

単一動荷重に対する道路橋の振動感覚

HUMAN RESPONSE TO BRIDGE VIBRATION UNDER
A SINGLE MOVING VEHICLE

小堀 為雄*・梶川 康男**

By Tameo KOBORI and Yasuo KAJIKAWA

1. ま え が き

著者らは、道路橋の振動が歩行者におよぼす影響について、振動感覚という立場から実験心理学的手法を用いた振動感覚実験^{1)~3)}、既設道路橋の振動調査⁴⁾および歩道橋の振動に対する考察⁵⁾などを行い、その成果を発表してきた。今回は、道路橋の強度や構造に関する要素を含めて歩行者の快適性を考慮に入れた動的な設計を理論的に検討したので報告する。道路橋の振動が歩行者におよぼす影響については、古くからたわみ制限を検討する際の問題点の1つとされ⁶⁾、特に最近 AASHO に取り入れられたような荷重係数設計法⁷⁾における使用限界状態を検討するうえでも、重要な要素になるものと思われる。

この種の理論解析は星谷・西脇によりシミュレーション法を用い、自動車の到着時間をも考慮した報告⁸⁾がなされている。ところが、道路橋の振動感覚を考える場合には、衝撃や疲労の問題と異なり荷重の載荷状態として満載時を考える必要はなく、日常頻繁に生ずるような状態を考えるべきであろう。すなわち、中小支間橋において大型車が数台同時に載荷することは、まれであるために自動車の到着時間を考えずに1台の大型車が走行した時の振動を詳しく検討しておく必要がある。このような理由から、本論文では道路橋の振動が歩行者におよぼす心理的影響を考慮するのに最も基本となる1台の走行自動車による道路橋の動的応答を、不規則振動の手法を用いたモーダル解析によって求めた。

まず、従来から振動が大きい形式の1つとされているランガー桁橋^{9),10)}を例にとり、2自由度系にモデル化された大型車が定常不規則な凹凸をもつ路面を一定速度で走行したときを対象に考えた。本論文では、自動車が橋

面に与える外力のパワースペクトル密度を2つの有帯域ホワイトノイズで単純化し、その外力は定常であるが自動車が移動することによって生ずる非定常性を、固有振動モードで表わされる確定関数によって表わし定常外力を絞ることにより、一種の非定常外力として扱い、この外力を受けた場合の非定常応答(過渡振動)を不規則振動解析手法を用いて求めた。そして、振動感覚を考える場合には各振動モードにおける応答速度の実効値(二乗平均値の平方根)を求めれば、振動の心理的大きさが計算できる¹¹⁾ことからモーダル解析を用いてランガー桁橋における歩行者の快適性を検討した。また、歩行者の快適性はほかの形式橋でも問題にされねばならない。モーダル解析を用いる本解析法は固有振動数と固有振動モードが決まれば、ランガー桁以外の形式橋にもそのまま適用できる。ここでは個々の形式についての適用例を示さずに、より一般的に使用できるような図を求めた。すなわち、単純桁橋や単純トラス橋などのように固有振動モードが1つの正弦曲線で表わされる場合には、橋梁の動的応答値を構造物の耐震設計でよく使われている応答スペクトル図と同様な図で示すことができる。そこで、振動感覚を考えるための「規準化した応答速度の二乗平均スペクトル図」を求め、このスペクトル図を用いることによって簡単に応答速度の実効値が計算されることを示し、構造上のパラメーターと振動感覚との関係を検討した。

2. 自動車-橋梁系の運動方程式と動的応答

ここでは、図-1のようにランダムな路面凹凸をもつランガー桁橋を、2自由度系にモデル化された大型自動車が速度 V で走行するときの自動車と橋梁の運動方程式を導く。なお、ランガー桁の動的解析については吉村・平井によって文献 9), 10) で詳しくのべられているので、ここでは簡単に示す。

* 正会員 工博 金沢大学教授 工学部建設工学科

** 正会員 福井工業大学講師 工学部建設工学科

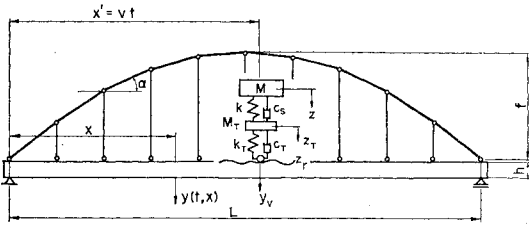


図-1 振動系模型

まず、文献 9) と同様にランガー桁に対し、次の仮定を設ける。

- (i) アーチの軸線は放物線であり、支承上において補剛桁の図心軸と一致する。
- (ii) アーチおよび補剛桁はそれぞれ等断面であるとして扱う。
- (iii) 吊材の伸びは無視する。

いま、支点からの距離が x の着目点の動たわみを $y(t, x)$ とすると、一般座標 $q_n(t)$ と基準関数 $X_n(x)$ を用いて、次式のように表わされる。

$$y(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} q_n(t) X_n(x) \dots\dots\dots (1)$$

ここで、 $X_n(x)$ は n 次振動の固有モードを示し、一般的な形として次式のように正弦級数で示されるものとする。

$$X_n(x) = \sum_{m=1}^{\infty} A_{nm} \sin \frac{m\pi x}{L} \dots\dots\dots (2)$$

一般に固有振動モード $X_n(x)$ の振幅は自由に決められるが、本論文では次の正規化条件を満たすように振幅 A_{nm} を決めることにし、正規化された振幅を a_{nm} で表わすことにする。

$$\int_0^L \rho X_n^2(x) dx = \frac{\rho L}{2} \sum_{m=1}^{\infty} a_{nm}^2 = 1 \dots\dots\dots (3)$$

以後、このように正規化された固有振動モードを $\varphi_n(x)$ と表わすことにする。すなわち、

$$\varphi_n(x) = \sum_{m=1}^{\infty} a_{nm} \sin \frac{m\pi x}{L} \dots\dots\dots (4)$$

である。さて、ランガー桁が n 次振動モードで振動しているとき、時間 t におけるアーチ水平推力の静止状態からの増加量 ΔH は次のように表わされる⁹⁾。

$n=1, 3, 5, \dots$ のとき

$$\Delta H = \frac{16 E f B}{\pi L^2} q_n(t) \sum_{m=1,3,\dots}^{\infty} \frac{a_{nm}}{m} \dots\dots\dots (5)$$

$n=2, 4, 6, \dots$ のとき

$$\Delta H = 0 \dots\dots\dots (6)$$

ここに、

- E : ヤング率
- f : ライズ
- L : 支間長

$$B = \frac{A_a \cdot A_g}{A_a + A_g \{1 + 8(f/L)^2 + 19.2(f/L)^4\}}$$

A_a : アーチ部材の断面積

A_g : 補剛桁の断面積

この ΔH を用いて、図-1 の自動車-橋梁系のポテンシャルエネルギー V を求めると

$$\begin{aligned} V = & \frac{\Delta H^2 L}{2 A_a E} \{1 + 8(f/L)^2 + 19.2(f/L)^4\} \\ & + \frac{\Delta H^2 L}{2 A_g E} + \frac{\pi^4 E I_g}{4 L^3} q_n^2(t) \sum_{m=1}^{\infty} m^4 a_{nm}^2 \\ & + \frac{k}{2} (z - z_T)^2 + \frac{k_T}{2} (z_T - y_v)^2 \\ & + (M + M_T) g y_v \dots\dots\dots (7) \end{aligned}$$

となる。ここで、 I_g は補剛桁の断面二次モーメントであり、 k および k_T はそれぞれ懸架部およびタイヤ部におけるばね定数を示し、 M および M_T はそれぞればね上部およびばね下部の質量を、 g は重力加速度を示している。また、 y_v は自動車の乗荷位置（支点からの距離が $x' = Vt$ ）における橋梁の変位 $y(t, Vt)$ と路面凹凸の変位 $z_r(Vt)$ の和であり、次式のように表わされる。

$$y_v = y(t, Vt) + z_r(Vt) \dots\dots\dots (8)$$

ただし、時間 t は自動車が橋梁に入った瞬間からの時間である。

式 (7) の ΔH に式 (5) および (6) を代入し、整理すると次のようになる。

$$\begin{aligned} V = & \left\{ \beta \frac{128 E f^2 B}{\pi^2 L^3} \left(\sum_{m=1,3,\dots}^{\infty} \frac{a_{nm}}{m} \right)^2 \right. \\ & + \left. \frac{\pi^4 E I_g}{4 L^3} \sum_{m=1}^{\infty} m^4 a_{nm}^2 \right\} q_n^2(t) \\ & + \frac{k}{2} (z - z_T)^2 + \frac{k_T}{2} (z_T - y_v)^2 \\ & + (M + M_T) g y_v \dots\dots\dots (9) \end{aligned}$$

ここに、 β は対称振動 (n が奇数) のとき 1.0 であり、逆対称振動 (n が偶数) のとき 0.0 である。

一方、自動車-橋梁系の運動エネルギー T は次のように表わされる。

$$\begin{aligned} T = & \frac{1}{2} \int_0^L \rho \{\dot{q}_n(t) \varphi_n(x)\}^2 dx + \frac{1}{2} M \dot{z}^2 + \frac{1}{2} M_T \dot{z}_T^2 \\ = & \frac{\rho L}{4} \dot{q}_n^2(t) \sum_{m=1}^{\infty} a_{nm}^2 + \frac{1}{2} M \dot{z}^2 + \frac{1}{2} M_T \dot{z}_T^2 \\ & \dots\dots\dots (10) \end{aligned}$$

ここに、 ρ は橋梁の単位長さあたりの質量である。また、散逸関数 D は次のように表わされる。

$$\begin{aligned} D = & \frac{1}{2} \int_0^L c \{\dot{q}_n(t) \varphi_n(x)\}^2 dx + \frac{1}{2} c_S (\dot{z} - \dot{z}_T)^2 \\ & + \frac{1}{2} c_T (\dot{z}_T - \dot{y}_v)^2 \\ = & \frac{cL}{4} \dot{q}_n^2(t) \sum_{m=1}^{\infty} a_{nm}^2 + \frac{1}{2} c_S (\dot{z} - \dot{z}_T)^2 \end{aligned}$$

$$+\frac{1}{2}c_T(\dot{z}_T-\dot{y}_v)^2 \dots\dots\dots(11)$$

ここに、 c 、 c_S および c_T はそれぞれ橋梁、自動車の懸架部およびタイヤ部の減衰係数である。

以上のように求めたポテンシャルエネルギー V 、運動エネルギー T および散逸関数 D を次式で表わされるラグランジェの運動方程式

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_n}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_n}+\frac{\partial V}{\partial q_n}+\frac{\partial D}{\partial \dot{q}_n}=0 \dots\dots(12)$$

に代入すると次のようになる。

$$\begin{aligned} &\frac{\rho L}{2}\sum_{m=1}^{\infty}a_{nm}^2\ddot{q}_n(t)+\frac{cL}{2}\sum_{m=1}^{\infty}a_{nm}^2\dot{q}_n(t) \\ &+2\left\{\beta\frac{128Ef^2B}{\pi^2L^3}\left(\sum_{m=1,3,\dots}^{\infty}\frac{a_{nm}}{m}\right)^2\right. \\ &+\left.\frac{\pi^4EIg}{4L^3}\left(\sum_{m=1}^{\infty}m^4a_{nm}^2\right)\right\}q_n(t) \\ &- \{c_T(\dot{z}_T-\dot{y}_v)+k_T(z_T-y_v)-(M+M_T)g\} \\ &\cdot \varphi_n(Vt)=0 \dots\dots\dots(13) \end{aligned}$$

ここで、式 (13) の $q_n(t)$ の係数が橋梁のポテンシャルエネルギーの最大値の 2 倍を示し、それが橋梁の運動エネルギーの最大値の 2 倍に等しいことと、式 (3) の正規化条件とを用いて、式 (13) を簡略化すれば次のようになる。

$$\begin{aligned} &\ddot{q}_n(t)+2h_n\omega_n\dot{q}_n(t)+\omega_n^2q_n(t) \\ &= \{c_T(\dot{z}_T-\dot{y}_v)+k_T(z_T-y_v)-(M+M_T)g\} \\ &\cdot \varphi_n(Vt) \dots\dots\dots(14) \end{aligned}$$

ここに、 h_n は $c/2\rho\omega_n$ と表わされ、橋梁の減衰定数である。

式 (5) から式 (13) までは図-1 のようなランガー桁橋を対象に考えてきたが、式 (14) は固有振動数 ω_n と固有振動モード $\varphi_n(x)$ を求めることができれば、種々の形式橋にも適用できる運動方程式である。

一方、荷重に関する運動方程式は次のようになる。

$$M\ddot{z}+c_S(\dot{z}-\dot{z}_T)+k(z-z_T)=0 \dots\dots\dots(15)$$

$$\begin{aligned} &M_T\ddot{z}_T+c_S(\dot{z}_T-\dot{z})+k(z_T-z) \\ &+c_T(\dot{z}_T-\dot{y}_v)+k_T(z_T-y_v)=0 \dots\dots(16) \end{aligned}$$

式 (15) および (16) を変形して式 (14) に代入し、静的たわみは歩行者の振動感覚に影響しないものとして、橋梁と自動車の動的成分のみを考えることとすると、式 (14) は

$$\begin{aligned} &\ddot{q}_n(t)+2h_n\omega_n\dot{q}_n(t)+\omega_n^2q_n(t) \\ &= -(M\ddot{z}+M_T\ddot{z}_T)\varphi_n(Vt) \dots\dots\dots(17) \end{aligned}$$

となる。そこで、本論文では式 (17) の右辺を外力と考えることにし、 $-(M\ddot{z}+M_T\ddot{z}_T)$ は自動車がランダムな凹凸をもつ路面を走行したときに橋面に与える定常外力 $f(t)$ であり、 $\varphi_n(Vt)$ は自動車が移動するために生ずる非定常性を表わす確定関数であると考えことにすれば、式 (17) は非定常外力を受ける 1 自由度系の線形応

答問題 (過渡応答) に帰着される¹¹⁾。

自動車が橋梁に到着する以前、橋梁は静止していたとすれば式 (17) の解 $q_n(t)$ は次式によって与えられる。

$$q_n(t)=\int_0^t h(t-\xi)f(\xi)\varphi_n(V\xi)d\xi \dots\dots\dots(18)$$

ここに、

$$\left. \begin{aligned} h(t) &= \frac{1}{\bar{\omega}_n}e^{-h_n\bar{\omega}_nt}\sin\bar{\omega}_nt \quad t \geq 0 \\ h(t) &= 0 \quad t < 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots(19)$$

なお、

$$\bar{\omega}_n=\omega_n\sqrt{1-h_n^2}$$

である。

そして、この解 $q_n(t)$ と正規化した固有振動モード $\varphi_n(x)$ を用いて、着目点における動的変位 $y(t, x)$ は次式によって求めることができる。

$$y(t, x)=\sum_{n=1}^{\infty}q_n(t)\varphi_n(x) \dots\dots\dots(20)$$

しかし、本論文では橋梁振動が歩行者に与える心理的影響を考えることから、式 (20) の動的変位を直接には求めず、次節において不規則振動解析を用いて、自動車が橋を走行している間の平均応答として、 $y(t, x)$ の二乗平均値を求める。

3. 動的応答の不規則振動解析

本論文では、1 台の大型車が走行したときの橋梁振動が歩行者に与える心理的影響を求めることを目的としているので、著者らが行った実験的研究の成果^{11), 12)}に基づき、平均的な応答量として二乗平均値を求めることとした。なお、ここでの解析は Iyengar らによる非定常外力を受ける 1 自由度系の地震応答解析¹²⁾を参考にして行った。

さて、モーダル解析法によれば $y(t, x)$ の t に関する二乗平均を求めるには、まず一般座標 $q_n(t)$ の二乗平均を求める必要がある。そこで、時間 t_1 と時間 t_2 における $q_n(t_1)$ と $q_n(t_2)$ との積の期待値は

$$\begin{aligned} E[q_n(t_1)q_n(t_2)] &= R_{q_n}(t_1, t_2) \\ &= \int_0^{t_1}\int_0^{t_2} h(t_1-\xi_1)h(t_2-\xi_2)E[f(\xi_1)f(\xi_2)] \\ &\quad \cdot g(\xi_1)g(\xi_2)d\xi_1d\xi_2 \dots\dots\dots(21) \end{aligned}$$

となる。ここで、 $g(t)$ は外力の非定常性を表わす確定関数であり、本論文では自動車が移動することを考慮するために n 次固有振動モード $\varphi_n(Vt)$ を確定関数として扱う。また、 $E[f(\xi_1)f(\xi_2)]$ は定常外力 $f(t)$ の自己相関関数に等しいので、定常外力のパワースペクトル密度を $S_f(\omega)$ として表わせば、式 (21) は

$$R_{q_n}(t_1, t_2)=\int_0^{t_1}\int_0^{t_2} h(t_1-\xi_1)h(t_2-\xi_2)$$

$$\times \left\{ 2 \int_0^\infty S_f(\omega) \cos \omega(\xi_1 - \xi_2) d\omega \right\} \cdot g(\xi_1) g(\xi_2) d\xi_1 d\xi_2 \dots \dots \dots (22)$$

となる。\$g(t)\$ と \$h(t)\$ にそれぞれ式 (4) および式 (19) を代入し、整理すると

$$R_{q_n}(t_1, t_2) = \frac{2e^{-h_n\omega_n(t_1+t_2)}}{\bar{\omega}_n^2} \int_0^\infty S_f(\omega) \cdot \{ I_S(\omega, t_1) I_S(\omega, t_2) + I_C(\omega, t_1) I_C(\omega, t_2) \} d\omega \dots \dots (23)$$

ここで、\$I_S(\omega, t)\$ および \$I_C(\omega, t)\$ は

$$\left. \begin{aligned} I_S(\omega, t) &= \int_0^t e^{h_n\omega_n\xi} \sin \bar{\omega}_n(t-\xi) \cdot \left\{ \sum_{m=1}^\infty a_{nm} \sin \frac{m\pi V\xi}{L} \right\} \sin \omega\xi d\xi \\ I_C(\omega, t) &= \int_0^t e^{h_n\omega_n\xi} \sin \bar{\omega}_n(t-\xi) \cdot \left\{ \sum_{m=1}^\infty a_{nm} \sin \frac{m\pi V\xi}{L} \right\} \cos \omega\xi d\xi \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (24)$$

となり、この積分結果については付録 A に示す。

そして、式 (23) において \$t=t_1=t_2\$ とおけば一般座標 \$q_n(t)\$ の二乗平均値 \$E[q_n^2(t)]\$ を求めることができる。すなわち

$$E[q_n^2(t)] = R_{q_n}(t, t) = \frac{2e^{-2h_n\omega_n t}}{\bar{\omega}_n^2} \cdot \int_0^\infty S_f(\omega) \{ I_S^2(\omega, t) + I_C^2(\omega, t) \} d\omega \dots \dots \dots (25)$$

となる。したがって、1台の大型車が走行したとき、着目点の応答変位 \$y(t, x)\$ の二乗平均値は次式によって表わされる。

$$E[y^2(t, x)] = \sum_{n=1}^\infty \{ E[q_n^2(t)] \varphi_n^2(x) \} \dots \dots (26)$$

また、応答速度 \$\dot{y}(t, x)\$ ならびに応答加速度 \$\ddot{y}(t, x)\$ の二乗平均値はそれぞれ

$$E[\dot{y}^2(t, x)] = \sum_{n=1}^\infty \{ E[\dot{q}_n^2(t)] \varphi_n^2(x) \} \dots \dots (27)$$

$$E[\ddot{y}^2(t, x)] = \sum_{n=1}^\infty \{ E[\ddot{q}_n^2(t)] \varphi_n^2(x) \} \dots \dots (28)$$

となる。ここで、\$E[\dot{q}_n^2(t)]\$ および \$E[\ddot{q}_n^2(t)]\$ は次のようである。

$$\begin{aligned} E[\dot{q}_n^2(t)] &= R_{\dot{q}_n}(t, t) = \frac{\partial^2 R_{q_n}(t, t)}{\partial t^2} \\ &= \frac{2e^{-2h_n\omega_n t}}{\bar{\omega}_n^2} \int_0^\infty S_f(\omega) \left[\left\{ -h_n\omega_n I_S(\omega, t) + \frac{\partial I_S(\omega, t)}{\partial t} \right\}^2 + \left\{ -h_n\omega_n I_C(\omega, t) + \frac{\partial I_C(\omega, t)}{\partial t} \right\}^2 \right] d\omega \dots \dots \dots (29) \end{aligned}$$

$$E[\ddot{q}_n^2(t)] = R_{\ddot{q}_n}(t, t) = \frac{\partial^4 R_{q_n}(t, t)}{\partial t^4}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{2e^{-2h_n\omega_n t}}{\bar{\omega}_n^2} \int_0^\infty S_f(\omega) \left[\left\{ (h_n\omega_n)^2 I_S(\omega, t) - 2h_n\omega_n \frac{\partial I_S(\omega, t)}{\partial t} + \frac{\partial^2 I_S(\omega, t)}{\partial t^2} \right\}^2 \right. \\ &\quad \left. + \left\{ (h_n\omega_n)^2 I_C(\omega, t) - 2h_n\omega_n \frac{\partial I_C(\omega, t)}{\partial t} + \frac{\partial^2 I_C(\omega, t)}{\partial t^2} \right\}^2 \right] \dots \dots \dots (30) \end{aligned}$$

なお、式 (29) および式 (30) における

$$\frac{\partial I_S(\omega, t)}{\partial t}, \frac{\partial I_C(\omega, t)}{\partial t}, \frac{\partial^2 I_S(\omega, t)}{\partial t^2}$$

および

$$\frac{\partial^2 I_C(\omega, t)}{\partial t^2}$$

はそれぞれ付録 B ならびに C に示す。

ここで、定常外力のパワースペクトル密度 \$S_f(\omega)\$ について考えてみる。定常外力 \$f(t)\$ は式 (17) から

$$f(t) = -\{ M\ddot{z}(t) + M_T\ddot{z}_T(t) \} \dots \dots \dots (31)$$

で表わされるから、\$f(t_1)f(t_2)\$ の期待値をとり自己相関関数と相互相関関数で表わすと

$$\begin{aligned} R_f(t_1, t_2) &= M^2 R_{\ddot{z}}(t_1, t_2) + MM_T \{ R_{\ddot{z}\ddot{z}_T}(t_1, t_2) \\ &\quad + R_{\ddot{z}_T\ddot{z}}(t_1, t_2) \} + M_T^2 R_{\ddot{z}_T}(t_1, t_2) \dots \dots \dots (32) \end{aligned}$$

となる。式 (32) の各項をフーリエ変換し、それぞれのパワースペクトル密度を用いて表わせば、次のようになる。

$$\begin{aligned} S_f(\omega) &= M^2 S_{\ddot{z}}(\omega) + 2MM_T \{ r^2(\omega) S_{\ddot{z}}(\omega) S_{\ddot{z}_T}(\omega) \}^{1/2} \\ &\quad + M_T^2 S_{\ddot{z}_T}(\omega) \dots \dots \dots (33) \end{aligned}$$

ここで、\$r^2(\omega)\$ はコヒーレンス関数であり、\$S_{\ddot{z}}(\omega)\$ および \$S_{\ddot{z}_T}(\omega)\$ はそれぞれ自動車のばね上質点における加速度 \$\ddot{z}(t)\$ およびばね下質点における加速度 \$\ddot{z}_T(t)\$ のパワースペクトル密度である。

以上より、自動車のばね上質点およびばね下質点における加速度のパワースペクトル密度がわかれば、式(33)を用いて定常外力のパワースペクトル密度を求めることができる。さらに、固有振動数 \$\omega_n\$ と固有振動モードの振幅 \$a_{nm}\$ を求めることができれば、前述したように応答変位、応答速度および応答加速度の二乗平均値を計算することができる。なお、本節でのベタ不規則振動解析による動的応答値の算式は橋梁形式にこだわらず、固有値が計算されれば、橋梁振動が歩行者におよぼす心理的影響を理論的に把握できる。そこで、次の 4. においては種々のランガー桁橋を設計し、そのランガー桁の動的応答を求める。さらに、5. においては単純桁や単純トラスのように固有振動モードが1つの正弦曲線で表わされる場合に対して、振動感覚を生ずる振動刺激(応答速度の実効値)を簡単に求めるための「二乗平均スペクトル図」を求める。

4. ランガー桁橋における振動感覚

ランガー桁橋の振動が大きいは以前からも指摘されてきた¹³⁾。また、著者らの調査⁴⁾においても他の形式橋に比べて振動が大きいたことが認められた²⁾。そこで、本節では支間長・ライズおよび補剛桁の桁高を変えて数多くのランガー桁橋を設計し、その固有振動数ならびに固有振動モードを求め、3. でのべた不規則振動解析によって、それぞれのランガー桁橋における動的応答（振動速度）値を求め、振動感覚という立場からランガー桁橋の振動に対する検討を行った。

(1) ランガー桁のモデル橋の設計

ランガー桁は内の一次不静定構造であるので、不静定力としてアーチに作用する応力の水平分力 H_a を選び、その支間中央における影響線の値が次式で示されるものとし、他の点における影響線の値は支間中央の値を頂点とする正弦曲線で求められるものとした¹⁴⁾。

$$H_a \approx 0.192 \frac{L}{f} \dots \dots \dots (34)$$

ここに、 L は支間長、 f はライズである。

そこで、表-1 に示した諸条件のうち、③のライズ比と④の支間長を変化させ、軸力および曲げモーメント

の影響線を求め、表-1 の死荷重と L-20 の活荷重に対する断面力を計算した。そして、アーチ部材は高さと同幅を表-1 のように仮定し、トラス断面の規定に従って各格間ごとの板厚を決めた。一方、補剛桁についてはこの剛性が振動数に大きく影響することが予想されるので、5種類の桁高を考え、各格点において2つの応力状態（正の曲げモーメントと引張軸力ならびに負の曲げモーメントと引張軸力）に対して、上下フランジにおける引張応力がそれぞれ許容応力に達するように両フランジの断面積を決めた。一般の設計では、断面が決定された段階で式(34)による仮定の是非を確認するが、本設計では全体の傾向を把握することが目的であるので、この確認を行わなかった。続いて、断面決定された各ランガー桁橋の活荷重によるたわみ δ 、固有振動数 ω_n および固有振動モードの振幅 a_{nm} を吉村・平井の提案する方法⁹⁾ で求めた。ただし、たわみ・振動数およびモードの計算に用いた換算断面は各格間ならびに各格点における断面の算術平均値である。また、振動数の計算は4次振動までとした。

(2) 橋面および走行自動車のパワースペクトル密度

一般路面を走行する自動車が振動する原因として、エンジンやタイヤなどの不つり合いが考えられるが、本論文では振動の原因は主として路面の凹凸であると考えることとする。また、橋梁上では式(8)および式(16)で表わされるように自動車の載荷位置における橋梁の変位も自動車の振動に影響する。しかし、この橋梁変位はこの段階では求められておらず、しかも自動車が移動するためにその定量的把握は難しい。また、一般路面上では自動車の各加速度が定常であると考えても差し支えないであろうが、橋梁上では非定常な橋梁変位の影響によって自動車の各加速度は非定常となる。したがって、式(31)で示される外力も定常でないことになる。ところが、自動車が移動しないような場合には、繰り返し計算によって解析¹⁵⁾することもできるが、本論文のような場合には一般に解析が困難となる。そこで、ここでの数値計算においては以下に示すように橋梁と自動車を切り離して考え、自動車が橋面に与える外力 $f(t)$ は定常であると仮定した。

一般に、路面凹凸のパワースペクトル密度 $S_R(\Omega)$ は次式のように指数関数で表わされる¹⁶⁾。

表-1 ランガー桁橋の設計条件

①	橋 格	一等橋 (T.L-20)					
②	幅 員	車道部 7m, 歩道部なし					
③	ライズ比 (L/f)	6, 7, 8					
④	支間長 (L , m)	60	70	80	100	120	150
⑤	格 間 数	8	10	10	12	16	20
⑥	部材高 (h_a , cm)	35	40	45	55	65	80
ア ー チ	部 材 幅 (cm)	$h_a + 6$ (上フランジ)、腹板間隔を h_a に等しくした。					
	縦 リ ブ	$90 \text{ mm} \times 8 \text{ mm}$ のリブを $h_a < 60 \text{ cm}$ では4本、 $h_a > 60 \text{ cm}$ では8本をフランジ・ウェブに配置					
⑦	桁 高 比 (L/h)	30, 35, 40, 45, 50					
補 剛 桁	腹 板 厚	水平補剛材を一段配置するとしての最小厚、 $h/220$ 以上、ただし 9mm 以上					
	床 版	鉄筋コンクリート床版 (16cm 厚)					
	舗 装	アスファルト舗装 (5cm 厚)					
	鋼 重*	(支間長 m)/70 (t/m)					
	そ の 他	高欄 0.04 t/m, 地覆 0.188 t/m, ハンチ 0.1 t/m					
死 荷 重	死 荷 重 合 計	一主構当り $2.25 + L/70$ (t/m)					
	線 荷 重	5 t/m					
活 荷 重	等 分 布 荷 重	$L \leq 80 \text{ m}$ 350 kg/m ² , $80 < L \leq 130$ (430-L) kg/m ² $L > 130 \text{ m}$ 300 kg/m ²					
	衝 撃 係 数	$i = 20/(50 + L)$					
⑩	鋼 種	SM 50					
⑪	その他	については道路橋示方書(昭和47年)に準拠する。					

* この鋼重については実際の設計例から、支間長との関係を求め、仮定したものである。

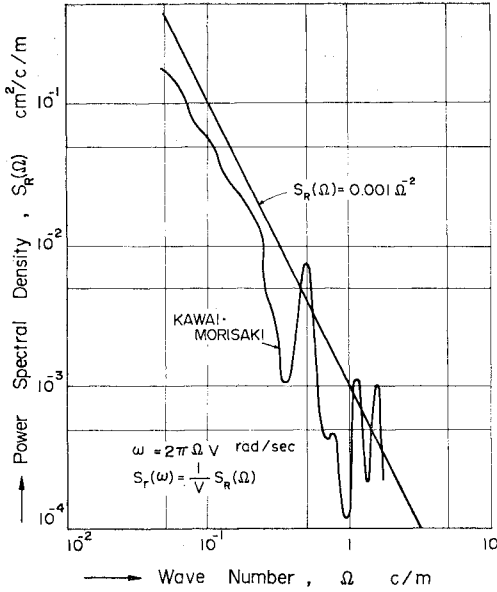


図-2 路面凹凸のパワースペクトル密度

$$S_R(\Omega) = a\Omega^{-n} \dots\dots\dots (35)$$

ここに、 Ω は路面周波数、 a は路面粗さのパラメータ、そして、 n は周波数によるパワーの分布を示す指数である。また、走行速度 V を一定として $\Omega = \omega/2\pi V$ であるので、式 (35) を書き改めると、

$$S_r(\omega) = aV^{n-1} \left(\frac{\omega}{2\pi}\right)^{-n} \dots\dots\dots (36)$$

となる。そこで、本節における数値計算では図-2の曲線で示したような川合・森崎¹⁷⁾が求めた値に、橋梁変位の影響を考慮して少し勾配をきつくし、直線で示したような指数関数を橋面凹凸のパワースペクトル密度であると仮定した。すなわち、式 (36) におけるパラメータ a を $10^{-3} \text{cm}^2/\text{m}/\text{c}$ とし、べき指数 n を 2.0 とした。凹凸波長の範囲としては 20 cm から 20 m までとした。このような定常路面を総重量が 20 トンの大型車が走行したときに生ずる自動車のばね上およびばね下質点における加速度のパワースペクトル密度は、橋面凹凸のパワースペクトル密度と伝達関数を用いて次式のように示される。

表-2 路面と走行自動車の諸元

走行速度 (V) : 10 m/sec (40 km/時 相当)	
路面凹凸波長 : 最小 20 cm, 最大 20 m	
路面凹凸パワースペクトル密度 (cm ² ·sec) : $S_r(\omega) = 0.001 V(\omega/2\pi)^{-2}$	
車両総重量 : 20 トン (ばね上部 18 トン, ばね下部 2 トン)	
ばね定数	懸架部 (k), 4000~6000 kg/cm
	タイヤ部 (k_T), 8000~12000 kg/cm
減衰係数	懸架部 (C_s), 25 kg/cm/sec
	タイヤ部 (C_T), 30 kg/cm/sec
自動車外力のパワースペクトル密度 (有帯域ホワイトノイズ)	有帯域 $3\pi \sim 7\pi$ rad/sec, $S_f(\omega) = 800\,000 \text{ kg}^2\cdot\text{sec}$
	有帯域 $20\pi \sim 40\pi$ rad/sec, $S_f(\omega) = 88\,000 \text{ kg}^2\cdot\text{sec}$

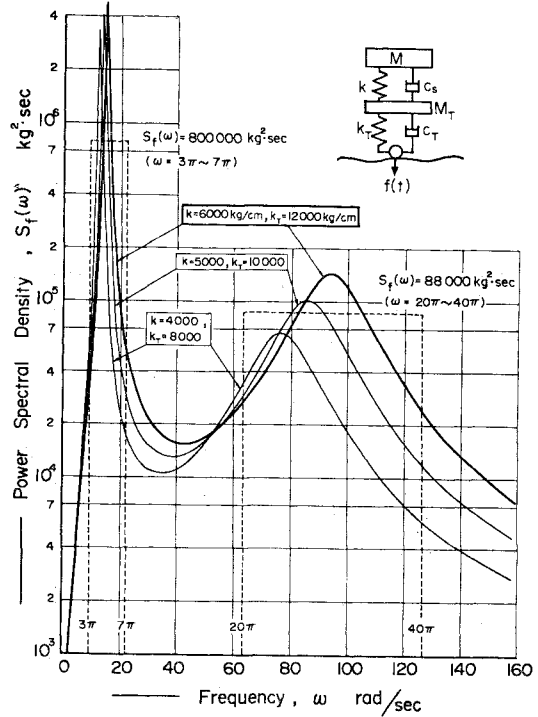


図-3 自動車外力のパワースペクトル密度

スペクトル密度と伝達関数を用いて次式のように示される。

$$S_{\ddot{x}}(\omega) = \omega^4 |H_{zr}(i\omega)|^2 S_r(\omega) \dots\dots\dots (37)$$

$$S_{\ddot{x}_T}(\omega) = \omega^4 |H_{zTr}(i\omega)|^2 S_r(\omega) \dots\dots\dots (38)$$

ここで、 $H_{zr}(i\omega)$ は路面変位とばね上質点における変位との伝達関数であり、 $H_{zTr}(i\omega)$ は路面変位とばね下質点における変位との伝達関数である¹⁵⁾。そして、自動車が橋面に与える外力のパワースペクトル密度 $S_f(\omega)$ は式 (33) を用いて計算される。本論文で用いた大型車の諸元を表-2 に示した。ここで、表-2 の減衰係数は著者の 1 人が用いた諸元¹⁵⁾を単純化した数値である。ところが、車種によってばね定数 k ならびに k_T が異なっていることから、ここでは図-3 のように k と k_T の組み合わせを 3 種類考え、それぞれについて外力のパワースペクトル密度を求め、図-3 に示した。なお、式 (33) におけるコヒーレンス関数としては完全相関を仮定し、 $r^2(\omega) = 1$ とした。図-3 より明らかなように 2 自由度にモデル化したために、鋭いピークを有する狭帯域スペクトルとなる。ところが、実際には 2 自由度モデルでは表現できないような振動 (ピッチング・ローリング振動およびタイヤのつり合いなど) の影響が生ずるであろうし、前輪部と後輪部ではその

動特性にも相当な違いが見られるであろう。このような理由から、図-3で示されるパワースペクトル密度よりも、もう少し広帯域なスペクトルを考えるのが実際的であろう。また、外力が狭帯域スペクトルであると仮定すると、ある車種では橋梁の動的応答が非常に大きくなるが、わずかに動特性の異なる車種では小さくなるということが生ずる。そのために、自動車の周波数特性のある車種に固定して考えるのは妥当ではない。そこで、本論文では道路橋における振動感覚を求めることから、最大応答よりも平均的な応答を求めるべきであると考え、図-3に破線で示したような2つの有帯域ホワイトノイズのスペクトルで外力を表わすことにした。まず、ほとんどの大型車のばね上部における固有振動数が2~4 Hzの範囲にあるが、その外力のパワースペクトル密度は路面凹凸のパワースペクトル密度などの影響を受けて、少し振動数の低い方にずれる。そこで、第1の有帯域スペクトルとして1.5~3.5 Hzの範囲にホワイトノイズを仮定し、その強度は平均パワー（分散値）が等しくなるように決めた。同様に、第2の有帯域としては10~20 Hzとした。本論文では図-3における3種のばね定数のうち、 $k=6000 \text{ kg/cm}$ と $k_T=12000 \text{ kg/cm}$ で表わされる車種がもつパワースペクトル密度を基礎に平均パワーを

求めた。その結果、次のような値を強度として採用した。

$\omega=3\pi\sim7\pi \text{ rad/sec}$ において、

$$S_f(\omega)=800000 \text{ kg}^2\cdot\text{sec}$$

$\omega=20\pi\sim40\pi \text{ rad/sec}$ において、

$$S_f(\omega)=88000 \text{ kg}^2\cdot\text{sec}$$

これらの数値を加速度の実効値に換算すると、ばね上部において約 70 cm/s^2 、ばね下部において約 460 cm/s^2 であり、起振力（実効値）にして約1.6トンとなる。

(3) ランガー桁橋における応答速度

ここでは、著者がすでに発表した実験的研究^{(1),(2),(4)}の成果に基づいて、1~10 Hzの振動数範囲では歩行者の振動感覚を評価する場合に応答速度の実効値（二乗平均値の平方根）を振動刺激として考えればよいことから、各ランガー桁橋における応答速度の実効値を求めた。(1)でモデル設計したランガー桁橋に、(2)でのべた自動車による定常外力が作用したときの橋梁の動的応答を、3.でのべた不規則振動解析によって計算した。すなわち、(1)で求められた固有振動数 ω_n 、固有振動モードの振幅 a_{nm} および(2)で求めた有帯域のパワースペクトル密度 $S_f(\omega)$ を付録 A および B における

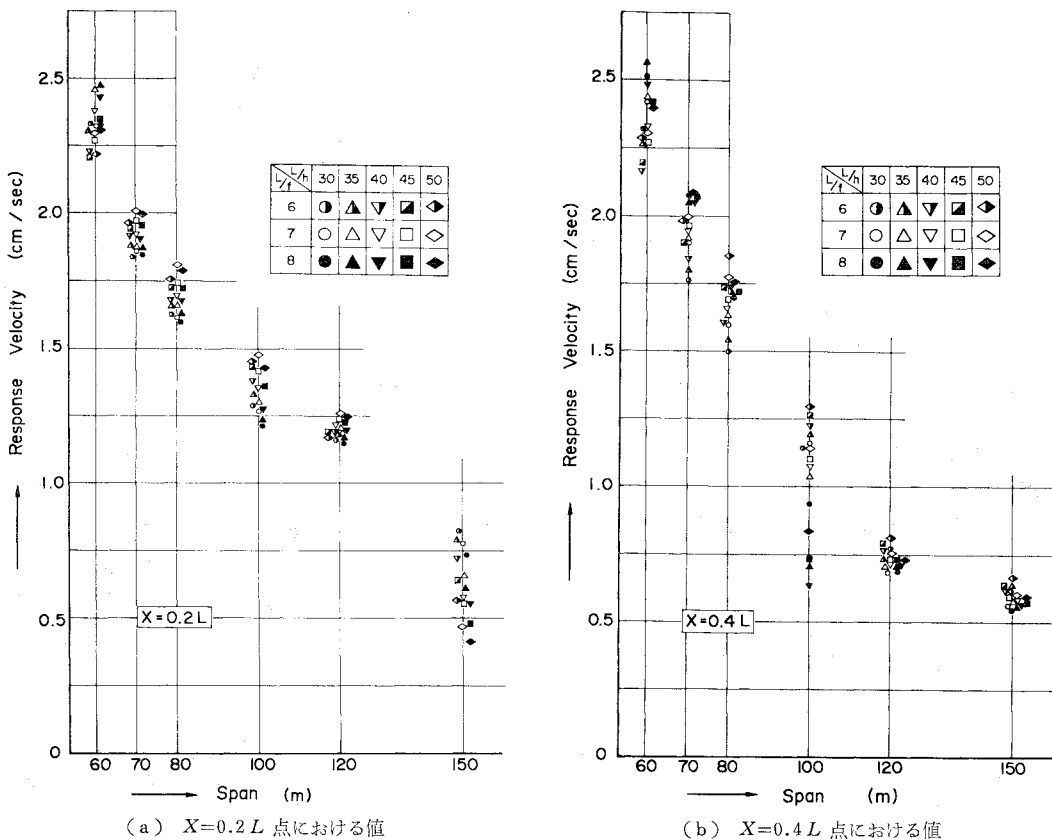


図-4 各ランガー桁橋の動的応答

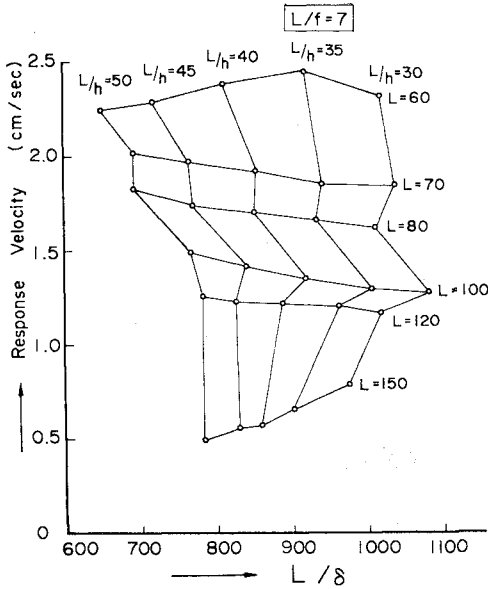


図-5 各ランガー桁橋の活荷重による最大たわみ比と
応答速度値 ($x=0.2L$) の関係

式 (A.1)~式 (A.4) に代入し、その結果を式 (29) に代入し、 ω について積分すれば各振動次数ごとに一般座標 $\dot{q}_n(t)$ の二乗平均値 $E[\dot{q}_n^2(t)]$ を求めることができ、式 (27) によって着目点における応答速度の二乗平均値 $E[\dot{y}^2(t, x)]$ が計算される。ただし、本節においては振動次数を4次*までとし、橋梁の減衰定数 h_n は振動次数に関係なく 0.02 とした¹⁸⁾。また、自動車が橋梁を通過したあとに残る橋梁の減衰自由振動における振幅は一般に小さいので、歩行者が受ける振動としては橋梁の強制振動のみを考えることにする。すなわち、継続時間として自動車が橋上に載っている時間 L/V を考えた。

着目点として支点からの距離が $0.2L$ および $0.4L$ の点を選び、その点の振動刺激（応答速度の実効値）を計算し、図-4 に示した。また、ライズ比 L/f が7の場合の活荷重による最大たわみ比 L/δ と $0.2L$ 点における振動刺激との関係を図-5 に示した。これらの図より振動刺激としての応答速度とランガー桁橋のパラメーターとの関係がわかる。その特徴をあげれば次のようである。

1) 着目点 ($0.2L$ 点と $0.4L$ 点) による刺激の差は少ない。これは、従来からよくいわれてきたランガー桁橋の逆対称振動による影響のみが、橋梁の振動感覚の点から見た使用性に関して特に著しいとはいえないことを示している。

2) 支間が長くなるにしたがって刺激が小さくなる。これは、自動車による外力の大きさが同じであるために、その外力を受ける橋梁が重ければ応答量が小さくなるのは当然であろう。したがって、ランガー桁として比較的短い支間長にあたる $60\sim 80$ m 級の橋がよく揺れるといえる。図-4 から明らかなように、著者らが提案した道路橋の振動制限（振動速度の実効値を 1.7 cm/sec^2 ）を越える橋は $60\sim 80$ m 級に限られている。また実橋調査¹⁹⁾による心理的大きさ²⁰⁾においても、 $60\sim 80$ m 級の支間長をもつ橋梁の振動が顕著である。

3) ライズや補剛桁の桁高による刺激への影響はわずかである。これは、有帯域のスペクトルを仮定したことにもよろうが、多少の振動数の変化によって刺激を小さくすることが困難であることを示している。

4) 活荷重による最大たわみの支間長に対する比 L/δ は刺激と直接には関係しない。すなわち、ランガー桁橋の振動が歩行者に与える影響は、橋の可撓性と直接には関係しない。この事実は、桁橋に対して検討した R.N. Wright ら¹⁹⁾の指摘と一致している。

以上の特徴から考えると $60\sim 80$ m 級のランガー桁橋において、振動を軽減するには本論文で考えていないパラメーターの変更（たとえば、路面粗さのパラメーターまたは構造系そのものなどの変更）が必要であろう。

5. 動的応答の二乗平均スペクトル

前節では、振動が大きいといわれているランガー桁橋を標準設計し、3. における不規則振動解析を用いてその動的応答を求めた。ところが、ランガー桁橋の対称振動のように固有振動モードが級数の和で表わされるときには、一般座標の応答量を求める式 (25)、(29) および (30) において級数項 m についての和を二乗したのちに、 ω について積分しなければならぬ。しかし、設計された橋梁であれば固有振動モードの級数 a_{nm} が既知であるので応答量を求めることができた。ところが、単純桁橋や単純トラス橋などの固有振動モードは1つの正弦曲線で表わされることが多い。これらの形式橋においても、振動感覚が問題になることが考えられる²¹⁾。

そこで、本節においては固有振動モードが次式で示される場合の動的応答を簡単に求める方法について考えた。

$$\varphi_n(x) = a_{nm} \sin \frac{m\pi x}{L} \quad (n=m) \dots\dots\dots (39)$$

このような場合には、式 (24) における $I_s(\omega, t)$ や $I_c(\omega, t)$ およびそれらの微係数は付録 A・B ならびに C からわかるように、それぞれ a_{nm} のみを係数として表わされる。したがって、一般座標の応答（二乗平均）は

* 本研究において設計したランガー桁のモデル橋では、4次の固有振動数が 8 Hz 以下であり、著者らの実測¹⁹⁾においても5次以上の振動数が認められないことから、振動感覚を評価するには4次までの振動次数を考えることにした。

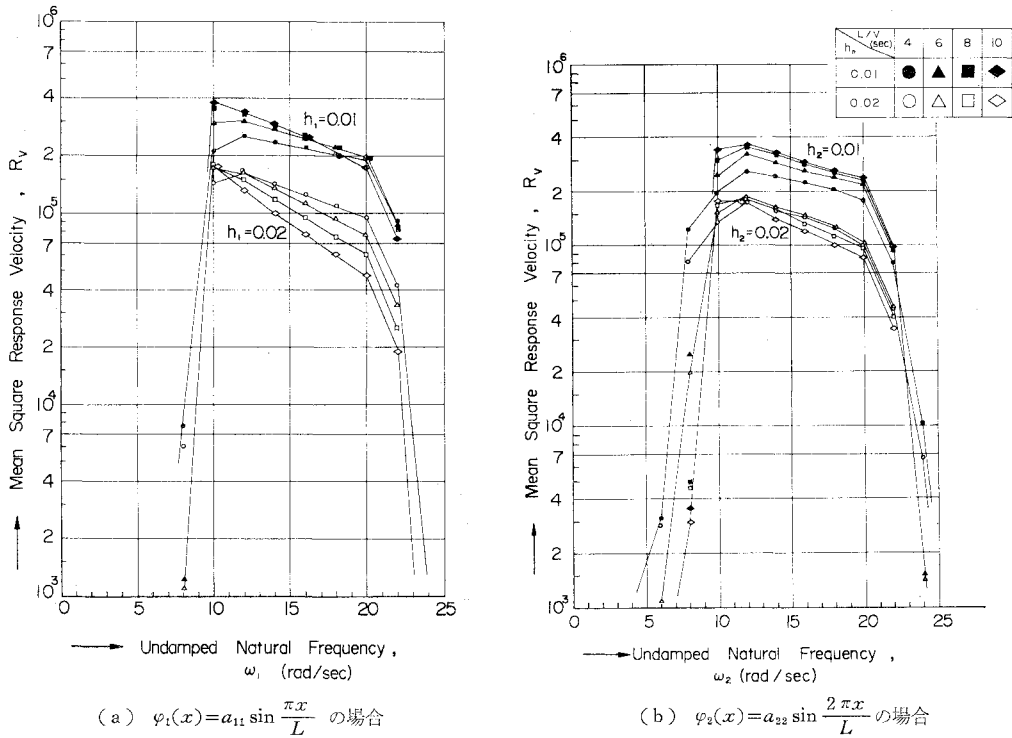


図-6 規準化された応答速度の二乗平均スペクトル

a_{nm}^2 に比例することになる。そこで、 a_{nm}^2 を 1.0 として各振動数 ω_n について計算しておけば、その値に実際の a_{nm}^2 を乗じて $E[q_n^2(t)]$, $E[\dot{q}_n^2(t)]$ および $E[\ddot{q}_n^2(t)]$ を求めることができる。本論文では、1 台の大型車が走行したときの道路橋における振動感覚を対象にしていることから応答量として、応答速度の二乗平均値を求めることにする。まず、定常外力に関するデータは 4. の (2) で求めたものとまったく同じであるとした。一方、橋梁の減衰定数 h_n として 0.01 と 0.02 を考え、また、強制振動の継続時間 L/V として、4, 6, 8 および 10 秒について式 (29) を計算した結果を図-6 に示した。図-6 は横軸に橋梁の固有振動数 ω_n をとり、継続時間 L/V をパラメーターとして、縦軸には一般座標の応答を a_{nm}^2 で除した値、すなわち $E[\dot{q}_n^2(L/V)]/a_{nm}^2$ を示した。これらの図を構造物の耐震設計法で用いられている応答スペクトルにならって「規準化された応答速度の二乗平均スペクトル図」と称することにした。これらの図に示された値は一般座標に関するものであるため、着目点 (支点から距離 x) における応答速度の二乗平均値 $E[\dot{y}^2(L/V, x)]$ は、図-6 の縦座標の値を R_V とし、正規化条件より $a_{nm}^2 = 2/\rho L$ であるので次式にて与えられる。

$$E[\dot{y}^2(L/V, x)] = \sum_n \{a_{nm}^2 R_V \varphi_n^2(x)\}$$

$$= \left(\frac{2}{\rho L}\right)^2 \sum_n \left\{R_V \sin^2 \frac{n\pi x}{L}\right\} \dots \dots \dots (40)$$

以上のように、図-6 と式 (40) によって固有振動モードが式 (39) で与えられる場合の応答速度の二乗平均値を求めることができる。したがって、その平方根をとれば振動刺激が計算される。このように、二乗平均スペクトルを計算しておけば、簡単に振動刺激を求めることができる。式 (4) のように固有振動モードが級数の和で表わされる場合についても応答スペクトルを求めることもできるが、かなり複雑になるために適当な作図法がなく、現在検討中である。これが求まれば、いろいろな形式橋の動的応答値が簡単に計算できるようになる。

ここで、本節で得られる各パラメーターと、振動刺激としての応答速度との関係を列挙すると次のようである。

- 1) 橋梁の重量は応答速度と密接な関係がある。式 (40) からわかるように応答速度の実効値は橋梁質量と反比例することになる。これは、ほかの条件が同じ場合には軽い橋がよく揺れることを示している。
- 2) 路面粗さのパラメーター a と応答速度の二乗平均値とは比例する。したがって、本論文では $a = 10^{-3} \text{cm}^2/\text{m/c}$ を用いていることに留意すれば、 a がほかの値の場合にも図-6 を用いることができる。

3) 走行速度 V と二乗平均値との関係について、次のように考えることができる。まず、式 (36) において本論文で扱ったように指数が 2 であれば、走行速度と路面凹凸のパワースペクトル密度 $S_r(\omega)$ とは比例し、また $S_r(\omega)$ と自動車外力のパワースペクトル密度 $S_f(\omega)$ とは、式 (33), (37) および (38) によって比例していることがわかる。したがって、走行速度と応答速度の二乗平均値とは比例関係にある。ところが、走行速度が変わることによって継続時間 L/V が変わるので一般的傾向を把握することはできないが、走行速度が本論文で扱った 10 m/s 以外でも図-6 を用いることができる。

4) 図-6 には減衰定数が 0.01 の場合と 0.02 の場合を示してある。両者には 2~3 倍の差が認められる。1 自由度系に完全なホワイトノイズの外力が作用した時の定常応答の二乗平均値には 2 倍の差がある¹³⁾ ことから考えると、本論文のように非定常外力を受ける過渡応答の場合には減衰の影響が、やや大きいといえよう。

6. あとがき

本論文は、先に著者らが行ってきた道路橋における振動感覚に関する実験的研究¹¹⁻¹⁴⁾ をもとにして、道路橋の動的応答をモーダル解析と不規則振動解析を併用して求めたものである。橋梁振動による振動感覚を考える場合には、1 台の大型車が走行したときの振動を対象にすべきであると考え、荷重の到着時間および到着台数などは考慮しなかったので橋梁の動的応答は解析的に求めることができた。しかし、実際の交通状態では数台の自動車と同時に載荷することも考える必要があると思われるが、研究の第一段階として前記の状態を考えた。

そこで、振動が大きいといわれているランガー桁橋を対象に、支間長・ライズおよび補剛桁の桁高をいろいろと変えて設計を行い、それぞれに対する動的応答値(振

動刺激として応答速度の実効値)を求め、ランガー桁橋における振動感覚について検討した結果、興味ある点を指摘することができた。

続いて、固有振動モードが 1 つの正弦曲線で表わされる場合には動的応答解析が容易になり、耐震設計法でよく用いられている応答スペクトルに類似した「応答速度の二乗平均スペクトル」を求めることができ、振動感覚を考える場合に必要な応答速度の二乗平均値を比較的簡単に計算できることを示した。そして、振動の刺激と各パラメーターとの関係について検討し、さまざまな点を指摘することができた。

なお、本論文では自動車を振動させる路面凹凸と橋梁変位のパワースペクトル密度を単純な形で表わし、しかも、それによる自動車の動的応答を求め、その自動車が橋面に与える外力として 2 つの有帯域ホワイトノイズを用いたことに対しては、さらに検討を加えねばならない。また、本論文で示した二乗平均スペクトルは 1 つの正弦曲線で固有振動モードが表わされる場合のみに適用できる。ところで、ランガー桁橋の対称振動などのように振動モードが級数の和として表わされる場合についても、このような応答スペクトルを求めることもできるが、複雑なために適当な作図法を今のところ思いつかず、今後検討していくつもりである。これが検討されれば、より一層興味ある結果が得られるであろう。

本研究で求めた解析法・ランガー桁橋における振動感覚および動的応答の二乗平均スペクトル図が、今後道路橋の振動を考える際に参考になれば幸いである。

最後に、ランガー桁橋の設計を行うに際し助力いただいた元金沢大学工学部学生 小川克美君(現 横河橋梁製作所)に謝意を表わすとともに、図面の作成に協力いただいた金沢大学の城戸隆良技官に感謝いたします。なお、本研究の一部に文部省科学研究費の援助を受けたことを付記します。

【付録 A】 $I_S(\omega, t)$ ならびに $I_C(\omega, t)$ の解析結果

$$\begin{aligned}
 I_S(\omega, t) &= \int_0^t e^{h_n \omega_n \xi} \sin \bar{\omega}_n(t-\xi) \left\{ \sum_{m=1}^{\infty} a_{nm} \sin \frac{m\pi V\xi}{L} \right\} \sin \omega\xi d\xi \\
 &= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{a_{nm}}{2} \left[-\int_0^t e^{h_n \omega_n \xi} \sin \frac{m\pi V\xi}{L} \cos \{ \bar{\omega}_n t + (\omega - \bar{\omega}_n) \xi \} d\xi \right. \\
 &\quad \left. + \int_0^t e^{h_n \omega_n \xi} \sin \frac{m\pi V\xi}{L} \cos \{ \bar{\omega}_n t - (\omega - \bar{\omega}_n) \xi \} d\xi \right] \\
 &= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{a_{nm}}{4} \left[-\frac{1}{(h_n \omega_n)^2 + \left(\frac{m\pi V}{L} + \omega - \bar{\omega}_n \right)^2} \right] e^{h_n \omega_n t} \left\{ h_n \omega_n \sin \omega_n t - \left(\frac{m\pi V}{L} + \omega - \bar{\omega}_n \right) \cos \omega_n t \right\} \\
 &\quad + \left(\frac{m\pi V}{L} + \omega - \bar{\omega}_n \right) \cos \bar{\omega}_n t - h_n \omega_n \sin \bar{\omega}_n t \left] + \frac{1}{(h_n \omega_n)^2 + \left(\omega - \bar{\omega}_n - \frac{m\pi V}{L} \right)^2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \cdot \left[e^{h_n \omega_n t} \left\{ h_n \omega_n \sin \omega_2 t - \left(\omega - \bar{\omega}_n - \frac{m\pi V}{L} \right) \cos \omega_2 t \right\} + \left(\omega - \bar{\omega}_n - \frac{m\pi V}{L} \right) \cos \bar{\omega}_n t - h_n \omega_n \sin \bar{\omega}_n t \right] \\
 & - \frac{1}{(h_n \omega_n)^2 + \left(\frac{m\pi V}{L} - \omega - \bar{\omega}_n \right)^2} \left[e^{h_n \omega_n t} \left\{ h_n \omega_n \sin \omega_2 t + \left(\frac{m\pi V}{L} - \omega - \bar{\omega}_n \right) \cos \omega_2 t \right\} \right. \\
 & \left. - \left(\frac{m\pi V}{L} - \omega - \bar{\omega}_n \right) \cos \bar{\omega}_n t + h_n \omega_n \sin \bar{\omega}_n t \right] + \frac{1}{(h_n \omega_n)^2 + \left(\omega + \bar{\omega}_n + \frac{m\pi V}{L} \right)^2} \\
 & \cdot \left[e^{h_n \omega_n t} \left\{ h_n \omega_n \sin \omega_1 t - \left(\omega + \bar{\omega}_n + \frac{m\pi V}{L} \right) \cos \omega_1 t \right\} + \left(\omega + \bar{\omega}_n + \frac{m\pi V}{L} \right) \cos \bar{\omega}_n t + h_n \omega_n \sin \bar{\omega}_n t \right] \\
 & \dots\dots\dots (A.1)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 I_C(\omega, t) &= \int_0^t e^{h_n \omega_n \xi} \sin \bar{\omega}_n(t-\xi) \left\{ \sum_{m=1}^{\infty} a_{nm} \sin \frac{m\pi V \xi}{L} \right\} \cos \omega \xi d\xi \\
 &= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{a_{nm}}{2} \left[\int_0^t e^{h_n \omega_n \xi} \sin \frac{m\pi V \xi}{L} \sin \{ \bar{\omega}_n t + (\omega - \bar{\omega}_n) \xi \} d\xi \right. \\
 & \quad \left. + \int_0^t e^{h_n \omega_n \xi} \sin \frac{m\pi V \xi}{L} \sin \{ \bar{\omega}_n t - (\omega - \bar{\omega}_n) \xi \} d\xi \right] \\
 &= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{a_{nm}}{4} \left[- \frac{1}{(h_n \omega_n)^2 + \left(\frac{m\pi V}{L} + \omega - \bar{\omega}_n \right)^2} \left[e^{h_n \omega_n t} \left\{ \left(\frac{m\pi V}{L} + \omega - \bar{\omega}_n \right) \sin \omega_1 t + h_n \omega_n \cos \omega_1 t \right\} \right. \right. \\
 & \quad \left. - \left(\frac{m\pi V}{L} + \omega - \bar{\omega}_n \right) \sin \bar{\omega}_n t - h_n \omega_n \cos \bar{\omega}_n t \right] \\
 & \quad + \frac{1}{(h_n \omega_n)^2 + \left(\omega - \bar{\omega}_n - \frac{m\pi V}{L} \right)^2} \left[e^{h_n \omega_n t} \left\{ \left(\omega - \bar{\omega}_n - \frac{m\pi V}{L} \right) \sin \omega_2 t + h_n \omega_n \cos \omega_2 t \right\} \right. \\
 & \quad \left. - \left(\omega - \bar{\omega}_n - \frac{m\pi V}{L} \right) \sin \bar{\omega}_n t - h_n \omega_n \cos \bar{\omega}_n t \right] \\
 & \quad - \frac{1}{(h_n \omega_n)^2 + \left(\omega + \bar{\omega}_n - \frac{m\pi V}{L} \right)^2} \left[e^{h_n \omega_n t} \left\{ \left(\omega + \bar{\omega}_n - \frac{m\pi V}{L} \right) \sin \omega_2 t + h_n \omega_n \cos \omega_2 t \right\} \right. \\
 & \quad \left. + \left(\omega + \bar{\omega}_n - \frac{m\pi V}{L} \right) \sin \bar{\omega}_n t - h_n \omega_n \cos \bar{\omega}_n t \right] \\
 & \quad + \frac{1}{(h_n \omega_n)^2 + \left(\frac{m\pi V}{L} + \omega + \bar{\omega}_n \right)^2} \left[e^{h_n \omega_n t} \left\{ \left(\frac{m\pi V}{L} + \omega + \bar{\omega}_n \right) \sin \omega_1 t + h_n \omega_n \cos \omega_1 t \right\} \right. \\
 & \quad \left. + \left(\frac{m\pi V}{L} + \omega + \bar{\omega}_n \right) \sin \bar{\omega}_n t - h_n \omega_n \cos \bar{\omega}_n t \right] \dots\dots\dots (A.2)
 \end{aligned}$$

【付録 B】 $\frac{\partial I_S(\omega, t)}{\partial t}$ ならびに $\frac{\partial I_C(\omega, t)}{\partial t}$ の解析結果

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial I_S(\omega, t)}{\partial t} &= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{a_{nm}}{4} \left[- \frac{1}{(h_n \omega_n)^2 + \left(\frac{m\pi V}{L} + \omega - \bar{\omega}_n \right)^2} \right. \\
 & \quad \cdot \left[e^{h_n \omega_n t} \left\{ \left\{ (h_n \omega_n)^2 + \left(\frac{m\pi V}{L} + \omega - \bar{\omega}_n \right) \omega_1 \right\} \sin \omega_1 t + h_n \omega_n \bar{\omega}_n \cos \omega_1 t \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. - \left(\frac{m\pi V}{L} + \omega - \bar{\omega}_n \right) \bar{\omega}_n \sin \bar{\omega}_n t - h_n \omega_n \bar{\omega}_n \cos \bar{\omega}_n t \right\} \right. \\
 & \quad + \frac{1}{(h_n \omega_n)^2 + \left(\omega - \bar{\omega}_n - \frac{m\pi V}{L} \right)^2} \left[e^{h_n \omega_n t} \left\{ \left\{ (h_n \omega_n)^2 + \left(\omega - \bar{\omega}_n - \frac{m\pi V}{L} \right) \omega_2 \right\} \sin \omega_2 t \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. + h_n \omega_n \bar{\omega}_n \cos \omega_2 t \right\} - \left(\omega - \bar{\omega}_n - \frac{m\pi V}{L} \right) \bar{\omega}_n \sin \bar{\omega}_n t - h_n \omega_n \bar{\omega}_n \cos \bar{\omega}_n t \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{(h_n\omega_n)^2 + \left(\frac{m\pi V}{L} - \omega - \bar{\omega}_n\right)^2} \left[e^{h_n\omega_n t} \left\{ \left\{ (h_n\omega_n)^2 - \left(\frac{m\pi V}{L} - \omega - \bar{\omega}_n\right)\omega_2 \right\} \sin \omega_2 t \right. \right. \\
& \left. \left. - h_n\omega_n\bar{\omega}_n \cos \omega_2 t \right\} + \left(\frac{m\pi V}{L} - \omega - \bar{\omega}_n\right)\bar{\omega}_n \sin \bar{\omega}_n t + h_n\omega_n\bar{\omega}_n \cos \bar{\omega}_n t \right] \\
& + \frac{1}{(h_n\omega_n)^2 + \left(\frac{m\pi V}{L} + \omega + \bar{\omega}_n\right)^2} \left[e^{h_n\omega_n t} \left\{ \left\{ (h_n\omega_n)^2 + \left(\frac{m\pi V}{L} + \omega + \bar{\omega}_n\right)\omega_1 \right\} \sin \omega_1 t \right. \right. \\
& \left. \left. - h_n\omega_n\bar{\omega}_n \cos \omega_1 t \right\} - \left(\frac{m\pi V}{L} + \omega + \bar{\omega}_n\right)\bar{\omega}_n \sin \bar{\omega}_n t + h_n\omega_n\bar{\omega}_n \cos \bar{\omega}_n t \right] \dots\dots\dots (A.3) \\
\frac{\partial I_C(\omega, t)}{\partial t} = & \sum_{m=1}^{\infty} \frac{a_{nm}}{4} \left[-\frac{1}{(h_n\omega_n)^2 + \left(\frac{m\pi V}{L} + \omega - \bar{\omega}_n\right)^2} \left[e^{h_n\omega_n t} \left\{ \left\{ (h_n\omega_n)^2 + \left(\frac{m\pi V}{L} + \omega - \bar{\omega}_n\right)\omega_1 \right\} \cos \omega_1 t \right. \right. \right. \\
& \left. \left. - h_n\omega_n\bar{\omega}_n \sin \omega_1 t \right\} - \left(\frac{m\pi V}{L} + \omega - \bar{\omega}_n\right)\cos \bar{\omega}_n t + h_n\omega_n\bar{\omega}_n \sin \bar{\omega}_n t \right] \\
& + \frac{1}{(h_n\omega_n)^2 + \left(\frac{m\pi V}{L} - \omega + \bar{\omega}_n\right)^2} \left[e^{h_n\omega_n t} \left\{ \left\{ (h_n\omega_n)^2 - \left(\frac{m\pi V}{L} - \omega + \bar{\omega}_n\right)\omega_2 \right\} \cos \omega_2 t \right. \right. \\
& \left. \left. - h_n\omega_n\bar{\omega}_n \sin \omega_2 t \right\} + \left(\frac{m\pi V}{L} - \omega + \bar{\omega}_n\right)\bar{\omega}_n \cos \bar{\omega}_n t + h_n\omega_n\bar{\omega}_n \sin \bar{\omega}_n t \right] \\
& - \frac{1}{(h_n\omega_n)^2 + \left(\frac{m\pi V}{L} - \omega - \bar{\omega}_n\right)^2} \left[e^{h_n\omega_n t} \left\{ \left\{ (h_n\omega_n)^2 - \left(\frac{m\pi V}{L} - \omega - \bar{\omega}_n\right)\omega_2 \right\} \cos \omega_2 t \right. \right. \\
& \left. \left. + h_n\omega_n\bar{\omega}_n \sin \omega_2 t \right\} - \left(\frac{m\pi V}{L} - \omega - \bar{\omega}_n\right)\bar{\omega}_n \cos \bar{\omega}_n t + h_n\omega_n\bar{\omega}_n \sin \bar{\omega}_n t \right] \\
& + \frac{1}{(h_n\omega_n)^2 + \left(\frac{m\pi V}{L} + \omega + \bar{\omega}_n\right)^2} \left[e^{h_n\omega_n t} \left\{ \left\{ (h_n\omega_n)^2 + \left(\frac{m\pi V}{L} + \omega + \bar{\omega}_n\right)\omega_1 \right\} \cos \omega_1 t \right. \right. \\
& \left. \left. + h_n\omega_n\bar{\omega}_n \sin \omega_1 t \right\} + \left(\frac{m\pi V}{L} + \omega + \bar{\omega}_n\right)\bar{\omega}_n \cos \bar{\omega}_n t + h_n\omega_n\bar{\omega}_n \sin \bar{\omega}_n t \right] \dots\dots\dots (A.4)
\end{aligned}$$

【付録 C】 $\frac{\partial^2 I_S(\omega, t)}{\partial t^2}$ ならびに $\frac{\partial^2 I_C(\omega, t)}{\partial t^2}$ の解析結果

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 I_S(\omega, t)}{\partial t^2} = & \sum_{m=1}^{\infty} \frac{a_{nm}}{4} \left[-\frac{1}{(h_n\omega_n)^2 + \left(\frac{m\pi V}{L} + \omega - \bar{\omega}_n\right)^2} \right. \\
& \cdot \left[e^{h_n\omega_n t} \left\{ \left\{ (h_n\omega_n)^2 + 2\omega_1 \left(\frac{m\pi V}{L} + \omega - \bar{\omega}_n\right) - \omega_1^2 \right\} h_n\omega_n \sin \omega_1 t \right. \right. \\
& \left. \left. - \left\{ (h_n\omega_n)^2 \left(\frac{m\pi V}{L} + \omega - \bar{\omega}_n\right) - 2(h_n\omega_n)^2\omega_1 - \left(\frac{m\pi V}{L} + \omega - \bar{\omega}_n\right)\omega_1^2 \right\} \cos \omega_1 t \right\} \right. \\
& \left. - \left(\frac{m\pi V}{L} + \omega - \bar{\omega}_n\right)\bar{\omega}_n^2 \cos \bar{\omega}_n t + h_n\omega_n\bar{\omega}_n^2 \sin \bar{\omega}_n t \right] \\
& + \frac{1}{(h_n\omega_n)^2 + \left(\omega - \bar{\omega}_n - \frac{m\pi V}{L}\right)^2} \left[e^{h_n\omega_n t} \left\{ \left\{ (h_n\omega_n)^2 + 2\omega_2 \left(\omega - \bar{\omega}_n - \frac{m\pi V}{L}\right) - \omega_2^2 \right\} h_n\omega_n \sin \omega_2 t \right. \right. \\
& \left. \left. - \left\{ (h_n\omega_n)^2 \left(\omega - \bar{\omega}_n - \frac{m\pi V}{L}\right) - 2(h_n\omega_n)^2\omega_2 - \left(\omega - \bar{\omega}_n - \frac{m\pi V}{L}\right)\omega_2^2 \right\} \cos \omega_2 t \right\} \right. \\
& \left. - \left(\omega - \bar{\omega}_n - \frac{m\pi V}{L}\right)\bar{\omega}_n^2 \cos \bar{\omega}_n t + h_n\omega_n\bar{\omega}_n^2 \sin \bar{\omega}_n t \right] \\
& - \frac{1}{(h_n\omega_n)^2 + \left(\frac{m\pi V}{L} - \omega - \bar{\omega}_n\right)^2} \left[e^{h_n\omega_n t} \left\{ \left\{ (h_n\omega_n)^2 - 2\omega_2 \left(\frac{m\pi V}{L} - \omega - \bar{\omega}_n\right) + \omega_2^2 \right\} h_n\omega_n \sin \omega_2 t \right. \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \left\{ (h_n \omega_n)^2 \left(\frac{m\pi V}{L} - \omega - \bar{\omega}_n \right) + 2(h_n \omega_n)^2 \omega_2 - \left(\frac{m\pi V}{L} - \omega - \bar{\omega}_n \right) \omega_2^2 \right\} \cos \omega_2 t \\
 & + \left[\left(\frac{m\pi V}{L} - \omega - \bar{\omega}_n \right) \bar{\omega}_n^2 \cos \bar{\omega}_n t - h_n \omega_n \bar{\omega}_n^2 \sin \bar{\omega}_n t \right] \\
 & + \frac{1}{(h_n \omega_n)^2 + \left(\frac{m\pi V}{L} + \omega + \bar{\omega}_n \right)^2} \left[e^{h_n \omega_n t} \left\{ \left\{ (h_n \omega_n)^2 + 2 \omega_1 \left(\frac{m\pi V}{L} + \omega + \bar{\omega}_n \right) - \omega_1^2 \right\} h_n \omega_n \sin \omega_1 t \right. \right. \\
 & - \left. \left. \left\{ (h_n \omega_n)^2 \left(\frac{m\pi V}{L} + \omega + \bar{\omega}_n \right) - 2(h_n \omega_n)^2 \omega_1 - \left(\frac{m\pi V}{L} + \omega + \bar{\omega}_n \right) \omega_1^2 \right\} \cos \omega_1 t \right\} \right. \\
 & \left. - \left(\frac{m\pi V}{L} + \omega + \bar{\omega}_n \right) \bar{\omega}_n^2 \cos \bar{\omega}_n t - h_n \omega_n \bar{\omega}_n^2 \sin \bar{\omega}_n t \right] \dots\dots\dots (A.5) \\
 \frac{\partial^2 I_C(\omega, t)}{\partial t^2} = & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n m}{4} \left[- \frac{1}{(h_n \omega_n)^2 + \left(\frac{m\pi V}{L} + \omega - \bar{\omega}_n \right)^2} \left[e^{h_n \omega_n t} \left\{ \left\{ (h_n \omega_n)^2 + 2 \omega_1 \left(\frac{m\pi V}{L} + \omega - \bar{\omega}_n \right) - \omega_1^2 \right\} \right. \right. \right. \\
 & \cdot h_n \omega_n \cos \omega_1 t + \left. \left. \left\{ (h_n \omega_n)^2 \left(\frac{m\pi V}{L} + \omega - \bar{\omega}_n \right) - 2(h_n \omega_n)^2 \omega_1 - \left(\frac{m\pi V}{L} + \omega - \bar{\omega}_n \right) \omega_1^2 \right\} \sin \omega_1 t \right\} \right. \\
 & \left. + \left(\frac{m\pi V}{L} + \omega - \bar{\omega}_n \right) \bar{\omega}_n^2 \sin \bar{\omega}_n t + h_n \omega_n \bar{\omega}_n^2 \cos \bar{\omega}_n t \right] \\
 & + \frac{1}{(h_n \omega_n)^2 + \left(\omega - \bar{\omega}_n - \frac{m\pi V}{L} \right)^2} \left[e^{h_n \omega_n t} \left\{ \left\{ (h_n \omega_n)^2 + 2 \omega_2 \left(\omega - \bar{\omega}_n - \frac{m\pi V}{L} \right) - \omega_2^2 \right\} h_n \omega_n \cos \omega_2 t \right. \right. \\
 & \left. \left. + \left\{ (h_n \omega_n)^2 \left(\omega - \bar{\omega}_n - \frac{m\pi V}{L} \right) - 2(h_n \omega_n)^2 \omega_2 - \left(\omega - \bar{\omega}_n - \frac{m\pi V}{L} \right) \omega_2^2 \right\} \sin \omega_2 t \right\} \right. \\
 & \left. + \left(\omega - \bar{\omega}_n - \frac{m\pi V}{L} \right) \bar{\omega}_n^2 \sin \bar{\omega}_n t + h_n \omega_n \bar{\omega}_n^2 \cos \bar{\omega}_n t \right] \\
 & - \frac{1}{(h_n \omega_n)^2 + \left(\frac{m\pi V}{L} - \omega - \bar{\omega}_n \right)^2} \left[e^{h_n \omega_n t} \left\{ \left\{ (h_n \omega_n)^2 - 2 \omega_2 \left(\frac{m\pi V}{L} - \omega - \bar{\omega}_n \right) + \omega_2^2 \right\} h_n \omega_n \cos \omega_2 t \right. \right. \\
 & \left. \left. - \left\{ (h_n \omega_n)^2 \left(\frac{m\pi V}{L} - \omega - \bar{\omega}_n \right) + 2(h_n \omega_n)^2 \omega_2 - \left(\frac{m\pi V}{L} - \omega - \bar{\omega}_n \right) \omega_2^2 \right\} \sin \omega_2 t \right\} \right. \\
 & \left. + \left(\frac{m\pi V}{L} - \omega - \bar{\omega}_n \right) \bar{\omega}_n^2 \sin \bar{\omega}_n t + h_n \omega_n \bar{\omega}_n^2 \cos \bar{\omega}_n t \right] \\
 & + \frac{1}{(h_n \omega_n)^2 + \left(\frac{m\pi V}{L} + \omega + \bar{\omega}_n \right)^2} \left[e^{h_n \omega_n t} \left\{ \left\{ (h_n \omega_n)^2 + 2 \omega_1 \left(\frac{m\pi V}{L} + \omega + \bar{\omega}_n \right) - \omega_1^2 \right\} h_n \omega_n \cos \omega_1 t \right. \right. \\
 & \left. \left. + \left\{ (h_n \omega_n)^2 \left(\frac{m\pi V}{L} + \omega + \bar{\omega}_n \right) - 2(h_n \omega_n)^2 \omega_1 - \left(\frac{m\pi V}{L} + \omega + \bar{\omega}_n \right) \omega_1^2 \right\} \cos \omega_1 t \right\} \right. \\
 & \left. - \left(\frac{m\pi V}{L} + \omega + \bar{\omega}_n \right) \bar{\omega}_n^2 \sin \bar{\omega}_n t + h_n \omega_n \bar{\omega}_n^2 \cos \bar{\omega}_n t \right] \dots\dots\dots (A.6)
 \end{aligned}$$

ここで、 $\omega_1 = \omega + m\pi V/L$, $\omega_2 = \omega - m\pi V/L$ を示す。

参 考 文 献

- 1) 小堀・梶川：道路橋の振動とその振動感覚，土木学会論文報告集第 222 号，1974.
- 2) 小堀・梶川：橋梁振動の人間工学的評価法，土木学会論文報告集第 230 号，1974.
- 3) 小堀・梶川：水平振動の振動感覚について，昭和 50 年度土木学会関西支部研究発表会 III-23, 1975.
- 4) 小堀・梶川：道路橋（鋼橋）の振動測定法とその特性，日本道路協会「道路」第 401 号，1974.7.
- 5) 小堀・梶川・城戸：振動感覚を考慮した歩道橋の設計，建設図書「橋梁と基礎」8 巻 12 号，1974.12.
- 6) Committee on Deflection Limitation of Bridges of the Structural Division; Deflection Limitation of Bridges, Proc. of ASCE, ST 3 (Paper 1933), May 1958.
- 7) 国広・藤原：米国における鋼道路橋の荷重係数設計に関する示方書，日本道路協会「道路」第 397 号，1974.3.
- 8) 星谷・西脇：道路橋の振動感覚に関する理論解析，昭和 49 年度土木学会関東支部研究発表会 I-17, 1975.
- 9) 吉村・平井：ランガー桁の動的解析，土木学会論文集第 101 号，1964.
- 10) 吉村・平井：補剛アーチ橋およびつり橋の共通解析，土

- 木学会論文集第 115 号，1965.
- 11) 星谷 勝：確率論手法による振動解析，鹿島出版会，1974.
- 12) Iyengar R.N. and Iyengar K.T.S.R.; Probabilistic Response Analysis to Earthquakes, Proc. of ASCE, EM 3 (Paper 7321), June 1970.
- 13) 山田善一：土木構造物の振動と安全性——橋梁の衝撃，土木学会関西支部，1966.
- 14) 土木設計便覧編集委員会編：土木設計便覧，丸善，1968.
- 15) 山田・小堀：活荷重に対する道路橋の動的応答—衝撃係数—に関する考察，土木学会論文集第 148 号，1967.
- 16) 兼重一郎：パワースペクトル解析の自動車への応用，いすゞ技報 No. 33, 1960.
- 17) 川合・森崎：自動車走行路面の性質と振動乗心地への関連性，三菱重工技報 Vol. 2, No. 2, 1965.
- 18) 伊藤・片山：橋梁構造の振動減衰，土木学会論文集第 117 号，1965.
- 19) Wright R.N. and Walker W.H.: Vibration and Deflection of Steel Bridges, AISC Engineering Journal, January 1972.

(1975.7.14・受付)