

## 積分方程式法による埋設物周辺の過渡応力の解析

TRANSIENT STRESSES AROUND INCLUSIONS DURING THE  
PASSAGE OF TRAVELING WAVES ANALYSED BY THE  
INTEGRAL EQUATION METHOD丹羽 義次\*・小林 昭一\*\*・福井 卓雄\*\*\*・東 憲昭\*\*\*\*  
By Yoshiji NIWA, Shoichi KOBAYASHI, Takuo FUKUI and Noriaki AZUMA

## 1. はじめに

近年、地下構造物が巨大化するにつれて構造物-基盤系として把え、両者の相互作用を考慮したよりの確な解析が要請されるようになってきた。基盤となる地盤や岩盤は、構成物質の特性のみならず、地質学的な種々の不連続性のためにきわめて複雑な挙動を呈し、また、地下構造物もこのような基盤の中に埋設された異質物体として、基盤とは異なった特異な挙動を呈すると考えられる。しかしながら、现阶段ではこのような構造物-基盤系の挙動を厳密に解析することは困難であり、種々の近似モデルによる数値解析が試みられている<sup>1)</sup>。なかでも最も思い切ったモデルの一つとして、構造物のみならず基盤をも線形弾性体としたものがしばしば用いられている。現実には、また、このような簡単な近似モデルの解析で十分目的を達する場合も多い。

本論文はこのような意味で、地下構造物-基盤系の全体的な挙動を大まかに把握する目的で、この系を線形弾性体中に開割された空洞あるいは異質の埋設物とモデル化し、このようなモデルに、地震波とか近接発破などに伴う進行波が入射することによって生じる過渡状態の解析を試みたものである。

過渡状態の解析法としては、いわゆるモーダル・アナリシス法<sup>2)</sup>によった。この際に必要となる調和解は、Helmholtzの方程式を積分方程式に変換し、与えられた境界条件を満たすようにして求めた。なお、この積分方程式を用いる方法によれば、従来の固有関数展開による級数解法では処理することのできなかった任意形状の境界を有する問題も、同様に容易に取り扱うことができ、さらに、有限要素法とか差分法などの数値解法に比し

て、小容量計算で十分な解が得られるなどの長所があり、複雑な形状の問題の解析にも、今後広範囲に適用されることが期待される。

この論文は、地下構造物-基盤系モデルの過渡状態の解析に積分方程式法の適用を試みたものであるが、まとまりをよくするために、以下では、まず、動弾性学の境界値問題を積分方程式に帰着させる一般的な手法を概説した。ついで、この手法を具体的な例に適用し、その有効性を確かめるとともに、モデルの範囲での過渡特性を検討した。

## 2. 動弾性学の境界値問題と積分方程式

## (1) 動弾性学の基礎式

対象とする弾性体が等方、均質でかつ線形であるとすれば、その運動方程式、構成式、ひずみ-変位関係式は、直交直線座標系  $(x_1, x_2, x_3)$  を用いて、次のように書き表わせる。

$$\bar{\tau}_{ij,j} + \rho \bar{f}_i = \rho \bar{u}_i \dots \dots \dots (2.1)$$

$$\bar{\tau}_{ij} = \lambda \bar{\epsilon}_{kk} \delta_{ij} + 2 \mu \bar{\epsilon}_{ij} \dots \dots \dots (2.2)$$

$$\bar{\epsilon}_{ij} = \frac{1}{2} (\bar{u}_{i,j} + \bar{u}_{j,i}) \dots \dots \dots (2.3)$$

ここに、 $\bar{\tau}_{ij}$ 、 $\bar{\epsilon}_{ij}$ 、 $\bar{u}_i$ 、 $\bar{f}_i$ 、 $\delta_{ij}$  は、それぞれ応力テンソル、ひずみテンソル、変位ベクトル、物体力ベクトルの各成分および Kronecker のデルタを表わし、 $\lambda$ 、 $\mu$  はそれぞれ Lamé の定数を、 $\rho$  は密度を、また、 $\bar{u}_i \equiv \partial^2 u_i / \partial t^2$ 、 $\bar{u}_{i,j} \equiv \partial \bar{u}_i / \partial x_j$  などを意味するものとする。さらに、添字に関しては、範囲 1~3 で総和規約を適用するものとする。

式 (2.1) に式 (2.2)、(2.3) を代入すると、次の Navier-Cauchy の式が求められる。

$$\mu \bar{u}_{i,jj} + (\lambda + \mu) \bar{u}_{j,ji} + \rho \bar{f}_i = \rho \bar{u}_i \dots \dots \dots (2.4)$$

いま、定常な問題として、物体力が弾性体の固有振動

\* 正会員 工博 京都大学教授 工学部土木工学科  
\*\* 正会員 工博 京都大学教授 工学部土木工学科  
\*\*\* 正会員 工修 京都大学助手 工学部土木工学科  
\*\*\*\* 正会員 工修 日本国有鉄道

周期と異なる周期で周期的に変動する場合を考えれば、対応する変位も同じ周期で変動するので、円振動数  $\omega$  を用いて表わせば、それぞれ次のように書くことができる。

$$\left. \begin{aligned} \bar{f}_i(\mathbf{x}, t) &= \text{Re}\{f_i(\mathbf{x})e^{-i\omega t}\} \\ u_i(\mathbf{x}, t) &= \text{Re}\{u_i(\mathbf{x})e^{-i\omega t}\} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(2.5)$$

ここに、 $f_i(\mathbf{x}) = f_i^{(1)}(\mathbf{x}) + if_i^{(2)}(\mathbf{x})$ ,  $u_i(\mathbf{x}) = u_i^{(1)}(\mathbf{x}) + iu_i^{(2)}(\mathbf{x})$  とし、 $\text{Re}\{\}$  は、 $\{\}$  の実部を取ることの意味している。なお、上式では簡単のために  $\bar{f}_i(x_1, x_2, x_3)$  などの代わりに  $f_i(\mathbf{x})$  などと書いた。

定常運動の方程式は、式 (2.4) に式 (2.5) を代入して次のように書き表わせる。

$$(c_1^2 - c_2^2)u_{j,ij} + c_2^2u_{i,jj} + \omega^2u_i = -f_i \dots\dots(2.6)$$

ここに、 $c_1^2 = (\lambda + 2\mu)/\rho$ ,  $c_2^2 = \mu/\rho$  である。

さて、いま新しく演算子として次のように定義される  $L_{ij}$ , すなわち、

$$L_{ij}u_j = (c_1^2 - c_2^2)u_{j,ij} + c_2^2u_{i,jj} + \omega^2u_i \dots\dots(2.7)$$

を導入すれば、式 (2.6) は

$$L_{ij}u_j = -f_i \dots\dots\dots(2.8)$$

と書き直すことができる。

特に、物体力を考えなくてもよい場合、すなわち、 $f_i = 0$  では、上式は次のように簡単になる。

$$L_{ij}u_j = 0 \dots\dots\dots(2.9)$$

以上の基礎方程式はすべて変位に関するものであるので、応力成分も変位を用いて表わしておくとして後で利用するには便利であろう。式 (2.3) を式 (2.2) に代入すると、応力は変位を用いて次のように表わされる。

$$\tau_{ij} = \lambda u_{k,k} \delta_{ij} + \mu(u_{i,j} + u_{j,i}) \dots\dots\dots(2.10)$$

さらに、外向き法線方向ベクトルが  $n_i$  である面に作用する応力ベクトル  $t_i$  は、次のように表わされる。

$$t_i = \tau_{ij}n_j = \lambda n_i u_{k,k} + \mu n_j (u_{i,j} + u_{j,i}) \dots\dots\dots(2.11)$$

いま、ここで、次のように定義される演算子

$$\tilde{T}_{ij}^n = \mu \delta_{ij} \frac{\partial}{\partial n_j} + \mu n_j \frac{\partial}{\partial x_i} + \lambda n_i \frac{\partial}{\partial x_j} \dots\dots(2.12)$$

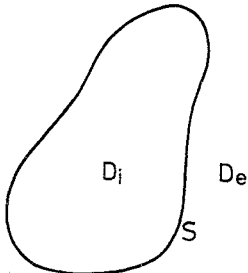
を導入すると、式 (2.11) は、簡単に次のように書くことができる。

$$t_i = \tilde{T}_{ij}^n u_j \dots\dots\dots(2.13)$$

なお、式 (2.12) の  $\partial/\partial n$  は法線方向微分を表わすものとする。

(2) 境界値問題

弾性学の境界値問題は、**Fig. 1** に示すように、なめらかな曲面  $S$  で囲まれた有限な領域を  $D_i$ , その補完



**Fig. 1** Internal domain  $D_i$ , external domain  $D_e$ , and their boundaries  $S$ .

領域を  $D_e$  とすれば、 $D_i + S$  での境界値問題と  $D_e + S$  での境界値問題に分けられる。前者は内部境界値問題、後者は外部境界値問題とよばれている。

いま、境界条件として、 $S$  の部分  $S_1$  および  $S_2$  ( $S_1 + S_2 = S$ ) において、それぞれ、変位ベクトルおよび応力ベクトルが与えられているとすると、境界値問題は次のように表わされる。

a) 内部境界値問題

$$\left. \begin{aligned} L_{ij}u_j(\mathbf{x}) &= 0, \quad \mathbf{x} \in D_i \\ u_i(\mathbf{y}) &= h_i(\mathbf{y}), \quad \mathbf{y} \in S_1 \\ \tilde{T}_{ij}^n u_i(\mathbf{y}) &= g_i(\mathbf{y}), \quad \mathbf{y} \in S_2 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(2.14)$$

b) 外部境界値問題

$$\left. \begin{aligned} L_{ij}u_j(\mathbf{x}) &= 0, \quad \mathbf{x} \in D_e \\ u_i(\mathbf{y}) &= h_i(\mathbf{y}), \quad \mathbf{y} \in S_1 \\ \tilde{T}_{ij}^n u_j(\mathbf{y}) &= g_i(\mathbf{y}), \quad \mathbf{y} \in S_2 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(2.15)$$

ここで、特に、 $S = S_1$ , あるいは  $S = S_2$  の場合には、境界条件は、変位ベクトルあるいは応力ベクトルだけで与えられることになり、それぞれ、第1種あるいは第2種の境界値問題とよばれている。

なお、動弾性学の外部境界値問題では、 $u_i(\mathbf{x})$  を決定するためには、上の条件のほかに、さらに、 $u_i(\mathbf{x})$  の無限遠点での挙動をも考慮しなければならない。すなわち、(1) 無限遠点での変位および応力は有界であり、(2) 荷重の作用点から十分離れた点では、攪乱は外向きの波によるという Sommerfeld の放射条件の2つの条件が満たされなければならない。以下において、外部問題を対象とするときには、常にこの2つの条件は満たされているものとする。

(3) 積分方程式<sup>(3)-(5)</sup>

いま、同一の物体  $D + S$  ( $D_i$  でも  $D_e$  でもよい) について、2つの異なった変位ベクトル、応力ベクトルおよび物体力ベクトルの組 ( $u_i^{(1)}, t_i^{(1)}, f_i^{(1)}$ ) および ( $u_i^{(2)}, t_i^{(2)}, f_i^{(2)}$ ) を考え、これらに相反作用の定理を適用すると、次式を得る。

$$\begin{aligned} & \int_{D_i} f_i^{(1)} u_i^{(2)} dv + \int_S t_i^{(1)} u_i^{(2)} ds \\ &= \int_{D_i} f_i^{(2)} u_i^{(1)} dv + \int_S t_i^{(2)} u_i^{(1)} ds \dots\dots(2.16) \end{aligned}$$

この式に、式 (2.8) および (2.13), すなわち、 $L_{ij}u_j(\mathbf{x}) = -f_i(\mathbf{x})$ ,  $t_i = \tilde{T}_{ij}^n u_j(\mathbf{x})$  を代入して整理すると、次の Betti の式が求められる。

$$\begin{aligned} & \int_{D_i} [u_i^{(2)} L_{ij} u_j^{(1)} - u_i^{(1)} L_{ij} u_j^{(2)}] dv \\ &= \int_S [u_i^{(2)} \tilde{T}_{ij}^n u_j^{(1)} - u_i^{(1)} \tilde{T}_{ij}^n u_j^{(2)}] ds \dots\dots\dots(2.17) \end{aligned}$$

さて、いま問題にしている2つの状態に対して、 $u_i^{(1)}$ としては定常な運動方程式(2.9)の解、すなわち、

$$L_{ij}u_j(p) = 0 \dots\dots\dots(2.18)$$

を満たすものを、また、 $u_i^{(2)}$ としては、上式(2.18)に対応する次式

$$L_{ij}\Gamma_j^{(k)}(p; q) = -\delta(p-q)\delta_i^k \dots\dots\dots(2.19)$$

を満足する $\Gamma_j^{(k)}(p; q)$ を選ぶとしよう。なお、 $p$ および $q$ は、任意の座標点を表すものとする。

式(2.19)を満たす関数 $\Gamma_j^{(k)}(p; q)$ は、方程式(2.18)の基本特異解とよばれ、物理的には、点 $q(x)$ に生じる $x_j$ -方向に作用する単位の集中心力によって点 $p(x)$ に生じる $x_j$ -方向の変位を意味している。

さて、これらの $u_j(p)$ および $\Gamma_j^{(k)}(p; q)$ を $u_i^{(1)}$ および $u_i^{(2)}$ の代わりとして式(2.17)に代入すると

$$F(q)u_k(q) = \int_S [\Gamma_i^{(k)}(p; q)\hat{T}_{ij}^n u_j(p) - u_i(p)\hat{T}_{ij}^n \Gamma_j^{(k)}(p; q)] ds(p) \dots\dots\dots(2.20)$$

を得る。ここに、曲面 $S$ がなめらかであれば、

$$F(q) = \begin{cases} 1, & q \in D \\ 1/2, & q \in S \\ 0, & q \in \bar{D}, q \in \bar{S} \end{cases}$$

である。なお、 $\hat{T}_{ij}^n$ は点 $p$ において作用させるという意味で添字 $p$ をつけておいた。

さて、ここで上式の $p$ と $q$ を入れかえて、 $\Gamma_i^{(k)}(q; p) = \Gamma_k^{(i)}(p; q)$ 、および $\hat{T}_{ij}^n \Gamma_j^{(k)}(q; p) = \hat{T}_{ij}^n \Gamma_k^{(j)}(p; q)$ という性質を用いると、式(2.20)は次のように変換される。

$$F(p)u_k(p) = \int_S [\Gamma_k^{(i)}(p; q)\hat{T}_{ij}^n u_j(q) - u_i(q)\hat{T}_{ij}^n \Gamma_k^{(j)}(p; q)] ds(q) \dots\dots\dots(2.21)$$

この式は、Somiglianaの式とよばれている。

式(2.21)において、特に点 $p$ を境界上の点 $P$ にもつてくると、次式が求められる。

$$\frac{1}{2}u_k(P) = \int_S [\Gamma_k^{(i)}(P; q)\hat{T}_{ij}^n u_j(q) - u_i(q)\hat{T}_{ij}^n \Gamma_k^{(j)}(P; q)] ds(q) \dots\dots\dots(2.22)$$

この式の未知量は、境界上での $\hat{T}_{ij}^n u_j(q)$ および $u_i(q)$ だけであり、 $(\Gamma_k^{(i)}(p; q))$ は後述のように境界条件に無関係に求められるので、したがって、これらに関する境界積分方程式ということができ、境界値問題の解は、式(2.22)を、式(2.14)あるいは(2.15)で与えられた境界条件の下で解けば求められる。すなわち、それにより $u_i(q)$ 、 $\hat{T}_{ij}^n u_j(q)$ が求まり、それらを式(2.21)に代入することにより任意点 $p$ の変位が求められ、さら

に式(2.10)により応力が求められる。

なお、式(2.22)あるいは式(2.21)に現われる基本特異解 $\Gamma_j^{(k)}(p; q)$ は、式(2.19)を解くことにより、一般に容易に求められる。たとえば、以下で必要となる2次元弾性体の定常問題の解は、次のように与えられている<sup>6)</sup>。

$$\Gamma_j^{(k)}(p; q) = \frac{i}{4\mu} \left[ H_0^{(1)}(\xi_2 r) \delta_{jk} - \frac{1}{\xi_2^2} \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_k} \{H_0^{(1)}(\xi_1 r) - H_0^{(1)}(\xi_2 r)\} \right] \dots\dots\dots(2.23)$$

ここに、 $\xi_1 = \omega/c_1$ 、 $\xi_2 = \omega/c_2$ 、 $r = |p - q|$ 、 $H_0^{(1)}(\xi r)$ は、 $\xi r$ をアーギュメントとする第1種0次のHankel関数である。

### 3. 積分方程式の数値解法

#### (1) 仮想境界による解法<sup>7)~8)</sup>

動弾性学の境界値問題は、上述のところから、式(2.22)の境界積分方程式に帰着することがわかった。要はこの方程式を与えられた境界条件の下で解けばよいわけである。しかしながら、この式には、核として基本特異解が含まれており、点 $q$ が点 $P$ と一致する場合には、積分はCauchyの主値の意味でしか存在しないことになり、その積分は必ずしも容易ではない。この困難を避けるために、本論文では、Fig. 2に示すように、実際の境界のほかに仮想な補助境界を選び、変位はこの仮想境界上に分布した密度 $\varphi_i(Q)$ により

$$u_k(p) = \int_{S'} \Gamma_k^{(i)}(p; Q)\varphi_i(Q) ds, Q \in S' \dots\dots(3.1)$$

で与えられると仮定した。以下において対象とするような第1種、および第2種境界値問題、あるいは異質埋設物を含む系の境界値問題には、補助境界を実際の境界に近づけることにより正解が得られることが知られている。

さて、上式を適用すると、たとえば、第1種の内部境界値問題(すなわち、式(2.14)で $S = S_1$ とした場合)は、密度 $\varphi_i(Q)$ に関する積分方程式

$$\int_{S'} \Gamma_k^{(i)}(P; Q)\varphi_i(Q) ds = h_k(P), P \in S, Q \in S' \dots\dots\dots(3.2)$$

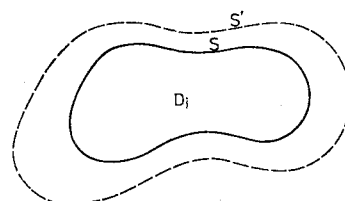


Fig. 2 Real boundary  $S$  and its auxiliary boundary  $S'$ .

に帰着されることになる。これを解いて  $\varphi_i(Q)$  を求め、それを式 (3.1) に代入することにより  $u_i(p)$  が求められる。

一方、第2種の境界値問題の場合、たとえば、式(2.14)で  $S=S_2$  とした場合には、

$$\int_{S'} \frac{P}{T_{kj}^n} \Gamma_j^{(i)}(P; Q) \varphi_i(Q) ds = g_k(P), P \in S, Q \in S' \dots\dots\dots(3.3)$$

となり、これより  $\varphi_i(Q)$  が求められ、したがって、 $u_i(p)$  が求められることになる。

しかしながら、このようにして導かれた積分方程式を解析的に解くことは一般に困難であるので、数値解析によらざるを得ないであろう。

いま、Fig. 3 に示すように、実境界に対応して仮想の境界を考え、実境界上の分割点に対応するように、仮想境界上の点を選ぶとしよう。このように選んだ仮想境界上の区間では、密度  $\varphi_i(Q)$  は一定であると仮定して、積分方程式を密度に関する連立一次方程式に近似的に置き換えることを考えてみよう。

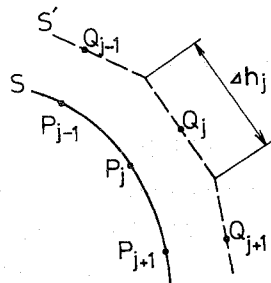


Fig. 3 Real boundary  $S$  and the corresponding auxiliary polygonal boundary  $S'$ .

いま、簡単のために2次元問題として、境界の分割数を  $m$  とし、分割点  $j$  での分割幅を  $\Delta h_j$  とすると、たとえば、式 (3.2) は、近似的に次のように変換される。

$$\left. \begin{aligned} & \sum_{j=1}^m \Gamma_1^{(1)}(P_l; Q_j) \varphi_1(Q_j) \Delta h_j \\ & + \sum_{j=1}^m \Gamma_1^{(2)}(P_l; Q_j) \varphi_2(Q_j) \Delta h_j = h_1(P_l) \\ & \sum_{j=1}^m \Gamma_2^{(1)}(P_l; Q_j) \varphi_1(Q_j) \Delta h_j \\ & + \sum_{j=1}^m \Gamma_2^{(2)}(P_l; Q_j) \varphi_2(Q_j) \Delta h_j = h_2(P_l) \\ & \dots\dots\dots(3.4) \end{aligned} \right\}$$

$$l=1, 2, \dots, m$$

これを解いて、 $\varphi_1(Q_j)$ 、 $\varphi_2(Q_j)$  が求まり、したがって、式 (3.1) を数値積分することにより  $u_i(p)$  が近似的に求められることになる。

(2) 異質埋設物を含む場合の解法

Fig. 4 に示すように、無限弾性体中に異質の弾性体が埋設されている場合を考えてみよう。ここでは、簡単のために、異質物質(内部領域)とその外部の弾性体(外部領域)とは完全に密着しているとしよう。すなわち、両者の境界上で変位ベクトルは連続し、また応力ベ

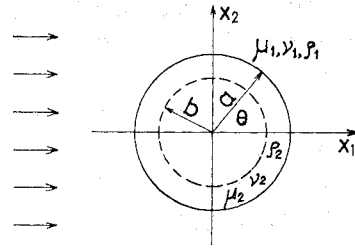


Fig. 4 Elastic inclusion embedded in the infinite elastic region.

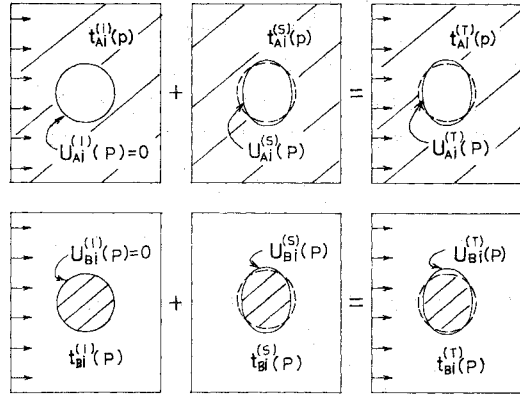


Fig. 5 Superposition of two states;  $u_i^{(T)}(P)=0$  and  $u_i^{(S)}(P)$  on the boundary of the inclusion.

クトルはつり合っているものとする。

このような系を考えると、外部領域および内部領域の変位および応力状態は、それぞれ、Fig. 5 に模式的に示した2つの状態、すなわち、(i) 境界  $S$  以外では与えられた条件を満たし、かつ、 $u_i^{(i)}(P)=0, P \in S$ 、および(ii) 境界  $S$  での変位ベクトルのみが  $u_i^{(S)}(P), P \in S$ 、他はすべて0に対応して生じる変位および応力状態それぞれの和として求められる筈である。いま、外部領域、内部領域それぞれに下添字  $A, B$  を、また、(i) および(ii)の状態に対応するものにそれぞれ上添字  $(I)$ 、 $(S)$  を、さらに後二者の和として与えられるもの上添字  $(T)$  をつけて区別することにしよう。このようにすると、応力ベクトルは次のように表わされる。

$$\left. \begin{aligned} t_{Ai}^{(T)}(p) &= t_{Ai}^{(I)}(p) + t_{Ai}^{(S)}(p), p \in D_e + S \\ t_{Bi}^{(T)}(p) &= t_{Bi}^{(I)}(p) + t_{Bi}^{(S)}(p), p \in D_i + S \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(3.5)$$

なお、(i)の状態では内部領域に変位は生じないので、 $t_{Bi}^{(I)}(p)=0, p \in D_i + S$  となっている。

一方、境界上での応力ベクトルのつり合い条件から

$$\left. \begin{aligned} t_{Ai}^{(T)}(P) + t_{Bi}^{(T)}(P) &= 0, i.e. \\ t_{Ai}^{(I)}(P) + t_{Ai}^{(S)}(P) + t_{Bi}^{(S)}(P) &= 0, P \in S \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(3.6)$$

が成立しなければならない。

いま、境界上に生じる変位、 $u_{Ai}^{(I)}(P)=u_{Bi}^{(I)}(P)=$

0,  $u_{Ai}^{(S)}(P) = u_{Bi}^{(S)}(P) = u_i^{(S)}(P)$  が与えられたとすると、これらの応力,  $t_{Ai}^{(L)}(p)$ ,  $t_{Ai}^{(S)}(p)$ , および  $t_{Bi}^{(S)}(p)$  は、第1種の境界値問題を解いて求められる筈であるから、逆に、式(3.6)は、 $u_i^{(S)}(P)$  を未知関数と

する方程式と見ることもできる。これを解けば、 $u_i^{(S)}(P)$  が決定され、 $u_{Ai}^{(T)}(p)$ ,  $u_{Bi}^{(T)}(p)$ , さらに  $t_{Ai}^{(T)}(p)$ ,  $t_{Bi}^{(T)}(p)$  などが求まることになる。これを式で表現すると以下のようになる。

まず、境界  $S$  に対応して仮想な境界  $S'$  を考え、それを  $m$  個に分割する。次に、変位成分  $u_1(p_l)$ ,  $u_2(p_l)$  を、式(3.4)により表現する。

$$\left. \begin{aligned} u_1(p) &= \sum_{j=1}^m \Gamma_1^{(1)}(p; Q_j) \varphi_1(Q_j) \Delta h_j + \sum_{j=1}^m \Gamma_1^{(2)}(p; Q_j) \varphi_2(Q_j) \Delta h_j \\ u_2(p) &= \sum_{j=1}^m \Gamma_2^{(1)}(p; Q_j) \varphi_1(Q_j) \Delta h_j + \sum_{j=1}^m \Gamma_2^{(2)}(p; Q_j) \varphi_2(Q_j) \Delta h_j \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (3.7)$$

ここに、 $p$  は  $D+S$  での点を、 $Q_j$  は仮想境界上の点を、また  $\Delta h_j$  は仮想境界の分割幅を表わすものとする。

一方、応力ベクトルは、式(2.13)より次のように表わされる。

$$\left. \begin{aligned} t_1(p) &= \sum_{j=1}^m \Gamma_{I1}^{(2)}(p; Q_j) \varphi_1(Q_j) \Delta h_j + \sum_{j=1}^m \Gamma_{I1}^{(1)}(p; Q_j) \varphi_2(Q_j) \Delta h_j \\ t_2(p) &= \sum_{j=1}^m \Gamma_{I2}^{(1)}(p; Q_j) \varphi_1(Q_j) \Delta h_j + \sum_{j=1}^m \Gamma_{I2}^{(2)}(p; Q_j) \varphi_2(Q_j) \Delta h_j \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (3.8)$$

ここに、簡単のために、 $T_{kj}^{(i)} \Gamma_j^{(i)}(p; q)$  を  $\Gamma_{Ik}^{(i)}(p; q)$  と書いた。

さて、いま境界上の  $m$  個の点、 $P_l (l=1, 2, \dots, m)$  で、変位および応力ベクトルを求めると、それぞれ次のように表わされる。

$$\begin{Bmatrix} u_1^{(T)}(P_1) \\ \vdots \\ u_1^{(T)}(P_m) \\ u_2^{(T)}(P_1) \\ \vdots \\ u_2^{(T)}(P_m) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \Gamma_{I1}^{(1)}(P_1; Q_1) & \dots & \Gamma_{I1}^{(1)}(P_1; Q_m) & \Gamma_{I1}^{(2)}(P_1; Q_1) & \dots & \Gamma_{I1}^{(2)}(P_1; Q_m) \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \Gamma_{I1}^{(1)}(P_m; Q_1) & \dots & \Gamma_{I1}^{(1)}(P_m; Q_m) & \Gamma_{I1}^{(2)}(P_m; Q_1) & \dots & \Gamma_{I1}^{(2)}(P_m; Q_m) \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \Gamma_{I2}^{(1)}(P_1; Q_1) & \dots & \Gamma_{I2}^{(1)}(P_1; Q_m) & \Gamma_{I2}^{(2)}(P_1; Q_1) & \dots & \Gamma_{I2}^{(2)}(P_1; Q_m) \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \Gamma_{I2}^{(1)}(P_m; Q_1) & \dots & \Gamma_{I2}^{(1)}(P_m; Q_m) & \Gamma_{I2}^{(2)}(P_m; Q_1) & \dots & \Gamma_{I2}^{(2)}(P_m; Q_m) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varphi_1(Q_1) \\ \vdots \\ \varphi_1(Q_m) \\ \varphi_2(Q_1) \\ \vdots \\ \varphi_2(Q_m) \end{Bmatrix}$$

あるいは、

$$u = F\varphi \dots\dots\dots (3.9)$$

$$\begin{Bmatrix} t_1(P_1) \\ \vdots \\ t_1(P_m) \\ t_2(P_1) \\ \vdots \\ t_2(P_m) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \Gamma_{I1}^{(1)}(P_1; Q_1) & \dots & \Gamma_{I1}^{(1)}(P_1; Q_m) & \Gamma_{I1}^{(2)}(P_1; Q_1) & \dots & \Gamma_{I1}^{(2)}(P_1; Q_m) \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \Gamma_{I1}^{(1)}(P_m; Q_1) & \dots & \Gamma_{I1}^{(1)}(P_m; Q_m) & \Gamma_{I1}^{(2)}(P_m; Q_1) & \dots & \Gamma_{I1}^{(2)}(P_m; Q_m) \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \Gamma_{I2}^{(1)}(P_1; Q_1) & \dots & \Gamma_{I2}^{(1)}(P_1; Q_m) & \Gamma_{I2}^{(2)}(P_1; Q_1) & \dots & \Gamma_{I2}^{(2)}(P_1; Q_m) \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \Gamma_{I2}^{(1)}(P_m; Q_1) & \dots & \Gamma_{I2}^{(1)}(P_m; Q_m) & \Gamma_{I2}^{(2)}(P_m; Q_1) & \dots & \Gamma_{I2}^{(2)}(P_m; Q_m) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varphi_1(Q_1) \\ \vdots \\ \varphi_1(Q_m) \\ \varphi_2(Q_1) \\ \vdots \\ \varphi_2(Q_m) \end{Bmatrix}$$

あるいは、

$$t = G\varphi \dots\dots\dots (3.10)$$

式(3.9)および(3.10)より  $\varphi$  を消去すると、

$$t = GF^{-1}u \dots\dots\dots (3.11)$$

が求められる。この式を用いて、条件式(3.6)を書き改めると次のようになる。

$$G_A F_A^{-1}u + G_B F_B^{-1}u + t_A^{(L)} = 0$$

あるいは、

$$(G_A F_A^{-1} + G_B F_B^{-1})u = -t_A^{(L)} \dots\dots\dots (3.12)$$

ここに、 $(t_A^{(L)})^T = \{t_{A1}^{(L)}(P_1) \dots t_{A1}^{(L)}(P_m) t_{A2}^{(L)}(P_1) \dots t_{A2}^{(L)}(P_m)\}$  である。

式(3.12)は、 $2m$  元の連立一次方程式であるので、これを解いて  $u$  を求めれば、式(3.9)より  $\varphi$  が求められ、これを用いて、全領域での変位  $u_i(p)$ 、応力ベクトル  $t_i(p)$ 、応力がそれぞれ、式(3.7)、(3.8)、(2.10)より求められることになる。

特別の場合として、埋設物が剛体の場合および空洞の

場合が考えられる。これらは、上に求めたものの両極端と考えればよい。

なお、式(3.12)に現われる  $G_A F_A^{-1}$  および  $G_B F_B^{-1}$  は、周辺領域および内部領域を有限要素法の術語でいうところのスーパー・エレメントと見做したときの、それぞれの要素の剛性マトリックスとなっていることに注意されたい。

#### 4. 数値解析例

##### (1) 空洞および埋設物境界周辺の定常応力状態

最も典型的な例として、本節では、Fig. 4 に示したような円形空洞、円柱および円筒状の埋設物に、その軸に垂直な方向から、以下に述べるようなハーモニックな平面波が入射した際に生じる定常応力状態を考えよう。以下の解析では、すべて平面ひずみ状態とし、また

Poisson 比は 0.25 とした。

ハーモニックな入射波としては、平面変位波として、次のような縦波を考えた。

$$\bar{u}_1(\mathbf{x}; t) = A \cos \alpha x_1 \cos \omega t, \quad \bar{u}_2(\mathbf{x}; t) = 0$$

$$\text{i.e. } u_1(\mathbf{x}; t) = A \cos \alpha x_1, \quad u_2(\mathbf{x}; t) = 0$$

ここに、 $\alpha = \omega/c_1 = 2\pi/l$  であり、 $A$  は振幅、 $\alpha$  は波数、 $\omega$ 、 $l$  は円振動数および波長を意味している。なお、周期  $T$  は  $2\pi/\omega$  である。

積分方程式の数値解の精度は、仮想境界の選び方およびその分割数に左右される。この解析では、静的な問題における結果<sup>9)</sup>に準拠して、半径  $a$  の円形空洞を対象とする外部問題では、半径  $0.5a$  上に仮想境界を取り、分割は 24 等分割とした。円柱状埋設物の場合には、埋設物に対しては、半径  $2.0a$ 、外部領域に対しては半径  $0.5a$  にそれぞれ仮想境界を取り、分割はいずれも 24 等分割とした。また、円筒状の埋設物の場合には、円筒内半径を  $0.8a$  とし、それに対応して半径  $0.4a$  の仮想境界を取り、24 等分割した。他の境界は、円柱状埋設物の場合とまったく同じとした。

なお、以下の解析例では、紙数の関係で、境界上の接線方向応力成分のみを示す（多くの場合この応力が問題となるであろう）。

#### a) 空洞周辺の応力状態

空洞の場合の解析は、円柱埋設物のある場合の解析（次に **b)** で述べる）において、せん断弾性係数  $\mu_2 = 0$  として容易に求められる。

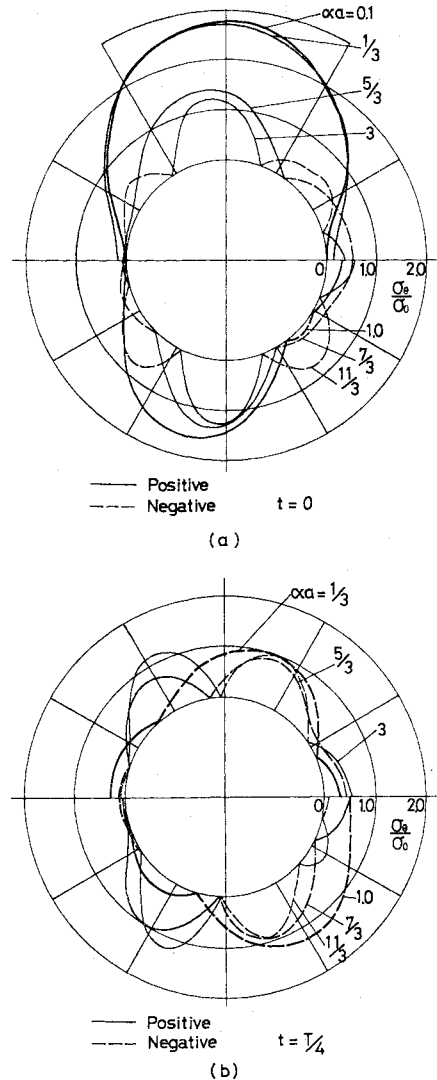
例として、波の山がちょうど円形空洞の中心と一致したとき ( $t=0$ ) に生じる空洞壁面上の接線方向応力を **Fig. 6 (a)** に示す。ここに、 $\sigma_0$  は平面変位波によって生じる最大応力である。また、波のノードがちょうど空洞中心にあるとき ( $t=T/4$ ) の応力分布を **Fig. 6 (b)** に示す。なお、図中の実線は正の値を破線は負の値を表わしている。

波長が長くなるにつれて、応力状態は静的なものに次第に近づくことになり、逆に波長が短くなると、壁面から反射、散乱されるようになり、周辺を含めた挙動に起因する、いわゆる動的応力集中は次第に低下することが分かる。なお、解析精度は波長にも関連し、波長が短くなれば、次第に精度は低くなるであろう。

#### b) 円柱状埋設物の境界上の応力状態

**Fig. 5** において、定数を  $\rho_1 = \rho_2 = 1.0$ 、 $\nu_1 = \nu_2 = 0.25$  とし、 $\eta = \mu_2/\mu_1$  を 0.5, 2.0, 5.0, 100 と変化させて、埋設物の剛性の影響を調べてみた。

波の山が、ちょうど円柱の中心と一致したときに生じる埋設物境界上の接線方向応力の状態を **Fig. 7** に示す。さらに、波のノードがちょうど円柱中心と一致するときの応力状態を **Fig. 8** に示した。



**Fig. 6** Circumferential stresses on the boundary of the circular cavity. (a) The peak of the longitudinal wave is at the center of the cavity, i.e.  $t=0$ . (b) The node of the wave is at the center of the cavity, i.e.  $t=T/4$ .

これらの結果を見ると、埋設物が存在することにより、その周辺の最大応力の値は **a)** の場合に比して急激に減少していることが分かる。 $\eta=0.5$  の場合でも、その効果は著しい (**Fig. 6, 7** を比較せよ)。

なお、 $\eta=100$  の場合には、埋設物はほぼ剛体と考えてよいであろう。**Fig. 9** を見ると、埋設物は入力波の位相とは異なった剛体的な運動をしていることが推察される。

**Fig. 10** には、平面せん断波によって、埋設物境界上に生じた接線方向応力状態の例を示した。この場合には、縦波の場合に比して応力分布の変動が激しく、また若干応力集中も大きいようである。

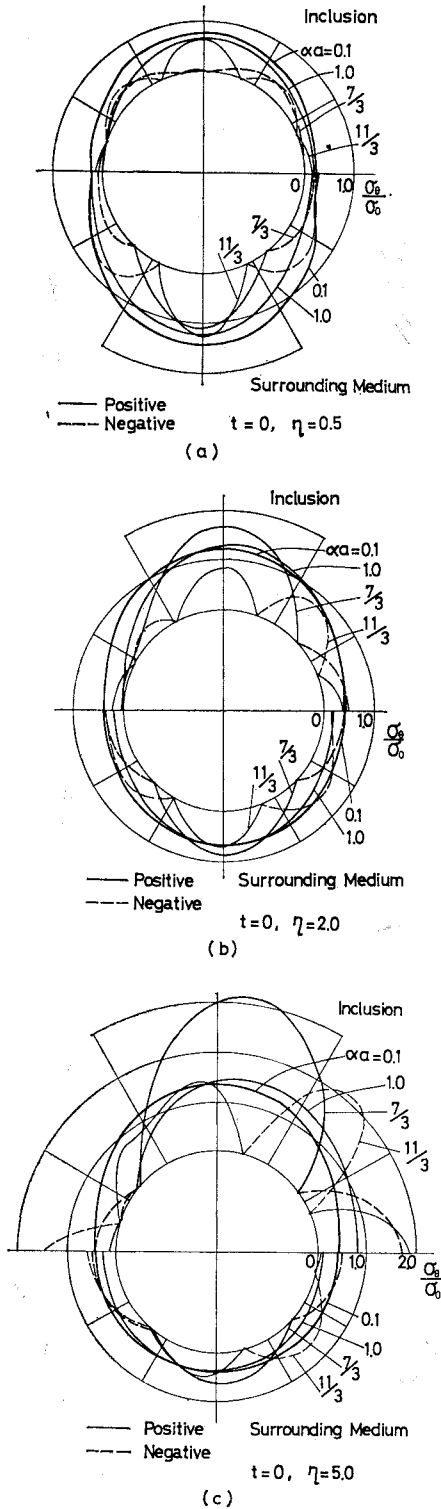


Fig. 7 Circumferential stresses on the boundaries of the cylindrical inclusion and its surrounding medium.  $t=0$ . (a)  $\eta=\mu_2/\mu_1=0.5$ , (b)  $\eta=2.0$ , and (c)  $\eta=5.0$ .

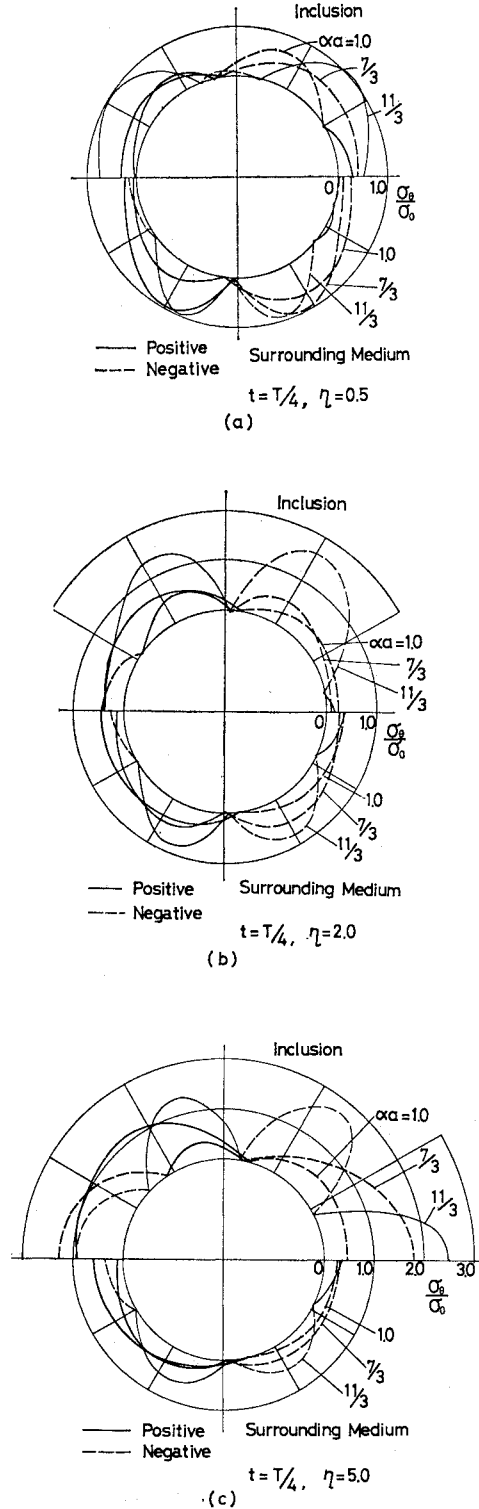


Fig. 8 Circumferential stresses on the boundaries of the cylindrical inclusion and its surrounding medium.  $t=T/4$ . (a)  $\eta=0.5$ , (b)  $\eta=2.0$ , and (c)  $\eta=5.0$ .

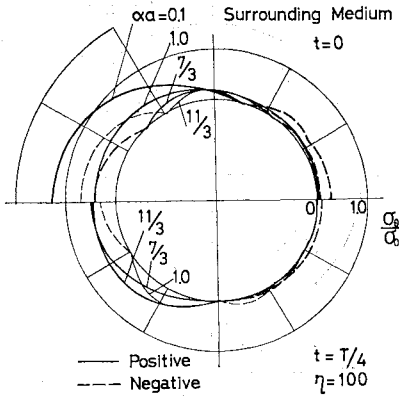


Fig. 9 Circumferential stresses on the boundary of the surrounding medium.  $\eta=100$ .

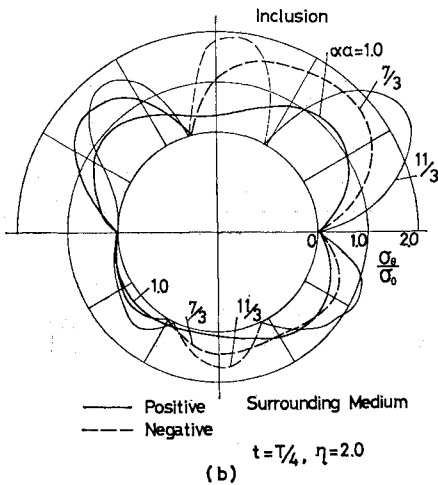
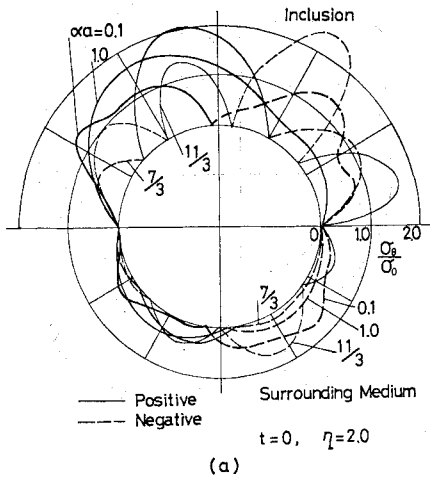


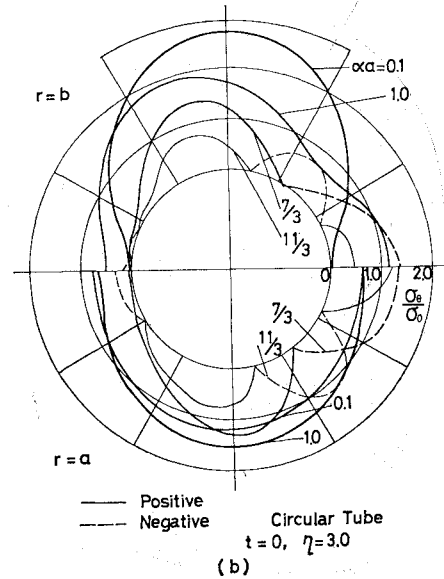
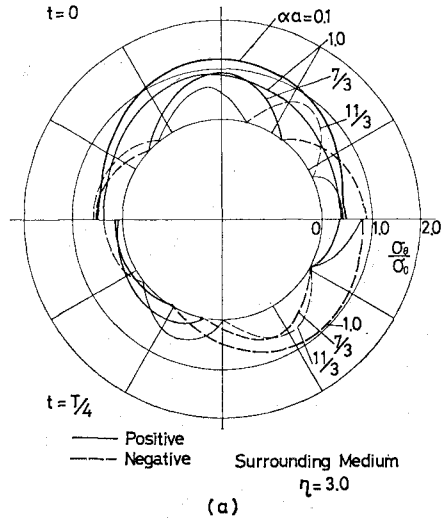
Fig. 10 Circumferential stresses on the boundaries of the cylindrical inclusion and its surrounding medium. (a)  $t=0$ , (b)  $t=T/4$ .

c) 円筒状埋設物周辺の応力状態

外径  $2a$ , 内径  $1.6a$  の円筒が無限弾性体中に埋設され、その軸に直角な方向からの入射波によって生じる応力状態を解析した。この例は、トンネルに作用する地震あるいは近接発破の問題として興味深い。

境界上に生じる接線応力方向を Fig. 11, 12 に示す。なお、ここでは、計算精度の検証として、 $\eta=1.0$  とした場合の応力状態が、a) の円形空洞の場合の結果と一致することを確かめた。

Fig. 11, 12 の円筒内壁と外壁上の応力を見比べてみると、ほぼ同じ位相となっていることが分かる。すなわち、この円筒には、ほぼ一様な接線方向応力が生じていると考えられる。換言すれば、円筒は、円周方向に最も良く抵抗していることが分かる。





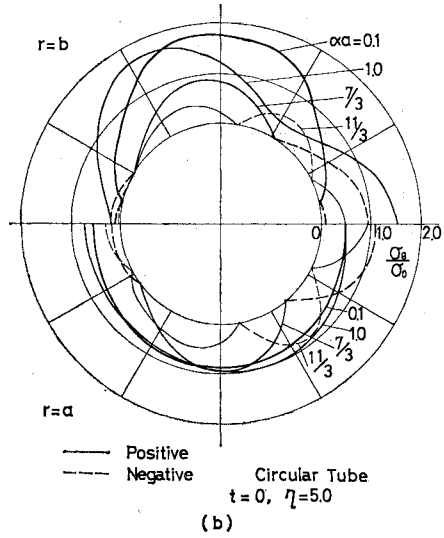
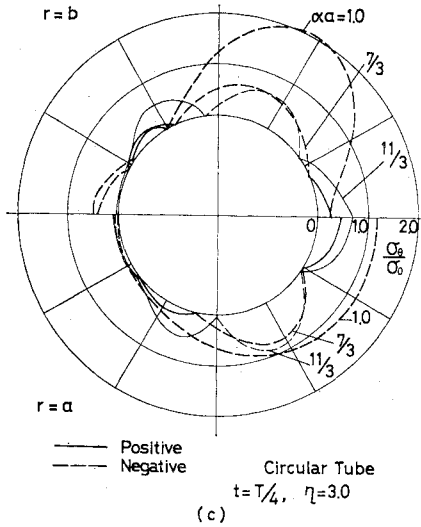


Fig. 11 Circumferential stresses on the boundaries of the circular tube at  $r=a$  and  $r=b$ , and its surrounding medium.  $\eta=3.0$

なお、a), b) および c) の場合を比較すると、大まかにいえば、c) の場合の応力状態は、a) と b) との間であり、b) に相当近い状態であるということができよう。

(2) 空洞および埋設物周辺の過渡応力状態

ここでは、いわゆるモーダル・アナリシス法により、(1) で求めた調和解を重ね合わせることによって、過渡状態を解析した。

入力波形としては、単位階段波を考えた。あらゆる形状の波形は、この単位階段波から重ね合わせによって合成することができるので、このような波による過渡状態の解析は、地震とか近接発破などに伴う過渡状態の解析の最も基本となると考えられる<sup>10)</sup>。

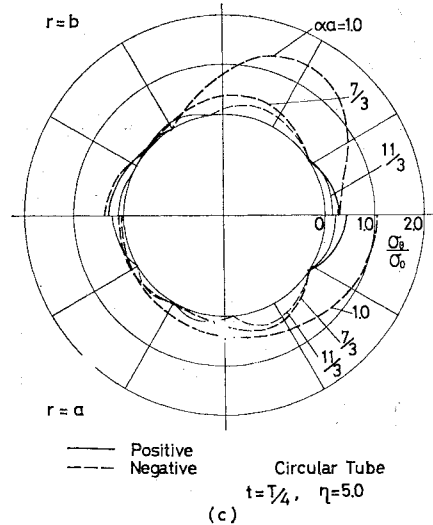


Fig. 12 Circumferential stresses on the boundaries of the circular tube at  $r=a$  and  $r=b$ , and the surrounding medium.  $\eta=5.0$

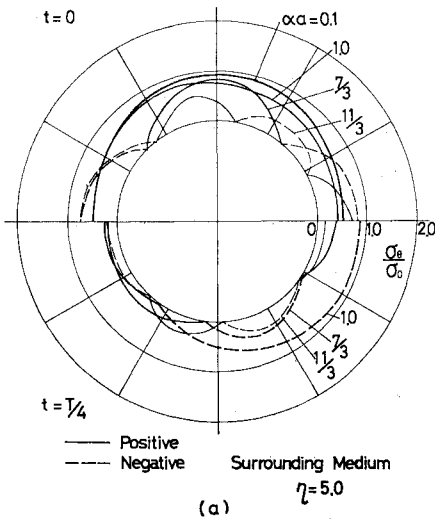
まず、単位階段波を Lanczos の  $\sigma$ -ファクター法<sup>11)</sup>を用いて、次のように Fourier 級数に展開しよう。

$$F(x) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^n \frac{\sigma_{2k-1}}{2k-1} \cdot \sin(2k-1)x \dots\dots\dots(4.1 \cdot a)$$

ここに、 $\sigma_{2k-1}$  は、 $\sigma$ -ファクターとよばれ、次のように与えられる。

$$\sigma_{2k-1} = \frac{\sin(2k-1) \frac{\pi}{2n}}{(2k-1) \frac{\pi}{2n}} \dots\dots\dots(4.1 \cdot b)$$

いま、 $n=6$  として、階段波を近似すると、Fig. 13 に示すようである。この図から分かるように、 $\sigma$ -ファクターを用いれば、普通の Fourier 級数展開によるよりも、



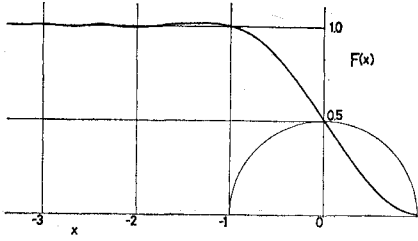


Fig. 13 Fourier expansion with  $\sigma$ -factor of unit-step function with six terms.

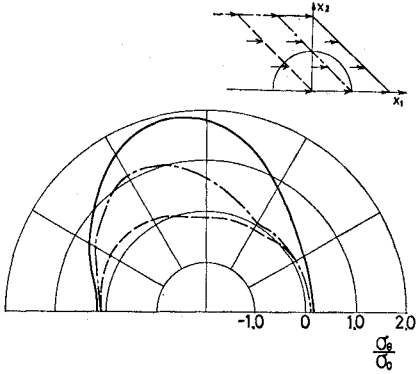


Fig. 14 Transient circumferential stresses on the boundary of the circular cavity.

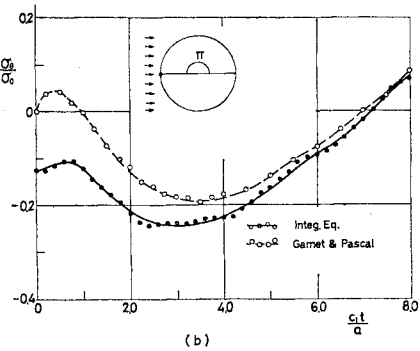
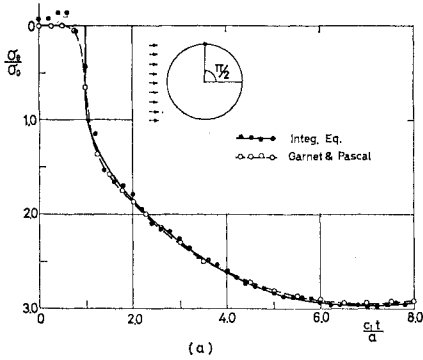


Fig. 15 Circumferential stress-time histories at points (a)  $\theta=\pi/2$ , and (b)  $\theta=\pi$  on the boundary of the circular cavity.

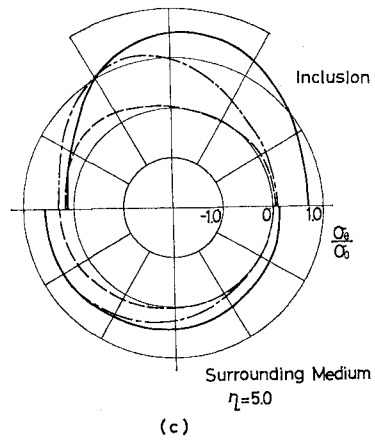
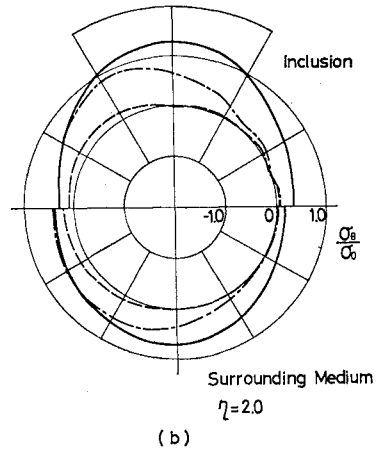
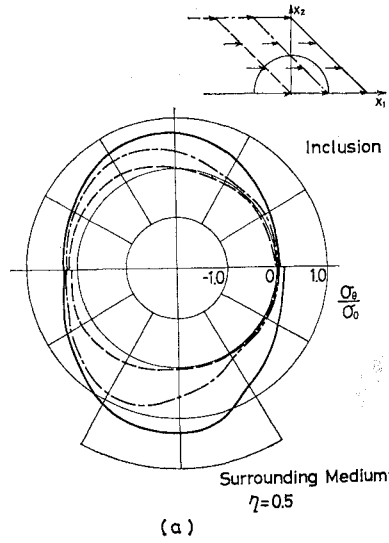


Fig. 16 Transient circumferential stresses on the boundaries of the cylindrical inclusion and its surrounding medium. (a)  $\eta=0.5$ , (b)  $\eta=2.0$ , and (c)  $\eta=5.0$ .

変動が小さく、近似度は相当改善されている。以下の解析には、すべてこのように近似した波形を用いることにする。なお、簡単のためにこれを単位階段波ともよぶことにする。

a) 円形空洞周辺の過渡応力状態

4.(1) a) で求めた結果を、式 (4.1) により重ね合わせると、単位階段波の各位置に対して、空洞壁面上の接線方向応力が求められる。例を Fig. 14 に示す。この図から分かるように、最大応力は波頭が通過した後、しばらくして生じる。たとえば、最大応力が生じると予想される点、 $\theta = \pi/2$  の応力の時間的経過を調べると、Fig. 15(a) のようになる。すなわち、 $c_1 t/a$  が約 7 で、 $\sigma_\theta/\sigma_0$  は 2.98 となる。なお、静的な場合には、応力集中は 2.67 である。動的な応力集中は、静的なものより約 12% 増加していることになる。なお、同図中には、Garnet

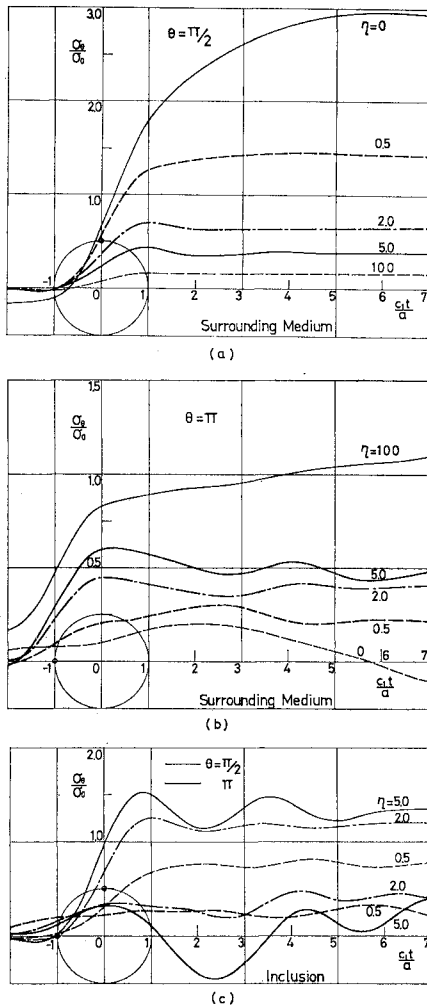


Fig. 17 Circumferential stress-time histories at points (a)  $\theta = \pi/2$ , (b)  $\theta = \pi$  on the boundary of the surrounding medium and (c) at points  $\theta = \pi/2$  and  $\pi$  on the boundary of the inclusion.

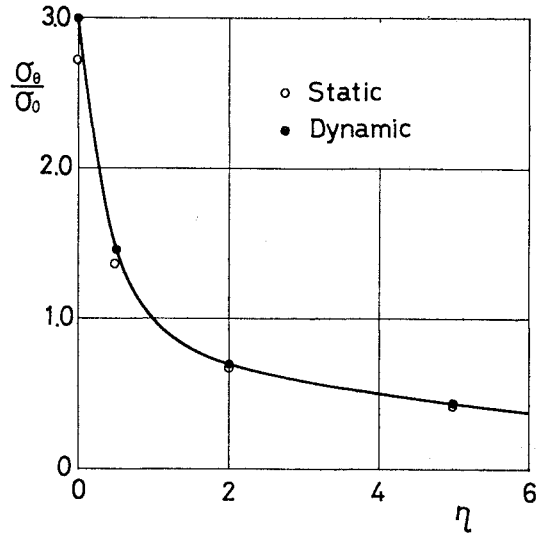


Fig. 18 The maximum circumferential stress at point  $\theta = \pi/2$  on the boundary of the surrounding medium versus the ratio of shear moduli of the inclusion to the surrounding medium.

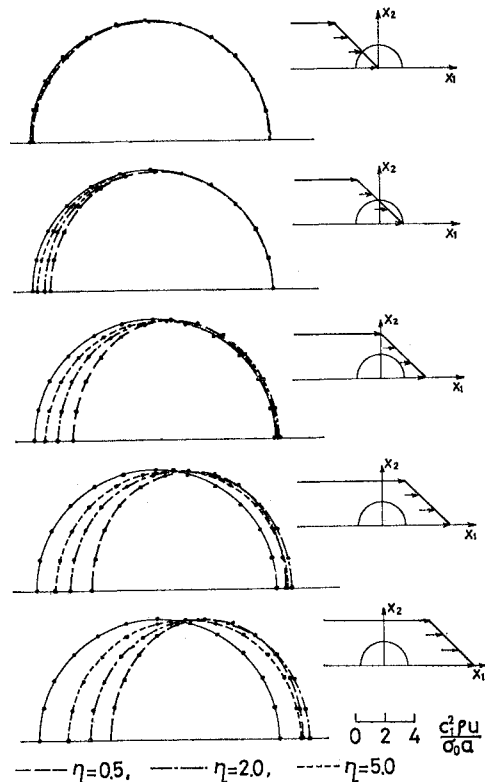


Fig. 19 Deformations of the boundary at the surrounding medium during the passage of the step wave.

& Pascal による結果も示してある。両者はよく一致している。

また、 $\theta=\pi$  での接線方向応力の時間的経過 (Fig. 15 (b) 参照) より、引張応力の最大値は、 $c_1 t/a \doteq 3$  で生じ、 $\sigma_\theta/\sigma_0 \doteq -0.22$  であることが分かる。Garnet & Pascal の結果と最初の部分では多少ずれているが、これは両者の Poisson 比の差 (Garnet & Pascal は、 $\nu=1/3$  としている) によると考えられる。しかし、いずれにしろ、小さな値であるので、両者ともに計算精度にも疑点がある。

**b) 円柱埋設物境界周辺の過渡応力状態**

式 (4.1) により、4. (1) b) で求めた定常解を重ね合わせて、円柱埋設物境界上の過渡接線方向応力を求めた。その結果を Fig. 16 に示す。また、埋設物およびその外部境界上の点、 $\theta=\pi/2$ 、および  $\pi$  における接線方

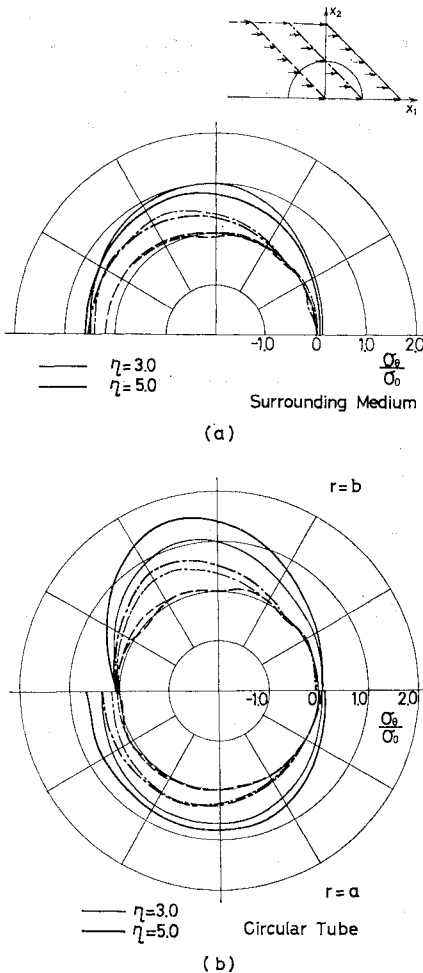


Fig. 20 Transient circumferential stresses on the boundaries of (a) the surrounding medium and (b) the inner and the outer boundaries ( $r=b$  and  $r=a$ ) of the embedded circular tube.

向応力の時間的経過を Fig. 17 に示す。さらに、階段波の通過に伴って生じる外部領域の  $\theta=\pi/2$  点上の最大接線方向応力と、 $\eta$  との関係を示す Fig. 18 に示す。同図には、静的な応力集中をも  $\circ$  印で示しておいた。これより、階段波通過に伴う最大応力集中は、静的な場合より、高々 5~13% 程度増加するに過ぎないことが分かる。

Fig. 19 には、空洞、 $\eta=0.5, 2.0$  および  $5.0$  の場合の外部領域の境界の変位を示した。これより、 $\eta$  が大きくなると、埋設物は変形し難くなり、剛体的な移動が卓越して現われることが分かる。

**c) 円筒埋設物境界上の過渡応力状態**

上の場合と同様にして求めた、円筒埋設物の境界上の接線方向応力の状態を Fig. 20 に示す。さらに、Fig. 21 には、境界上の代表的な点の接線方向応力の経時変

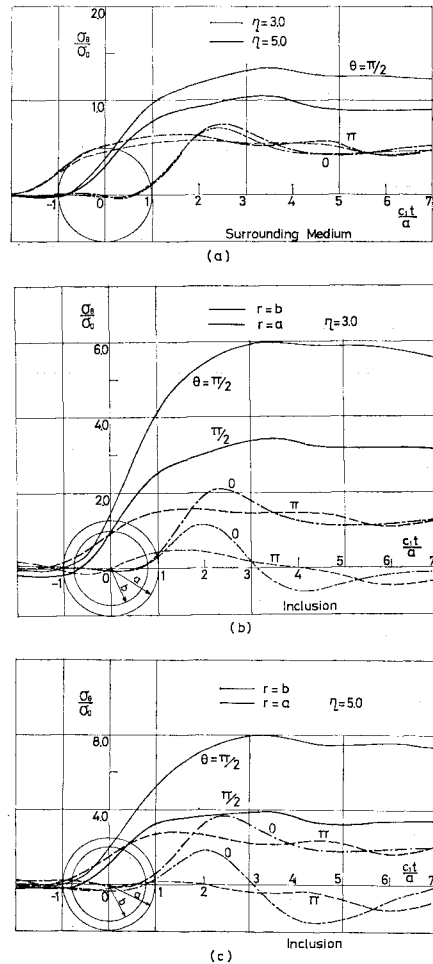


Fig. 21 Circumferential stress-time histories on the boundary points  $\theta=0, \pi/2$ , and  $\pi$ , (a) of the surrounding medium, (b) and (c) of the inner and the outer boundaries with  $\eta=3.0$  and  $5.0$ , respectively.

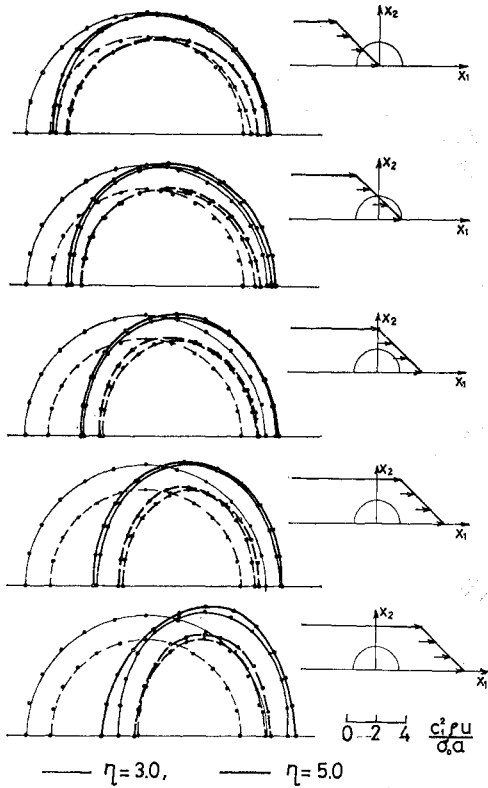


Fig. 22 Deformations of the circular tube during the passage of the step wave.

化を示す。

Fig. 22 には、円筒の経時的な変形状態を示した。波の位置によって、円筒の厚さも変化していることにも注意されたい。

### 5. おわりに

以上、動弾性学の境界値問題、特に過渡状態の問題を積分方程式法によって解析する手法を検討し、具体的な例に適用してみた。これらの例からも、積分方程式法の有用性、特に、任意形状の境界とか異質物体を含む動的問題の数値解析法としても有効であることが十分推察さ

れるであろう。

積分方程式法によれば、2次元、3次元問題を問わず統一的で比較的簡単な定式化が可能であるうえに、有限要素法とか差分法などに比して、比較的小容量の計算で済むなどの利点もある。

この解法は、最近、変分法などとも関連して注目されるようになり、活発な研究が試みられているようである<sup>13)</sup>。今後、積分方程式法が優れた解法として広範囲の問題に適用されることを望みたい。

なお、本論文の数値計算には、京都大学大型計算機センターを利用したことを付記しておく。

### 参考文献

- 1) 丹羽義次・小林昭一・松本忠章：進行波に伴って発生するトンネル周辺の過渡応力状態，材料，No. 248, pp. 361-367, 昭. 49.
- 2) Garnet H. and J.C. Pascal: Transient Response of Circular Cylinder of Arbitrary Thickness in an Elastic Medium to a Plane Dilatational Wave, J. Appl. Mech., Vol. 33, pp. 521-531, 1966.
- 3) Kupradze V.D.: Potential Methods in the Theory of Elasticity, transl., by H. Gutfreund, Israel Program for Scientific Translations, Jerusalem, 1965.
- 4) 丹羽義次・小林昭一・横田和男：積分方程式による任意形状、多数空洞周辺応力の解析，土木学会論文報告集，第 195 号, pp. 27-35, 1971.
- 5) Niwa Y., S. Kobayashi and N. Azuma: An Analysis of Transient Stresses Produced around Cavities of Arbitrary Shape during the Passage of Traveling Waves, Memo. Faculty of Eng., Kyoto Univ., Vol. 36, pt. 2, pp. 28-46, 1975.
- 6) 前出 4)
- 7) 前出 3)
- 8) Oliveira E.R.A.: Plane stress analysis by a general integral method, Proc. ASCE, EM 1, pp. 79-101, 1968.
- 9) 前出 4)
- 10) 前出 1)
- 11) Hamming R.W.: Numerical Methods for Scientists and Engineers, pp. 297-300, McGraw-Hill, 1962.
- 12) 前出 2)
- 13) Brebbia C.A. and H. Tottenham (ed.): Variational Methods in Engineering, Vol. 2, Chapt. 9, Southampton Univ. Press, 1973.

(1975. 8. 26・受付)