

多柱基礎への水の附加質量について

ADDED MASS OF WATER ON THE MULTI-PILES FOUNDATION

小坪 清真*・高西 照彦**

By Seima KOTSUBO and Teruhiko TAKANISHI

1. まえがき

水中橋脚の弾性振動に関しては、現在までに理論的、実験的研究が数多く行われており^{1)~7)}、水中橋脚に対する動水圧および水の付加質量の問題が詳細に解明されている。しかし、これらの研究はすべて、その断面が円形、楕円形、長方形である単一柱に関するものであり、柱が2本以上の場合に対する研究はほとんど行われていない。わずかに著者の一人⁸⁾が、円形断面を有する2本柱の水中振動の理論的解析を行って、その付加質量係数を求めているにすぎない。

現在、長大橋梁の橋脚基礎として、水中に築造された多柱基礎が多く採用されつつある。多柱基礎がその基盤から地震波を受けたとき、水中部分の変位の方が地中部分の変位より一般に大きいので、多柱基礎の水中部分に対する水の付加質量の大きさを解明することは、土の付加質量を求めること以上に多柱基礎の耐震設計上重要な問題である。また、水の付加質量そのものが柱の質量の50%にも達する場合がある。このことも水の付加質量の問題が多柱基礎の耐震設計上に重要な位置を占めていることを示している。

本論では2本以上の柱からなる多柱基礎が水中振動する場合の動水圧に関する解析理論を導き、この理論に基づいて多柱基礎に対する付加質量係数(柱が排除した水の質量に対する柱への水の付加質量の比)を求め、さらに2, 3の模型実験を行って著者らの理論の有用性を示した。また、水の粘性による実験値の補正理論について述べた。

2. 解析理論の基本的考え方

円形断面を有する3本以上の柱からなる多柱基礎が水中で振動する場合については、たとえ2次元解析すなわち、柱がその軸方向に無限の長さを持ち、長さ方向に一樣な水平振動をするとしてよい場合でさえも、その厳密な理論解を求めることはむずかしい。著者らは以下に述べるような考え方に従って、円形断面を有する2本以上の柱からなる多柱基礎が水中で振動する場合の動水圧の近似解析理論を導いた。

一般に、多柱基礎がその下端に地震波を受けて水中で振動する場合、各柱に対する付加質量におよぼす水の粘性および圧縮性の影響は小さく、これをほとんど無視してよい。また、柱の直径に比べて水中部分の長い多柱基礎については、その付加質量を柱軸方向には一樣であると考えて、これを2次元的に取り扱うことが許されよう。このことは図-1に示した単一円柱に対する3次元解析⁹⁾からうなずけよう。図-1において、 α は円柱へ

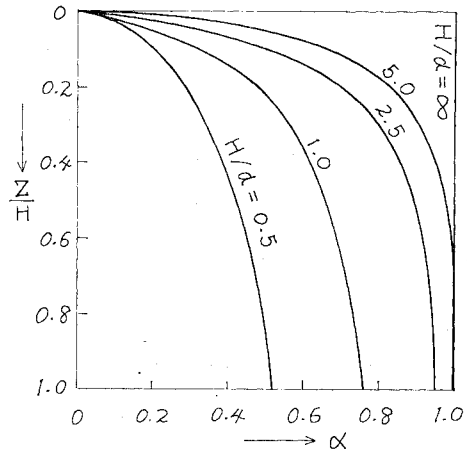


図-1 単一円柱の深さ方向の附加質量係数

* 正会員 工博 九州大学教授 工学部土木工学科

** 正会員 九州工業大学助教授 開発土木工学科

の水の付加質量係数， d, H はそれぞれ円柱の直径，長さ， z は水面からの深さである。

説明を簡単にするため，図-2 に示すように，直径が d (半径が a)，中心間距離が l である i, j の 2 本柱が，水中で x 方向に正弦振動を行う場合について，著者らの理論の基本的な考え方を述べる。

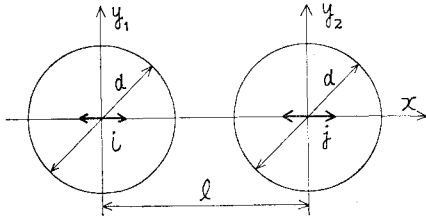


図-2

(a) まず円形断面を有する単一の無限柱が，水中で軸直角方向に $\xi = \cos \omega t$ で振動する場合に対する円柱周辺の水の各点の速度ポテンシャル ϕ を求める。

(b) 次に (a) で求めた解を利用して，以下に示すように考えて 2 本柱に対する柱周辺の水の各点の速度ポテンシャル ϕ_{2p} を求める。

(i) いま j 柱を取り除いて， i 柱を x 方向に $\xi = \cos \omega t$ で振動させたとき，水中の各点の速度ポテンシャル $\phi_i^{(1)}$ は (a) によって与えられる。 $\phi_i^{(1)}$ が得られれば，水中の j 点 (j 柱の中心位置) の x 方向の変位 $\bar{U}_{jp}^{(1)} \cos \omega t$ を求めることができる。同様にして，今度は i 柱を取り除いて， j 柱を x 方向に $\xi = \cos \omega t$ で振動させたとき，水中の各点の速度ポテンシャル $\phi_j^{(1)}$ および i 点の水の変位 $\bar{U}_{ip}^{(1)} \cos \omega t$ も容易に求められる。さて i, j 両円柱を同時に x 方向に $\xi = \cos \omega t$ で振動させたとき， i, j 両柱の位置における水の x 方向の変位はそれぞれ $(1 + \bar{U}_{ip}^{(1)}) \cos \omega t$ ， $(1 + \bar{U}_{jp}^{(1)}) \cos \omega t$ で表わされる。また，このときの水中の各点の速度ポテンシャルは $\phi_i^{(1)} + \phi_j^{(1)}$ によって与えられる。

(ii) 実際には両柱の位置における水の変位振幅は 1 でなければならないので，ここで i, j 位置における水にそれぞれ $-\bar{U}_{jp}^{(1)} \cos \omega t$ ， $-\bar{U}_{ip}^{(1)} \cos \omega t$ の振動を加えてやる。両柱の変位振幅を 1 にするために両柱に加えない振動変位を修正振動変位とよべば， $-\bar{U}_{ip}^{(1)} \cos \omega t$ ， $-\bar{U}_{jp}^{(1)} \cos \omega t$ が両柱の位置における水分子の第 1 回目の修正振動変位であり，このときの水中の各点の速度ポテンシャル $\phi_i^{(2)}$ ， $\phi_j^{(2)}$ は (a) によって求めることができる。 $\phi_i^{(2)}$ ， $\phi_j^{(2)}$ が得られれば，(i) と同様にしてそれぞれ i, j 両柱の位置における水の変位振幅を求めることができ， $1 + \bar{U}_{ip}^{(2)}$ ， $1 + \bar{U}_{jp}^{(2)}$ と表わされる。このときの水中の各点の速度ポテンシャルは $(\phi_i^{(1)} + \phi_j^{(1)}) + (\phi_i^{(2)} + \phi_j^{(2)})$ によって与えられる。

(iii) 同様な操作を n 回繰り返して行えば， i, j 両柱の位置における水の変位振幅はそれぞれ $1 + \bar{U}_{ip}^{(n)}$ ， $1 + \bar{U}_{jp}^{(n)}$ となり，このときの水中の各点の速度ポテンシャルは $\sum_{k=1}^n \{\phi_i^{(k)} + \phi_j^{(k)}\}$ で与えられる。ここで $n \rightarrow \infty$ とすれば $\bar{U}_{ip}^{(n)}$ ， $\bar{U}_{jp}^{(n)} \rightarrow 0$ となるので，結局 $n \rightarrow \infty$ のとき $\phi_{2p} = \sum_{k=1}^{\infty} \{\phi_i^{(k)} + \phi_j^{(k)}\}$ は i, j 両柱の中心間距離 l を一定に保ったまま，両柱を同時に x 方向に $\xi = \cos \omega t$ で振動させたときの水中の各点の速度ポテンシャルを表わすことになる。

(iv) ϕ_{2p} が与えられれば i, j 両柱に作用する動水圧 P_i, P_j が計算できる。さらにこの P_i, P_j から i, j 両柱に対する付加質量を求めることができる。付加質量が得られれば i, j 両柱の付加質量係数を求めることは容易である。

(v) 3 本以上の円柱からなる多柱基礎についても，まったく同様な考え方で，その正弦振動に対する水中の各点の速度ポテンシャルを求めることができる。また，円柱の直径が各円柱で異なっている場合についても，上述の考え方を適用することができるので，著者らの考え方に従えば，直径がそれぞれ異なる任意の柱配列をもった円柱群からなる多柱基礎が水中振動を行う場合の水の付加質量に関する理論解を得ることができる。

さて以上の理論において， i, j 両円柱の動水圧の相互作用を厳密に求めるには，各円柱の円周に接する水分子の各点における振動変位を求めて，両円柱の円周上において水分子の振動変位と円柱の振動変位とが等しくなるように，円周上の各点において上述の修正を行わなければならない。しかし，これは非常に煩雑であるので，本論では円柱の円周に接する水分子の振動変位の平均的な値として，円柱の中心位置における水分子の振動変位を用いて修正を行った。5. に示すように，本論による近似解は両円柱の中心間距離 l が円柱の直径 d に比べて大きいとき ($l/d > 1.5$) は厳密解にほとんど一致する。

3. 単一円柱の速度ポテンシャル

図-3 に示すように，半径 a (直径 d) の単一无限円柱が x 方向に $\xi = \cos \omega t$ で振動しているとき，水の粘性および圧縮性を無視すれば，水中の任意点 $Q(r, \theta)$ の速度ポテンシャルは

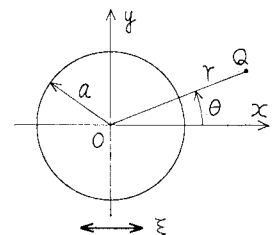


図-3

$$\phi = -\omega a^2 \frac{1}{r} \cos \theta \sin \omega t \dots\dots\dots (1)$$

で表わされる。点 Q における水の r, θ 方向の変位速度

を u, v とすれば, u, v は

$$u = -\frac{\partial \phi}{\partial r}, \quad v = -\frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \quad \dots\dots\dots(2)$$

によって与えられるので,

$$u = -\omega a^2 \frac{1}{r^2} \cos \theta \sin \omega t \quad \dots\dots\dots(3)$$

$$v = -\omega a^2 \frac{1}{r^2} \sin \theta \sin \omega t \quad \dots\dots\dots(4)$$

となる. また, 動水圧 p は

$$p = \rho_w \frac{\partial \phi}{\partial t} \quad \dots\dots\dots(5)$$

によって与えられるので,

$$p = -\omega^2 \rho_w a^2 \frac{1}{r} \cos \theta \cos \omega t \quad \dots\dots\dots(6)$$

となる. ここに, ρ_w は水の密度である.

4. 附加質量の解析理論

本章では, まず簡単のため, 図-2 に示した2本柱について, 2. で述べた解析の基本的な考え方に従って, その具体的な式表示を行い, 著者らの解析理論を説明する. 次に, 柱の本数が多い場合について, 9本柱を例にとり, 主として2本柱と取り扱いの異なる点について略述する.

(1) 2本柱の解析理論

(i) 図-4 に示すように, i 点に置かれた半径 a (直径 d) の単一无限円柱が x 方向に $\xi = \cos \omega t$ で振動する場合, 水中の点 Q の速度ポテンシャル $\phi_i^{(1)}$ は式(1)によって与えられる. すなわち,

$$\phi_i^{(1)} = -\omega a^2 \frac{1}{r_1} \cos \theta_1 \sin \omega t \quad \dots\dots\dots(7)$$

したがって, 図-4 において, R 点および j 点の r, θ 方向の変位速度は次式のように表わされる.

$$u_{ii}^{(1)} = -\frac{\partial \phi_i^{(1)}}{\partial r_1} \Big|_{\substack{r_1=a \\ \theta_1=0}} = -\omega \sin \omega t \quad \dots\dots\dots(8)$$

$$v_{ii}^{(1)} = -\frac{1}{r_1} \frac{\partial \phi_i^{(1)}}{\partial \theta_1} \Big|_{\substack{r_1=a \\ \theta_1=0}} = 0 \quad \dots\dots\dots(9)$$

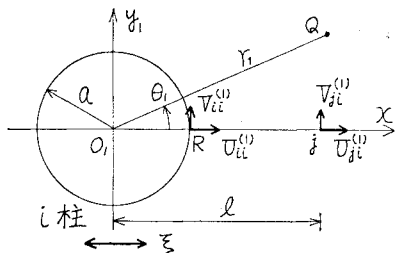


図-4

$$u_{ji}^{(1)} = -\frac{\partial \phi_i^{(1)}}{\partial r_1} \Big|_{\substack{r_1=l \\ \theta_1=0}} = -\omega \left(\frac{a}{l}\right)^2 \sin \omega t \quad \dots\dots(10)$$

$$v_{ji}^{(1)} = -\frac{1}{r_1} \frac{\partial \phi_i^{(1)}}{\partial \theta_1} \Big|_{\substack{r_1=l \\ \theta_1=0}} = 0 \quad \dots\dots\dots(11)$$

R 点および j 点では θ 方向の変位は生じないので, 以後これを除けば, R 点および j 点の r 方向の変位は次式のように表わされる.

$$U_{ii}^{(1)} = \cos \omega t, \quad U_{ji}^{(1)} = \left(\frac{a}{l}\right)^2 \cos \omega t \quad \dots\dots(12)$$

上式より R 点および j 点における修正振動変位は

$${}^c U_{ii}^{(1)} = 0, \quad {}^c U_{ji}^{(1)} = -\left(\frac{a}{l}\right)^2 \cos \omega t \quad \dots\dots(13)$$

となる. これを行列表示すれば,

$$\{ {}^c U_{ii}^{(1)} \quad {}^c U_{ji}^{(1)} \}^T = \left(\frac{a}{l}\right)^2 \{ 0 \quad -1 \}^T \cos \omega t \quad \dots\dots\dots(14)$$

ここに, T は転置行列を表わす. いま,

$${}^c \mathbf{U}_i^{(1)} = \{ {}^c U_{ii}^{(1)} \quad {}^c U_{ji}^{(1)} \}^T \quad \dots\dots\dots(15)$$

$$\mathbf{A}_1 = \left(\frac{a}{l}\right)^2 \{ 0 \quad -1 \}^T \quad \dots\dots\dots(16)$$

とおけば, 式(14)は次のように書ける.

$${}^c \mathbf{U}_i^{(1)} = \mathbf{A}_1 \cos \omega t \quad \dots\dots\dots(17)$$

(ii) 次に, 図-5 に示すように j 点におかれた半径 a の単一无限円柱が x 方向に $\xi = \cos \omega t$ で振動する場合, 水中の点 Q の速度ポテンシャルは

$$\phi_j^{(1)} = -\omega a^2 \frac{1}{r_2} \cos \theta_2 \sin \omega t \quad \dots\dots\dots(18)$$

で表わされる. 図-5 において, O_1 点および S 点の r 方向の修正振動変位は, (i) とまったく同様にして,

$${}^c \mathbf{U}_j^{(1)} = \mathbf{A}_2 \cos \omega t \quad \dots\dots\dots(19)$$

と書くことができる. ここで,

$${}^c \mathbf{U}_j^{(1)} = \{ {}^c U_{ij}^{(1)} \quad {}^c U_{jj}^{(1)} \}^T \quad \dots\dots\dots(20)$$

$$\mathbf{A}_2 = \left(\frac{a}{l}\right)^2 \{ -1 \quad 0 \}^T \quad \dots\dots\dots(21)$$

(iii) さて, 半径が a , 中心間距離が l である2本柱において, 各柱を同時に x 方向に $\xi = \cos \omega t$ で振動させる場合を考える.

座標系を図-6 のように選べば, このときの水中の Q 点の速度ポテンシャルは, (i), (ii) から

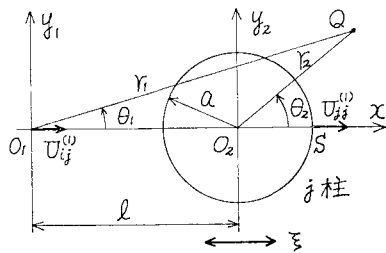


図-5

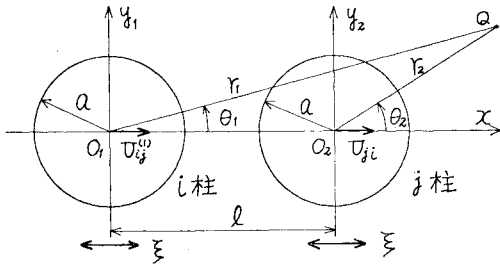


図-6 2 本柱

$$\begin{aligned} \phi_{2p}^{(1)} &= \phi_i^{(1)} + \phi_j^{(1)} \\ &= -\omega a^2 \left\{ \frac{\cos \theta_1}{r_1} + \frac{\cos \theta_2}{r_2} \right\} \sin \omega t \quad \dots(22) \end{aligned}$$

で与えられる。いま、

$$T = \begin{Bmatrix} \cos \theta_1 & \cos \theta_2 \\ r_1 & r_2 \end{Bmatrix} \dots\dots\dots(23)$$

$$D_0 = \{1 \ 1\}^T \dots\dots\dots(24)$$

とおけば、式 (22) は次のように表わされる。

$$\phi_{2p}^{(1)} = -\omega a^2 T D_0 \sin \omega t \dots\dots\dots(25)$$

さらに、

$$A = \{A_1 \ A_2\} = \left(\frac{a}{l}\right)^2 \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \dots\dots\dots(26)$$

$${}^c U^{(1)} = \{{}^c U_i^{(1)} \ {}^c U_j^{(1)}\}^T \dots\dots\dots(27)$$

とおけば、2 本柱を同時に水中で振動させたときの両柱の位置における水の修正振動変位 ${}^c U^{(1)}$ は

$${}^c U^{(1)} = A D_0 \cos \omega t \dots\dots\dots(28)$$

と書ける。A は、いわば修正振動変位振幅行列とでも称すべき行列であって、その各列要素はそれぞれ *i, j* 柱が単独で単位振幅の振動を行うときの周辺各柱の中心位置の水の振動変位振幅の符号を変えた値から構成されている。

(iv) 次に *i, j* 両柱に式 (28) の ${}^c U^{(1)}$ の振動を加える。このときの水中の Q 点の速度ポテンシャルは、(iii) と同様に考えればこれを求めることができ、

$$\phi_{2p}^{(2)} = -\omega a^2 T A D_0 \sin \omega t \dots\dots\dots(29)$$

のように表わすことができる。この場合の両柱の位置における水の修正振動変位も同様にして、次式のように得られる。

$${}^c U^{(2)} = A^2 D_0 \cos \omega t \dots\dots\dots(30)$$

(v) 以下同様な操作を続けてゆけば、*n* 回目の修正振動を加えたときの水中の各点の速度ポテンシャルは

$$\phi_{2p}^{(n)} = -\omega a^2 T A^{n-1} D_0 \sin \omega t \dots\dots\dots(31)$$

また、各柱の位置における水の修正振動変位は次式のように表わせる。

$${}^c U^{(n)} = A^n D_0 \cos \omega t \dots\dots\dots(32)$$

(vi) 以上の所論から、*i, j* 両柱の中心間距離を *l* に保ったまま *x* 方向に $\xi = \cos \omega t$ で振動させたときの水中の Q 点の速度ポテンシャルは

$$\begin{aligned} \phi_{2p} &= \sum_{k=1}^{\infty} \phi_{2p}^{(k)} = -\omega a^2 T \{E + A + A^2 + \dots\} D_0 \sin \omega t \\ &\dots\dots\dots(33) \end{aligned}$$

によって与えられる。ここに、E は単位行列である。行列 A の固有値の絶対値は 1 より小さいので、上式の行列 A に関する無限級数は収束して $(E - A)^{-1}$ となる。したがって式 (33) は次のように書ける。

$$\phi_{2p} = -\omega a^2 T (E - A)^{-1} D_0 \sin \omega t \dots\dots\dots(34)$$

i 柱および *j* 柱に対する長さ方向単位長さ当りの *x* 方向の全動水圧をそれぞれ P_i, P_j とすれば、

$$\begin{aligned} P_i &= \int_{-\pi}^{\pi} \left[\rho_w \frac{\partial \phi_{2p}}{\partial t} r_1 \cos \theta_1 \right]_{r_1=a}^{r_1=l} d\theta_1 \\ &= -\omega^2 \rho_w a^2 \left\{ \int_{-\pi}^{\pi} [T r_1 \cos \theta_1]_{r_1=a}^{r_1=l} d\theta_1 \right\} \\ &\quad \cdot (E - A)^{-1} D_0 \cos \omega t \dots\dots\dots(35) \end{aligned}$$

となる。 P_j は上式において、 r_1, θ_1 の代りに r_2, θ_2 と置けばよい。いまの場合 $P_j = P_i$ となる。

動水圧 P_i は *i* 柱の振動加速度 $-\omega^2 \cos \omega t$ と同位相であるから、*i* 柱に対する長さ方向単位長さ当りの付加質量 W_i は式 (35) の右辺を $-\omega^2 \cos \omega t$ で割ることによって得られる。さらに、*i* 柱に対する付加質量係数は $\alpha_{2p} = W_i / \pi a^2 \rho_w$ によって求められるから、

$$\begin{aligned} \alpha_{2p} &= \frac{1}{\pi} \left\{ \int_{-\pi}^{\pi} [T r_1 \cos \theta_1]_{r_1=a}^{r_1=l} d\theta_1 \right\} (E - A)^{-1} D_0 \\ &\dots\dots\dots(36) \end{aligned}$$

となる。柱の配列の対称性から、*j* 柱の付加質量係数と *i* 柱のそれとは等しいので、結局 2 本柱に対する付加質量係数は式 (36) によって求めることができる。式 (36) の T, A, D₀ にそれぞれ式 (23), (26), (24) を代入して計算を実行すれば、

$$\alpha_{2p} = \left\{ \left(\frac{l}{d}\right)^2 - \frac{1}{4} \right\} / \left\{ \left(\frac{l}{d}\right)^2 + \frac{1}{4} \right\} \dots\dots\dots(37)$$

となる。式 (36) は T, A, D₀ さえ適当に選べば、一般の多柱基礎の付加質量係数を求めるための表示式として用いることができる。

(vii) 2 本柱が *y* 方向に振動する場合には

$$T = \begin{Bmatrix} \sin \theta_1 & \sin \theta_2 \\ r_1 & r_2 \end{Bmatrix} \dots\dots\dots(38)$$

とおけばよく、したがって、修正振動変位振幅行列は

$$A = \left(\frac{a}{l}\right)^2 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \dots\dots\dots(39)$$

と表わせるから、これらを式 (36) に代入して計算を実行すれば、付加質量係数が次式のように得られる。

$$\alpha_{2r} = \left\{ \left(\frac{l}{d}\right)^2 + \frac{1}{4} \right\} / \left\{ \left(\frac{l}{d}\right)^2 - \frac{1}{4} \right\} \dots\dots\dots(40)$$

(2) 9 本柱の付加質量係数

図-7 に示す 9 本柱が *x* 方向に $\xi = \cos \omega t$ で振動する場合を考える。柱の配列の対称性から、9 本柱に対し

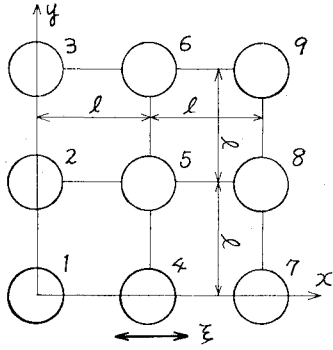


図-7 9 本柱

ては、No. 1, 2, 4, 5 柱の x 方向変位振幅と No. 1 柱の y 方向変位振幅とについてののみ、その修正振動変位振幅を求めればよいことになる。いま、 T, D_0 を

$$T = \left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{\cos \theta_1}{r_1} + \frac{\cos \theta_3}{r_3} + \frac{\cos \theta_7}{r_7} + \frac{\cos \theta_9}{r_9} \right) \\ \left(\frac{\sin \theta_1}{r_1} - \frac{\sin \theta_3}{r_3} - \frac{\sin \theta_7}{r_7} + \frac{\sin \theta_9}{r_9} \right) \\ \left(\frac{\cos \theta_2}{r_2} + \frac{\cos \theta_8}{r_8} \right), \left(\frac{\cos \theta_4}{r_4} + \frac{\cos \theta_6}{r_6} \right) \\ \left(\frac{\cos \theta_5}{r_5} \right) \end{array} \right\} \dots\dots\dots (41)$$

$$D_0 = \{1 \ 0 \ 1 \ 1 \ 1\}^T \dots\dots\dots (42)$$

とおけば、修正振動変位振幅行列 A は

$$A = \left(\frac{a}{l} \right)^2 \begin{bmatrix} 0 & -0.125 & 0.88 & -0.88 & 0 \\ -0.125 & 0 & -0.16 & -0.16 & -0.5 \\ 1.76 & -0.32 & -0.25 & 0 & -1 \\ -1.76 & -0.32 & 0 & 0.25 & 1 \\ 0 & -2 & -2 & 2 & 0 \end{bmatrix} \dots\dots\dots (43)$$

と表わされる。これらの値を用いれば、9 本柱に対する付加質量係数 α_9 は次式によって求められる。

$$\alpha_9 = \frac{1}{9\pi} \left\{ 4 \int_{-\pi}^{\pi} [Tr_1 \cos \theta_1]_{r_1=a} d\theta_1 + 2 \int_{-\pi}^{\pi} [Tr_2 \cos \theta_2]_{r_2=a} d\theta_2 + 2 \int_{-\pi}^{\pi} [Tr_4 \cos \theta_4]_{r_4=a} d\theta_4 + \int_{-\pi}^{\pi} [Tr_5 \cos \theta_5]_{r_5=a} d\theta_5 \right\} (E - A)^{-1} D_0 \dots\dots\dots (44)$$

5. 2 本柱に対する厳密解

著者の一人は、図-2 に示した 2 本柱の水中振動時の厳密解を双極座標を用いて求めている⁸⁾。結果だけを示せば次の通りである。すなわち、 x 方向振動に対する付

加質量係数は

$$\alpha_{2p} = \frac{4}{\pi^2} \sinh^2 \xi_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tanh n \xi_0}{n} \cdot \left\{ \int_0^{\pi} \frac{\cosh \xi_0 \cos \eta - 1}{(\cosh \xi_0 - \cos \eta)^2} \cos n\eta d\eta \right\}^2 \dots\dots\dots (45)$$

y 方向のそれは

$$\alpha_{2r} = \frac{4}{\pi^2} \sinh^4 \xi_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\coth n \xi_0}{n} \cdot \left\{ \int_0^{\pi} \frac{\sin \eta \sin n\eta}{(\cosh \xi_0 - \cos \eta)^2} d\eta \right\}^2 \dots\dots\dots (46)$$

と表わされる。ここに、

$$\xi_0 = \cosh^{-1}(l/d) \dots\dots\dots (47)$$

ここで、著者らの導いた解の精度を確かめるため、2 本柱の場合について式 (37) と式 (45) の α_{2p} 、式 (40) と式 (46) の α_{2r} とをそれぞれ数値計算して図-8 に示した。著者らの解と厳密解とは、 l/d が小さい場合 ($l/d < 1.5$) を除けば両者はよく一致している。 l/d が小さいときに近似が悪いのは、著者らの解は、 i 柱の変位によって生ずる j 柱の表面位置における水の変位として、 j 柱が存在しない場合の j 柱の中心位置における水の変位を採用したためである。これによる誤差は l/d が小さいほど大きくなる。しかし、実際の多柱基礎においては、各柱の間隔は一般に $l/d > 2$ であるから、著者らの解は十分実用性があるといつてよい。

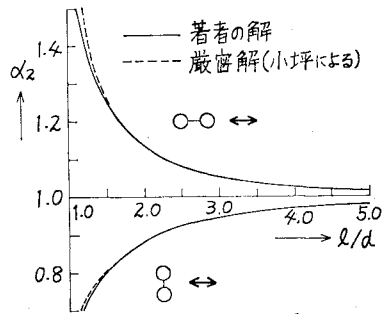


図-8 2 本柱に対する著者の解と厳密解との比較

6. 附加質量に関する模型実験

著者らの理論の妥当性を検証するために、図-9 に示すような多柱基礎の 2 次元模型を作製して実験を行った。

柱としては直径 2.14 cm、長さ 20 cm、密度 1.41 g/cm³ の中実塩化ビニール製チューブを用いた。実験はそれぞれ 2, 4, 6, 9 本柱の場合について、各柱の中心間距離 l をいろいろ変えて、各柱の両端を 20 cm × 20 cm × 0.3 cm のアルミ板で固定し、図-10 に示すように、模型全体を 2 本の針金 (2 mmφ) を通してコイルばね

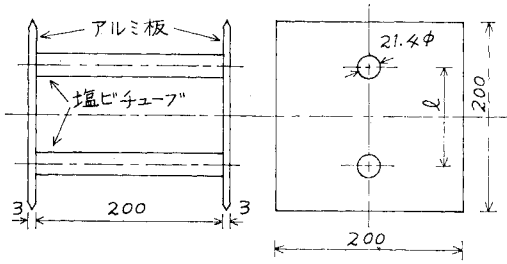


図-9 多柱基礎の2次元模型 (単位 mm)

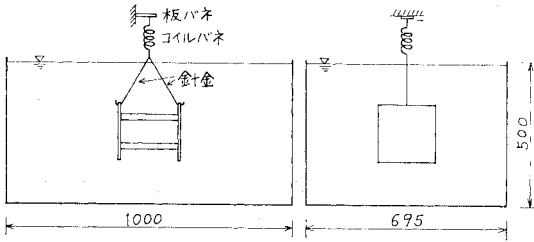


図-10 実験水槽 (単位 mm)

(ばね定数 $k=177.8 \text{ g/cm}$) で水槽中につるし、これに上下方向自由振動を与えて、それぞれ水中および空気中における固有周期と減衰定数とを測定した。測定は次のようにして行った。すなわち、模型をつるしたコイルばねをさらに剛性の大きな板ばねに固定して、この板ばねに電気抵抗線ひずみゲージを貼付し、これに動ひずみ計を接続して、その出力を電磁オシログラフに記録した。

多柱基礎模型の付加質量 W_a は次式によって求めた。

$$\frac{W_0 + W_a}{W_0} = \frac{T_w^2(1-h_w^2)}{T_a^2(1-h_a^2)} \dots\dots\dots(48)$$

ここに、 W_0 は空気中における振動質量、 T_a, T_w はそれぞれ空気中、水中における減衰自由振動周期、 h_a, h_w は空気中および水中における減衰定数である。

実験は周期 0.43~0.72 秒、振幅 0.2~3 mm、水温 18~23°C の範囲で行った。減衰定数は空気中においては $h_a \approx 0$ であり、水中においては $h_w=0.015\sim0.027$ であった。実際の多柱基礎に対しては、その付加質量におよぼす水の粘性の影響はこれをほとんど無視してよいが、本論におけるように小さな模型が水中で比較的ゆっくり振動する場合に対しては、水の粘性の影響がかなり大きく利いてくる。したがって、式 (48) によって求めた W_a には、水の粘性に基づく円柱への水の付加質量および円柱の両端を支持しているアルミ板への水の付加質量などが含まれている。いま、水の粘性を考慮しない場合の円柱 1 本当りの振動方向の断面形状に基づく付加質量を W_1 (W_1 はまた、1 本の円柱が排除する水の質量と同値である)、水の粘性を考慮した場合のそれを W_2 、アルミ板 1 枚当りの板表面への水の粘性に基づく付加質量を W_3 、アルミ板 1 枚当りの振動方向の断面形状に基

づく付加質量を W_4 、円柱の直径および各円柱の配列に基づく付加質量を W_β とすれば、 n 本柱模型については、

$$W_a = W_\beta + n(W_2 - W_1) + 2(W_3 + W_4) \dots(49)$$

の関係が成り立つ。したがって、粘性を考慮しない場合の多柱基礎模型への水の付加質量係数は、

$$\alpha = \frac{W_\beta}{nW_1} = \frac{W_a - n(W_2 - W_1) - 2(W_3 + W_4)}{nW_1} \dots\dots\dots(50)$$

によって求めることができる。なお、付加質量 $W_2 \sim W_4$ の計算理論については次章で詳論する。

式 (50) によって補正を行った実験値と著者らの理論値とを図-11 (a)~(d) に示した。いずれの場合についても、実験値と理論値とはよく一致しているといえよう。図-11 から次のようなことがわかる。

(i) 2本柱、6本柱のように、 x 方向と y 方向とで柱の配列が異なるものについては、付加質量係数 α は短手方向振動の α の方が長手方向振動の α より大きい。短手方向では $\alpha > 1$ であり、長手方向では $\alpha < 1$ である。また、 l/d が増すに従って、 α は急速に 1 に近づく。

(ii) 2本柱と6本柱については、短手、長手のいずれの方向の振動に対しても、6本柱の α の方が 1 に近い。

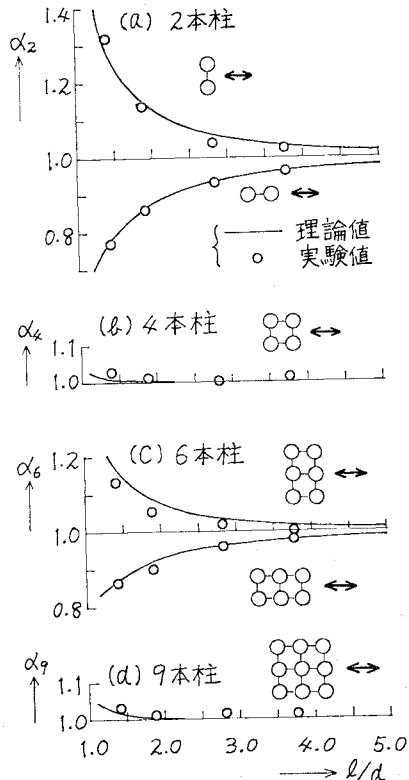


図-11 多柱基礎模型に対する水の付加質量係数

(iii) 4本柱および9本柱のように、 x, y 両方向の柱の配列が同じものについては、 α の値は l/d が 1.5 より大きい場合にはほとんど 1 である。すなわち、このような場合には、柱の配列が α の値におよぼす影響が列方向と行方向とで互いに打消し合って、あたかも各柱がそれぞれ独立に単一柱として振舞っているとみなしてもよい。

(iv) 水の粘性を考慮しない場合について、理論値と実験値とがよく合うことから考えて、水の粘性の影響をほとんど受けない実際の多柱基礎への水の附加質量は、著者らの理論を用いてこれを求めることができよう。

(v) 等間隔に並ぶ多柱基礎の α の値は一般に、0.9 ~ 1.1 の範囲にあると考えても大きな誤りはないといえる。

7. 補正值の計算理論

(1) 水の粘性を考慮した円柱への水の附加質量 W_2

水の粘性を考慮した円柱の二次元定常振動については Stokes⁹⁾, Schlichting¹⁰⁾ による解がある。Stokes は円柱の直径に比べて振動の変位振幅が小さく、さらに強制振動の振動数も低い場合について Navier-Stokes の方程式において慣性項 $u(\partial u/\partial r)$ などを無視して解析解を求めた。他方 Schlichting は境界層理論を用いて円柱の定常振動を解析し、円柱のまわりの水の速度分布を求めた。

本論の解法は本質的には Stokes のそれと同じ範ちゅうに属するものであるが、Stokes は粘性流体中における円柱の定常強制振動解を導いているのに対して、本論では粘性流体中における円柱の減衰自由振動に関する解析を行って、円柱に対する水の付加質量および減衰係数を求め、付加質量および減衰係数におよぼす水の粘性の影響を理論的に解析し、実験値と比較した。

半径 a の無限円柱が水中で減衰自由振動を行う場合を考える。いま、座標軸を図-12 のように選べば、水分

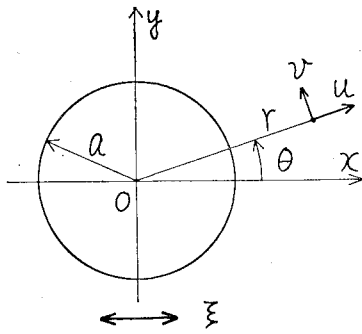


図-12

子の運動方程式は次のように書ける。

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_w} \frac{\partial p}{\partial r} + \nu \left\{ \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} - \frac{u}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v}{\partial \theta} \right\} \dots\dots\dots(51)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_w r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \nu \left\{ \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} - \frac{v}{r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u}{\partial \theta} \right\} \dots\dots\dots(52)$$

また、連続の方程式は

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (ru) + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} = 0 \dots\dots\dots(53)$$

ここに、 u, v はそれぞれ r, θ 方向の水の変位速度、 p は動水圧、 ν は水の動粘性係数、 ρ_w は水の密度である。

水の応力は

$$\sigma_r = -p + 2\mu \frac{\partial u}{\partial r} \dots\dots\dots(54)$$

$$\tau_{r\theta} = \mu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} \right) \dots\dots\dots(55)$$

と表わせる。ここに、 μ は水の粘性係数である。

円柱が

$$\xi = D e^{-\beta t + i\omega t} \dots\dots\dots(56)$$

で長さ方向に一樣な剛振動をする場合、 u, v に関する境界条件は次のように表わされる。

$$\left. \begin{aligned} u|_{r=a} &= D(-\beta + i\omega) e^{-\beta t + i\omega t} \cos \theta \\ v|_{r=a} &= -D(-\beta + i\omega) e^{-\beta t + i\omega t} \sin \theta \\ r \rightarrow \infty \text{ のとき } & u = v = 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots(57)$$

ここに、 D は円柱の初期変位、 β は減衰に関する定数、 ω は水中における円柱の円振動数、 i は虚数単位である。いま、

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} = 0 \dots\dots\dots(58)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = \nu \left\{ \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} \right\} \dots\dots(59)$$

を満たす流れ関数 ϕ, ψ を選び、

$$u = -\frac{\partial \phi}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \dots\dots\dots(60)$$

$$v = -\frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} + \frac{\partial \psi}{\partial r} \dots\dots\dots(61)$$

$$p = \rho_w \frac{\partial \phi}{\partial t} \dots\dots\dots(62)$$

によって u, v, p を定めれば、これらは運動方程式(51), (52) と連続の方程式(53) とを満足する。

式(57) で表わされる境界条件を満足する式(58), (59) の解を求めると、それは次式のように得られる。

$$\phi = D\nu\zeta a \frac{2K_1(\zeta a) + \zeta a K_0(\zeta a)}{K_0(\zeta a)} \frac{1}{r} \cos \theta e^{-\beta t + i\omega t} \dots\dots\dots(63)$$

$$\psi = 2 D \nu \zeta \frac{K_1(\zeta r)}{K_0(\zeta a)} \sin \theta e^{-\beta t + i \omega t} \dots\dots\dots (64)$$

ここに、

$$\zeta = \sqrt{\frac{-\beta + i \omega}{\nu}} \dots\dots\dots (65)$$

また、 K_0, K_1 は第2種の変形 Bessel 関数である。

円柱の長さ方向単位長さ当りの振動方向に対する水の抵抗力を F とすれば、

$$F = 4 \int_0^{\pi/2} [\sigma_r r \cos \theta - \tau_{r\theta} r \sin \theta]_{r=a} d\theta$$

$$= -\pi a \rho_w \nu^2 \zeta^3 D \frac{4 K_1(\zeta a) + \zeta a K_0(\zeta a)}{K_0(\zeta a)} e^{-\beta t + i \omega t} \dots\dots\dots (66)$$

さて、図-13 に示すように、半径 a の無限円柱が、単位長さ当り k のばね定数をもつばねでつるされて、水中で $\xi = D e^{-\beta t + i \omega t}$ の振動をしている場合を考える。円柱の運動方程式は式 (66) の F を用いて、

$$\pi a^2 \rho_b \frac{d^2 \xi}{dt^2} + k \xi - F = 0 \dots\dots\dots (67)$$

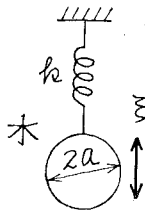


図-13

と書ける。ここに、 ρ_b は円柱の密度である。いま、

$$n_b = \sqrt{\frac{k}{\pi a^2 \rho_b}} \dots\dots\dots (68)$$

とおいて式 (67) を整理すれば、

$$\frac{1}{4} \left(1 + \frac{1}{R_b}\right) z^4 + 1 + \frac{1}{\lambda_b R_b} z^3 - \frac{K_1(\lambda_b z)}{K_0(\lambda_b z)} = 0 \dots\dots\dots (69)$$

となる。ここに、

$$\lambda_b = \sqrt{\frac{n_b}{2\nu}} a \dots\dots\dots (70)$$

$$R_b = \rho_b / \rho_w \dots\dots\dots (71)$$

$$z = x + iy \dots\dots\dots (72)$$

$$\frac{\omega}{n_b} = xy \dots\dots\dots (73)$$

$$\frac{\beta}{n_b} = \frac{1}{2} (y^2 - x^2) \dots\dots\dots (74)$$

式 (69) を満足する z を求めれば、式 (73) より円柱の空気中の固有円振動数と水中のそれとの比が、式 (74) より水中における減衰定数がそれぞれ得られる。したがって、円柱の単位長さ当りの水の付加質量 w_2 は

$$w_2 = \pi a^2 \rho_w \{(n_b/\omega)^2 - 1\} \dots\dots\dots (75)$$

によって求めることができる。円柱の長さを l とすれば $W_2 = w_2 l$ である。なお、式 (69) において、引数 $\lambda_b z$ の絶対値が大きいときは、 $K_1(\lambda_b z)/K_0(\lambda_b z) = 1$ としてよいから、式 (69) を満足する z は次式を用いて求めてもよい。

$$\left\{ \left(1 + \frac{1}{R_b}\right) x + \frac{1}{\lambda_b R_b} \right\}^2 - x^3 \left\{ \left(1 + \frac{1}{R_b}\right) x + \frac{2}{\lambda_b R_b} \right\}^3 = 0$$

$$y = x \sqrt{\frac{\left\{ \left(1 + \frac{1}{R_b}\right) x + \frac{3}{\lambda_b R_b} \right\}}{\left\{ \left(1 + \frac{1}{R_b}\right) x + \frac{1}{\lambda_b R_b} \right\}}} \dots\dots\dots (76)$$

(2) 水の粘性によるアルミ板への水の附加質量 W_3

図-14 に示すように、間隔 $2l$ をへだてて平行におかれた厚さ b の2枚の無限平板が水中で減衰自由振動を行っている場合を考える。いま、平板が

$$\xi = D e^{-\beta t + i \omega t}$$

で振動しているとき、図-14 において、平板のA面とB面の単位面積当りの粘性抵抗 F_A, F_B を求めるには、水の運動方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \dots\dots\dots (77)$$

を次の境界条件の下で解けばよい。すなわち、A, B面を表わすのに上付添字 A, B を用いれば、

$$u^A|_{y=0} = u^B|_{y=0} = D(-\beta + i\omega) e^{-\beta t + i\omega t} \dots\dots\dots (78)$$

$$\frac{\partial u^A}{\partial y} \Big|_{y=l} = 0, \quad u^B|_{y=\infty} = 0 \dots\dots\dots (79)$$

ここに、 u は水の x 方向の変位速度である。

式 (77)~(79) より F_A, F_B は

$$F_A = -D \mu \nu \zeta^3 \tanh(\zeta l) e^{-\beta t + i \omega t} \dots\dots\dots (80)$$

$$F_B = -D \mu \nu \zeta^3 e^{-\beta t + i \omega t} \dots\dots\dots (81)$$

となる。さて、図-15 に示すように、2枚の平行平板が単位面積当り k のばね定数をもつばねでつるされて、水中で $\xi = D e^{-\beta t + i \omega t}$ の振動をしている場合、1枚の平板の単位面積に対する運動方程式は、

$$b \rho_a \frac{d^2 \xi}{dt^2} + k \xi - (F_A + F_B) = 0 \dots\dots\dots (82)$$

と書ける。ここに、 ρ_a はアルミ板の密度である。いま

$$n_a = \sqrt{\frac{k}{b \rho_a}} \dots\dots\dots (83)$$

とおいて式 (80), (81) を式 (82) に代入して整理すれば

$$\frac{1}{4} z^4 + 1 + \frac{1}{4} \frac{1}{\lambda_a R_a} z^3 \left\{ 1 + \tanh\left(\lambda_a \frac{l}{b} z\right) \right\} = 0 \dots\dots\dots (84)$$

となる。ここに、

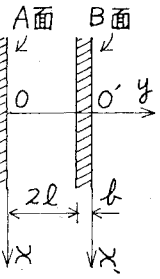


図-14

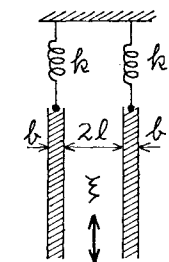


図-15

$$\lambda_a = \sqrt{\frac{n_a}{2\nu}} b \dots\dots\dots (85)$$

$$R_a = \rho_a / \rho_w \dots\dots\dots (86)$$

$$z = x + iy \dots\dots\dots (87)$$

$$\frac{\omega}{n_a} = xy \dots\dots\dots (88)$$

$$\frac{\beta}{n_a} = \frac{1}{2} (y^2 - x^2) \dots\dots\dots (89)$$

式 (84) を満足する z を求めれば、式 (88) よりアルミ板の空気中と水中での固有円振動数の比が、式 (89) より水中におけるアルミ板の減衰定数がそれぞれ得られる。したがってアルミ板 1 枚の単位面積当りの水の附加質量 w_3 は

$$w_3 = b\rho_w \{ (n_a/\omega)^2 - 1 \} \dots\dots\dots (90)$$

によって求めることができる。アルミ板の表面積を S とすれば $W_3 = w_3 S$ となる。なお、式 (84) において引数 $\lambda_a lz/b$ の絶対値が大きいたときは $\tanh(\lambda_a lz/b) = 1$ としてよいから、式 (84) を満たす z は次式によって求めるとよい。

$$\left. \begin{aligned} & \left(x + \frac{1}{2\lambda_a R_a} \right)^2 - x^3 \left(x + \frac{1}{\lambda_a R_a} \right)^3 = 0 \\ & y = x \sqrt{\left\{ x + \frac{3}{2\lambda_a R_a} \right\} / \left\{ x + \frac{1}{2\lambda_a R_a} \right\}} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (91)$$

(3) アルミ板の断面形状に基づく水の附加質量 W_4

実験に用いたアルミ板は厚さ $b=0.3$ cm, 辺長 $l_a=20$ cm の正方形板であるが、断面形状に基づく付加質量を少なくするために、各辺から約 1 cm のところまでヤスリをかけて、くさび状に先を尖らせている。したがってこのアルミ板を、その振動方向の断面形状が短軸 b , 長軸 l_a の長楕円であるとみなせば、附加質量 W_4 は次式から求めることができる。

$$W_4 = \alpha \frac{\pi}{4} b^2 \rho_w l_a'$$

ここに、 l_a' は振動直角方向のアルミ板の幅、 α は楕円断面に対する付加質量係数で、著者の一人の研究⁷⁾によれば、 l_a/b が 1 より大きい場合には $\alpha=1$ である。

(4) 数値計算例

著者らが行った模型実験について、実験値の補正法の一例を示せば、次の通りである。

4 本柱模型で柱間隔が $l/d=1.87$ の場合

(i) 実験値：水温は 16.5°C。式 (48) において、 $T_a=0.48585$ 秒, $T_w=0.56123$ 秒, $h_a=0$, $h_w=0.022$, $W_0=1050.5$ g。したがって $W_a=350.47$ g。

(ii) $W_1: W_1 = \pi a^2 l \rho_w = 71.45$ g。

(iii) $W_2: 水の動粘性係数 \nu = 0.011 \text{ cm}^2/\text{s} (16.5^\circ\text{C})$,

式 (70), (71) の $\lambda_b=26.374$, $R_b=1.411$ 。これらの値を式 (76) に代入して x, y を求めれば $x=0.859115$, $y=0.874434$ 。したがって式 (73), (75) から w_2 が計算できて、 $w_2=3.875$ g/cm。ゆえに $W_2=w_2 \times 20 \text{ cm} = 77.5$ g。

(iv) $W_3: 式 (85), (86) の \lambda_a=7.431, R_a=2.7$ 。これらの値を式 (91) に代入して x, y を求めれば、 $x=0.975545$, $y=0.999549$ 。したがって式 (88), (90) から $w_3=0.04056$ g/cm²。ゆえに $W_3=w_3 \times 20 \text{ cm} \times 20 \text{ cm} = 16.225$ g。式 (89) から減衰定数は 0.0237。

(v) $W_4: 式 (92) より W_4=1.414$ g。

(vi) 以上求めた $W_1 \sim W_4$ を式 (50) に代入すれば、4 本柱に対する付加質量係数は $\alpha_4=1.018$ となる。また、減衰定数はアルミ板の粘性に基づくものが支配的で、この例の場合、実験値=0.022, 理論値=0.0237 となって両者は比較的よく合っている。ちなみに、著者らが行った模型実験について、水中における模型の減衰定数を求めて、その値と本章の補正理論を用いて求めた減衰定数とを比較すれば表-1 の通りである。実験値の減衰定数は 2, 4, 6, 9 本柱のそれぞれの場合について、得られた実験値から求めた減衰定数を各場合についてすべて平均した値である。表-1 から減衰定数についても理論値は実験値と比較的よく一致していることがわかる。このことは、模型の振動エネルギーはその大部分が水の粘性によって失われていると考えてよいことを示している。

表-1 模型の減衰定数についての理論値と実験値との比較

	模型の減衰定数	
	実験値	理論値
2 本柱	0.0224	0.0224
4 本柱	0.0237	0.0237
6 本柱	0.0195	0.0248
9 本柱	0.0255	0.0264

8. 結 論

上述の結果から次のような結論を導くことができる。

(1) 小型の多柱基礎模型が、水中で比較的ゆっくり振動する場合には、水の粘性の影響が無視できない。著者らが示した補正理論によって粘性の影響を消去すれば、附加質量に関する実験結果は理論値とよく一致する。

(2) 多柱基礎の水中剛振動によって生ずる附加質量係数を求める著者らの解析理論はその実用性が高い。

(3) 多柱基礎の附加質量係数 α は、柱間隔 l/d が大きくなると急速に 1 に近づく。また、 α の値は柱の本

数にかかわらず $l/d > 1.5$ では $0.9 < \alpha < 1.1$ の範囲にあると考えてもよい。

(4) 4, 9本柱のように、互いに直角な方向の柱配列が等しい多柱基礎への水の付加質量係数 α は $\alpha \doteq 1$ である。2, 6本柱のように、互いに直角方向の柱配列が異なる多柱基礎については、長手方向の振動に対する付加質量係数は1より小さく、短手方向の振動に対するそれは1より大きい。また、長手、短手両方向の柱配列の柱数の比が1に近いほど同じ l/d に対して付加質量係数はより1に近くなる。

(5) 多柱基礎模型の水中における減衰定数についても、理論値と実験値とは比較的よく一致する。

以上は円形断面を有する多柱基礎に対する長さ方向に一樣な正弦振動の2次元動水圧の理論解ならびに模型実験から得られた結論である。

本論では2次元問題として取り扱ったが、もちろん3次元問題としても同様な考え方によって解くことができる。しかし、図-1でも示したように、3次元的に解析しても煩雑となるのみで結果に大きな変化は生じないので、ここでは省略する。

最後に、粘性流体中の振動円柱に関する文献に対して

ご配慮いただいた九州工業大学 浦助教授に謝意を表します。

参 考 文 献

- 1) Riabouchinski D. : Sur la résistance des fluides, Congrès International des Mathématiciens, Strasbourg, 1920.
- 2) Stelson T.E. and F.T. Mavis : Virtual mass and acceleration in fluids, Trans. ASCE., Vol. 122, 1927.
- 3) Clough R.W. : Effects of earthquakes on underwater structures, 2nd. WCEE., 1960.
- 4) 桜井彰雄 : 水中に立てられた柱状構造物の振動, 土木技術, 第16巻, 6号, 昭 36.6.
- 5) 岡本舜三・加藤勝行・伯野元彦 : 水中構造物の模型振動実験, 土木学会第17回年次学術講演会講演概要第1部, 昭 37.5.
- 6) 後藤尚男・土岐憲三 : 水中構造物の振動と耐震設計に関する基礎的研究, 土木学会論文集, No. 100, 昭 38.12.
- 7) 小坪清真 : だ円形水中橋脚に働く地震力とその弾性振動, 土木学会論文集, No. 120, 昭 40.8.
- 8) 小坪清真 : 鋼管橋脚の耐震設計について, 昭和40年度土木学会西部支部研究発表会論文集, 昭 41.1.
- 9) Stokes G.G. : On the effect of the internal friction of fluids on the motion of pendulums, Trans. Camb. Phil. Soc., 9, Pt. II, 1851.
- 10) Schlichting H. : Berechnung ebener periodischer Grenzschichtströmungen, Physik. Zeitschr. XXXIII, 1932.

(1975.7.10・受付)