

断面変形とせん断変形を考慮した長方形 薄肉断面はりの理論

THIN-WALLED RECTANGULAR BEAMS WITH SHEAR DEFORMATION AND CROSS SECTIONAL DISTORTION

西野文雄*・長谷川彰夫**・名取悦朗***

By Fumio NISHINO, Akio HASEGAWA and Etsuro NATORI

1. まえがき

軸方向力、曲げモーメントおよびねじれモーメントを受ける薄肉直線棒部材の力学は古くから多くの研究者の関心を集めている。柱やはりなどのいわゆる単一材では、断面寸法に比べて長さが十分に大きく、また断面を構成する板の厚みもそれほど大きくないのが普通である。このような場合には、曲げモーメントやそりねじれモーメントにともなうせん断変形の影響は一般に小さいため無視されることが多く、せん断変形としては St. Venant のねじれによるもののみが考慮されている。また断面変形の影響も小さいと考えられ無視されることが多い。このような条件のもとでは理論展開は比較的容易であり、微小変位のみならず有限変位の問題についても多くの研究成果が発表されている^{1)~3)}。

せん断変形の影響を考慮した棒部材の理論は、曲げを受けるはりについて主として振動問題に関連して古くから研究されている⁴⁾。薄肉断面の棒部材にねじれモーメントが作用したとき、何らかの形でそり変位が拘束されるとそれに伴って St. Venant のねじれによるせん断応力以外のせん断応力が発生する。このせん断応力によるせん断変形の影響を考慮した薄肉棒部材のねじれに関する研究が、Benscoter⁵⁾、Heilig⁶⁾、Grasse⁷⁾、Roik-Sedlacek⁸⁾、Kollbrunner-Hajdin⁹⁾、佐伯¹⁰⁾らによって報告されている。ここで導入されたせん断変形は、はりの曲げ理論で扱っているせん断変形と同じ意味を持つ量であり、St. Venant のねじれに伴うせん断変形に対して二次せん断変形とよばれている⁵⁾。曲げを受けるはりにおけるせん断変形の影響を考慮したいわゆる Timoshenko はりの理論での基本的な仮定の一つは、変形前

にはりの軸に垂直であった平面は、変形後はせん断変形のために垂直ではなくなるが、その場合にも平面は保持されているとする平面保持の仮定である。すなわちせん断ひずみは断面内で一様に分布すると仮定されている。いわゆる二次せん断変形を考慮した薄肉断面はりのねじれに関する理論でも、基本的にはこれと同じ仮定が採用されているが、基本式の誘導にあたって必ずしも明確に記述されていない。

曲げせん断における平面保持の仮定、あるいはねじれを受ける部材に対するこれと等価な仮定を用いるとき、断面内で変化しているせん断変形を代表する一つの値を選ばなければならない。曲げせん断の問題では、このせん断変形としてせん断応力によるひずみエネルギーと等価になるような仮想的なせん断変形が用いられている⁹⁾。ねじれの場合にも Heilig, Grasse, Roik-Sedlacekらは誘導過程には差があるにしても本質的にはせん断応力によるひずみエネルギーと等価になるようなせん断ひずみを用いている。これに対し佐伯はせん断応力がせん断中心のまわりに作るモーメントの向きに応じて、ひずみエネルギーを別々に計算し、そのおのおのによって生ずる反対向きの二次せん断変形を区別して求め、これをもとにして断面全体の二次せん断変形を決定している。このことはせん断変形による回転変位に対する自由度を2つ許していることになる。したがってせん断変形による回転変位に対する自由度を一つしか許さない理論体系のなかで佐伯のような取り扱いをすることには理論的な統一が欠けている疑いが残る。このため同じエネルギー原理を用いているにもかかわらず、佐伯の結果と前者の結果には差がみられる。また Benscoter と Kollbrunner-Hajdin はせん断変形の値として、せん断応力を単に平均化してせん断弾性係数で割った値を用いている。

柱やはりの力学的挙動におよぼす断面変形の影響は、断面を板要素に分割し、そのおのおのに薄板理論を適用して調べることができる。薄板理論を適用して、断面変

* 正会員 Ph. D. 東京大学助教授 工学部土木工学科

** 正会員 工博 名古屋工業大学助教授 土木工学科

*** 正会員 工修 石川島播磨重工業(株) 鉄構基本設計部

形を扱った研究に Bijlaard・Fisher¹¹⁾ の報告がある。その後、著しい発展をみせた折板理論や有限帯板法も薄板理論の発展したものであり、これらを用いて断面変形の影響を調べた研究も数多く報告されている^{12)~14)}。しかし薄板理論を用いる限り本質的には二次元の問題であり、断面形が複雑になり、さらに変断面の部材になると解を求めるのは困難なものになる。一方いわゆる棒理論は一次元の理論であり、二次元の理論と比較して一般に解は簡単に求まると考えられる。したがって棒理論で断面変形の影響を考慮できれば実用上有利であるとともに、棒部材としての力学的特性を把握するのに便利であろう。棒理論の範囲で断面変形の影響を扱った研究は比較的少ないが、その一つに閉断面構造を扱った Vlasov の研究がある³⁾。Vlasov は断面を構成する板それぞれが平面保持の仮定のもとで変位するものとして、部材の変位を断面構成板の交わる点での変位で表わし、この変位場ををもとに仮想仕事の原理を用いて、つり合い式を求めている。Vlasov の理論は断面変形のみならず、二次のせん断変形の影響をも含むものとなっている。坂井^{15), 16)} は Vlasov の基本式を長方形断面と逆台形断面を有するはりに適用し、数値計算を行ってダイヤフラムの効果について検討を加えている。Vlasov と同じ変位場を用い、Vlasov とは少し異なった形で仮想仕事の原理を用い、つり合い式を求めた研究に Jannsen・Veldpaus¹⁷⁾ の報告がある。同じ変位場が用いられているため、当然ながら Vlasov と同じ結果が得られている。しかし、Vlasov の理論では力学的な仮定を明確にせず座標、変位、力などを一般化した形で与えているため、一般に用いられるはり理論¹⁸⁾ との対応関係、さらには解を求めるために必要な境界条件が必ずしも明らかにされていない。

ここではせん断変形と断面変形を考慮した棒理論の基礎方程式を、変位場に対する明確な仮定と仮想仕事の原理から求め、その結果について報告する。この誘導過程を通して Vlasov の理論の棒理論としての力学的な意味を明らかにすることもこの報告の一つの目的である。

仮想仕事の原理を用いるにあたっては変位場を決めることが最も重要であり、これによってその理論のすべてが決まる¹⁸⁾。ここでは、理論の本質を失わない範囲で取り扱いを簡単にするために構成板要素がそれぞれ等厚である二軸対称の長方形薄肉断面の直線部材をとりあげる。棒部材中のひずみ分布に適当な仮定を用い、三次元の連続体の微小変位理論によるひずみと変位の関係を積分して断面変形とせん断変形を考慮した一次元の棒理論に適用し得る変位場を求め、これをもとに断面変形とせん断変形を考慮した棒理論の基礎式を求める。変位場を求めるためにひずみ分布に対して次の仮定をおく：

(1) 板厚方向の伸び縮みはない。板厚中心線は伸び縮みしない。断面内において板厚中心線に垂直な線素は、変形後も板厚中心線に対し直角を保つ。

(2) 部材軸に平行な面内に St. Venant のねじれによるものを除くせん断応力が存在するとき、この応力の断面内での分布には無関係にこの応力による変位、回転角、断面変形量の軸方向の変化率は断面内で一定とする。この仮定は曲げを受けるはりについて Timoshenko はりの問題で考えられているせん断ひずみに対する仮定をねじれ変形と断面変形が生ずる場合に拡張したものである。

2. ひずみと変位の関係

解析の対象とする板幅 $2b$ 、板厚 t_2 のフランジと板幅 $2h$ 、板厚 t_1 のウェブを持つ二軸対称の長方形薄肉断面を Fig. 1(a) に示す。ここでは部材上の点を表わすのに 2 組の座標を用いる。その一つは断面の圆心を原点とし、対称軸を x, y 軸とする直交デカルト座標系 (x, y, z) であり、ほかの一つは直交曲線座標系 (s, n, z) である。ここに s は断面の板厚中心線に沿ってとった座標であり、その中心線上の任意点 O に原点をもつ。また n は板厚中心線を原点とし、これに垂直な座標である。部材軸に平行に両座標系に共通な z 軸を選ぶ。この二つの座標はともに右手座標系とする。

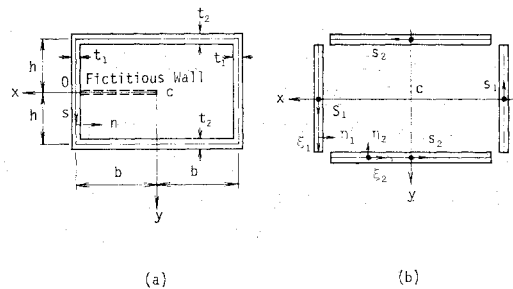


Fig. 1 Cross Section and Coordinates : (a) Cross Section and Coordinates; (b) Coordinates for Individual Plates

Fig. 1(a) に示す断面では座標系 (s, n, z) は断面の隅角部を除いて直交直線座標となるので微小変位理論によるひずみと変位の関係は

$$\epsilon_s = \frac{\partial \xi}{\partial s}, \quad \epsilon_n = \frac{\partial \eta}{\partial n}, \quad \epsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} \dots\dots\dots (2.1 \cdot a \sim c)$$

$$\gamma_{sn} = \frac{\partial \eta}{\partial s} + \frac{\partial \xi}{\partial n}, \quad \gamma_{nz} = \frac{\partial w}{\partial n} + \frac{\partial \eta}{\partial z}, \quad \gamma_{sz} = \frac{\partial \xi}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial s} \dots\dots\dots (2.1 \cdot d \sim f)$$

ここに $\epsilon_s, \epsilon_n, \epsilon_z, \gamma_{sn}, \gamma_{nz}, \gamma_{sz}$ はひずみの成分であり、 ξ, η, w はそれぞれ s, n, z 方向への変位である。

仮定の (1) を数式で表わすとひずみに関して

$\epsilon_n=0, (\epsilon_s)_{n=0}=0, \gamma_{sn}=0 \dots\dots\dots(2.2\cdot a\sim c)$
と表わせる。式 (2.1\cdot b, d) を仮定の式 (2.2\cdot a, c) に代入し、積分すると、従属変数としての変位 ξ, η と独立変数 s, n, z の関数関係が求まり

$$\eta = \eta(s, z), \quad \xi = -n \frac{\partial \eta(s, z)}{\partial s} + \xi_0(s, z) \dots\dots(2.3\cdot a, b)$$

式 (2.3\cdot b) を式 (2.1\cdot a) に代入し積分したのち仮定の式 (2.2\cdot b) を用いると ξ_0 は z のみの関数となる。

$$\xi_0 = \xi_0(z) \dots\dots\dots(2.3\cdot c)$$

ひずみ分布に対する仮定を積分して変位を決めるときにあらわれる積分定数を定めるために、Fig. 2 に示す図心の x, y 方向への剛体変位 $u_s(z), v_s(z)$ 、剛体回転角 $\varphi(z)$ および角変化 $\psi(z)$ で表わされる断面変形量を用いる。Fig. 2(d) に示す断面変形を許して長方形薄肉断面の隅角部を剛結とすると構成板要素の板曲げによる n 方向への変位 η が発生し、板要素には板面に垂直な成分を持つ分布荷重が直接作用しないものと仮定すると座標 s に関する 3 次式の成分を持つ。Fig. 1(b) に示す構成板要素の座標 s_1, s_2 と変位 $\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2$ を用いると長方形薄肉断面の板厚中心線上的変位は次のように与えられる。

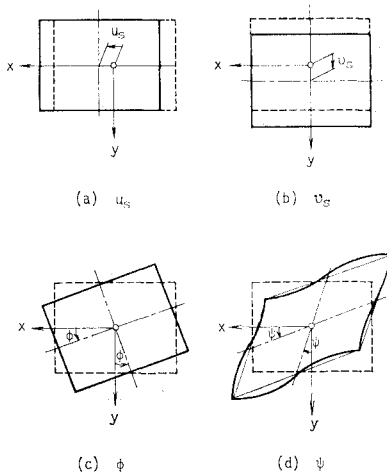


Fig. 2 Independent Displacement Components

$$(\xi_1)_{n=0} = v_s + b(\varphi + \psi) \dots\dots\dots(2.4\cdot a)$$

$$\eta_1 = \frac{J_b}{hA_0} \psi s_1^3 + (\varphi - \psi - \frac{hJ_b}{A_0} \psi) s_1 - u_s \dots\dots(2.4\cdot b)$$

$$(\xi_2)_{n=0} = -u_s + h(\varphi - \psi) \dots\dots\dots(2.4\cdot c)$$

$$\eta_2 = -\frac{J_b}{bA_0} \psi s_2^3 + (\varphi + \psi + \frac{bJ_b}{A_0} \psi) s_2 - v_s \dots\dots(2.4\cdot d)$$

ここに

$$J_h = \frac{t_1^3}{12}, \quad J_b = \frac{t_2^3}{12}, \quad A_0 = bJ_h + hJ_b \dots\dots(2.5\cdot a\sim c)$$

式 (2.4) の右辺で長方形薄肉断面の構成板要素の板曲げ剛性 J_b, J_h を含む成分は板曲げによる変位成分であり、 n 方向への変位 η_1, η_2 のみに表われ、 s に関する 3

次式となる。したがって隅角部がモーメントを伝達しないピン構造の場合には分子の J_b, J_h を含む項を零とすればよい。この場合の断面変形による変位は Fig. 2(d) の細実線で表わされる。式 (2.4) の誘導の詳細を補遺 1 に示す。

方向余弦 l, m を次のように定義する。

$$l = \cos(s, x), \quad m = \cos(s, y) \dots\dots\dots(2.6\cdot a, b)$$

Fig. 1 の長方形断面ではウェブの方向余弦 l_1, m_1 とフランジの方向余弦 l_2, m_2 は次のように与えられる。

$$l_1 = 0, \quad m_1 = 1, \quad l_2 = -1, \quad m_2 = 0 \dots\dots\dots(2.7\cdot a\sim d)$$

式 (2.7) を考慮し、式 (2.4) の結果を用いると式 (2.3) の変位 ξ, η は断面の独立な変位 $u_s(z), v_s(z), \varphi(z), \psi(z)$ によって次のように表わせる。

$$\xi = lu_s + mv_s + \rho_s \varphi + \{\rho_{s1} + 2n(m^2 - l^2) - n\alpha\} \psi \dots\dots\dots(2.8\cdot a)$$

$$\eta = -mu_s + lv_s + \rho_n \varphi + (\rho_{n1} + \alpha) \psi \dots\dots\dots(2.8\cdot b)$$

ここで $\rho_s, \rho_{s1}, \rho_n, \rho_{n1}$ は次のように定義される断面上の位置に依存する量である。

$$\rho_s = xm - yl, \quad \rho_{s1} = xm + yl \dots\dots\dots(2.9\cdot a, b)$$

$$\rho_n = xl + ym, \quad \rho_{n1} = xl - ym \dots\dots\dots(2.9\cdot c, d)$$

式 (2.8\cdot a) の (\cdot) は s に関する微分を表わす。 α は s のみの関数で、長さの次元を持つ量であり、

$$\alpha(s) = \begin{cases} \frac{J_h}{hA_0} (s_1^3 - h^2 s_1) \dots\dots\dots(2.10\cdot a) \\ \frac{J_b}{bA_0} (-s_2^3 + b^2 s_2) \dots\dots\dots(2.10\cdot b) \end{cases}$$

式 (2.8) は式 (2.3) の関数関係を満たし、したがって変位場の仮定を表わす式 (2.2) を満足する。すなわち式 (2.8) に示す変位 ξ, η は変位場の仮定 (1) を満足する変位場を表わしている。

独立な変位 u_s, v_s, φ, ψ による板厚中心線での s 方向への変位 ξ の成分 l, m, ρ_s, ρ_{s1} の断面上の分布を Fig.

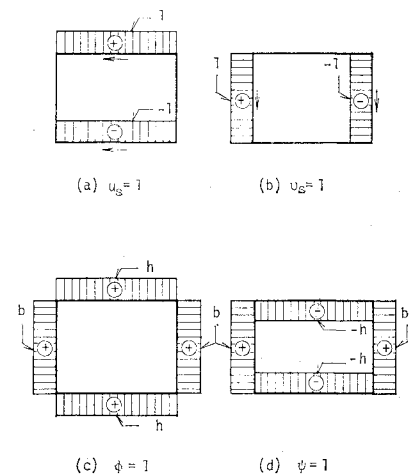


Fig. 3 Displacement ξ due to Unit Independent Displacements

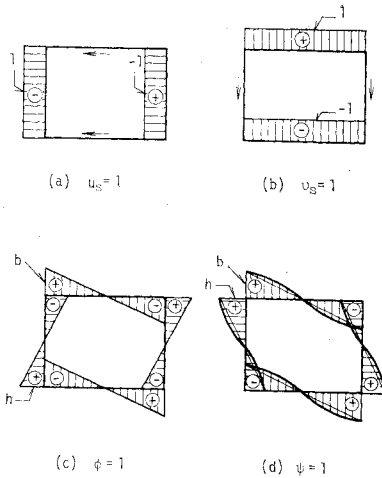


Fig. 4 Displacement η due to Unit Independent Displacements

3 に, n 方向への変位 η の成分 $m, l, \rho_n, \rho_{n1} + \alpha$ の断面上の分布を Fig. 4 に示す. 長方形薄肉断面の隅角部がモーメントを伝達しないピン構造の場合には, 式 (2.10) より式 (2.8・b) の α は零となり, Fig. 4(d) は ρ_n のみとなるため各板要素間で直線変化する.

x, y 方向への変位 u, v と s, n 方向への変位 ξ, η との間には次の幾何学的な関係が存在する.

$$u = l\xi - m\eta, \quad v = m\xi + l\eta \dots\dots\dots(2.11 \cdot a, b)$$

式 (2.8) を式 (2.11) に代入し, $lm=0, l^2=l, m^2=m$ に注意すれば

$$u = u_s - y\varphi + y\psi - (m\alpha + ln\alpha + 2ln)\psi \dots\dots\dots(2.12 \cdot a)$$

$$v = v_s + x\varphi + x\psi + (l\alpha - mn\alpha + 2mn)\psi \dots\dots\dots(2.12 \cdot b)$$

板厚中心線上 ($n=0$) での量を () * で表わすと, 断面上の一般の点の x, y 座標は中心線上の x, y 座標, (x^*, y^*) と n 座標を用いて

$$x = x^* - mn, \quad y = y^* + ln \dots\dots\dots(2.13 \cdot a, b)$$

と表わされる. また $\rho_s, \rho_{s1}, \rho_n, \rho_{n1}$ については

$$\rho_s = \rho_s^* - n, \quad \rho_{s1} = \rho_{s1}^* - n(m^2 - l^2) \dots\dots\dots(2.14 \cdot a, b)$$

$$\rho_n = \rho_n^*, \quad \rho_{n1} = \rho_{n1}^* \dots\dots\dots(2.14 \cdot c, d)$$

の関係が成立する.

曲げとねじれモーメントを受ける薄肉棒部材の理論では, オイラー・ベルヌーイの仮定は sz 面, nz 面内のせん断ひずみ γ_{sz}, γ_{nz} を用いて次のように表わされる¹⁸⁾.

$$\gamma_{sz}^* = \frac{qA^*}{Gt}, \quad \gamma_{nz} = 0 \dots\dots\dots(2.15 \cdot a, b)$$

ここに $qA^* = (\tau_{sz}^* t)_{s=s_A}$ であり, s_A は長方形薄肉断面上に任意に選んだ点の s 座標である.

式 (2.15) では St. Venant のねじれにともなうせん断応力によるせん断変形は考慮されているが, 曲げせん断, そり拘束ねじれ, 断面変形に伴うせん断応力によるせん断変形は考慮されていない. 後者のせん断変形を

考慮すると一般にはそれを無視した場合に対し変位が変化する. 微小区間 dz だけ離れた 2 つの断面を考え, この断面内の任意の一点の近辺に注目する. 考えている点の近辺のせん断変形による変位は解析の便のため z 軸に垂直に生ずるものとする^{注)}. すなわちせん断変形による軸方向変位 $w^s = 0$ とする. せん断変形のみによる変位を $u^s, v^s, \varphi^s, \psi^s$ とすると dz だけ離れた 2 点に生じる相対変位は $\frac{\partial u^s}{\partial z} dz, \frac{\partial v^s}{\partial z} dz, \frac{\partial \varphi^s}{\partial z} dz, \frac{\partial \psi^s}{\partial z} dz$ と表わされる. このせん断変形による相対変位を式 (2.8), (2.1・e, f) を用いてせん断ひずみになおし,

$$\frac{\partial w^s}{\partial s} = \frac{\partial \tau w^s}{\partial n} = 0$$

に注意すると sz 面, nz 面に生ずるせん断変形によるせん断ひずみは, この相対変位に式 (2.15) を加えて, 次のように表わされる.

$$\gamma_{sz}^* = \frac{qA^*}{Gt} + l(u^s)' + m(v^s)' + \rho_s^*(\varphi^s)' + \rho_{s1}^*(\psi^s)' \dots\dots\dots(2.16 \cdot a)$$

$$\gamma_{nz} = -m(u^s)' + l(v^s)' + \rho_n(\varphi^s)' + (\rho_{n1} + \alpha)(\psi^s)' \dots\dots\dots(2.16 \cdot b)$$

ここに () ' は z に関する微分を示す.

一般には, $u^s, v^s, \varphi^s, \psi^s$ は s, n, z の関数であり, その値は z 軸方向のほか, 断面内の位置によって変化する. 平面保持の仮定のもとでせん断変形を考えた Timoshenko はりの理論では $(u^s)', (v^s)'$ を z のみの関数とし, 断面内では変化しないと仮定している. 本報告では変位場に対する仮定 (2) で述べたようにこの平面保持の仮定を拡張し, せん断変形に伴うねじれ変位 φ^s , 断面変形による変位 ψ^s も z のみの関数であると仮定する. せん断変形によるせん断ひずみに関連した量であることを表わすために $(u^s)', (v^s)', (\varphi^s)',$ および $(\psi^s)'$ を r を用いて次のように表わす.

$$(u^s)' = r_u(z), \quad (v^s)' = r_v(z) \dots\dots\dots(2.17 \cdot a, b)$$

$$(\varphi^s)' = r_\varphi(z), \quad (\psi^s)' = r_\psi(z) \dots\dots\dots(2.17 \cdot c, d)$$

式 (2.17・c, d) の r_φ, r_ψ はひずみの次元量ではないが, その特性を示すため, このようにせん断ひずみを表わすのと同じ記号 r で表わす. 式 (2.17) を式 (2.16) に代入すると

$$\gamma_{sz}^* = \frac{qA^*}{Gt} + l r_u + m r_v + \rho_s^* r_\varphi + \rho_{s1}^* r_\psi \dots\dots\dots(2.18 \cdot a)$$

$$\gamma_{nz} = -m r_u + l r_v + \rho_n r_\varphi + (\rho_{n1} + \alpha) r_\psi \dots\dots\dots(2.18 \cdot b)$$

応力場での力学的条件を考えると nz 面でのせん断ひずみ γ_{nz} を零とおくことも可能である. しかし, 薄肉断面

注) せん断変形を拘束して載荷した後, 拘束を除くと, せん断変形に応じて $\gamma_{sz} = \partial w^s / \partial s + \partial \xi^s / \partial z$ を満足する i_s, i_z 方向への変位 ξ^s, w^s が生じる. この 2 つの変位成分の割合は境界条件, 荷重条件によって決まるものであり, 微小要素について考えている段階では γ_{sz} のみが問題で, $\partial \xi^s / \partial z, \partial w^s / \partial s$ の配分は問題とならない. したがって $\partial w^s / \partial z = 0$ としても一般性を失わない.

部材を一次元の棒部材として理論的に取り扱う場合、変位場と応力場は一般には区別して扱われ、変位場について吟味しているここでは、解析の便のため nz 面でのせん断ひずみ γ_{nz} として式 (2.18・b) を用いる。その結果、本報告で取り扱っている変位場では $w, u_s, v_s, \varphi, \psi$ のほかに新たに $\tau_{us}, \tau_{vs}, \tau_\varphi, \tau_\psi$ の独立な変位成分が導入されている。

z 方向への変位 w を式 (2.18) のひずみと、 s, n 方向への変位 ξ, η から求める。式 (2.1・f) に式 (2.8・a), (2.18・a) を代入し積分すると

$$w^* = c(z) - (x^* - x_0^*)(u_s' - \gamma_u) - (y^* - y_0^*)(v_s' - \gamma_v) - (\varphi' - \tau_\varphi) \int_0^s \rho_s^* ds - (\psi' - \tau_\psi) \int_0^s \rho_{s1}^* ds + \frac{q_A^*}{G} \int_0^s \frac{ds}{t} \quad (2.19)$$

ここに $c(z)$ は積分定数、 x_0^*, y_0^* は任意に選んだ s 座標の原点 O の x, y 座標である。式 (2.1・f) の右辺の ξ に式 (2.8・a) を用いたことから明らかなように、式 (2.19) 中の変位 u_s, v_s, φ, ψ は部材に発生する直応力による変位にせん断応力による変位を加えた全体の変位である。未知のせん断流 q_A^* は変位 w^* の閉区間での連続条件、すなわち任意の点 s と周長を s_l として s から一周した点 $s + s_l$ で

$$w^*(s) = w^*(s + s_l) \quad (2.20)$$

から決まる。式 (2.19) を式 (2.20) に代入し、 $\oint \rho_{s1}^* ds = 0$ に注意すると

$$q_A^* = G \oint \frac{\rho_s^* ds}{t} (\varphi' - \tau_\varphi) \quad (2.21)$$

式 (2.1・e) に式 (2.8・b), (2.18・b) を代入し積分すると

$$w = w^* + n \{ m(u_s' - \gamma_u) - l(v_s' - \gamma_v) - \rho_n(\varphi' - \tau_\varphi) - (\rho_{n1} + \alpha)(\psi' - \tau_\psi) \} \quad (2.22)$$

ここに w^* は積分定数であり、 $(s, n=0, z)$ での z 方向への変位を表わす。式 (2.19), (2.21) を式 (2.22) に代入すると

$$w = c(z) - (x - x_0^*)(u_s' - \gamma_u) - (y - y_0^*)(v_s' - \gamma_v) - (\Omega^* + \rho_n n)(\varphi' - \tau_\varphi) - \{ \Omega_1^* + (\rho_{n1} + \alpha)n \} (\psi' - \tau_\psi) \quad (2.23)$$

ここに

$$\Omega^* = \int_0^s \rho_s^* ds - \oint \frac{\rho_s^* ds}{t} \int_0^s \frac{ds}{t}, \quad \Omega_1^* = \int_0^s \rho_{s1}^* ds \quad (2.24 \cdot a, b)$$

x, y 座標の原点 C を長方形断面の図心に選んでいるので薄肉断面上にない点 C の変位を式 (2.23) では表わすことができない。ここでは便宜上、式 (2.23) の積分定数 $c(z)$ を原点 C の変位を用いて表わすために、原点 C と s 座標の原点 O の間を仮定の板厚 $t=0$ の薄板で

結ぶ。このようにしても $t=0$ であるためにこの仮想板は断面の力学的性質に影響をおよぼすことはない。この結果、原点 C の z 軸方向の変位が定義できるようになる。仮想板に沿って定義される原点 C の s 座標を s_c と表わし

$$\int_0^{s_c} \rho_{s1}^* ds = -x_0^* y_0^* \quad (2.25)$$

となることに注意すると、積分定数 $c(z)$ は原点 C の z 方向変位 w_c を用いて次のように表わせる。

$$c(z) = w_c - x_0^*(u_s' - \gamma_u) - y_0^*(v_s' - \gamma_v) + \Omega_c^*(\varphi' - \tau_\varphi) - x_0^* y_0^*(\psi' - \tau_\psi) \quad (2.26)$$

ここに

$$\Omega_c^* = \int_0^{s_c} \rho_s^* ds \quad (2.27)$$

式 (2.26) を式 (2.23) に代入すると、式 (2.2) と式 (2.18) で表わされる変位場の仮定を満足する z 方向変位 w として次式を得る。

$$w = w_c - x\lambda_u - y\lambda_v - \omega\lambda_\varphi - \omega_1\lambda_\psi \quad (2.28)$$

ここに $\lambda_u, \lambda_v, \lambda_\varphi, \lambda_\psi$ は z のみの関数であり

$$\lambda_u = u_s' - \gamma_u, \quad \lambda_v = v_s' - \gamma_v \quad (2.29 \cdot a, b)$$

$$\lambda_\varphi = \varphi' - \tau_\varphi, \quad \lambda_\psi = \psi' - \tau_\psi \quad (2.29 \cdot c, d)$$

式 (2.15・a), (2.18・a), (2.29) から明らかなように $\lambda_u, \lambda_v, \lambda_\varphi, \lambda_\psi$ はせん断変形としては St. Venant のねじれに伴うせん断応力によるせん断変形のみを考慮した場合の xz 面内のたわみ角, yz 面内のたわみ角, ねじれ率, 断面変形の軸方向の変化率を示す。式 (2.28) の x, y, ω, ω_1 は断面の座標 s, n の関数で ω, ω_1 は次のように与えられる。

$$\omega = \Omega^* + \rho_n n - \Omega_c^* \quad (2.30 \cdot a)$$

$$\omega_1 = \Omega_1^* + (\rho_{n1} + \alpha)n + x_0^* y_0^* \quad (2.30 \cdot b)$$

ここで ω は断面の回転 φ によって生ずる軸方向変位の断面上の分布を表わし一般に単位そりとよばれているものである。 ω_1 は断面変形を認めたことにより新たに導入された量で断面変形 ψ によって生ずる軸方向変位の断面上の分布を表わし ω に対応する。

式 (2.8), (2.28) を式 (2.1・a, c, e, f) に代入すると

$$\epsilon_s = -n\alpha\psi \quad (2.31 \cdot a)$$

$$\epsilon_z = w_c' - x\lambda_u' - y\lambda_v' - \omega\lambda_\varphi' - \omega_1\lambda_\psi' \quad (2.31 \cdot b)$$

$$\gamma_{nz} = -m(u_s' - \lambda_u) + l(v_s' - \lambda_v) + \rho_n(\varphi' - \lambda_\varphi) + (\rho_{n1} + \alpha)(\psi' - \lambda_\psi) \quad (2.31 \cdot c)$$

$$\gamma_{sz} = \theta\lambda_\varphi + l(u_s' - \lambda_u) + m(v_s' - \lambda_v) + \rho_s(\varphi' - \lambda_\varphi) + \rho_{s1}(\psi' - \lambda_\psi) + \theta_1\psi' - n\alpha(\psi' + \lambda_\psi) \quad (2.31 \cdot d)$$

ここに

$$\theta = \frac{1}{t} \oint \frac{\rho_s^* ds}{t} - 2n, \quad \theta_1 = 2n(m^2 - l^2) \quad (2.32 \cdot a, b)$$

式 (2.31・d) に示すせん断ひずみ γ_{sz} の内、右辺の第 6, 7 項は板厚中心線上 $n=0$ で零となる。このとき、第 1 項が St. Venant のねじれによるせん断ひずみ、第

2~5 項が式 (2.17) で与えせん断変形によるせん断ひずみを表わし、力学的にわかりやすい形となっている。座標系 (s, n, z) でのひずみの 6 成分のうち、 ϵ_n と γ_{sn} は式 (2.2・a, c) により零である。すなわち変位場に対して式 (2.2), (2.18) で表わされる仮定をおいたとき、この仮定を満足する変位場は式 (2.8), (2.28) で表わされ、仮定した成分以外のひずみ成分は式 (2.31) で表わされる。

3. つり合い式と境界条件

分布して作用する外力と両端断面に作用する表面力を受け、空間でつり合っている長方形薄肉断面の直線はりを考える。分布外力を

$$q_d = q_{dx}i_x + q_{dy}i_y + q_{dz}i_z \dots\dots\dots(3.1)$$

と表わす。 i_x, i_y, i_z は x, y, z 軸に平行でその座標軸の正の方向を向く単位ベクトル、 q_d は分布外力ベクトルの単位体積あたりの値、 q_{dx}, q_{dy}, q_{dz} はそれぞれ q_d の i_x, i_y, i_z 方向への成分である。部材の両端の断面に作用する表面力ベクトルを

$$p_s = p_{ss}i_s + p_{sn}i_n + p_{sz}i_z \dots\dots\dots(3.2)$$

と表わす。 i_s, i_n は s, n 軸に平行でその座標軸の正の方向を向く単位ベクトル、 p_s は表面力ベクトルの単位面積あたりの値、 p_{ss}, p_{sn}, p_{sz} はそれぞれ p_s の i_s, i_n, i_z 方向への成分である。

長方形薄肉断面の直線はりに生ずるひずみ分布は式 (2.31) で与えられているので、このはりに対する仮想仕事の原理は次のように表わされる¹⁹⁾。

$$\int_{z_1}^{z_2} \int_A [\sigma_x \delta \epsilon_x + \sigma_z \delta \epsilon_z + \tau_{nz} \delta \gamma_{nz} + \tau_{sz} \delta \gamma_{sz}] dA dz \\ = \int_{z_1}^{z_2} \int_A [q_{dx} \delta u + q_{dy} \delta v + q_{dz} \delta w] dA dz \\ + \int_A [k \int_{z_1}^{z_2} (p_{ss} \delta \xi + p_{sn} \delta \eta + p_{sz} \delta w) dA]_{z_1}^{z_2} \dots\dots(3.3)$$

ここに A は断面積、 k は断面の外向き単位法線ベクトルの z 方向の成分、 z_1, z_2 ($z_1 < z_2$) は直線はりの両端の z 座標を表わす。ここでは部材軸と平行に z 軸を選んでいるので

$$k = \begin{cases} -1 & (z = z_1) \\ 1 & (z = z_2) \end{cases} \dots\dots\dots(3.4)$$

式 (2.8), (2.12), (2.28) および (2.31) を式 (3.3) に代入し部分積分すれば

$$\int_{z_1}^{z_2} [N' + q_z] \delta w_c dz + [(\bar{N} - N) \delta w_c]_{z_1}^{z_2} \\ + \int_{z_1}^{z_2} [M_x'' + q_x + m_x'] \delta u_s dz \\ + \int_{z_1}^{z_2} [M_x' - V_x + m_x] \delta \gamma_u dz \\ + [(M_x - \bar{M}_x) \delta \lambda_u]_{z_1}^{z_2} + [(\bar{V}_x - M_x' - m_x) \delta u_s]_{z_1}^{z_2}$$

$$+ \int_{z_1}^{z_2} [M_y'' + q_y + m_y'] \delta v_s dz \\ + \int_{z_1}^{z_2} [M_y' - V_y + m_y] \delta \gamma_v dz + [(M_y - \bar{M}_y) \delta \lambda_v]_{z_1}^{z_2} \\ + [(\bar{V}_y - M_y' - m_y) \delta v_s]_{z_1}^{z_2} \\ + \int_{z_1}^{z_2} [M_w'' + T_s' + m_t + m_w'] \delta \varphi dz \\ + \int_{z_1}^{z_2} [M_w' - T_w + m_w] \delta \gamma_\varphi dz \\ + [(M_w - \bar{M}_w) \delta \lambda_\varphi]_{z_1}^{z_2} \\ + [(\bar{T} - M_w' - T_s - m_w) \delta \varphi]_{z_1}^{z_2} \\ + \int_{z_1}^{z_2} [M_{w1}'' + T_{s1}' + N_{\alpha n} - 2 T_{\alpha n}' + m_{w1}' + m_Q] \delta \psi dz \\ + \int_{z_1}^{z_2} [M_{w1}' - T_Q - T_{\alpha n} - T_\alpha + m_{w1}] \delta \gamma_\psi dz \\ + [(M_{w1} - \bar{M}_{w1}) \delta \lambda_\psi]_{z_1}^{z_2} \\ + [(\bar{T}_Q - T_{s1} + 2 T_{\alpha n} - M_{w1}' - m_{w1}) \delta \psi]_{z_1}^{z_2} \\ = 0 \dots\dots\dots(3.5)$$

式 (3.5) では表示を簡単にするため、内部応力による断面力、体積力 q_d による分布外力、および表面力 p_s による端部外力を次のように定義し、これらを用いた。定義された断面力は

$$N = \int_A \sigma_x dA, \quad M_x = \int_A \sigma_x x dA, \quad M_y = \int_A \sigma_x y dA \dots\dots\dots(3.6 \cdot a \sim c)$$

$$M_w = \int_A \sigma_z \omega dA, \quad M_{w1} = \int_A \sigma_z \omega_1 dA \dots\dots\dots(3.6 \cdot d, e)$$

$$V_x = \int_A (\tau_{sz} l - \tau_{nz} m) dA, \quad V_y = \int_A (\tau_{sz} m + \tau_{nz} l) dA \dots\dots\dots(3.6 \cdot f, g)$$

$$T_s = \int_A \tau_{sz} \theta dA, \quad T_w = \int_A (\tau_{sz} \rho_s + \tau_{nz} \rho_n) dA - T_s \dots\dots\dots(3.6 \cdot h, i)$$

$$T_Q = \int_A (\tau_{sz} \rho_{s1} + \tau_{nz} \rho_{n1}) dA \dots\dots\dots(3.6 \cdot j)$$

$$T_{s1} = \int_A \tau_{sz} \theta_1 dA, \quad T_{\alpha n} = \int_A \tau_{sz} n \alpha dA \dots\dots\dots(3.6 \cdot k, l)$$

$$T_\alpha = \int_A \tau_{nz} \alpha dA, \quad N_{\alpha n} = \int_A \sigma_{sn} \alpha dA \dots\dots\dots(3.6 \cdot m, n)$$

分布外力と端部外力は

$$q_x = \int_A q_{dx} dA \dots\dots\dots(3.7 \cdot a)$$

$$q_y = \int_A q_{dy} dA, \quad q_z = \int_A q_{dz} dA \dots\dots\dots(3.7 \cdot b, c)$$

$$m_x = \int_A q_{dx} x dA, \quad m_y = \int_A q_{dx} y dA \dots\dots\dots(3.7 \cdot d, e)$$

$$m_w = \int_A q_{dz} \omega dA, \quad m_{w1} = \int_A q_{dz} \omega_1 dA \dots\dots\dots(3.7 \cdot f, g)$$

$$m_Q = \int_A \{ q_{dy} (x + l\alpha - m n \alpha + 2 m n) \\ + q_{dx} (y - m\alpha - l n \alpha - 2 l n) \} dA \dots\dots\dots(3.7 \cdot h)$$

$$m_t = \int_A (q_{dy} x - q_{dx} y) dA \dots\dots\dots(3.7 \cdot i)$$

$$\left. \begin{aligned} \bar{N} &= \int_A p_{ss} dA, \quad \bar{M}_x = \int_A p_{sx} x dA \\ \bar{M}_y &= \int_A p_{sz} y dA, \quad \bar{M}_w = \int_A p_{sz} \omega dA \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(3.7 \cdot j \sim m)$$

$$\left. \begin{aligned} \bar{M}_{w1} &= \int_A p_{sz} \omega_1 dA, \quad \bar{V}_x = \int_A (\rho_{ss} l - \rho_{sn} m) dA \\ \bar{V}_y &= \int_A (\rho_{ss} m + \rho_{sn} l) dA \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(3.7 \cdot n \sim p)$$

$$\left. \begin{aligned} \bar{T} &= \int_A (\rho_{ss} \rho_s + \rho_{sn} \rho_n) dA \\ \bar{T}_Q &= \int_A \{ \rho_{ss} (\rho_{s1} + \theta_1 - n\alpha) + \rho_{sn} (\rho_{n1} + \alpha) \} dA \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(3.7 \cdot q \sim r)$$

上付きの棒は両端断面での表面力に起因する端部外力を表わす。式(3.6)では、断面形不変の仮定のもとでの薄肉断面部材に関する理論に表われる断面力のほか、断面変形を考慮したために新たに M_{w1} , T_Q , T_{s1} , T_{an} , T_a , N_{an} が表われている。回転変位 φ , 単位そり ω に関連する断面力としてバイモーメント M_w , St. Venant のねじれモーメント T_s , そりねじれモーメント T_w が存在するのに対し、断面変形 ψ , 断面変形による単位そり ω_1 に関連する断面力として M_{w1} , T_{s1} , T_Q が存在している。 T_{an} , T_a , N_{an} は式(2.10)で定義した α をその積分中に含むものであり、長方形薄肉断面の隅角部がピン結合で、構成板要素が面外曲げ変形をしない場合には零となる。式(3.7・a~i)は分布外力 q_d により生ずるはりの単位長さあたりの外力を示す。ここでは断面変形を考慮したためにこの変形に対応する外力として m_{w1} , m_Q が定義されている。式(3.7・j~r)は端部の表面力 p_s により生ずる端部外力を示す。ここでも断面変形を考慮したのに伴って、 \bar{M}_{w1} , \bar{T}_Q が定義されている。

任意の仮想変位に対して式(3.5)が成立するための必要十分条件として、つり合い方程式と、変位および力学的境界条件が得られる。すなわち $z_1 < z < z_2$ において次に示すように9個の未知な独立変位 $w, u_s, \tau_u, v_s, \tau_v, \varphi, \tau_\varphi, \psi, \tau_\psi$ に対応して9個のつり合いの微分方程式を得る。

$$\begin{aligned} N' + q_z &= 0 \dots\dots\dots(3.8 \cdot a) \\ M_x'' + q_x + m_x' &= 0, \quad M_x' - V_x + m_x = 0 \dots\dots(3.8 \cdot b, c) \\ M_y'' + q_y + m_y' &= 0, \quad M_y' - V_y + m_y = 0 \dots\dots(3.8 \cdot d, e) \\ M_w'' + T_s' + m_t + m_w' &= 0 \dots\dots\dots(3.8 \cdot f) \\ M_w' - T_w + m_w &= 0 \dots\dots\dots(3.8 \cdot g) \\ M_{w1}'' + T_{s1}' + N_{an} - 2 T_{an}' + m_{w1}' + m_Q &= 0 \dots\dots\dots(3.8 \cdot h) \\ M_{w1}' - T_Q - T_{an} - T_a + m_{w1} &= 0 \dots\dots\dots(3.8 \cdot i) \end{aligned}$$

ここで式(3.8・a)は部材の軸方向のつり合い式を示す。式(3.8・b,d,f,h)は部材の x 方向, y 方向への曲げ変位, ねじれ変位および、断面変形に関するつり合い式を示し、式(3.8・c,e,g,i)はそれぞれに対応するせん断変形に関するつり合い式を示す。断面変形を無視する場合には式(3.8・h,i)が意味を持たず、St. Venant のねじれによるせん断変形以外のせん断変形を無視する

場合には式(3.8・c,e,g,i)が意味を持たなくなる。

端部 $z = z_1, z_2$ における条件から、両端での境界条件が次のように求まる。

$$\begin{aligned} w_c &= c_1 \quad \text{または} \quad \bar{N} = N \dots\dots\dots(3.9 \cdot a) \\ \lambda_u &= c_2 \quad \text{または} \quad \bar{M}_x = M_x \dots\dots\dots(3.9 \cdot b) \\ u_s &= c_3 \quad \text{または} \quad \bar{V}_x = M_x' + m_x \dots\dots\dots(3.9 \cdot c) \\ \lambda_v &= c_4 \quad \text{または} \quad \bar{M}_y = M_y \dots\dots\dots(3.9 \cdot d) \\ v_s &= c_5 \quad \text{または} \quad \bar{V}_y = M_y' + m_y \dots\dots\dots(3.9 \cdot e) \\ \lambda_\varphi &= c_6 \quad \text{または} \quad \bar{M}_w = M_w \dots\dots\dots(3.9 \cdot f) \\ \varphi &= c_7 \quad \text{または} \quad \bar{T} = M_w' + T_s + m_w \dots\dots\dots(3.9 \cdot g) \\ \lambda_\psi &= c_8 \quad \text{または} \quad \bar{M}_{w1} = M_{w1} \dots\dots\dots(3.9 \cdot h) \\ \psi &= c_9 \quad \text{または} \quad \bar{T}_Q = T_{s1} - 2 T_{an} + M_{w1}' + m_{w1} \dots\dots\dots(3.9 \cdot i) \end{aligned}$$

ここに $c_1 \sim c_9$ は与えられた変位である。

式(3.9)で断面力 M_x, M_y, M_w, M_{w1} に対応する変位の境界条件は $\lambda_u, \lambda_v, \lambda_\varphi, \lambda_\psi$ で与えられる。式(2.29)に示すように $\lambda_u, \lambda_v, \lambda_\varphi, \lambda_\psi$ はせん断変形として St. Venant のねじれに伴うせん断応力によるせん断変形のみを考慮した場合の xz 面内と yz 面内のたわみ角, ねじれ率, 断面変形角の軸方向の変化率を表わす。すなわち、式(3.9・b,d,f,h)の変位の境界条件では、曲げせん断とそりせん断によるせん断変形を除いた変位成分で与えられる。Timoshenko はりの問題やいわゆる二次せん断変形の影響を考慮したねじれの問題を解く場合の境界条件を考えるとき、このことに注意しなければならない。

4. 断面力と変位の関係

一次元の棒理論では部材軸方向の垂直応力 σ_z がほかの垂直応力成分よりはるかに大きいと考えられる場合を取り扱うので、この応力とこの応力に対応するひずみ ϵ_z とは通常ヤング率 E で直接結びつけられる¹³⁾。断面変形を考慮した場合、部材軸方向のほかに式(2.31・a)から明らかのように板厚中心線と平行な方向にも垂直ひずみ ϵ_s が生ずる。したがって、この場合必ずしも一軸応力状態ではないが、板厚中心線方向の応力に比較して部材軸方向の応力 σ_z は十分大きいものと考え、この報告でも断面変形を考えない棒理論の場合と同様に σ_z と ϵ_z はヤング率で直接結ばれるものと仮定する。棒理論のなかでは断面変形に伴って生ずる板厚中心線方向の垂直応力 σ_s は二次的なものであり、その重要度は大きくないと考え、簡単にするため同じヤング率 E で対応するひずみ ϵ_s と結びつけられると仮定する。これらの仮定のもとでは式(2.31)のひずみ場に対応する応力場は

$$\sigma_z = E\epsilon_z, \quad \sigma_s = E\epsilon_s, \quad \tau_{sz} = G\gamma_{sz}, \quad \tau_{nz} = G\gamma_{nz} \dots\dots(4.1 \cdot a \sim d)$$

式(3.6)に式(2.31), (4.1)を代入すると断面力と変位の関係が求まる。二軸対称断面で、 x, y 軸を対称

軸にっていることより

$$\int_A x dA=0, \int_A y dA=0, \int_A xy dA=0 \dots\dots\dots(4.2\cdot a\sim c)$$

s 座標の原点 O は任意に選んでよく, O と C を任意に結んでよいが, ここでは断面力と変位の関係を簡単に表わすために, 次の条件を満たすように選ぶ.

$$\int_A \omega dA=0, \int_A \omega_1 dA=0 \dots\dots\dots(4.3\cdot a, b)$$

式 (2.30) を式 (4.3) に代入すると任意に選んだ点 O, および O と C の任意の径路のもとで次の式を得る.

$$\Omega_c^* = \int_A \Omega^* dA/A, \quad x_0^* y_0^* = - \int_A \Omega_1^* dA/A \dots\dots\dots(4.4\cdot a, b)$$

長方形薄肉断面の場合, 点 O を $x=0$ あるいは $y=0$ の点にとり, 点 O と原点 C を直線で結べば式 (4.4) の Ω_c^* , $x_0^* y_0^*$ は零となり式 (2.30) より, 板厚中心線上では $\omega^* = \Omega^*$, $\omega_1^* = \Omega_1^*$ となる. この場合の ω^* , ω_1^* の断面上での分布を Fig. 5 に示す. Fig. 5 から明らかのように ω_1^* は隅角部で $\omega_1^* = \pm bh$ となり ω^* , ω_1^* ともに原点 C に関して点対称な分布を示し, ω^* と ω_1^* は次のような比例関係にある.

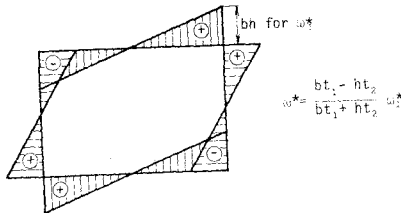


Fig. 5 Distribution of ω and ω_1 due to $\varphi = \psi = 1$

$$\omega^* = \beta \omega_1^* \dots\dots\dots(4.5\cdot a)$$

ここで

$$\beta = \frac{bt_1 - ht_2}{bt_1 + ht_2} \dots\dots\dots(4.5\cdot b)$$

ω^* , ω_1^* が原点 C に関して点対称な分布を示すことより

$$\left. \begin{aligned} \int_A \omega x dA=0, \int_A \omega y dA=0 \\ \int_A \omega_1 x dA=0, \int_A \omega_1 y dA=0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(4.6\cdot a\sim d)$$

断面の対称性からさらに次の関係がある.

$$\int_A (l\rho_s - m\rho_n) dA=0, \int_A (l\rho_{s1} - m\rho_{n1}) dA=0 \dots\dots\dots(4.7\cdot a, b)$$

$$\int_A (m\rho_s + l\rho_n) dA=0, \int_A (m\rho_{s1} + l\rho_{n1}) dA=0 \dots\dots\dots(4.7\cdot c, d)$$

$$\int_A l\theta dA=0, \int_A m\theta dA=0, \int_A l\theta_1 dA=0 \dots\dots\dots(4.7\cdot e\sim g)$$

$$\int_A m\theta_1 dA=0, \int_A ln\dot{\alpha} dA=0, \int_A mn\dot{\alpha} dA=0 \dots\dots\dots(4.7\cdot h\sim j)$$

$$\int_A l\dot{\alpha} dA=0, \int_A m\dot{\alpha} dA=0 \dots\dots\dots(4.7\cdot k, l)$$

式 (4.1), (2.31) を式 (3.6) に代入して, 式 (4.2), (4.3), (4.6) および (4.7) を考慮すると式 (3.6) の断面力と変位の関係は次のように表わされる.

$$N = EA w c', \quad M_x = -EI_{xx} \lambda u', \quad M_y = -EI_{yy} \lambda v' \dots\dots\dots(4.8\cdot a\sim c)$$

$$M_w = -E(I_{ww} \lambda \psi' + I_{ww1} \lambda \psi_1') \dots\dots\dots(4.8\cdot d)$$

$$M_{w1} = -E(I_{ww1} \lambda \psi' + I_{ww11} \lambda \psi_1') \dots\dots\dots(4.8\cdot e)$$

$$V_x = k_x GA (u_s' - \lambda u), \quad V_y = k_y GA (v_s' - \lambda v) \dots\dots\dots(4.8\cdot f, g)$$

$$T_s = G \{ J_s \lambda \varphi' + J_{s1} (\varphi' - \lambda \varphi) + J_{s2} (\psi' - \lambda \psi) - I_{s1} \lambda \psi + (J_{sn} - I_{s1}) \psi' \} \dots\dots\dots(4.8\cdot h)$$

$$T_w = G \{ (J_{s1} - J_s) \lambda \varphi + (I_{p0} - J_{s1}) (\varphi' - \lambda \varphi) + (I_{p1} + I_{s6} - J_{s2}) (\psi' - \lambda \psi) + (I_{a1} - I_{a2}) \lambda \psi + (J_{n1} - I_{a2} - J_{sn} + I_{a1}) \psi' \} \dots\dots\dots(4.8\cdot i)$$

$$T_Q = G \{ J_{s2} \lambda \varphi + I_{p1} (\varphi' - \lambda \varphi) + (I_{p2} + I_{a7}) (\psi' - \lambda \psi) - I_{a4} \lambda \psi + (J_{n2} - I_{a4}) \psi' \} \dots\dots\dots(4.8\cdot j)$$

$$T_{s1} = G \{ J_{sn} \lambda \varphi + J_{n1} (\varphi' - \lambda \varphi) + J_{n2} (\psi' - \lambda \psi) - I_{a3} \lambda \psi + (J_n - I_{a3}) \psi' \} \dots\dots\dots(4.8\cdot k)$$

$$T_{an} = G \{ I_{a3} \lambda \varphi + I_{a2} (\varphi' - \lambda \varphi) + I_{a4} (\psi' - \lambda \psi) - I_{a5} \lambda \psi + (I_{a3} - I_{a5}) \psi' \} \dots\dots\dots(4.8\cdot l)$$

$$T_a = G \{ I_{a6} (\varphi' - \lambda \varphi) + (I_{a7} + I_{a8}) (\psi' - \lambda \psi) \} \dots\dots\dots(4.8\cdot m)$$

$$N_{an} = -EI_a \psi' \dots\dots\dots(4.8\cdot n)$$

ここで

$$A = \int_A dA, \quad I_{xx} = \int_A x^2 dA, \quad I_{yy} = \int_A y^2 dA \dots\dots\dots(4.9\cdot a\sim c)$$

$$I_{ww} = \int_A \omega^2 dA, \quad I_{ww1} = \int_A \omega \omega_1 dA, \quad I_{w1w1} = \int_A \omega_1^2 dA \dots\dots\dots(4.9\cdot d\sim f)$$

$$I_{p0} = \int_A (\rho_s^2 + \rho_n^2) dA \dots\dots\dots(4.9\cdot g)$$

$$I_{p1} = \int_A (\rho_s \rho_{s1} + \rho_n \rho_{n1}) dA, \quad I_{p2} = \int_A (\rho_{s1}^2 + \rho_{n1}^2) dA \dots\dots\dots(4.9\cdot h\sim i)$$

$$J_s = \int_A \theta^2 dA, \quad J_{s1} = \int_A \rho_s \theta dA, \quad J_{s2} = \int_A \rho_{s1} \theta dA \dots\dots\dots(4.9\cdot j, l)$$

$$J_{sn} = \int_A \theta \theta_1 dA, \quad J_{n1} = \int_A \rho_n \theta dA, \quad J_{n2} = \int_A \rho_{n1} \theta dA \dots\dots\dots(4.9\cdot m\sim o)$$

$$J_n = \int_A \theta_1^2 dA, \quad I_a = \int_A (n\dot{\alpha})^2 dA, \quad I_{a1} = \int_A \theta n \dot{\alpha} dA, \quad I_{a2} = \int_A \rho_n n \dot{\alpha} dA \dots\dots\dots(4.9\cdot p\sim s)$$

$$I_{a3} = \int_A \theta_1 n \dot{\alpha} dA, \quad I_{a4} = \int_A \rho_{s1} n \dot{\alpha} dA, \quad I_{a5} = \int_A (n\dot{\alpha})^2 dA \dots\dots\dots(4.9\cdot t\sim v)$$

$$I_{a6} = \int_A \rho_n \dot{\alpha} dA, \quad I_{a7} = \int_A \rho_{n1} \dot{\alpha} dA, \quad I_{a8} = \int_A \dot{\alpha}^2 dA \dots\dots\dots(4.9\cdot w\sim y)$$

式(4.8・f,g)中の k_x, k_y は Timoshenko はりの理論で用いられるせん断ひずみについての補正係数であり、ここでの演算過程には表われないが、後の便宜のために加えた。したがってここでは、 $k_x = k_y = 1$ である。式(4.9)で表わされる断面定数の Fig. 1 に示す長方形薄肉断面での値を、補遺 2 に示す。

5. 断面内の応力分布

式(4.8・a~e,n)を式(2.31・a,b)に代入し、式(4.1・a,b)の關係を用いると、仮定した変位場に対応した断面内の直応力分布は次のように表わされる。

$$\sigma_z = \frac{N}{A} + \frac{x}{I_{xx}} M_x + \frac{y}{I_{yy}} M_y + \frac{\omega I_{\omega 1 \omega 1} - \omega_1 I_{\omega \omega 1}}{I_{\omega \omega} I_{\omega 1 \omega 1} - I_{\omega \omega 1}^2} M_{\omega} + \frac{\omega_1 I_{\omega \omega} - \omega I_{\omega \omega 1}}{I_{\omega \omega} I_{\omega 1 \omega 1} - I_{\omega \omega 1}^2} M_{\omega 1} \dots (5.1 \cdot a)$$

$$\sigma_s = \frac{N \alpha n}{I_a} n \alpha \dots (5.1 \cdot b)$$

式(5.1・b)に示す σ_s は断面変形を考慮し、かつ長方形薄肉断面の隅角部を剛結として板要素の面外曲げ変形を考慮した場合に発生する応力で、それ以外の場合は零となる。

式(5.1)を導いたと同様に、断面内のせん断応力も式(4.8)に与える断面力で表わすことも可能であり、Vlasov⁹⁾、坂井¹⁵⁾は基本的にこの方法で断面内のせん断応力を求めている。しかし、このようにして求められる応力場は、式(2.2),(2.18)で仮定した変位場をもとに得られるものであり、一般に微小要素についてのつり合いを満足しない¹⁶⁾。特に式(2.18)に与えるせん断ひずみは一次元の棒理論のなかでせん断変形の影響を考慮するために設けた解析の便宜のための仮定であり、この変位場に基づいて断面内のせん断応力の分布を求めることは必ずしも実際の棒部材の挙動を正しく表わすことにならない。棒理論では仮定した変位場から求まる応力のうち、部材軸方向の垂直応力が最も実情に近い値になっているものと考え、微小要素においてこれとつり合うようにせん断応力の分布を修正することが一般に行われている。

板厚中心線に垂直な nz 面内の実際のせん断応力は板の表面 $n = \pm t/2$ で零となっている。板の内部では必ずしも零とならないが薄肉断面を取り扱っているかぎり、このせん断応力が大きな値となることはなく

$$\tau_{nz} = 0 \dots (5.2)$$

と考えてよい。したがってせん断応力として τ_{sz} のみが存在する。ここで考えている断面ではせん断力 V_x はフランジの、 V_y はウェブの板厚中心線方向のせん断応力のみにより発生することから、式(4.8・f,g)の断面力 V_x, V_y の補正係数 k_x, k_y は $k_x = A_x/A, k_y = A_y/A$

で与えられる。 A_x, A_y はそれぞれフランジ、ウェブの断面積であり、 $A_x = 4bt, A_y = 4ht$ である。ほかに、補遺 2 に与えられる幾何学量にあらわれる補正係数 k_0 は零となる。補正係数 k_0 が零となることで式(4.9・w~y)で定義された幾何学量 $I_{\alpha\alpha}, I_{\alpha\tau}, I_{\alpha s}$ は零となり、したがって式(4.8・m)より断面力 $T_\alpha = 0$ となる。

このような応力場を考えると断面内部に発生するせん断応力は sz 面内のせん断応力 τ_{sz} のみとなるので、微小要素 $tds dz$ に作用する力の成分の z 軸方向のつり合い式は次のように表わされる。

$$\frac{\partial}{\partial s} \left[\int_{-t/2}^{t/2} \tau_{sz} dn \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\int_{-t/2}^{t/2} \sigma_z dn \right] + \int_{-t/2}^{t/2} q_z dn = 0 \dots (5.3)$$

式(5.1・a)を式(5.3)に代入して s について積分し、式(2.31・d),(4.1・c)から明らかなように τ_{sz} が n の一次関数になることに注意すると、板厚中心面でのせん断応力は次のように表わされる。

$$\tau_{sz}^* = \frac{q_A}{t} + \tau_o^* \dots (5.4)$$

τ_o^* は一般の棒の理論での曲げ応力やそり応力の軸方向の変化につり合うために発生するせん断応力であり、次のように表わされる^{注)}。

$$\tau_o^* = -\frac{1}{t} \left[\frac{A_s}{A} N' + \frac{Q_x}{I_{xx}} M_x' + \frac{Q_y}{I_{yy}} M_y' + \frac{Q_\omega I_{\omega 1 \omega 1} - Q_{\omega 1 \omega \omega}}{I_{\omega \omega} I_{\omega 1 \omega 1} - I_{\omega \omega 1}^2} M_{\omega}' + \frac{Q_{\omega 1} I_{\omega \omega} - Q_{\omega \omega 1} I_{\omega 1 \omega 1}}{I_{\omega \omega} I_{\omega 1 \omega 1} - I_{\omega \omega 1}^2} M_{\omega 1}' \right] - \frac{q_p}{t} \dots (5.5)$$

ここに

注) 断面変形の影響を除くと式(5.5)のなかの第4項は

$$\tau_o^* = -\frac{1}{t} \frac{Q_\omega}{I_{\omega \omega}} M_{\omega}' \dots (a)$$

と表わされる[式(5.18)参照]。Roik・Sedlacek⁹⁾や佐伯¹⁰⁾は式(a)で表わされるせん断応力を二次せん断応力とよんでいる。同じなかの第2項は

$$\tau_o^* = -\frac{1}{t} \frac{Q_x}{I_{xx}} M_x' \dots (b)$$

と表わされ、よく知られたはりの曲げにともなうせん断応力を表わしている。Euler・Bernoulliのせん断ひずみ零の仮定のもとでは、この仮定したせん断ひずみとせん断弾性係数の積とから求まるせん断応力は零となる。したがってこの零の値を持つせん断応力を一次せん断応力とよび、式(b)を二次せん断応力とよぶこともできる。当然のことながら曲げの理論でせん断応力が問題とされるのは常に式(b)のせん断応力であり、はり理論のなかでは重要な意味を持つ量である。このため一般には式(b)は二次せん断応力といった名でよばれることは少ない。

ねじれの問題においても閉断面では $q_A = 0$ となり、式(5.5)の τ_o^* は二次的な意味の量ではなくなる。 q_A が零とならない閉断面の場合にも、数値的には式(5.4)の第1項に比して第2項は必ずしも小さな値とはならない。したがってこの場合にも式(5.5)の τ_o^* を二次せん断応力とよぶのは必ずしも適当とはいえない。以上のような理由でこの報告では二次せん断応力というよび方を避けることにした。

$$A_s = \int_{s_A}^s t ds, Q_x = \int_{s_A}^s x^* t ds, Q_y = \int_{s_A}^s y^* t ds \dots\dots\dots(5.6\cdot a\sim c)$$

$$Q_w = \int_{s_A}^s \omega^* t ds, Q_{w_1} = \int_{s_A}^s \omega_1^* t ds \dots\dots\dots(5.6\cdot d, e)$$

$$q_p = \int_{s_A}^s \int_{-t/2}^{t/2} q_{az} dnd \dots\dots\dots(5.6\cdot f)$$

$q_A = (\tau_{sz}^* t)_{s=s_A}$ は積分定数であり、一般に不静定せん断流とよばれているものである。この積分定数は閉区間での軸方向変位 w の連続条件から求まる。式 (5.4) をせん断弾性係数 G でわって求めたせん断ひずみと式 (2.8・a) を式 (2.1・f) に代入し、 s について積分すると板厚中心面での変位 w^* は

$$w^* = \int_0^s \left(\frac{q_A}{Gt} + \frac{\tau_{sz}^*}{G} \right) ds - (x^* - x_0^*) u_{s'} - (y^* - y_0^*) v_{s'} - \varphi' \int_0^s \rho_s^* ds - \psi' \int_0^s \rho_{s1}^* ds \dots\dots\dots(5.7)$$

断面上での軸方向変位の連続条件を示す式 (2.20) に式 (5.7) を代入すると、 q_A は次のように求まる。

$$q_A = G \left[\frac{\int \rho_s^* ds}{\int \frac{ds}{t}} \varphi' - \frac{\int \tau_{sz}^* ds}{\int \frac{ds}{t}} \right] \dots\dots\dots(5.8)$$

式 (5.8) の右辺の第 1 項は Bredt のせん断流とよばれているものであり、第 2 項は式 (5.5) に示すせん断応力 τ_{sz}^* に対する不静定せん断流である。式 (5.7) を式 (2.22) に代入した結果と式 (2.8・a) を式 (2.1・f) に代入してせん断弾性係数 G を乗じると、板厚中心面から n だけ離れた面でのせん断応力の分布が次のように求まる。

$$\tau_{sz} = \frac{T_s}{J_s} \theta + \tau_{sz}^* - \frac{1}{t} \frac{\int \tau_{sz}^* ds}{\int \frac{ds}{t}} \dots\dots\dots(5.9)$$

式 (5.1・a) では右辺の第 4 項と第 5 項の分母が零となることが必要である。補遺 2 に示す $I_{ww}, I_{ww_1}, I_{w_1w_1}$ の成分で ω, ω_1 の板厚方向の変化に由来する式 (A.12・d~f) の右辺の第 2 項を考慮すれば、その分母 ($I_{ww}I_{w_1w_1} - I_{ww_1}^2$) は零にならない。しかし、 ω, ω_1 の板厚方向の変化に由来する成分を無視すると、すなわち板厚が零に近づいた極限を考えると ($I_{ww}I_{w_1w_1} - I_{ww_1}^2$) は零となる。理論的な誘導を別にして、鋼構造物では断面寸法に比して、板厚は十分に薄く実用上の立場から考えると ω, ω_1 の板厚方向の変化に由来する成分は板厚中心線上の値による成分に比べて小さいと考えてよい。その意味から、 ω, ω_1 の板厚方向の変化に由来する成分を無視し、($I_{ww}I_{w_1w_1} - I_{ww_1}^2$) が零となる場合について考える。

補遺 2 の式 (A.12・d, e, f) で右辺の第 2 項を無視すると

$$\frac{I_{ww}}{I_{w_1w_1}} = \frac{I_{ww_1}}{I_{w_1w_1}} = \frac{bt_1 - ht_2}{bt_1 + ht_2} \dots\dots\dots(5.10)$$

この値は式 (4.5・b) より β に一致し、したがって式 (4.5・a) より $\omega^*/\omega_1^* = \omega/\omega_1$ に等しくなる。式 (5.10) を用いると式 (4.8・d, e) はたがいに独立でなく、

$$\left. \begin{aligned} M_w &= -\beta EI_{w_1w_1} (\beta \lambda_\varphi' + \lambda_\psi') \\ M_{w_1} &= -EI_{w_1w_1} (\beta \lambda_\varphi' + \lambda_\psi') \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(5.11\cdot a, b)$$

式 (4.5・a), (5.10), (5.11) より

$$\left. \begin{aligned} I_{ww} &= \beta I_{w_1w_1} = \beta^2 I_{w_1w_1}, \quad I_{w_1w_1} = \beta I_{w_1w_1} \\ M_w &= \beta M_{w_1}, \quad \omega = \beta \omega_1 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(5.12\cdot a\sim d)$$

式 (5.12・d) を用いると式 (2.31・b) は

$$e_z = w e' - x \lambda_u' - y \lambda_v' - \omega_1 (\beta \lambda_\varphi' + \lambda_\psi') \dots\dots\dots(5.13)$$

式 (4.8・a~c), (5.11・b) を式 (5.13) に代入し、式 (4.1・a) の関係を用いると、そのときの直応力 σ_z の分布を求めることができ、次のように表わされる。

$$\sigma_z = \frac{N}{A} + \frac{x}{I_{xx}} M_x + \frac{y}{I_{yy}} M_y + \frac{\omega_1}{I_{w_1w_1}} M_{w_1} \dots\dots(5.14)$$

式 (5.14) は ω, ω_1 の板厚方向の変化に由来する成分を無視した場合の断面の直応力で、式 (2.31・b) と式 (5.13) が等価であることから明らかなように式 (5.14) の直応力 σ_z はバイモーメント M_w に由来する直応力も含んでいる。この場合 M_{w_1} が求められたとき、バイモーメント M_w は式 (5.12・c) で与えられる。

直応力 σ_z が式 (5.14) で与えられたとき、これに釣り合う板厚中心面でのせん断応力 τ_{sz}^* は式 (5.5) のかわりに次のように与えられる。

$$\tau_{sz}^* = -\frac{1}{t} \left[\frac{A_s}{A} N' + \frac{Q_x}{I_{xx}} M_x' + \frac{Q_y}{I_{yy}} M_y' + \frac{Q_{w_1}}{I_{w_1w_1}} M_{w_1}' \right] - \frac{q_p}{t} \dots\dots\dots(5.15)$$

式 (5.15) に与える τ_{sz}^* でも、式 (5.14) より導いたことから明らかなように、そりせん断応力も含まれている。

断面変形を考慮しない場合には、式 (5.1・a) を導いたときに用いた式 (4.8・d, e) は単に

$$M_w = -EI_{ww} \lambda_\varphi' \dots\dots\dots(5.16)$$

となる。その結果 $\omega_1, I_{w_1w_1}, I_{w_1w_1}, M_{w_1}$ は意味のない量となって断面内の直応力は式 (5.1・a) にかわって次のように与えられる。

$$\sigma_z = \frac{N}{A} + \frac{x}{I_{xx}} M_x + \frac{y}{I_{yy}} M_y + \frac{\omega}{I_{ww}} M_w \dots\dots(5.17)$$

式 (5.1・b) に与える s 方向の直応力 σ_s は断面変形を考慮しない場合零となる。直応力 σ_z が式 (5.17) で与えられたとき、これに釣り合う板厚中心面でのせん断応力 τ_{sz}^* は式 (5.5) のかわりに次のように与えられる。

$$\tau_{sz}^* = -\frac{1}{t} \left[\frac{A_s}{A} N' + \frac{Q_x}{I_{xx}} M_x' + \frac{Q_y}{I_{yy}} M_y' + \frac{Q_w}{I_{ww}} M_w' \right] - \frac{q_p}{t} \dots\dots\dots(5.18)$$

ω, ω_1 の板厚方向の変化に由来する成分を無視し、式 (4.5・b) に与える β が零となる場合、すなわち、

$$bt_1 - ht_2 = 0 \dots\dots\dots(5.19)$$

の条件を満足する長方形薄肉断面の場合には補遺 2 に示すように

$$I_{ww} = 0 \dots\dots\dots(5.20)$$

となる。このとき、式 (4.5), (2.28) に与えるようにねじれに伴って生じるそり、すなわち軸方向変位は零となり、式 (5.17) の右辺の第 4 項、式 (5.18) の右辺の [] 内の第 4 項は意味のない量となる。

6. 断面内の応力分布を考慮した変位表示のつり合い式

せん断応力の分布を、式 (2.31・c, d), (4.1・c, d) から求めず薄肉の仮定と微小要素のつり合いを満足するための条件から求め、式 (5.2), (5.9) に示す結果を得た。式 (2.31) のひずみ場をもとに求めた式 (4.8) に示す断面力と変位の関係にその結果を反映させるために τ_{nz} を零とした場合の補正、すなわち補正係数 k_x, k_y, k_0 の導入のほかに τ_{sz} の分布を考慮して断面力と変位の関係を補正することが一般に行われている¹⁹⁾。ここでも St. Venant のねじれ以外によるせん断応力に相当するせん断ひずみ $r_u, r_v, r_\varphi, r_\psi$ に対応して、断面力と変位の関係を補正する。これらのせん断ひずみが関係する断面力は式 (3.8・c, e, g, i) から明らかのように V_x, V_y, T_w と T_s の和、 T_Q の 4 個であり、すべてせん断変形を考慮したためにつり合い式に表われた断面力である。

断面力 V_x, V_y と変位の関係を与える式 (4.8・f, g) に対し、補正係数 k_1, k_2 を次のように導入する。

$$V_x = k_1 k_x GA(u_s' - \lambda_u), \quad V_y = k_2 k_y GA(v_s' - \lambda_v) \dots\dots\dots(6.1 \cdot a, b)$$

補正係数 k_1, k_2 はせん断変形に関する断面力 V_x, V_y のなす仕事と、内部に発生しているせん断応力によるひずみエネルギーが等しくなるように決められるのが普通であり¹⁹⁾、ここでもこの方法に従う。体積要素 Adz の内部に貯えられるせん断応力によるひずみエネルギーは次のように表わされる。

$$dW_i = \frac{1}{2G} \int_A \tau_{sz}^2 dAdz \dots\dots\dots(6.2)$$

τ_{sz} は微小要素において σ_z とつり合うようにして求めたせん断応力であり、式 (5.9) で与えられる。たとえば x 軸方向のせん断力 V_x に関係する部分の内部に貯えられるひずみエネルギー dW_i は式 (5.5) の [] 内の第 2 項と式 (5.9) により、

$$dW_i = \frac{(M_x')^2}{2GI_x x^2} \int_A \frac{1}{t^2} \left(\int \frac{Q_x}{t} ds - Q_x \right)^2 dAdz \dots\dots\dots(6.3)$$

体積要素 Adz で断面力 V_x のなす仕事 dW_e は、断面

全体にわたって均一なせん断ひずみ r_u とそれに対応する断面力 V_x によるものであり、次のように与えられる。

$$dW_e = \frac{1}{2} V_x r_u dz \dots\dots\dots(6.4)$$

式 (6.4) に式 (6.1・a) を代入して r_u を消去すると

$$dW_e = \frac{1}{2G} \frac{V_x^2}{k_1 k_x A} dz \dots\dots\dots(6.5)$$

式 (6.3) の dW_i と式 (6.5) の dW_e を等しいとおき、分布荷重のない場合、つり合い式 (3.8・c) より $M_x' = V_x$ となることに注意すると補正係数 k_1 は次のように求められる。

$$\frac{1}{k_1} = \frac{k_x A}{I_x x^2} \int_A \frac{1}{t^2} \left(\int \frac{Q_x}{t} ds - Q_x \right)^2 dA \dots\dots(6.6 \cdot a)$$

同様にして補正係数 k_2 も求められる。

$$\frac{1}{k_2} = \frac{k_y A}{I_y y^2} \int_A \frac{1}{t^2} \left(\int \frac{Q_y}{t} ds - Q_y \right)^2 dA \dots\dots(6.6 \cdot b)$$

断面力 T_w と T_s の和 T 、および T_Q と変位の関係を与える式 (4.8・h~j) から明らかのように断面のねじれと断面変形は連成するため、式 (6.1) の k_1, k_2 のように単純に独立して補正係数を導入することができない。ここでは、はりの変形性状によって補正係数の値は変化しないことと、補正係数があくまで補正としての近似的な意味しか持たない量であることを考え、式 (4.8・h~j) に対し、 $\tau_{nz} = 0$ より、 $I_{a6} = I_{a7} = 0$ となることに注意し、次のように断面力 T_w と T_s の和 T 、および T_Q と変位の関係を補正する補正係数 k_3, k_4 を導入する。

$$\left. \begin{aligned} T &= T_s + T_w = G \{ J_{s1} \lambda_\varphi + k_3 I_{p0} (\varphi' - \lambda_\varphi) \\ &\quad + k_4 I_{p1} (\psi' - \lambda_\psi) - I_{a2} \lambda_\psi + (J_{n1} - I_{a2}) \psi' \} \\ T_Q &= G \{ J_{s2} \lambda_\varphi + k_3 I_{p1} (\varphi' - \lambda_\varphi) + k_4 I_{p2} (\psi' - \lambda_\psi) \\ &\quad - I_{a4} \lambda_\psi + (J_{n2} - I_{a4}) \psi' \} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(6.7 \cdot a, b)$$

式 (6.7) の右辺のうち、 $\lambda_\varphi, \lambda_\psi$ の項はせん断ひずみ r_φ, r_ψ による成分ではないこと、 ψ' の項はその係数が補遺 2 に示すように薄肉断面の場合にはきわめて小さな量となることを考えて、 $(\varphi' - \lambda_\varphi), (\psi' - \lambda_\psi)$ の項にのみ補正係数 k_3, k_4 を与えた。このとき式 (4.8・h, i) の T_s, T_w と変位の関係は次のようになっている。

$$T_s = G \{ T_s \lambda_\varphi + k_3 J_{s1} (\varphi' - \lambda_\varphi) + k_4 J_{s2} (\psi' - \lambda_\psi) - I_{a1} \lambda_\psi + (J_{s1} - I_{a1}) \psi' \} \dots\dots\dots(6.8 \cdot a)$$

$$T_w = G \{ (J_{s1} - J_s) \lambda_\varphi + k_3 (I_{p0} - J_{s1}) (\varphi' - \lambda_\varphi) + k_4 (I_{p1} - J_{s2}) (\psi' - \lambda_\psi) + (I_{a1} - I_{a2}) \lambda_\psi + (J_{n1} - I_{a2} - J_{s1} + I_{a1}) \psi' \} \dots\dots\dots(6.8 \cdot b)$$

補正係数 k_3 を求める。断面変形を考慮しない場合を考えると、式 (6.7・b) の T_Q は意味のない量となり、補正係数 k_3 の決定には、式 (6.7・a) の第 2 項のみ有意

な量となるため、式 (6.6) で補正係数 k_1, k_2 を求めたと同様な考え方で補正係数 k_3 が求められる。式 (5.5) の [] 内の第 4 項のかわりに式 (5.18) の [] 内の第 4 項を用いることに注意して計算すると

$$\frac{1}{k_3} = \frac{I_{p2}}{I_{w1w1}^2} \int_A \frac{1}{t^2} \left(\frac{\int \frac{Q_w}{t} ds}{\int \frac{ds}{t}} - Q_w \right)^2 dA \dots\dots(6.9)$$

長方形薄肉断面が式 (5.19) の条件を満足する場合には、補正係数 k_3 は意味を持たず、零とすればよい。

ω, ω_1 の板厚方向の変化に由来する成分を無視し、長方形薄肉断面の隅角部がピン構造であるとして補正係数 k_4 を求める。この場合、式 (5.14), (5.15) に M_w, M_w' が陽にあらわれないので式 (6.7・a) のねじれモーメント T は考慮する必要がない。回転変形のない場合を考えると、式 (6.7・b) の右辺のうち、補正係数 k_4 を求めるのに有意な項は、第 3 項のみであることから、式 (6.9) で補正係数 k_3 を求めたと同様にして補正係数 k_4 が求められる。式 (5.18) の [] 内の第 4 項のかわりに式 (5.15) の [] 内の第 4 項を用い、隅角部がピン構造であることより式 (3.8・i) のつり合い式で T_{an}, T_a が零となることに注意して計算すると、

$$\frac{1}{k_4} = \frac{I_{p2}}{I_{w1w1}^2} \int_A \frac{1}{t^2} \left(\frac{\int \frac{Q_{w1}}{t} ds}{\int \frac{ds}{t}} - Q_{w1} \right)^2 dA \dots\dots(6.10)$$

補正係数 k_3, k_4 を決めるのに板厚方向の変化に依存する成分を無視しているため、式 (5.12・a) より $I_{ww} = \beta^2 I_{w1w1}$ 、式 (5.6・d, e), (5.12・d) より $Q_w = \beta Q_{w1}$ 、補遺 2 より $I_{p0} = I_{p2}$ となり、その結果補正係数 k_3, k_4 の間には次の関係が成立する。

$$k_3 = \beta^2 k_4 \dots\dots(6.11)$$

長方形薄肉断面についての補正係数 $k_1 \sim k_4$ の値を補遺 3 に示す。

式 (3.8) のつり合い式に、式 (4.8・a~e, k~n) と式 (6.1), (6.7・b), (6.8) で与える変位表示の断面力を代入すれば、断面内の応力分布を考慮した場合の変位で表わされたつり合い式を得る。

$$EAw_e'' + q_z = 0 \dots\dots(6.12 \cdot a)$$

$$EI_{xx}\lambda_x'''' - q_x - m_x' = 0 \dots\dots(6.12 \cdot b)$$

$$EI_{xx}\lambda_y'''' + k_1 k_x GA(u_x' - \lambda_u) - m_x = 0 \dots\dots(6.12 \cdot c)$$

$$EI_{yy}\lambda_y'''' - q_y - m_y' = 0 \dots\dots(6.12 \cdot d)$$

$$EI_{yy}\lambda_z'''' + k_2 k_y GA(v_x' - \lambda_v) - m_y = 0 \dots\dots(6.12 \cdot e)$$

$$E(I_{ww}\lambda_\varphi' + I_{w1w1}\lambda_\psi')'' - G\{J_{s2}\lambda_\varphi + k_3 J_{s1}(\varphi' - \lambda_\varphi) - I_{a1}\lambda_4 + k_4 J_{s2}(\psi' - \lambda_\psi) + (J_{s1} - I_{a1})\psi'\}' - m_t - m_w' = 0 \dots\dots(6.12 \cdot f)$$

$$E(I_{ww}\lambda_\varphi' + I_{w1w1}\lambda_\psi')' + G\{(J_{s1} - J_s)\lambda_\varphi + k_3(I_{p0} - J_{s1})(\varphi' - \lambda_\varphi) + (I_{a1} - I_{a2})\lambda_\psi + k_4(I_{p1} - J_{s2})(\psi' - \lambda_\psi) + (J_{n1} - I_{a2} - J_{sn} + I_{a1})\psi'\}$$

$$-m_w = 0 \dots\dots(6.12 \cdot g)$$

$$E(I_{w1w1}\lambda_\varphi' + I_{w1w1}\lambda_\psi')'' - G\{J_{s2}\lambda_\varphi + J_{n1}(\varphi' - \lambda_\varphi) - I_{a3}\lambda_\psi + J_{n2}(\psi' - \lambda_\psi) + (J_n - I_{a3})\psi'\}' + EI_\varphi\psi + 2G\{I_{a1}\lambda_\varphi + I_{a2}(\varphi' - \lambda_\varphi) - I_{a3}\lambda_\psi + I_{a4}(\psi' - \lambda_\psi) + (I_{a3} - I_{a5})\psi'\}' - m_{w1}' - m_Q = 0 \dots\dots(6.12 \cdot h)$$

$$E(I_{w1w1}\lambda_\varphi' + I_{w1w1}\lambda_\psi')' + G\{J_{s2}\lambda_\varphi + k_3 I_{p1}(\varphi' - \lambda_\varphi) - I_{a4}\lambda_\psi + k_4 I_{p2}(\psi' - \lambda_\psi) + (J_{n2} - I_{a4})\psi'\}' + G\{I_{a1}\lambda_\varphi + I_{a2}(\varphi' - \lambda_\varphi) - I_{a3}\lambda_\psi + I_{a4}(\psi' - \lambda_\psi) + (I_{a3} - I_{a5})\psi'\}' - m_{w1} = 0 \dots\dots(6.12 \cdot i)$$

このとき、断面力と変位の関係は断面力 V_x, V_y, T_Q, T_s, T_w については式 (6.1), (6.7・b), (6.8) で、ほかの断面力については式 (4.8・a~e, k~n) で与えられる。この場合、式 (6.1) と補遺 2 にあらわれる補正係数 k_x, k_y, k_0 は板厚方向のせん断応力 $\tau_{nz} = 0$ としたことにより次の値をとる。

$$k_x = \frac{A_x}{A}, \quad k_y = \frac{A_y}{A}, \quad k_0 = 0 \dots\dots(6.13 \cdot a \sim c)$$

式 (4.8・a~e, k~n), (6.1), (6.7・b), (6.8) に示す断面力と変位の関係を用いた上で、式 (6.12) のつり合い式を解くときに用いられる境界条件は式 (3.9) で与えられる。式 (3.9・i) にあらわれる端部での外力 \bar{T}_Q を Vlasov は横方向バイモーメントとよんでいるがその力学的な性質を補遺 4 に示す。

7. Vlasov の理論との比較

断面変形とせん断変形の影響を考慮した長方形薄肉断面はりのねじれの問題に対する Vlasov の求めた結果³⁾ と本報告の結果を比較する。本報告でははりの回転変形と断面変形に対する支配方程式が式 (6.12・f~i) で与えられる。ごく薄肉の断面として板厚方向のせん断応力 τ_{nz} を無視し、板厚方向の変化に依存する成分を無視すると、補遺 2 に与える補正係数 k_0 と断面の幾何学量は

$$k_0 = 0, \quad J_{s2} = J_{sn} = J_{n1} = J_{n2} = J_n = 0, \quad J_{s1} = J_s \dots\dots(7.1 \cdot a \sim c)$$

$$I_{p2} = I_{p0}, \quad I_{ww} = \beta^2 I_{w1w1}, \quad I_{w1w1} = \beta I_{w1w1} \dots\dots(7.1 \cdot d \sim f)$$

長方形薄肉断面の隅角部をピン構造とすると

$$I_a = 0, \quad I_{ai} = 0 \quad (i=1 \sim 8) \dots\dots(7.2 \cdot a, b)$$

板厚中心線方向のせん断応力 τ_{sz} の分布の影響を示す補正係数 k_3, k_4 を考慮しないものとする

$$k_3 = k_4 = 1 \dots\dots(7.3)$$

式 (7.1~3) と補遺 2 の関係および $m_w = \beta m_{w1}$ の関係を用い式 (6.12・g) を変形すると

$$EI_{w1w1}(\beta\lambda_\varphi + \lambda_\psi)'' - GI_{p0}(\beta\lambda_\varphi + \lambda_\psi) + GI_{p1}\varphi' + GI_{p0}\psi' - m_{w1} = 0 \dots\dots(7.4 \cdot a)$$

同様に、式 (6.12・g) を微分して式 (6.12・f) との差をとると、変形すると

$$GI_{p1}(\beta\lambda_\varphi + \lambda_\psi)' - GI_{p0}\varphi'' - GI_{p1}\psi'' - m_t = 0 \dots\dots(7.4 \cdot b)$$

同様に式 (6.12・i) を微分して式 (6.12・h) との差をとると

り、変形すると

$$GI_{p0}(\beta\lambda_\varphi + \lambda_\psi)' - GI_{p1}\varphi'' - GI_{p0}\psi'' - m_Q = 0 \dots (7.4 \cdot c)$$

式 (4.8・k), (7.1・b), (7.2・b) から $T_{s1} = 0$ となることに注意すると, 式 (7.4) の誘導と, 断面力で表わしたつり合い式 (3.8・f~i) より, 式 (7.4) の 3 つの式は, 力学的に次のつり合い式に相当することがわかる.

$$M_w' - T_w + m_w = 0, T_w' + T_s' + m_t = 0, T_Q' + m_Q = 0 \dots (7.5 \cdot a \sim c)$$

Vlasov の理論での支配方程式では, 式 (6.12・f~i) で与えられる本報告の支配方程式より未知変数が 1 つ少なく, したがって支配方程式の数も 1 つ少ない. これは Vlasov が暗黙のうちに ω, ω_1 の間に式 (4.5) の関係を仮定し, 本報告の 2 つの独立な変数 $\lambda_\varphi, \lambda_\psi$ を式 (7.4) にあらわれる変数 $-(\beta\lambda_\varphi + \lambda_\psi)$ によりそりをあらわす 1 つの独立な変数として取り扱っているためである. その結果, Vlasov のつり合い式は $-(\beta\lambda_\varphi + \lambda_\psi), \varphi, \psi$ を未知変数とする連立微分方程式となっており, 微分方程式の係数となっている断面定数の値に注意すれば, 板曲げ成分を除いて, Vlasov の結果と式 (7.4) とは全く一致する. 式 (7.2・a) の I_α を考慮すれば板曲げ成分についても Vlasov の結果に一致する.

Vlasov は座標, 変位, 力を一般化して, 支配方程式を導いており, その結果の力学的な意味を明らかにしていないが, 式 (7.4), (7.5) より, 支配方程式の力学的な意味, 微分方程式の係数の意味は明らかとなる. Vlasov の求めた支配方程式が導かれる力学的な仮定についても式 (7.1~3) から明らかとなろう. Vlasov は板曲げ成分を考慮して支配方程式を与えているが, その場合, 厳密には式 (7.2・b) に示す成分も考慮する必要があり, たとえ式 (7.2・a) の成分のみを考慮することが許されるにしても式 (7.1) で用いたごく薄肉の条件から, 無視してさしつかえないほどの微小量であろう.

分布外力 m_w, m_{w1} が不在の場合には式 (3.8・i), (7.5・a) (5.12・c) より断面力 M_{w1}, M_w, T_w, T_Q の間に次の関係が成立する.

$$T_Q = M_{w1}', T_w = M_w', M_w = \beta M_{w1} \dots (7.6 \cdot a \sim c)$$

式 (3.6・d) で定義された断面力 M_w は式 (7.6・c) より明らかなように断面力 M_{w1} に全く依存する量である. 断面力 M_w は断面力 M_{w1} とまったく同じ性質を持つ量で区別することができず, 独立した断面力として考える必要がない. $-(\beta\lambda_\varphi + \lambda_\psi)$ を 1 つの変数として取り扱えることと, 式 (3.7・m, n) より \bar{M}_w と \bar{M}_{w1} が同一の表面力 p_{sz} に起因するものであることを考えると, 式 (7.4) を解くに必要十分な境界条件は分布外力 m_w, m_{w1} が不在場合, 式 (3.9・f~i) より次のように与えられる.

$$-(\beta\lambda_\varphi + \lambda_\psi) = c_1 \text{ または } \bar{M}_{w1} = M_{w1} \dots (7.7 \cdot a)$$

$$\varphi = c_2 \text{ または } \bar{T} = M_w' + T_s \dots (7.7 \cdot b)$$

$$\psi = c_3 \text{ または } \bar{T}_Q = M_{w1}' \dots (7.7 \cdot c)$$

ここに $c_1 \sim c_3$ は定数である. Vlasov は支配方程式 (7.4) を解くに必要な式 (7.7) に相当する境界条件を明らかにしていない.

Vlasov は一般化された内力としてたて方向バイモーメント, ねじれモーメント, 横方向バイモーメントを与えているが, これらはそれぞれ本報告での断面力 $M_{w1}, T_s + T_w, T_Q$ に一致する. 式 (5.11), (5.13~15) から明らかなように, 断面変形を考慮しない. 理論でのバイモーメント M_w の力学的な性質は, 断面変形を考慮した場合には, 式 (3.6・e) で定義した断面力 M_{w1} が持つことは注意する必要がある. この場合, 断面力 M_{w1} のかわりに断面力 M_w を考えてもよい. しかしこのように考えると, 断面の形状によって式 (4.5・b) で定義した値 β が零となるときには, 断面変形によって M_{w1} が発生している場合でも, 式 (7.6・c) より M_w が零となり一般性を失うと考えられる. Vlasov の用いた記号と本報告で用いた記号を対応させたものを **Table 1** に示す.

本報告のまえがきに述べた変位場に対する基本的な仮定のほかに式 (7.1~3) の仮定をおくと式 (2.29・c, d) の λ_φ と λ_ψ を独立な変数として別個に扱わずに $-(\beta\lambda_\varphi + \lambda_\psi)$ を一つの独立な変数として整理することができ, 支配方程式 (7.4) と境界条件式 (7.7) は式 (3.3) に示す一般の仮想仕事の原理から直接求めることもできる.

Table 1 Comparison of Vlasov's Notations on Torsion and Cross Sectional Distortion with Author's

	Vlasov ³⁾	Author
Displacements	$u(z, s) = \varphi(s) U(z)$ $v(z, s) = \psi_\theta(s) \theta(z) + \psi_x(s) X(z)$	$w = -(\beta\lambda_\varphi + \lambda_\psi) \omega_1$ $\xi = \rho_s \varphi + \rho_{s1} \psi$
Strains	$\epsilon_z = -\varphi'(s) U'(z)$ $\tau_{xz} = \varphi'(s) U(z) + \psi_\theta'(s) \theta'(z) + \psi_x'(s) X'(z)$	$\epsilon_z = -(\beta\lambda_\varphi + \lambda_\psi) \omega_1$ $\tau_{xz} = -(\rho_s - \theta) \lambda_\varphi - \rho_{s1} \lambda_\psi + \rho_s \varphi' + \rho_{s1} \psi'$
Geometrical Properties	$\varphi(s)$ $\psi_\theta(s)$ $\psi_x(s)$	ω_1 ρ_s ρ_{s1}
Independent Displacement Components	warping $U(z)$ rotation $\theta(z)$ distortion $X(z)$	$-(\beta\lambda_\varphi + \lambda_\psi)$ φ ψ
Sectional Properties	a/E b_1/G b_0/G C/E	I_{w1w1} $I_{p0} = I_{p2}$ I_{p1} I_α
External Forces	q_1 q_s p_1	m_t m_Q m_{w1}
Stress Resultants	$B(z)$ $H(z)$ $Q(z)$	$-M_{w1}$ T T_Q

板厚の影響が無視できる場合には式 (7.6・c) が成り立ち、 M_w と M_{w1} は独立な量でなくなるが一般的には M_w と M_{w1} は独立な量と考えてよい。いずれにしても M_w と M_{w1} は同じ性格を持つ力学量であり、 M_w と T_w の関係、 M_{w1} と T_Q の間にもまったく同じ関係が成り立つ。断面変形を許さない理論で M_w, T_w をそれぞれバイモーメント、そりねじれモーメントとよんでいることから、Vlasov のように M_{w1} をたて方向バイモーメントとよんだうで T_w に対応する T_Q を横方向バイモーメントとよぶのは必ずしも適切ではない。一つの提案として M_w, T_w をそれぞれねじれバイモーメント、そりねじれモーメント、 M_{w1}, T_Q を断面変形バイモーメント、断面変形モーメントとよぶことも考えられよう。板厚の影響が無視できる場合には、 M_w と M_{w1} を区別する必要がなく、さらに断面力としては M_{w1} の方が M_w より一般性があることから、断面変形を考える場合には M_{w1} を単にバイモーメントとよんでよいであろう。

8. 結 語

断面変形とせん断変形を考慮した長方形薄肉断面はりの理論を一次元の棒部材の理論として、微小変位理論のもとで明らかにした。この場合、変位場に対する仮定を明確にして、ひずみと変位の関係を求め、仮想仕事の原理を用いてつり合い式と境界条件および断面力と変位の関係を求めた。

変位場に対する仮定から導かれた結果に対し、はりの実際の挙動を可能な限り忠実にあらわし得るように、はりの微小要素のつり合いを満たすための補正、せん断応力の分布性状を断面力と変位の関係に反映させるための補正を行った。この補正は、一次元の棒部材の理論としては、実用上の立場から本質的に重要な意味をもつ。

断面変形とせん断変形の両者を考慮した長方形薄肉断面はりのねじれに関する一次元の理論としてよく知られている Vlasov の理論と本報告の結果との対応関係を、一般の棒理論の立場から明らかにした。Vlasov のつり合い式の棒理論としての力学的な意味を明確にするとともに、つり合い式にともなう境界条件を示した。Vlasov の理論での板曲げの成分は Vlasov の理論に用いられている仮定のもとでは無視し得ることを明らかにした。Vlasov の理論では断面内でのせん断応力の分布性状の影響を考慮していないが、本報告の結果によれば Vlasov の理論に用いられている仮定のもとで、その影響をつり合い式と境界条件に反映させることができる。

謝辞：本研究を行うにあたり 埼玉大学の奥村敏恵教授、新日本技研 (株) の倉方慶夫氏から貴重な指導と助

言を頂いた。ここに記して感謝する。

補遺 1 長方形薄肉断面における変位 ξ, η

式 (2.2) に示す変位場の仮定を用いて、 s, n 方向の板厚中心線上の変位 ξ と η を次のようにして求める。式 (2.3・b) を式 (2.1・a) に代入し、式 (2.3・c) に注意すれば

$$\epsilon_s = -n \frac{\partial^2 \eta}{\partial s^2} \dots\dots\dots (A.1)$$

分布外力のない板要素の微小要素 $dsdn$ に仮想仕事の原理を適用すると

$$\int_V \sigma_s \delta \epsilon_s ds dn dz = 0 \dots\dots\dots (A.2)$$

式 (A.1) を式 (A.2) に代入し、座標 s について部分積分すれば

$$\int_s \frac{\partial^2 M}{\partial s^2} \delta \eta ds + \left[M \frac{\partial}{\partial s} (\delta \eta) - \frac{\partial M}{\partial s} (\delta \eta) \right]_{s=0}^{s=l} = 0 \dots\dots\dots (A.3)$$

ここに

$$M = \int_n \sigma_s n dn \dots\dots\dots (A.4)$$

式 (A.3) より、つり合い式が次のように得られる。

$$\frac{\partial^2 M}{\partial s^2} = 0 \dots\dots\dots (A.5)$$

一軸部材の応力とひずみの関係 $\sigma_s = E \epsilon_s$ を用いて、式 (A.1) を式 (A.4) に代入し断面構成板要素の板曲げに対応する断面力 M を変位 η で表わす。

$$M = -EI_0 \frac{\partial^2 \eta}{\partial s^2}, \quad I_0 = \frac{t^3}{12} \dots\dots\dots (A.6 \cdot a, b)$$

ここに t は板要素の板厚である。式 (A.6・a) をつり合い式 (A.5) に代入すると

$$\frac{\partial^2}{\partial s^2} \left(-EI_0 \frac{\partial^2 \eta}{\partial s^2} \right) = 0 \dots\dots\dots (A.7)$$

となり、式 (A.7) は分布荷重のないはりのたわみの微分方程式に一致し、変位 η は座標 s の三次式となる。この結果と式 (2.3・c) より変位 ξ_0 が座標 s に依存しないことを考慮すると、Fig. 1 (b) に示す長方形薄肉断面の板厚中心線上の変位は次のように表わされる。

$$\xi_1 = a_1, \quad \eta_1 = c_1 s_1^3 + c_2 s_1^2 + c_3 s_1 + c_4 \dots\dots\dots (A.8 \cdot a, b)$$

$$\xi_2 = a_2, \quad \eta_2 = c_5 s_2^3 + c_6 s_2^2 + c_7 s_2 + c_8 \dots\dots\dots (A.8 \cdot c, d)$$

ここに $c_1 \sim c_8, a_1, a_2$ は s 座標によらない未定係数である。この 10 個の未定係数は次の同じ個数の条件から決定される。

(i) 対称軸上でモーメントが零である。
 $(M)_{s_1=0} = 0, (M)_{s_2=0} = 0 \dots\dots\dots (A.9 \cdot a, b)$

(ii) 隅角部で変位が連続し、モーメントと回転角がフランジとウェブでそれぞれ等しい。

$$(\xi_1)_{s_1=l} = (-\eta_2)_{s_2=-b}, \quad (\eta_1)_{s_1=l} = (\xi_2)_{s_2=-b} \dots\dots\dots (A.9 \cdot c, d)$$

$$(M)_{s_1=h} = (M)_{s_2=-b}, \quad \left(\frac{\partial \eta_1}{\partial s_1} \right)_{s_1=h} = \left(\frac{\partial \eta_2}{\partial s_2} \right)_{s_2=-b} \dots\dots\dots (\text{A.9}\cdot\text{e},\text{f})$$

(iii) 断面全体の剛体変位 u_s, v_s , 剛体回転角 φ , 断面変形量 ψ はその定義より次のように表わせる。

$$u_s = (-\eta_1)_{s_1=0}, \quad v_s = (-\eta_2)_{s_2=0} \dots\dots\dots (\text{A.9}\cdot\text{g},\text{h})$$

$$2\varphi = \frac{(\xi_1)_{s_1=0} - v_s}{b} + \frac{(\xi_2)_{s_2=0} + u_s}{h} \dots\dots\dots (\text{A.9}\cdot\text{i})$$

$$2\psi = \frac{(\xi_1)_{s_1=0} - v_s}{b} - \frac{(\xi_2)_{s_2=0} + u_s}{h} \dots\dots\dots (\text{A.9}\cdot\text{j})$$

式 (A.9) の条件を用いて未定係数 $c_1 \sim c_3, a_1, a_2$ を決めると式 (A.8) は次のようになる。

$$\xi_1 = v_s + b(\varphi + \psi) \dots\dots\dots (\text{A.10}\cdot\text{a})$$

$$\eta_1 = \frac{J_b}{hA_0} \psi s_1^3 + \left(\varphi - \psi - \frac{hJ_b}{A_0} \psi \right) s_1 - u_s \dots\dots\dots (\text{A.10}\cdot\text{b})$$

$$\xi_2 = -u_s + h(\varphi - \psi) \dots\dots\dots (\text{A.10}\cdot\text{c})$$

$$\eta_2 = -\frac{J_h}{bA_0} \psi s_2^3 + \left(\varphi + \psi + \frac{bJ_h}{A_0} \psi \right) s_2 - v_s \dots\dots\dots (\text{A.10}\cdot\text{d})$$

ここに

$$J_h = \frac{t_1^3}{12}, \quad J_b = \frac{t_2^3}{12}, \quad A_0 = bJ_h + hJ_b \dots\dots\dots (\text{A.11}\cdot\text{a}\sim\text{c})$$

補遺 2 長方形薄肉断面の幾何学量

Fig. 1 の長方形薄肉断面について式 (4.9) で定義した幾何学量を断面寸法を用いて示す。

$$A = 4(ht_1 + bt_2) \dots\dots\dots (\text{A.12}\cdot\text{a})$$

$$I_{xx} = \frac{4}{3} b^2 (3ht_1 + bt_2) + \frac{1}{12} \int m^2 t^3 ds \dots\dots\dots (\text{A.12}\cdot\text{b})$$

$$I_{yy} = \frac{4}{3} h^2 (3bt_2 + ht_1) + \frac{1}{12} \int l^2 t^3 ds \dots\dots\dots (\text{A.12}\cdot\text{c})$$

$$I_{ww} = \frac{1}{3} b^3 h^2 A \left(\frac{bt_1 - ht_2}{bt_1 + ht_2} \right)^2 + \frac{1}{12} \int \rho_n^2 t^3 ds \dots\dots\dots (\text{A.12}\cdot\text{d})$$

$$I_{ww1} = \frac{1}{3} b^3 h^2 A \frac{bt_1 - ht_2}{bt_1 + ht_2} + \frac{1}{12} \int \rho_n \rho_{n1} t^3 ds \dots\dots\dots (\text{A.12}\cdot\text{e})$$

$$I_{w1w1} = \frac{1}{3} b^3 h^2 A + \frac{1}{12} \int \rho_{n1}^2 t^3 ds \dots\dots\dots (\text{A.12}\cdot\text{f})$$

$$I_{p0} = 4bh(bt_1 + ht_2) + \frac{4}{3} k_0 (b^3 t_2 + h^3 t_1) + \frac{1}{12} \int t^3 ds \dots\dots\dots (\text{A.12}\cdot\text{g})$$

$$I_{p1} = 4bh(bt_1 - ht_2) + \frac{4}{3} k_0 (b^3 t_2 - h^3 t_1) + \frac{1}{12} \int t^3 (m^2 - l^2) ds \dots\dots\dots (\text{A.12}\cdot\text{h})$$

$$I_{p2} = 4bh(bt_1 + ht_2) + \frac{4}{3} k_0 (b^3 t_2 + h^3 t_1) + \frac{1}{12} \int t^3 (m^2 - l^2)^2 ds \dots\dots\dots (\text{A.12}\cdot\text{i})$$

$$J_s = \frac{4F^2}{\int \frac{ds}{t}} + \frac{1}{3} \int t^3 ds, \quad J_{s1} = \frac{4F^2}{\int \frac{ds}{t}} + \frac{1}{6} \int t^3 ds \dots\dots\dots (\text{A.12}\cdot\text{j},\text{k})$$

$$J_{s2} = \frac{1}{6} \int t^3 (m^2 - l^2) ds, \quad J_{s21} = \frac{1}{3} \int t^3 (l^2 - m^2) ds \dots\dots\dots (\text{A.12}\cdot\text{l},\text{m})$$

$$\left. \begin{aligned} J_{n1} &= \frac{1}{6} \int t^3 (l^2 - m^2) ds, \quad J_{n2} = -\frac{1}{6} \int t^3 (m^2 - l^2)^2 ds \\ J_n &= \frac{1}{3} \int t^3 (m^2 - l^2)^2 ds \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (\text{A.12}\cdot\text{n}\sim\text{p})$$

$$I_a = \frac{1}{12} \int t^3 (\dot{a})^2 ds = \frac{48}{b|J_b + h|J_h}, \quad I_{a1} = -\frac{1}{6} \int t^3 \dot{a} ds \dots\dots\dots (\text{A.12}\cdot\text{q},\text{r})$$

$$I_{a2} = -\frac{1}{12} \int t^3 \dot{a} ds, \quad I_{a3} = \frac{1}{6} \int t^3 (m^2 - l^2) \dot{a} ds \dots\dots\dots (\text{A.12}\cdot\text{s},\text{t})$$

$$I_{a4} = \frac{1}{12} \int t^3 (m^2 - l^2) \dot{a} ds, \quad I_{a5} = \frac{1}{12} \int t^3 (\dot{a})^2 ds \dots\dots\dots (\text{A.12}\cdot\text{u},\text{v})$$

$$I_{a6} = k_0 \int \rho_n a t ds, \quad I_{a7} = k_0 \int \rho_n a t ds, \quad I_{a8} = k_0 \int a^2 t ds \dots\dots\dots (\text{A.12}\cdot\text{w}\sim\text{y})$$

ここに F は長方形薄肉断面の板厚中心線で囲まれた面積で $F = 4bh$ である。断面内の応力分布について式 (5.2) に示すように板厚方向のせん断応力 $\tau_{nz} = 0$ としたときは $k_0 = 0$ となり、式 (4.8) に与える断面力と変位の関係では τ_{nz} は零となっておらず $k_0 = 1$ となる。

補遺 3 補正係数 $k_1 \sim k_4$

Fig. 1 の長方形薄肉断面について補正係数 $k_1 \sim k_4$ を計算した結果を示す。

$$\frac{1}{k_1} = \frac{k_x A}{I_{xx}^2} \left(\frac{4}{3} b^2 h^2 t_1 + 4 b^3 h^2 \frac{t_1^3}{t_2} + \frac{8}{3} b^4 h t_1 + \frac{8}{15} b^5 t_2 \right) \dots\dots\dots (\text{A.13}\cdot\text{a})$$

$$\frac{1}{k_2} = \frac{k_y A}{I_{yy}^2} \left(\frac{4}{3} h^2 b^2 t_2 + 4 h^3 b^2 \frac{t_2^3}{t_1} + \frac{8}{3} h^4 b t_2 + \frac{8}{15} h^5 t_1 \right) \dots\dots\dots (\text{A.13}\cdot\text{b})$$

$$k_3 = \beta^2 k_4 \dots\dots\dots (\text{A.13}\cdot\text{c})$$

$$\frac{1}{k_4} = \frac{I_{p2}}{I_{w1w1}^2} b^2 h^2 \left\{ \frac{1}{5} h^3 t_1 + b h^2 \frac{t_1^3}{t_2} + \frac{4}{3} b^2 h t_1 + \frac{8}{15} b^3 t_2 - \frac{t_1}{9 t_2 (b t_1 + h t_2)} (h^2 t_2 + 3 b h t_1 + 2 b^2 t_2)^2 \right\} \dots\dots\dots (\text{A.13}\cdot\text{d})$$

補遺 4 端部外力 \bar{T}_Q について

St. Venant のねじれによるせん断変形以外のせん断変形を無視した場合について考える。この場合には式 (2.18) で $r_u, r_v, r_\varphi, r_\psi$ をそれぞれ零とすればよい。

$$r_u = 0, \quad r_v = 0, \quad r_\varphi = 0, \quad r_\psi = 0 \dots\dots\dots (\text{A.14}\cdot\text{a}\sim\text{d})$$

したがって、式 (2.29) は、

$$\lambda_u = u_s', \quad \lambda_v = v_s', \quad \lambda_\varphi = \varphi', \quad \lambda_\psi = \psi' \dots\dots\dots (\text{A.15}\cdot\text{a}\sim\text{d})$$

式 (6.12\cdot\text{c}, \text{e}, \text{g}, \text{i}) はせん断変形に関係するつり合い式

であり、この場合にはつり合い式としての意味はない。境界条件式 (3.9) は式 (A.15) を代入した上で境界条件としてそのまま用いられる。

せん断変形を無視した場合でも式 (6.12・f, h) から明らかなようにねじれ変形 φ と断面変形 ψ はたがいに連成する。ここで板厚方向の変化に由来する成分が板厚中心線上の値による成分に比べて無視し得るほど小さいとおけるきわめて薄い板要素より成る長方形薄肉断面をとり上げる。この場合、式 (6.12・f, h) で

$$J_{ss}=J_{sn}=J_n=J_{n1}=J_{n2}=0, \quad J_{s1}=J_s \cdots \cdots (A.16 \cdot a, b)$$

$$I_{ww}=\beta^2 I_{w1w1}, \quad I_{w\omega 1}=\beta I_{w1\omega 1} \cdots \cdots (A.16 \cdot c, d)$$

長方形薄肉断面の隅角部がピン構造でモーメントを伝達しない場合には式 (6.12・f, h) で板要素の板曲げ剛性に関する成分は零となる。

$$I_a=0, \quad I_{ai}=0 \quad (i=1\sim 5) \cdots \cdots (A.17 \cdot a, b)$$

分布外力 m_t, m_w, m_{w1}, m_Q が作用しない場合、式 (6.12・f, h) のつり合い式は

$$-\beta EI_{w1w1}(\beta \varphi^{iv} + \psi^{iv}) + GJ_{s\varphi} \varphi'' = 0 \cdots \cdots (A.18 \cdot a)$$

$$-EI_{w1w1}(\beta \varphi^{iv} + \psi^{iv}) = 0 \cdots \cdots (A.18 \cdot b)$$

$z=0$ で固定、 $z=l$ で自由の片持りを考える。自由端にバイモーメント \bar{M}_w 、ねじれモーメント \bar{T} が作用していない場合、ねじれに関する境界条件式 (3.9・f, g) とつり合い式 (A.18・a) より $\varphi=0$ は解となる。このとき、断面変形に関するつり合い式 (A.18・b) は

$$\psi^{iv} = 0 \cdots \cdots (A.19)$$

断面変形に関する境界条件式 (3.9・h, i) より $z=0$ で

$$\psi = 0, \quad \psi' = 0 \cdots \cdots (A.20 \cdot a, b)$$

$z=l$ では、外力として \bar{T}_Q のみ与え、式 (3.9・i) の右辺で M_{w1}' のみ有意であることを考慮すると

$$M_{w1} = 0, \quad M_{w1}' = \bar{T}_Q \cdots \cdots (A.21 \cdot a, b)$$

式 (A.21) は式 (5.11・b) より

$$\psi'' = 0, \quad -EI_{w1w1} \psi'''' = \bar{T}_Q \cdots \cdots (A.22)$$

つり合い式 (A.19) と境界条件式 (A.20), (A.22) より断面変形量 ψ の解は

$$\psi = \frac{\bar{T}_Q l^3}{6 EI_{w1w1}} \left\{ 3 \left(\frac{z}{l} \right)^2 - \left(\frac{z}{l} \right)^3 \right\} \cdots \cdots (A.23)$$

式 (A.23) より断面変形が固定端から自由端に向かって単調に増加していき、その大きさが固定端での端部外力 \bar{T}_Q に比例することがわかる。この場合、 \bar{T}_Q は断面変形のみを発生させる力であり、モーメントの単位を持つ。この力によって片持りにねじれ変位が生じないことから、この力は断面内ではそれ自身でつり合っていることがわかる。この合力を生じさせる一つの例として長方形薄肉断面の対角線方向の力で構成されるものをあげることができる。Vlasov は \bar{T}_Q を横方向バイモーメントとよび、断面変形に関する力と述べているに過ぎないが、この結果から \bar{T}_Q の力学的な性質が明らかであろう。

参考文献

- 1) Bleich, F.: Buckling Strength of Metal Structures, McGraw-Hill, New York, 1952.
- 2) Timoshenko, S.P. and J.M. Gere: Theory of Elastic Stability, 2nd ed., McGraw-Hill, New York, 1961.
- 3) Vlasov, V.Z.: Thin-Walled Elastic Beams, 2nd, ed., Israel Program for Scientific Translation, Jerusalem, 1961.
- 4) Timoshenko, S.P., D.H. Young and W. Weaver Jr.: Vibration Problems in Engineering, 4th, ed., John Wiley and Sons, New York, 1974.
- 5) Benscoter, S.U.: A theory of torsion bending for multicell beams, Journal of Applied Mechanics, 21-1, Mar. 1954, pp. 25~34.
- 6) Heilig, R.: Beitrag zur Theorie der Kastenträger beliebiger Querschnittsform, Der Stahlbau, 11/1961, S. 333~349.
- 7) Grasse, W.: Wölbkrafttorsion dünnwandiger prismatischer Stäbe beliebigen Querschnitts, Ingenieur-Archiv XXXIV Band, 1965, S. 330~338.
- 8) Roik, K. und G. Sedlacek: Theorie der Wölbkraft-torsion unter Berücksichtigung der sekundären Schubverformungen Analogiebetrachtung zur Berechnung des querbelasteten Zugstabes, Der Stahlbau, 2/1966, S. 43~52.
- 9) Kollbrunner, C.F. and N. Hajdin: Dünnwandige Stäbe Band I, Springer-Verlag, Berlin, 1972.
- 10) 佐伯 昇: 二次せん断変形を考慮した曲げねじり理論と数値計算, 土木学会論文報告集, No. 209, 1973-1, pp. 27~36.
- 11) Bijlaard, P.P. and G.P. Fisher: Interaction of Column and Local Buckling in Compression Members, National Advisory Committee for Aeronautics, Technical Note 2640, Washington, D.C., Mar. 1952.
- 12) 能町純雄: 剛なダイヤフラムで等区画に分けられる薄肉長方形箱桁の曲げねじりについて, 土木学会論文集, No. 146, 1967-10, pp. 13~21.
- 13) 尾崎 諒: 折板構造解析による単一箱桁の曲げねじりについて, 土木学会論文報告集, No. 179, 1970-7, pp. 1~12.
- 14) 奥村敏恵・坂井藤一: 薄肉平板より成る立体的構造物の静力学的解析に関する一方法とその応用, 土木学会論文報告集, No. 176, 1970-4, pp. 43~59.
- 15) 奥村敏恵・坂井藤一: 箱型ばりの断面変形と中間ダイヤフラムの影響, 土木学会論文報告集, No. 190, 1971-6, pp. 23~36.
- 16) 奥村敏恵・坂井藤一: リブ付き台形桁の断面変形挙動とダイヤフラムの効果, 土木学会論文報告集, No. 209, 1973-1, pp. 1~14.
- 17) Janssen, J.D. and F.E. Veldpaus: Über die Stärke und Steifigkeit von Kastenträgern mit Rechteck-querschnitt, Publications of IABSE, 32-II, 1972, pp. 85~106.
- 18) 西野文雄・倉方慶夫・長谷川彰夫・奥村敏恵: 軸力と曲げおよびねじりを受ける薄肉断面部材, 土木学会論文報告集, No. 225, 1974-5, pp. 1~15.
- 19) Washizu, K.: Variational Methods in Elasticity and Plasticity, Pergamon Press, London, 1968.

(1975.7.18・受付)