(164)$$

$$Y(v^{**}, u^*) = -\frac{1}{2}[v^{**},\ v^{**}] + \{1,\ F(u^*)\}$$

$$+ \{C^t v^{**},\ u^*\} + [D\bar{g},\ v^{**}]_{\partial\Omega_1} \quad \cdots\cdots(165)$$

式 (165) は式 (159) を用いると次のようになる．

$$Y(v^{**}) = -\frac{1}{2}[v^{**},\ v^{**}] + \{1,\ F(f^{-1}(-C^t v^{**}))\}$$

$$+ \{C^t v^{**},\ f^{-1}(-C^t v^{**})\} + [D\bar{g},\ v^{**}]_{\partial\Omega_1} \quad \cdots\cdots(166)$$

式 (164) の X と式 (166) の Y は互いに相反関係にあり，それぞれ primary, complementary 汎関数とよぶ．

例：非線形弾性基礎上のはりの問題

2.(1) の例—**1** と同じ記号を用いることにして，次のような平衡方程式を考える．

$$-M'' + kw^3 = \bar{q} \quad \text{in } [0, L] \quad \cdots\cdots(167)$$

すなわち，第 2 項が非線形基礎の影響項である．$k > 0$ とし，式 (159) と式 (162) に対応して，

$$w = \sqrt[3]{\frac{M'' + \bar{q}}{k}} \quad \text{in } [0, L] \quad \cdots\cdots(168)$$

$$F(w) = \frac{k}{4}w^4 - \bar{q}w \quad \text{in } [0, L] \quad \cdots\cdots(169)$$

式 (19・a) に代わる M^{**} の付帯条件を式 (167) として，次の汎関数を定義する．

$$J(w^*, M^{**}) = \frac{1}{2}\int_0^L \frac{1}{EI}(EI\kappa^* - M^{**})^2 dx \quad \cdots\cdots(170)$$

付帯条件を考慮すると，結局上式は次のようになる．

$$J(w^*, M^{**}) = \pi(w^*) - \pi_c(M^{**}) \quad \cdots\cdots(171)$$

ただし，

$$\pi(w^*) = \int_0^L \left[\frac{EI}{2}(w^{**''})^2 + \frac{k}{4}w^{*4} - \bar{q}w^*\right]dx$$

$$- (\bar{M}w^{*\prime} + \bar{Q}w^*)|_{E_\sigma} \quad \cdots\cdots(172)$$

$$\pi_c(M^{**}) = -\int_0^L \left[\frac{M^{**2}}{2EI} + \frac{3}{4}(M^{**''} + \bar{q}) \cdot \left(\frac{M^{**''} + \bar{q}}{k}\right)^{1/3}\right]dx$$

$$- n(-M^{**}\bar{w}' + M^{**\prime}\bar{w})|_{E_u} \cdots(173)$$

(3) 非線形初期値問題における変分原理

3.(1) と類似の問題として，式 (83) に代わる次の方程式を考える（初期条件は同一とする）．

$$y^{\cdot\cdot} + f(y) = 0 \quad 0 \leq t \quad \cdots\cdots(174)$$

ただし，f は指定された y の非線形関数である．

原題を次のように変換する．

$$p^{\cdot} + f(y) = 0 \quad 0 \leq t \quad \cdots\cdots(175)$$

$$p = \beta \quad t = 0 \quad \cdots\cdots(176)$$

ここで，

$$p = y^{\cdot} \quad 0 \leq t \quad \cdots\cdots(177)$$

式 (175) は逆変換が成立するとして，

$$y = f^{-1}(-p^{\cdot}) \quad 0 \leq t \quad \cdots\cdots(178)$$

y^* の付帯条件を (84・a)，p^{**} の付帯条件を (176) および (175) または (178) として，次の汎関数を定義する．

$$J(y^*, p^{**})$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{t'} (y^{*\cdot} - p^{**})^2 dt$$

$$= \int_0^{t'} \left[\frac{1}{2}(y^{*\cdot})^2 - F(y^*)\right]dt$$

$$+ \int_0^{t'} \left[\frac{1}{2}p^{**2} + y^* p^{**\cdot} + F(y^*)\right]dt$$

$$- y^* p^{**}|_{t=t'} + \alpha\beta \quad \cdots\cdots(179)$$

ただし，F は式 (162) のようなポテンシャルである．付帯条件式 (178) を用いると上式は次のようになる．

$$J(y^*, p^{**})$$

$$= \int_0^{t'} \left[\frac{1}{2}(y^{*\cdot})^2 - F(y^*)\right]dt$$

$$- \int_0^{t'} \left[-\frac{1}{2}p^{**2} - p^{**\cdot} f^{-1}(-p^{**\cdot}) - F(f^{-1}(-p^{**\cdot}))\right]dt - y^* p^{**}|_{t=t'} + \alpha\beta$$

$$\cdots\cdots(180)$$

この第 1 項は Hamilton 原理の汎関数 (Lagrangian) であり，第 2 項はそれに相補な汎関数である．これらは正準形式の変分原理から Robinson が示している結果と一致する．しかし，**3.(1)** の場合と同じく Robinson は式 (180) の第 3 項に関連する $t = t'$ の条件を明確に取り扱っていない．その点式 (180) は非線形初期値問題における矛盾のない相反形式を示しており，線形の場合と同

様本論の取り扱いは従来の変分原理の一般化になっている．

例：大振子の問題

係数を適当にとれば振角 φ の大きな振子の問題は次の方程式で表わされる．

$$\varphi^{\cdot\cdot}+\sin\varphi=0 \quad 0\leq t \cdots\cdots(181)$$

変換して，

$$\left.\begin{array}{l} p^{\cdot}+\sin\varphi=0 \\ \text{または} \\ \varphi=-\sin^{-1}(p^{\cdot}) \end{array}\right\} 0\leq t \cdots\cdots(182\cdot\mathrm{a,b})$$

$$F=-\cos\varphi \quad 0\leq t \cdots\cdots(183)$$

次のような汎関数を考える．

$$J(\varphi^*,\ p^{**})=\frac{1}{2}\int_0^{t'}(\varphi^{*\cdot}-p^{**})^2dt \cdots\cdots(184)$$

各付帯条件を考慮して書き換えると，

$$\begin{aligned} J(\varphi^*,\ p^{**}) &=\int_0^{t'}\left[\frac{1}{2}(\varphi^{*\cdot})^2+\cos\varphi\right]dt \\ &+\int_0^{t'}\left[\frac{1}{2}p^{**2}-\cos(\sin^{-1}(p^{**\cdot})) \right.\\ &\left.-p^{**\cdot}\sin^{-1}(p^{**\cdot})\right]dt-\varphi^*p^{**}|_{t=t'}+\alpha\beta \end{aligned}$$
$$\cdots\cdots(185)$$

5. 初期値問題への有限要素法の応用

変分原理はいろいろの応用が考えられるが，近年は有限要素法への利用が顕著に行われている．しかし，そのほとんどは空間の離散化に関するものであり，時間領域の離散化に有限要素法を適用することは今後の一つの課題と考えられる．

ここでは，前述の初期値問題に対する停留二乗変分原理を時間領域の有限要素積分に利用することを試みる．次の簡単な問題を考える．

$$y^{\cdot\cdot}+y=0 \quad t\geq 0 \cdots\cdots(186)$$

$$y=1,\quad y^{\cdot}=0 \quad t=0 \cdots\cdots(187\cdot\mathrm{a,b})$$

この厳密解は，

$$y=\cos t \cdots\cdots(188)$$

原式を次のように変換する．

$$z^{\cdot}+y=0,\quad y^{\cdot}-z=0 \quad t\geq 0 \cdots\cdots(189)$$

$$z=0,\quad y=1 \quad t=0 \cdots\cdots(190)$$

次の汎関数を定義する．

$$J(y,\ z)=\frac{1}{2}\int_0^{t'}[(y^{\cdot}-z)^2-(z^{\cdot}+y)^2]dt$$
$$\cdots\cdots(191)$$

いま，$0<t_1<t_2<\cdots<t_i<t_{i+1}<\cdots$ なる時刻 t_i における y および $y^{\cdot}(=z)$ の値を y_i および z_i として，$t_i\leq t\leq t_{i+1}$ における y および z を次のように仮定する．

$$\left.\begin{array}{l} y=\left(1-\dfrac{s}{\Delta t}\right)y_i+\dfrac{s}{\Delta t}y_{i+1} \\ z=\left(1-\dfrac{s}{\Delta t}\right)z_i+\dfrac{s}{\Delta t}z_{i+1} \end{array}\right\} 0\leq s\leq \Delta t$$
$$\cdots\cdots(192)$$

ただし，

$$s=t-t_i,\quad \Delta t=t_{i+1}-t_i \cdots\cdots(193)$$

式 (191) から，

$$\begin{aligned} &J_i(y_i,\ z_i,\ y_{i+1},\ z_{i+1}) \\ &=\frac{1}{2}\int_0^{\Delta t}\left[\left\{\frac{y_{i+1}-y_i}{\Delta t}-\left(1-\frac{s}{\Delta t}\right)z_i-\frac{s}{\Delta t}z_{i+1}\right\}^2\right. \\ &\left.-\left\{\frac{z_{i+1}-z_i}{\Delta t}+\left(1-\frac{s}{\Delta t}\right)y_i+\frac{s}{\Delta t}y_{i+1}\right\}^2\right]ds \end{aligned}$$
$$\cdots\cdots(194)$$

y_i および z_i を既知とすれば，$\delta J=0$ に対応して，

$$\frac{\partial J_i}{\partial y_{i+1}}=0,\quad \frac{\partial J_i}{\partial z_{i+1}}=0 \cdots\cdots(195)$$

とすることにより，次のマトリックス式を得る．

$$\begin{bmatrix} 1-\dfrac{(\Delta t)^2}{3} & -\Delta t \\ \Delta t & 1-\dfrac{(\Delta t)^2}{3} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} y_{i+1} \\ z_{i+1} \end{Bmatrix} =\begin{bmatrix} 1+\dfrac{(\Delta t)^2}{6} & 0 \\ 0 & 1+\dfrac{(\Delta t)^2}{6} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} y_i \\ z_i \end{Bmatrix} \cdots\cdots(196)$$

式 (196) を漸化的に解けば，各時刻 t_i における y および z の値が得られることになる．式 (196) は初期値問題の特性を利用したマトリックス式であるが，通常の境界値問題に見られるような有限要素マトリックス化も可能である．すなわち，

$$J=\sum_i J_i(y_i,\ z_i,\ y_{i+1},\ z_{i+1}) \cdots\cdots(197)$$

として，

$$\frac{\partial J}{\partial y_i}=0,\quad \frac{\partial J}{\partial z_i}=0 \quad i=1,\ 2,\ \cdots\cdots(198)$$

から，すべての y_i および $z_i(i=1,\ 2,\ \cdots)$ についてのマトリックス方程式を構成し，それを解く方法である．しかし，結果はまったく同一であり，後者は大次元のマトリックスを扱わなければならないので，それだけ労力を要することになる．

以上の有限要素法を他の数値解法と比較してみる．まず差分法であるが，式 (189) から後退型および前進型の差分法を考えることができる．また，原式 (186) から中央差分を考えることができる．この場合初期条件式 (187·b) をさらに差分近似する必要がある．有限要素法としては，停留二乗変分原理以外に Galerkin 法や最小二乗法に基づくものが考えられる．すなわち，式 (189) に対して，Galerkin 有限要素法では，変分式

表―1　cos t に対する数値結果

method / t		0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	1.2	1.4	1.571	1.6
Exact		0.980	0.921	0.825	0.697	0.540	0.362	0.170	0.000	−0.029
FDM	explicit	1.000	0.960	0.880	0.762	0.608	0.424	0.216	0.023	−0.009
	implicit	0.962	0.888	0.783	0.652	0.501	0.336	0.165	0.018	−0.006
	central	1.000	0.960	0.882	0.768	0.623	0.453	0.266	0.071	0.068
FEM	Galerkin	0.974	0.910	0.811	0.681	0.526	0.352	0.167	0.005	−0.022
	Hamilton	1.000	0.960	0.882	0.770	0.627	0.459	0.272	0.077	0.074
	least sq.	0.980	0.922	0.827	0.700	0.545	0.369	0.179	0.010	−0.019
	stat. sq.	0.980	0.921	0.825	0.697	0.540	0.362	0.170	0.000	−0.029

$$\int_0^{t'}(\dot{y}-z)\delta y dt=0,\quad \int_0^{t'}(\dot{z}+y)\delta z dt=0 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(199\cdot\mathrm{a,b})$$

最小二乗有限要素法では，汎関数

$$J=\int_0^{t'}[(\dot{y}-z)^2+(\dot{z}+y)^2]dt \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(200)$$

を基に試験関数（192）を用いることにする．さらに，Noble[29] のように原式（186）から Hamilton 原理を利用して有限要素法を展開することも可能である．

これらの数値結果を比較すると表―1 のようになる．他に比べて停留二乗有限要素法の結果は精度が良いことが分かる．しかし，より複雑な問題に対してもこれが有効であるかどうかはさらに検討が必要である．

本章のように初期値問題を有限要素積分によって扱うことは Noble[29]，Pian ら[30]および吉田ら[31]が示している．彼らの用いた変分原理は，Hamilton 原理（Noble），それに補正を加えたもの（Pian）およびコンプリメンタリ変分原理（吉田）であり，本論の変分原理と異なるものであるが，その特別なものと見ることもできる．停留二乗有限要素法を初期値問題に適用すると，互いに双対な量（例題では y と z）を未知とする一種の混合法[32]になるが，これも他と異なるところである．

6. おわりに

以上，最小二乗法の拡張としての停留二乗変分原理という概念に基づいて一般的な変分原理の展開が可能であることを示した．これはまた，相反原理の誘導に際しては，従来の Friedrichs 変換や正準変換を用いる考え方と異なるものであり，より簡明直截に完全相補な形式を与え得るように思われる．この考え方は線形境界値問題においては hypercircle 法と密接な関係を有し，境界値問題と同様に初期値問題にも適用され，ある種の非線形問題にも適用可能であることによって，hypercircle 法の拡張とも見られるものである．

本報告では紙面の都合もあって，力学の問題について述べ，その中でも簡単な場合を論ずるにとどまっている．しかしながら，同様の変分原理が他の分野（電磁気学，最適理論，ネットワークなど）の問題でも成立することは良く知られており，そのような問題に対しても力学のより複雑な問題も含めて本論の考え方が適用され得るはずである．

本論の考え方がどのように有効に応用されるかは，今後の研究に待たねばならないが，少なくとも著者は本論の考え方が従来の変分原理に統一的な視点を与える意味で有用であると考えている．本報告ではその応用性を示す一例として簡単な初期値問題の有限要素解析を試みているが，結果は良好であった．

7. 謝　辞

本報告を草するにあたり，常々ご指導をいただいている埼玉大学建設基礎工学科　奥村敏恵教授，また貴重なご教示とご討論をいただきました東京大学航空工学科
鷲津久一郎教授，船舶工学科　山本善之教授および日本鋼構造協会構造解析小委員会基礎理論研究班の委員各位に厚く感謝の意を表します．また，このような研究の機会を与えられた川崎重工鉄構事業部設計室長　岡田綜夫氏に厚く感謝いたします．

参 考 文 献

1) Arthurs A.M.: Complementary variational principles, Oxford University Press, 1967.
2) 加藤敏夫：変分法とその応用，応用数学講座，岩波書店，1957.
3) 林　毅・村外志夫：変分法，応用数学講座，コロナ社，1958.
4) Washizu K.: Variational methods in elasticity, and plasticity, Pergamon Press, 1968.
5) Noble B.: Complementary variational principles for boundary-value problems I. Basic principles, University of Wisconsin, Math. Res. Cen. Rep. 473, 1964.
6) Robinson P.D.: Complementary variational principles, in Nonlinear functional analysis and applications edited by L.B. Rall, Academic Press, 1971.
7) Noble B. and Sewell M.J.: On dual extremum principles in applied mathematics, University of Wisconsin, Math. Res. Cen. Rep. 1119, 1971.
8) 登坂宣好：境界値問題の近似解について，建築学会学術講演概要集，1973.
9) Synge J.L.: The hypercircle in mathematical physics, Cambridge University Press, 1957.
10) Oden J.T. and Reddy J.N.: Convergence of mixed

finite-element approximation of a class of linear boundary-value problems, J. Struct. Mech. 2(2), 1973.

11) 坂井藤一：最小二乗変分原理に基づく有限要素法（その2），第29回土木学会年次学術講演，1974-10.

12) 坂井藤一：コンプリメンタリ変分原理について，第30回土木学会年次学術講演，1975-10.

13) 坂井藤一：力学における変分原理の一般化について，日本鋼構造協会マトリックス構造解析シンポジウム論文集，1975-6.

14) 鷲津久一郎：弾性学の変分原理概論，コンピュータによる構造工学講座，培風館，1972.

15) Prager W.: Variational principles for elastic plates with relaxed continuity requirements, Int. J. Solids Structures, Vol. 4, 1968.

16) Hodge Jr. P.G.: A consistent finite element model for the two-dimensional continuum, Ingenier-Archiv, 39, 1970.

17) Trefftz E.: Ein Gegenstück zum Ritzschen Verfahren, Proc. 2nd Intern. Congress Appl. Mech., Zürich, 1926.

18) 藤野正隆：Hypercircle Method による制限水路中における2次元柱体の横方向付加質量の推定，日本造船学会論文集，第134号，1973-11.

19) Weinstein A.: New methods for the estimation of torsional rigidity, Proc. Symposium in Appl. Mech., Vol. 3, McGraw-Hill, 1950.

20) Kato T.: On some approximate methods concerning the operators T^*T, Math. Annalen, Bd. 126, 1953.

21) Fujita H.: Contribution to the theory of upper and lower bounds in boundary value problems, J. Physics Soc. Japan, 10, 1955.

22) Toupin R.A.: A variational principle for the mesh-type analysis of a mechanical system, J. Appl. Mech., ASME, June, 1957.

23) 坂井藤一：無限領域への波動伝播について，京都大学数理解析研究所「有限要素法の数学的基礎理論」講究録，1974.

24) Gladwell G.M.L. and Zimmermann G.: On energy and complementary energy formulations of acoustic and structural vibration problems, J. Sound Vib. 3(3), 1966.

25) Oran C.: Complementary energy method for buckling, Proc. ASCE, Vol. 93, No. EM 1, Feb., 1967.

26) Washizu K.: Note on the principle of stationary complementary energy applied to free Vibration of an elastic body, Int. J. Solids Structures, Vol. 2, 1966.

27) Biot M.A.: Variational principles in heat transfer, Oxford University Press, 1970.

28) 坂井藤一・河合三四郎：開水路における波動の有限要素法解析，土木学会論文報告集，第239号，1975-7.

29) Noble B.: Variational finite element methods for initial value problems, in the mathematics of finite elements and applications edited by J.R. Whiteman, Academic Press, 1973.

30) Pian T.H.H.: Recent developments in U.S.A. in finite element methods in engineering, 有限要素法に関する講習会テキスト，日本鋼構造協会，1974-11.

31) 吉田 裕・村田 修：構造物の動的応答解析における時間積分のアルゴリズム，日本鋼構造協会マトリックス構造解析シンポジウム論文集，1975-6.

32) Zienkiewicz O.C.: The Finite Element Method, Mc Graw-Hill, 1971.

（1975.9.26・受付）