

## 地盤中を伝播する非線形調和波動\*

NON-LINEAR HARMONIC WAVE PROPAGATION  
IN A LAYERED GROUND土岐 憲三\*\*・佐藤 忠信\*\*\*  
By Kenzo TOKI and Tadanobu SATO

## 1. まえがき

地盤中を伝わる非線形波動の性質を調べるため、これまで単純波と不連続面の伝播形態について若干の考察を加えてきたが<sup>(1),(2)</sup>、解の性質上、単純波は一定方向に伝わる単調な波動のみしか表現できず、また不連続解は波面(wave front)の性状のみしか明らかにならないから、地盤内を屈折や反射を繰り返しながら伝播する周期的な波動を取り扱う場合の解の表現形式として用いることは不可能であった。1次元連続体中を単一方向に伝播する非線形調和波動については、Caughey<sup>(3)</sup>が弱い bi-linear 履歴を有する物体に対し振幅位相除変化法を用いて解析解を求めているが、この解も反射波が存在するような地盤の震動問題に対しては適用できない。

一方、この数年の間に土の動的な応力～ひずみ関係の性状が詳しく調べられるようになり、ひずみが  $10^{-4}$ ～ $10^{-3}$  の領域に入ると応力～ひずみ関係の非線形性がかなり大きくなることが明らかになってきたため<sup>(4)~(8)</sup>、非線形挙動をする物質中を伝わる周期的な波動の伝播問題を解析する必要が起ってきた。

地盤の震動特性を解析するこれまでの手法は大きく3つに分けることができる。1つは地盤を構成する土を線形弾性体と考え、重複反射理論に基づいて地盤の振動性状を波動論的に取り扱う方法である<sup>(9)</sup>。もう1つは、土の動的なひずみ依存性を考慮して複雑な地層構成系の応答解析を行うために、地盤を有限な振動系に置き換え系の振動性状を調べる方法である<sup>(10),(11)</sup>。この場合には剛な基盤面での運動特性を仮定しなければならないから、これによって表層地盤の運動は拘束され、かつ上方の層より基盤層を通じて下方へ伝播する波動による逸散減衰を評価できないという問題がある。3番目の方法は波動

論的立場に立ち、土の応力～ひずみ関係の非線形性を考慮して数値解析を行うものである。これには、土の応力～ひずみ関係を bi-linear と仮定し、階差法によって表層地盤の震動特性を解析した岡本・伯野・藤野らの研究<sup>(12),(13)</sup>、土の応力～ひずみ関係を双曲線で近似した Hardin らの結果<sup>(14)</sup>を用い、特性曲線法によって表層地盤内の地震時応力について考察を加えた著者らの研究<sup>(15)</sup>などがあるが、いずれも数値解析であるので、非線形解の一般的特性をとらえるにはかなりの計算量を必要とする。

ここでは、非線形有限ひずみおよび減衰機構を含めた波動理論を構成するための試みとして、等価線形化手法を用いることにより、履歴特性を有する物質からなる地盤中を伝わる調和波動の解析的表現を、線形解の表現形式を用いて構成してゆく手法について考察を加える。次に表層と基盤層の2層から構成される地盤を対象として、地盤を構成する土の応力～ひずみ関係が表層の周波数伝達特性におよぼす影響について検討を加える。地盤は水平な成層地盤であり、SH 波が反射や透過を繰り返しながら伝播する場合を考えている。なお、上方の層より基盤層を通じて下方へ伝播する波動による逸散減衰を評価するため、基盤層は均質な線形粘弾性体からなるものと考えて解の構成を行っている。

## 2. 非線形挙動をする物体中の調和波動

## (1) 解の構成

地盤を Voigt 形の非線形粘弾性体からなると考え、せん断弾性係数  $\mu$  ならびにせん断粘性係数  $\nu$  が地盤内に発生しているせん断ひずみの大きさを表わす指標  $r_0$  と深さ  $z$  の関数で与えられるものとする。すなわち、

$$\mu = \mu\{r_0(z), z\}, \nu = \nu\{r_0(z), z\} \dots \dots \dots (1)$$

地盤内を地震波のようなランダムな波動が伝わる場合には  $r_0$  の値を一義的に定めることはできないが、地盤内

\* 一部は土木学会第 29 回年次学術講演会にて発表。

\*\* 正会員 工博 京都大学助教授 工学部土木工学教室

\*\*\* 正会員 工修 京都大学助手 防災研究所

を単一周波数の調和波が伝播するときには、 $r_0$ の値として地盤内に発生するひずみの振幅を用いればよい。ここでは、このような場合のみについて考える。以下で調和波動という場合には単一の周波数成分からなる調和波が伝播することを考えている。

図-1に示したように表層地盤の上からI番目の層を取り出し、これを  $n$  個の薄層に細分し、この薄層の中では  $\mu$  ならびに  $\nu$  が一定値を取るものとする。 $\mu$  と  $\nu$  は  $r_0$  ならびに  $z$  の関数であるが、1つの薄層内では層の適当な位置での値を代表値として用いれば、このような仮定が可能になる。以上のような薄層から構成される地盤を考え、重複反射理論を周波数領域で適用し、式(1)のような物性をもつ物体中を伝わる調和波動解を求め、その後薄層の層厚を無限小、すなわち、 $n$  を無限大にすることにより非線形調和波動解を構成する。

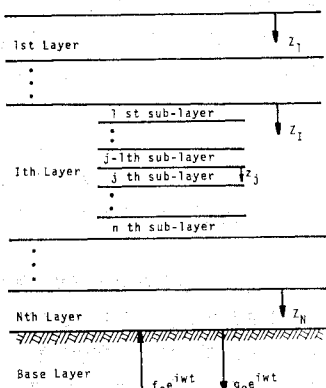


図-1 地盤構成

いま、 $j$  番目の薄層での  $\mu, \nu$  の代表値を  $\mu_j, \nu_j$  とすれば、この層内の運動方程式は次式で表わされる。

$$\rho_j \frac{\partial^2 u_j}{\partial t^2} = \mu_j \frac{\partial^2 u_j}{\partial z_j^2} + \nu_j \frac{\partial^3 u_j}{\partial t \partial z_j^2} \quad (2)$$

ここに、 $u_j$  は水平変位、 $\rho_j$  は密度、 $z_j$  は  $j$  番目の薄層上端から鉛直下方にとった座標軸である。時間変数を次式によって分離する。

$$u_j = U_j e^{i\omega t} \quad (3)$$

ここに、 $\omega$  は円振動数、 $i = \sqrt{-1}$  である。式(3)を式(2)に代入し、周波数領域での水平変位  $U_j$  に関する方程式を求めると次式となる。

$$(\mu_j + i\omega\nu_j) \frac{d^2 U_j}{dz_j^2} + \rho_j \omega^2 U_j = 0 \quad (4)$$

$$T_{11}^I = \prod_{q=1}^{j-1} \xi_q \exp\left\{i \sum_{k=1}^{j-1} p_k h_k\right\} + \sum_{r=2}^{j-1} \sum_{q=1}^{r-1} \eta_q \eta_r \prod_{k=1}^{q-1} \xi_k \prod_{k=q+1}^{r-1} \xi_k \prod_{k=r+1}^{j-1} \xi_k \exp\left\{i \left(\sum_{k=1}^{j-1} p_k h_k - 2 \sum_{k=1}^r p_k h_k + 2 \sum_{k=1}^q p_k h_k\right)\right\} \\ + \sum_{t=4}^{j-1} \sum_{s=3}^{t-1} \sum_{r=2}^{s-1} \sum_{q=1}^{r-1} \eta_q \eta_r \eta_s \eta_t \prod_{k=1}^{q-1} \xi_k \prod_{k=q+1}^{r-1} \xi_k \prod_{k=r+1}^{s-1} \xi_k \prod_{k=s+1}^{t-1} \xi_k \prod_{k=t+1}^{j-1} \xi_k \exp\left\{i \left(\sum_{k=1}^{j-1} p_k h_k - 2 \sum_{k=1}^t p_k h_k\right.\right. \\ \left.\left.+ 2 \sum_{k=1}^s p_k h_k - 2 \sum_{k=1}^r p_k h_k + 2 \sum_{k=1}^q p_k h_k\right)\right\} + \sum_{w=6}^{j-1} \sum_{u=5}^{w-1} \sum_{t=4}^{u-1} \sum_{s=3}^{t-1} \sum_{r=2}^{s-1} \sum_{q=1}^{r-1} \eta_q \eta_r \eta_s \eta_t \eta_u \eta_w \prod_{k=1}^{q-1} \xi_k \prod_{k=q+1}^{r-1} \xi_k \prod_{k=r+1}^{s-1} \xi_k \\ \cdot \prod_{k=s+1}^{t-1} \xi_k \prod_{k=t+1}^{u-1} \xi_k \prod_{k=u+1}^{w-1} \xi_k \prod_{k=w+1}^{j-1} \xi_k \exp\left\{i \left(\sum_{k=1}^{j-1} p_k h_k - 2 \sum_{k=1}^w p_k h_k + 2 \sum_{k=1}^u p_k h_k - 2 \sum_{k=1}^t p_k h_k\right.\right.$$

式(4)の一般解は次式で与えられる。

$$U_j = a_j \exp(ip_j z_j) + b_j \exp(-ip_j z_j) \quad (5)$$

ここに、

$$p_j^2 = \rho_j \omega^2 / (\mu_j + i\omega\nu_j) \quad (6)$$

である。なお、 $a_j$  と  $b_j$  なる変数は  $j$  番目の薄層上端における周波数領域での上昇波と下降波を表わしている。

$j$  番目の薄層の層厚を  $h_j$  とすれば、 $(j-1)$  番目と  $j$  番目の薄層の境界での変位ならびに応力の連続性より次式が求まる。

$$\begin{pmatrix} a_j \\ b_j \end{pmatrix} = [t_{j-1}] \begin{pmatrix} a_{j-1} \\ b_{j-1} \end{pmatrix} \quad (7)$$

ただし、 $[t_{j-1}]$  は次式で表わされるようなマトリックスである。

$$[t_{j-1}] = \begin{bmatrix} \xi_{j-1} \exp(ip_{j-1} h_{j-1}) & \eta_{j-1} \exp(-ip_{j-1} h_{j-1}) \\ \eta_{j-1} \exp(ip_{j-1} h_{j-1}) & \xi_{j-1} \exp(-ip_{j-1} h_{j-1}) \end{bmatrix} \quad (8)$$

ここに、

$$\xi_{j-1} = \frac{1}{2} (1 + \beta_{j-1} / \beta_j) \quad (9)$$

$$\eta_{j-1} = \frac{1}{2} (1 - \beta_{j-1} / \beta_j) \quad (10)$$

$$\beta_j = (\mu_j + i\omega\nu_j) p_j \quad (11)$$

である。式(11)で与えられる  $\beta_j$  は周波数領域で考えたインピーダンスであり、式(9)、(10)に現われる  $\beta_{j-1} / \beta_j$  は複素インピーダンス比である。

式(7)を繰り返し適用することにより次式をうる。

$$\begin{pmatrix} a_j \\ b_j \end{pmatrix} = [T^I] \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} \quad (12)$$

ここに、 $[T^I]$  なるマトリックスは次式で与えられる。

$$[T^I] = [t_{j-1}] [t_{j-2}] \cdots [t_2] [t_1] \quad (13)$$

式(4)と式(12)より、各薄層上端での  $U_j$  ならびにせん断ひずみの周波数領域での表現  $r_j$  は次式のように与えられる。

$$\left. \begin{aligned} U_j|_{z_j=0} &= (T_{11}^I + T_{21}^I) a_1 + (T_{12}^I + T_{22}^I) b_1 \\ r_j|_{z_j=0} &= ip_j (T_{11}^I - T_{21}^I) a_1 - ip_j (T_{12}^I - T_{22}^I) b_1 \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

ここに、 $T_{lm}^I$  ( $l, m=1, 2$ ) は  $[T^I]$  の成分を表わす。

式(8)を式(13)に代入し  $\eta_j$  のべき乗順に整理すると次式をうる。

$$+ 2 \sum_{k=1}^s p_k h_k - 2 \sum_{k=1}^r p_k h_k + 2 \sum_{k=1}^q p_k h_k \} + \dots \dots \dots (15)$$

$$T_{12}^I = \sum_{q=1}^{j-1} \eta_q \prod_{k=1}^{q-1} \xi_k \prod_{k=q+1}^{j-1} \xi_k \exp \left\{ i \left( \sum_{k=1}^{j-1} p_k h_k - 2 \sum_{k=1}^q p_k h_k \right) \right\} + \sum_{s=3}^{j-1} \sum_{r=2}^{s-1} \sum_{q=1}^{r-1} \eta_q \eta_r \eta_s \prod_{k=1}^{q-1} \xi_k \prod_{k=q+1}^{r-1} \xi_k \prod_{k=r+1}^{s-1} \xi_k \prod_{k=s+1}^{j-1} \xi_k$$

$$\cdot \exp \left\{ i \left( \sum_{k=1}^{j-1} p_k h_k - 2 \sum_{k=1}^s p_k h_k + 2 \sum_{k=1}^r p_k h_k - 2 \sum_{k=1}^q p_k h_k \right) \right\} + \sum_{u=5}^{j-1} \sum_{t=4}^{u-1} \sum_{s=3}^{t-1} \sum_{r=2}^{s-1} \sum_{q=1}^{r-1} \eta_q \eta_r \eta_s \eta_t \eta_u \prod_{k=1}^{q-1} \xi_k \prod_{k=q+1}^{r-1} \xi_k$$

$$\cdot \prod_{k=r+1}^{s-1} \xi_k \prod_{k=s+1}^{t-1} \xi_k \prod_{k=t+1}^{u-1} \xi_k \prod_{k=u+1}^{j-1} \xi_k \exp \left\{ i \left( \sum_{k=1}^{j-1} p_k h_k - 2 \sum_{k=1}^u p_k h_k + 2 \sum_{k=1}^t p_k h_k - 2 \sum_{k=1}^s p_k h_k + 2 \sum_{k=1}^r p_k h_k \right) \right\} + \dots \dots \dots (16)$$

$$T_{21}^I = \sum_{q=1}^{j-1} \eta_q \prod_{k=1}^{q-1} \xi_k \prod_{k=q+1}^{j-1} \xi_k \exp \left\{ -i \left( \sum_{k=1}^{j-1} p_k h_k - 2 \sum_{k=1}^q p_k h_k \right) \right\} + \sum_{s=3}^{j-1} \sum_{r=2}^{s-1} \sum_{q=1}^{r-1} \eta_q \eta_r \eta_s \prod_{k=1}^{q-1} \xi_k \prod_{k=q+1}^{r-1} \xi_k \prod_{k=r+1}^{s-1} \xi_k \prod_{k=s+1}^{j-1} \xi_k$$

$$\cdot \exp \left\{ -i \left( \sum_{k=1}^{j-1} p_k h_k - 2 \sum_{k=1}^s p_k h_k + 2 \sum_{k=1}^r p_k h_k - 2 \sum_{k=1}^q p_k h_k \right) \right\} + \sum_{u=5}^{j-1} \sum_{t=4}^{u-1} \sum_{s=3}^{t-1} \sum_{r=2}^{s-1} \sum_{q=1}^{r-1} \eta_q \eta_r \eta_s \eta_t \eta_u \cdot$$

$$\cdot \prod_{k=1}^{q-1} \xi_k \prod_{k=q+1}^{r-1} \xi_k \prod_{k=r+1}^{s-1} \xi_k \prod_{k=s+1}^{t-1} \xi_k \prod_{k=t+1}^{u-1} \xi_k \prod_{k=u+1}^{j-1} \xi_k \exp \left\{ -i \left( \sum_{k=1}^{j-1} p_k h_k - 2 \sum_{k=1}^u p_k h_k + 2 \sum_{k=1}^t p_k h_k \right) \right\} + \dots \dots \dots (17)$$

$$T_{22}^I = \prod_{q=1}^{j-1} \xi_q \exp \left\{ -i \left( \sum_{k=1}^{j-1} p_k h_k \right) \right\} + \sum_{r=2}^{j-1} \sum_{q=1}^{r-1} \eta_q \eta_r \prod_{k=1}^{q-1} \xi_k \prod_{k=q+1}^{r-1} \xi_k \prod_{k=r+1}^{j-1} \xi_k \exp \left\{ -i \left( \sum_{k=1}^{j-1} p_k h_k - 2 \sum_{k=1}^r p_k h_k + 2 \sum_{k=1}^q p_k h_k \right) \right\}$$

$$+ \sum_{t=4}^{j-1} \sum_{s=3}^{t-1} \sum_{r=2}^{s-1} \sum_{q=1}^{r-1} \eta_q \eta_r \eta_s \eta_t \prod_{k=1}^{q-1} \xi_k \prod_{k=q+1}^{r-1} \xi_k \prod_{k=r+1}^{s-1} \xi_k \prod_{k=s+1}^{t-1} \xi_k \prod_{k=t+1}^{j-1} \xi_k \exp \left\{ -i \left( \sum_{k=1}^{j-1} p_k h_k - 2 \sum_{k=1}^t p_k h_k \right) \right\}$$

$$+ 2 \sum_{k=1}^s p_k h_k - 2 \sum_{k=1}^r p_k h_k + 2 \sum_{k=1}^q p_k h_k \} + \sum_{w=6}^{j-1} \sum_{u=5}^{w-1} \sum_{t=4}^{u-1} \sum_{s=3}^{t-1} \sum_{r=2}^{s-1} \sum_{q=1}^{r-1} \eta_q \eta_r \eta_s \eta_t \eta_u \eta_w \prod_{k=1}^{q-1} \xi_k \prod_{k=q+1}^{r-1} \xi_k \prod_{k=r+1}^{s-1} \xi_k$$

$$\cdot \prod_{k=s+1}^{t-1} \xi_k \prod_{k=t+1}^{u-1} \xi_k \prod_{k=u+1}^{w-1} \xi_k \prod_{k=w+1}^{j-1} \xi_k \exp \left\{ -i \left( \sum_{k=1}^{j-1} p_k h_k - 2 \sum_{k=1}^w p_k h_k + 2 \sum_{k=1}^u p_k h_k - 2 \sum_{k=1}^t p_k h_k \right) \right\} + \dots \dots \dots (18)$$

式 (15)~(18) で薄層の分割数を無限大にする操作<sup>16)</sup>を行う。この場合、 $\sum p_k h_k$  の項は積分表示に変換されるから  $T_{km}^I$  は I 層の座標  $Z_I$  の関数として表現できることになる。また  $\xi_q$  の相乗積は  $\lambda_I(Z_I)$  なる関数に、 $\eta_q$  は  $\kappa_I(Z_I) dZ_I$  なる関数へと変換され、次式で表わされるような関係式になる。なお、この関係式の誘導は (3) で詳しく述べる。

$$\left. \begin{aligned} \lambda_I(Z_I) &= \{\beta_I(0)/\beta_I(Z_I)\}^{1/2} \\ \kappa_I(Z_I) &= \frac{d\beta_I(Z_I)}{dZ_I} \cdot \frac{1}{2\beta_I(Z_I)} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (19)$$

ここに、 $\beta_I(Z_I)$  は I 層の深さ  $Z_I$  でのインピーダンスであり、式 (11) より次式となる。  
 $\beta_I(Z_I) = p_I(r_{0I}(Z_I), Z_I) \{ \mu_I(r_{0I}(Z_I), Z_I) + i \omega \nu_I(r_{0I}(Z_I), Z_I) \} \dots \dots \dots (20)$   
 なお、 $r_{0I}(Z_I)$  は I 層の深さ  $Z_I$  におけるひずみの振幅であり、 $p_I(r_{0I}(Z_I), Z_I)$  は深さ  $Z_I$  での複素波数を表わしている。

上述した操作を行うことにより、式 (15)~(18) は次式のように書きなおせる。以下で、変数に付けた添字  $I$  は I 層での変数を表わしている。

$$T_{11}^I(Z_I) = \lambda_I(Z_I) \left[ \exp \left\{ i \int_0^{Z_I} p_I dw \right\} + \int_0^{Z_I} \kappa_I(Z_I) \int_0^{x_2} \kappa_I(x_I) \exp \left\{ i \int_0^{Z_I} p_I dw - 2i \int_0^{x_2} p_I dw + 2i \int_0^{x_1} p_I dw \right\} \right.$$

$$\cdot dx_1 dx_2 + \int_0^{Z_I} \kappa_I(x_1) \int_0^{x_4} \kappa_I(x_3) \int_0^{x_2} \kappa_I(x_2) \int_0^{x_1} \kappa_I(x_1) \exp \left\{ i \int_0^{Z_I} p_I dw - 2i \int_0^{x_4} p_I dw + 2i \int_0^{x_3} p_I dw - 2i \int_0^{x_2} p_I dw + 2i \int_0^{x_1} p_I dw \right\} dx_1 dx_2 dx_3 dx_4 + \int_0^{Z_I} \kappa_I(x_6) \int_0^{x_5} \kappa_I(x_5) \int_0^{x_4} \kappa_I(x_4)$$

$$\cdot \int_0^{x_3} p_I dw - 2i \int_0^{x_2} p_I dw + 2i \int_0^{x_1} p_I dw \} dx_1 dx_2 dx_3 dx_4 + \int_0^{Z_I} \kappa_I(x_3) \int_0^{x_4} \kappa_I(x_3) \int_0^{x_2} \kappa_I(x_1) \exp \left\{ i \int_0^{Z_I} p_I dw - 2i \int_0^{x_4} p_I dw + 2i \int_0^{x_3} p_I dw - 2i \int_0^{x_2} p_I dw \right.$$

$$\left. + 2i \int_0^{x_1} p_I dw - 2i \int_0^{x_2} p_I dw + 2i \int_0^{x_1} p_I dw \right\} dx_1 dx_2 dx_3 dx_4 dx_5 dx_6 + \dots \dots \dots (21)$$

$$\begin{aligned}
T_{12}^I(Z_I) = & \lambda_I(Z_I) \left[ \int_0^{Z_I} \kappa_I(x_1) \exp \left\{ i \int_0^{Z_I} p_I dw - 2i \int_0^{x_1} p_I dw \right\} dx_1 + \int_0^{Z_I} \kappa_I(x_3) \int_0^{x_3} \kappa_I(x_2) \int_0^{x_2} \kappa_I(x_1) \right. \\
& \cdot \exp \left\{ i \int_0^{Z_I} p_I dw - 2i \int_0^{x_3} p_I dw + 2i \int_0^{x_2} p_I dw - 2i \int_0^{x_1} p_I dw \right\} dx_1 dx_2 dx_3 \\
& + \int_0^{Z_I} \kappa_I(x_5) \int_0^{x_5} \kappa_I(x_4) \int_0^{x_4} \kappa_I(x_3) \int_0^{x_3} \kappa_I(x_2) \int_0^{x_2} \kappa_I(x_1) \exp \left\{ i \int_0^{Z_I} p_I dw - 2i \int_0^{x_5} p_I dw + 2i \int_0^{x_4} p_I dw \right. \\
& \left. - 2i \int_0^{x_3} p_I dw + 2i \int_0^{x_2} p_I dw - 2i \int_0^{x_1} p_I dw \right\} dx_1 dx_2 dx_3 dx_4 dx_5 + \dots \dots \dots \left. \right] \dots \dots \dots (22)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T_{21}^I(Z_I) = & \lambda_I(Z_I) \left[ \int_0^{Z_I} \kappa_I(x_1) \exp \left\{ -i \int_0^{Z_I} p_I dw + 2i \int_0^{Z_I} p_I dw \right\} dx_1 + \int_0^{Z_I} \kappa_I(x_3) \int_0^{x_3} \kappa_I(x_2) \int_0^{x_2} \kappa_I(x_1) \right. \\
& \cdot \exp \left\{ -i \int_0^{Z_I} p_I dw + 2i \int_0^{x_3} p_I dw - 2i \int_0^{x_2} p_I dw + 2i \int_0^{x_1} p_I dw \right\} dx_1 dx_2 dx_3 \\
& + \int_0^{Z_I} \kappa_I(x_5) \int_0^{x_5} \kappa_I(x_4) \int_0^{x_4} \kappa_I(x_3) \int_0^{x_3} \kappa_I(x_2) \int_0^{x_2} \kappa_I(x_1) \exp \left\{ -i \int_0^{Z_I} p_I dw + 2i \int_0^{x_5} p_I dw \right. \\
& \left. - 2i \int_0^{x_4} p_I dw + 2i \int_0^{x_3} p_I dw - 2i \int_0^{x_2} p_I dw + 2i \int_0^{x_1} p_I dw \right\} dx_1 dx_2 dx_3 dx_4 dx_5 + \dots \dots \dots \left. \right] \dots \dots (23)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T_{22}^I(Z_I) = & \lambda_I(Z_I) \left[ \exp \left( -i \int_0^{Z_I} p_I dw \right) + \int_0^{Z_I} \kappa_I(x_2) \int_0^{x_2} \kappa_I(x_1) \exp \left\{ i \int_0^{Z_I} p_I dw - 2i \int_0^{x_2} p_I dw \right. \right. \\
& + 2i \int_0^{x_1} p_I dw \left. \right\} dx_1 dx_2 + \int_0^{Z_I} \kappa_I(x_4) \int_0^{x_4} \kappa_I(x_3) \int_0^{x_3} \kappa_I(x_2) \int_0^{x_2} \kappa_I(x_1) \exp \left\{ -i \int_0^{Z_I} p_I dw \right. \\
& + 2i \int_0^{x_4} p_I dw - 2i \int_0^{x_3} p_I dw + 2i \int_0^{x_2} p_I dw - 2i \int_0^{x_1} p_I dw \left. \right\} dx_1 dx_2 dx_3 dx_4 \\
& + \int_0^{Z_I} \kappa_I(x_6) \int_0^{x_6} \kappa_I(x_5) \int_0^{x_5} \kappa_I(x_4) \int_0^{x_4} \kappa_I(x_3) \int_0^{x_3} \kappa_I(x_2) \int_0^{x_2} \kappa_I(x_1) \exp \left\{ i \int_0^{Z_I} p_I dw - 2i \int_0^{x_6} p_I dw \right. \\
& + 2i \int_0^{x_5} p_I dw - 2i \int_0^{x_4} p_I dw + 2i \int_0^{x_3} p_I dw - 2i \int_0^{x_2} p_I dw + 2i \int_0^{x_1} p_I dw \left. \right\} \\
& \left. \cdot dx_1 dx_2 dx_3 dx_4 dx_5 dx_6 + \dots \dots \dots \right] \dots \dots \dots (24)
\end{aligned}$$

以上のように、I 層の深さ  $Z_I$  での  $[T^I(Z_I)]$  の表示式が求まるから、式 (12) の  $a_I, b_I$  を  $A_I, B_I$  と置き換えれば、式 (14) より I 層の深さ  $Z_I$  での周波数領域での水平変位  $U_I(Z_I)$  ならびにせん断ひずみ  $r_I(Z_I)$  は次式のように与えられる。

$$U_I(Z_I) = \{T_{11}^I(Z_I) + T_{21}^I(Z_I)\} A_I + \{T_{12}^I(Z_I) + T_{22}^I(Z_I)\} B_I \dots \dots (25)$$

$$\begin{aligned}
r_I(Z_I) = & i p_I(Z_I) \{T_{11}^I(Z_I) - T_{21}^I(Z_I)\} A_I \\
& - i p_I(Z_I) \{T_{22}^I(Z_I) - T_{12}^I(Z_I)\} B_I \\
& \dots \dots \dots (26)
\end{aligned}$$

ここに、 $A_I$  と  $B_I$  は I 層上端における周波数領域での上昇波と下降波を表す変数で境界条件より定まる定数である。なお、式 (12) より深さ  $Z_I$  での上昇波と下降波は以下のように表わされる。

$$\text{上昇波: } T_{11}^I(Z_I) A_I + T_{12}^I(Z_I) B_I \dots \dots (27)$$

$$\text{下降波: } T_{21}^I(Z_I) A_I + T_{22}^I(Z_I) B_I \dots \dots (28)$$

いま、

$$r_I(Z_I) = r_{0I}(Z_I) \exp \{i\theta_I(Z_I)\} \dots \dots \dots (29)$$

とすれば、 $r_{0I}(Z_I)$  は I 層の深さ  $Z_I$  でのせん断ひずみ振幅になり、 $\theta_I(Z_I)$  は入射波とせん断ひずみの位相差を表わすことになる。

以上で、式 (1) のような物性をもつ物質中を伝播する

非線形調和波動の解が表現できたわけであるが、式 (21) ~ (24) で表わされるマトリックス  $[T^I(Z_I)]$  の要素は  $\beta_I(Z_I)$  ならびに  $p_I(Z_I)$  の複雑な関数となっている。これらの値は、式 (20) などから明らかなように、せん断ひずみの振幅  $r_{0I}(Z_I)$  の関数として表わされるから、式 (21) ~ (24) の積分を直接行うことはできない。ここでは、 $r_{0I}(Z_I)$  の第 1 次近似として線形解の値をとり、これを用いて  $\beta_I(Z_I)$  と  $p_I(Z_I)$  を計算し、式 (21) ~ (24) に代入しその数値積分を行い  $[T^I(Z_I)]$  を求める。この  $[T^I(Z_I)]$  を用いて  $r_{0I}(Z_I)$  を計算し、ふたび数値積分を行って  $[T^I(Z_I)]$  を計算する。このような計算を繰り返し、 $r_{0I}(Z_I)$  がある一定の精度内に入るまで繰り返し計算を行うことにより非線形解を構成する。このような操作を行うためには、境界条件より、式 (25) に現われる未定係数  $A_I$  ならびに  $B_I$  の値を定めなければならない。これについては以下で詳述する。

## (2) 波動伝達特性の表現

以上のように、I 層での非線形調和波動の一般解が表現できたので、以下一般解に現われる未定係数  $A_I, B_I$  の値を入射波によって表わす。

I 層と (I+1) 層の境界では、変位と応力の連続性を

満たさなければならぬから、次式をうる。

$$\begin{pmatrix} A_{I+1} \\ B_{I+1} \end{pmatrix} = [R_I][T^I(H_I)] \begin{pmatrix} A_I \\ B_I \end{pmatrix} \dots\dots\dots (30)$$

ただし、

$$[R_I] = \begin{bmatrix} \frac{1+\alpha_I}{2} & \frac{1-\alpha_I}{2} \\ \frac{1-\alpha_I}{2} & \frac{1+\alpha_I}{2} \end{bmatrix} \dots\dots\dots (31)$$

ここに、

$$\alpha_I = \frac{\{\mu_I(H_I) + i\omega\nu_I(H_I)\} p_I(H_I)}{\{\mu_{I+1}(0) + i\omega\nu_{I+1}(0)\} p_{I+1}(0)} \dots\dots\dots (32)$$

式 (30) を繰り返し用いることにより次式をうる。

$$\begin{pmatrix} A_{I+1} \\ B_{I+1} \end{pmatrix} = [M^I(\omega)] \begin{pmatrix} A_1 \\ B_1 \end{pmatrix} \dots\dots\dots (33)$$

ここに、

$$[M^I(\omega)] = [R_I][T^I(H_I)] \dots\dots\dots \\ \dots[R_2][T^2(H_2)][R_1][T^1(H_1)] \dots\dots\dots (34)$$

なお、 $I=N$  としたときの  $A_{N+1}$ ,  $B_{N+1}$  は基盤層上端における周波数領域での上昇波と下降波を表わしている。

いま基盤層内での上昇波が既知の場合を考える。まず地表面でのせん断応力が 0 になることより次式をうる。

$$A_1 = B_1 \dots\dots\dots (35)$$

次に、基盤層上端での上昇波が  $f_0$  なる振幅をもつ調和波であるとすれば、式 (33) で  $A_{N+1} = f_0$  とおくことにより次式が得られる。

$$\left. \begin{aligned} A_1/f_0 &= 1/\{M_{11}^N(\omega) + M_{12}^N(\omega)\} \\ B_{N+1}/f_0 &= \{M_{21}^N(\omega) + M_{22}^N(\omega)\} / \\ &\quad \{M_{11}^N(\omega) + M_{12}^N(\omega)\} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (36)$$

周波数領域における地表面の変位は  $U_1(0) = A_1 + B_1$  と表わせるから、 $2A_1/f_0$  は  $f_0$  なる入力に対する表層地盤の複素伝達関数になる。

### (3) $\lambda_I(Z_I)$ , $\kappa_I(Z_I)$ に関する考察

表層地盤の I 番目の層内のせん断弾性係数ならびにせん断粘性係数が深さ  $Z_I$  に関し任意階微分可能な関数とし、これから構成される複素波数  $p_I(Z_I)$  も同様な性質をもつものとすれば、式 (20) で表わされる  $\beta_I(Z_I)$  も任意階微分可能な複素数値関数となる。いま、I 層を  $n$  個の薄層に等分割すれば、各薄層の層厚  $h_k$  は  $H_I/n$  と表わされるから、式 (2) に現われる  $\mu_j, \nu_j$  の代表値として薄層上端での値を取ることにすれば、式 (11) で定義される  $\beta_j$  は次式によって与えられる。

$$\beta_j = \beta_I(Z_I) \Big|_{Z_I = \sum_{k=1}^{j-1} h_k = H_I(j-1)/n} \dots\dots\dots (37)$$

いま、深さ  $H_I(j-1)/n$  をあらたに  $Z_I$  と表わすことにすれば  $\lambda_I(Z_I)$  は  $\xi_k$  の無限積により次式のように与えられる。

$$\lambda_I(Z_I) = \lim_{j \rightarrow \infty} \prod_{k=1}^{j-1} \xi_k \dots\dots\dots (38)$$

ここに、 $\xi_k$  は式 (9) より次式のように表わされる。

$$\xi_k = \frac{\beta_k + \beta_{k+1}}{2\beta_k} = \left(\frac{\beta_k}{\beta_{k+1}}\right)^{1/2} + \frac{1}{2} \left\{1 - \left(\frac{\beta_k}{\beta_{k+1}}\right)^{1/2}\right\}^2 \dots\dots\dots (39)$$

一方、 $\beta_k/\beta_{k+1}$  は次式のように書きなおせる。

$$\frac{\beta_k}{\beta_{k+1}} = \frac{\beta_k}{\beta_k + e_k} = 1 - \frac{e_k}{\beta_k} + 0(e_k) \dots\dots\dots (40)$$

ここに、 $e_k$  は薄層の分割数が大きくなると 0 に近づくような複素数値変数である。これから、式 (39) の右辺第 2 項を  $\varepsilon_k$  とおけば、次式が求まる。

$$\varepsilon_k = \frac{1}{2} \left\{1 - \left(\frac{\beta_k}{\beta_{k+1}}\right)^{1/2}\right\}^2 = \frac{1}{8} \left(\frac{e_k}{\beta_k}\right)^2 + 0(e_k) \dots\dots\dots (41)$$

また、 $\beta_I(Z_I)$  の微分可能性より次式をうる。

$$e_k = \beta_k' \Delta Z_I + 0(\Delta Z_I) = \beta_k' \frac{H_I}{n} + 0\left(\frac{H_I}{n}\right) \dots\dots\dots (42)$$

ここに、

$$\Delta Z_I = \frac{H_I}{n}, \beta_k' = d\beta_I(Z_I)/dZ_I \Big|_{Z_I = \frac{k-1}{n} H_I}$$

である。したがって、式 (41) は次式のようになる。

$$\varepsilon_k = \frac{1}{8} \left(\frac{\beta_k'}{\beta_k}\right)^2 \left(\frac{H_I}{n}\right)^2 + 0\left(\frac{H_I}{n}\right) \dots\dots\dots (43)$$

上式を式 (39) に代入し次式をうる。

$$\xi_k = \left(\frac{\beta_k}{\beta_{k+1}}\right)^{1/2} + \frac{1}{8} \left(\frac{\beta_k'}{\beta_k}\right)^2 \left(\frac{H_I}{n}\right)^2 + 0\left(\frac{H_I}{n}\right) \dots\dots\dots (44)$$

式 (44) を式 (38) に代入し次式をうる。

$$\lambda_I(Z_I) = \lim_{j \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \left(\frac{\beta_1}{\beta_j}\right)^{1/2} + \frac{1}{8} \left(\frac{\beta_1'}{\beta_1}\right)^2 \left(\frac{H_I}{n}\right)^2 \left(\frac{\beta_2}{\beta_j}\right)^{1/2} \right. \\ \left. + \frac{1}{8} \left(\frac{\beta_2'}{\beta_2}\right)^2 \left(\frac{H_I}{n}\right)^2 \left(\frac{\beta_1}{\beta_2}\right)^{1/2} \left(\frac{\beta_3}{\beta_j}\right)^{1/2} + \dots\dots\dots \right. \\ \left. + \frac{1}{8} \left(\frac{\beta_k'}{\beta_k}\right)^2 \left(\frac{H_I}{n}\right)^2 \left(\frac{\beta_1}{\beta_k}\right)^{1/2} \left(\frac{\beta_{k+1}}{\beta_j}\right)^{1/2} + \dots\dots\dots \right. \\ \left. + \frac{1}{8} \left(\frac{\beta_{j-1}'}{\beta_{j-1}}\right)^2 \left(\frac{H_I}{n}\right)^2 \left(\frac{\beta_1}{\beta_{j-1}}\right)^{1/2} + 0\left(\frac{H_I}{n}\right) \right\} \dots\dots\dots (45)$$

したがって、次式をうる。

$$\left| \lambda_I(Z_I) - \left(\frac{\beta_1}{\beta_j}\right)^{1/2} \right| \leq |A| \frac{H_I^2}{n} \frac{j-1}{n} + 0\left(\frac{H_I}{n}\right) \dots\dots\dots (46)$$

ただし、

$$|A| = \max_{1 \leq k \leq j-1} \left\{ \frac{1}{8} \left(\frac{\beta_k'}{\beta_k}\right)^2 \left(\frac{\beta_1}{\beta_k}\right)^{1/2} \left(\frac{\beta_{k+1}}{\beta_j}\right)^{1/2} \right\} \dots\dots\dots (47)$$

式 (46) で  $n \rightarrow \infty$  とすれば、 $\lim_{j \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} |A| \frac{H_I^2}{n} \frac{j-1}{n} \rightarrow$

0 ならびに  $\lim_{j \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} \left| 0\left(\frac{H_I}{n}\right) \right| \rightarrow 0$  が得られるから、 $\lambda_I(Z_I)$  は  $(\beta_1/\beta_j)^{1/2}$  に収束する。式 (48) より  $\beta_1 = \beta_I$

(0),  $\beta_j = \beta_I(Z_I)$  とおけるから次式をうる。

$$\lambda_I(Z_I) = \{\beta_I(0)/\beta_I(Z_I)\}^{1/2} \dots\dots\dots (48)$$

一方,  $\kappa_I(Z_I)dZ_I$  は  $\eta_j$  より求まり次式で表わされる。

$$\kappa_I(Z_I)dZ_I = \lim_{j \rightarrow \infty} \eta_{j-1} \dots\dots\dots (49)$$

ここに,

$$\eta_{j-1} = \frac{\beta_j - \beta_{j-1}}{2\beta_j} \dots\dots\dots (50)$$

である。なお,  $\beta_I(Z_I)$  の微分可能性より

$$\beta_{j-1} = \beta_j - \beta_j' \Delta Z + 0(\Delta Z_I) \dots\dots\dots (51)$$

と表わされるから, 次式をうる。

$$\kappa_I(Z_I)dZ_I = \lim_{j \rightarrow \infty} \left\{ \frac{\beta_j'}{2\beta_j} \Delta Z_I + 0(\Delta Z_I) \right\} \dots\dots\dots (52)$$

したがって,  $\kappa_I(Z_I)$  は次式のように表わせる。

$$\kappa_I(Z_I) = \frac{\beta_I'(Z_I)}{2\beta_I(Z_I)} \dots\dots\dots (53)$$

### 3. 応力～ひずみ関係の等価線形化

ここでは, 履歴復元力特性を有する応力～ひずみ関係の等価線形化を行う。要素はひずみ振幅  $r_0$ , 周期  $2\pi/\omega$  なる調和振動を行っているものとし, 等価弾性係数  $\mu_{eq}$  は各ひずみサイクルのピーク値と原点を結ぶ直線の勾配から求める。

等価粘性係数  $\nu_{eq}$  は履歴復元力特性をもつ要素の1サイクル当りのエネルギー損失  $\Delta W_h$  を,  $\nu_{eq}$  なる粘性係数をもつ Voigt 形粘弾性体の1サイクル当りのエネルギー損失  $\pi\nu_{eq}\omega r_0^2$  に等値することによって求める。すなわち

$$\Delta W_h = \pi\nu_{eq}\omega r_0^2 \dots\dots\dots (54)$$

次に, 等価減衰定数は次式で定義する<sup>17), 18)</sup>。

$$\zeta_{eq} = \frac{1}{2\pi} \frac{\Delta W_h}{W_h} \dots\dots\dots (55)$$

ここに,  $W_h$  は履歴復元力特性をもつ要素の1サイクル当りに受けわたしされるエネルギーの絶対値である。ここでは次式で定義する。

$$W_h = \mu_{eq} r_0^2 \dots\dots\dots (56)$$

表-1 に以下で用いる bi-linear 要素, Ramberg-Osgood 要素<sup>19)</sup>, Hardin 要素<sup>5), 14)</sup> の3種類について,  $\mu_{eq}$  と  $\zeta_{eq}$  をひずみ振幅の関数として表示した。表に現われる変数の意味は次のようである。

- $\tau_y, r_y$ : 降伏点の応力とひずみ
- $\tau_0, r_0$ : 1サイクル中の応力とひずみの振幅
- $\mu_1$ : 要素の初期弾性係数
- $n$ : bi-linear 要素の弾塑性傾斜率
- $\alpha, r$ : Ramberg-Osgood 要素のパラメーター

表-1 各要素の等価弾性係数と減衰定数

	bi-linear	Ramberg-Osgood	Hardin
$\mu_{eq}$	$\frac{r_y}{r_0} \mu_1 \left\{ 1 + (1-n) \left( 1 - \frac{r_0}{r_y} \right) \right\}$	$\tau_0/r_0$	$\frac{\mu_1}{1 + \alpha_\mu r_0}$
$\zeta_{eq}$	$\frac{2}{\pi} \left\{ \frac{r_y}{r_0} - \left( \frac{r_0}{r_y} \right)^2 \right\} \frac{\mu_1}{\mu_{eq}} n$	$\frac{2\alpha}{\pi} \frac{r_y}{r_0^2} \frac{r_y}{\mu_{eq}} \left( \frac{r-1}{r+1} \right) \left( \frac{r_0}{r_y} \right)^{r+1}$	$\frac{\alpha_\zeta \zeta_m r_0}{1 + \alpha_\zeta r_0}$

$\alpha_\mu, \alpha_\zeta$ : Hardin 要素の非線形度パラメーター  
 $\zeta_m$ : Hardin 要素の  $r_0 \rightarrow \infty$  のときの減衰定数

なお, 図-2, 図-3 に bi-linear, Ramberg-Osgood 要素からなる応力～ひずみ関係を示した。図-4 は bi-linear 要素の  $\zeta_{eq}$  と  $\mu_{eq}/\mu_1$  を  $\varepsilon = r_0/r_y$  の関数として示したものである。図-5, 6 に Ramberg-Osgood 要素のものが示されている。要素の特性を定めるパラメーターは  $\alpha$  と  $r$  の2つであるから, 図-5 は  $\alpha = 0.1$  とし  $r$  を変化したものであり, 図-6 は  $r = 3$  とし  $\alpha$  を変化したものである。図-7 に Hardin 要素のものが示されている。 $\alpha_h = \alpha_\mu = \alpha_\zeta$  と考えれば,  $\alpha_h = 1/r_y$  となるから,  $\varepsilon = \alpha_\zeta r_0 = \alpha_\mu r_0$  として  $\zeta_{eq}/\zeta_m, \mu_{eq}/\mu_1$  と  $\varepsilon$  との関係を示したものである。

以上, 履歴特性を有する要素の等価減衰定数について述べたが, このほかに純粋な粘性にとまらぬ減衰が存在する。いまこれによる減衰定数を  $\zeta_v$  とし, 両者を含

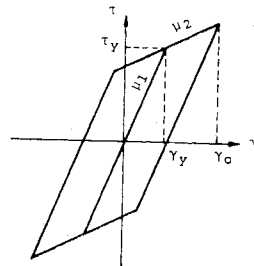


図-2 bi-linear 要素

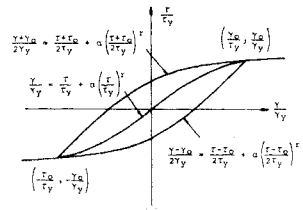


図-3 Ramberg-Osgood 要素

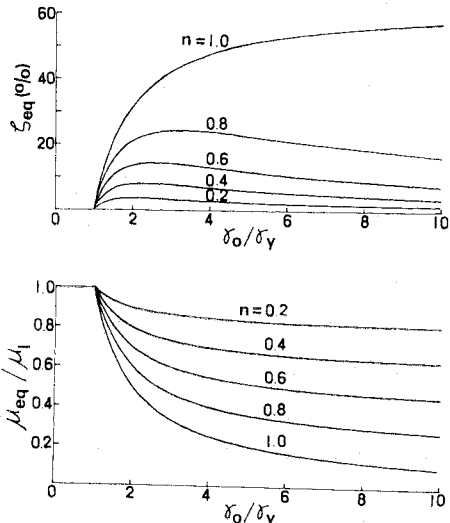


図-4 bi-linear 要素の等価弾性係数  $\mu_{eq}$  と等価減衰定数

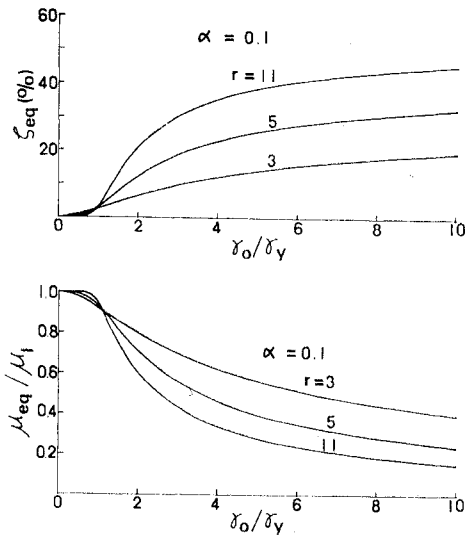


図-5 Ramberg-Osgood 要素の  $\mu_{eq}$  と  $\zeta_{eq}$  ( $\alpha=0.1$ ,  $r$  が変化)

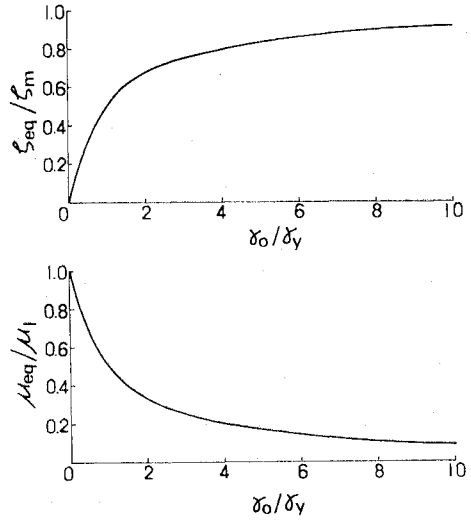


図-7 Hardin 要素の  $\mu_{eq}$  と  $\zeta_{eq}$

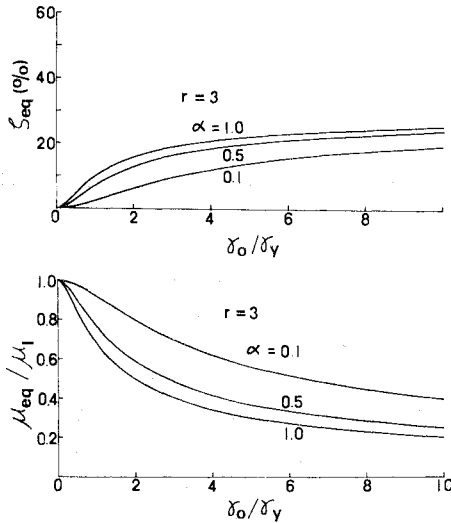


図-6 Ramberg-Osgood 要素の  $\mu_{eq}$  と  $\zeta_{eq}$  ( $r=3$ ,  $\alpha$  が変化)

めた減衰定数  $\zeta$  を次式で定義する。

$$\zeta = \zeta_{eq} + \zeta_v \dots (57)$$

$\zeta_v$  は、ひずみ速度依存性のものと非依存性のものに分けて考えることにする。この場合、 $\zeta_v$  の周波数領域における表現は次式ようになる。

$$\left. \begin{aligned} \zeta_v &= \omega h_v \quad (h_v \text{ 一定}) : \text{ひずみ速度依存} \\ \zeta_v &= \zeta_{vs} \quad (\zeta_{vs} \text{ 一定}) : \text{ひずみ速度非依存} \end{aligned} \right\} \dots (58)$$

なお、砂に対する  $\zeta_{eq}$  のこれまでの研究結果によれば、 $\zeta_{eq}$  は周波数に依存しない値であることも判明している<sup>20)</sup>。

#### 4. 数値計算例

##### (1) 数値解の精度についての検討

以上述べた解析手法を用い具体的な数値計算を行う。地盤層は表層と基盤層の2層から構成されるものと考えた。なお、問題を簡単にするため、基盤層は均質な線形弾性体からなるものとした。計算に用いた地盤特性を表-2に示した。

表-2 地盤構成

表層	$V_s=160 \text{ m/sec}$ $\rho g=2.24 \text{ t/m}^3$ $H=12 \text{ m}$
基盤層	$V_s=720 \text{ m/sec}$ $\rho g=2.30 \text{ t/m}^3$

式(15)~(18)に現われる  $\eta_j$  は薄層の数が多くなると0に近づく性質のものであるから、 $\eta_j$  に関する展開項はあまり高次まで取らなくても良いことが推察される。図-8は  $\eta_j$  の展開次数を何次まで取れば解の精度が満たされるかについて吟味したものである。数値計算は式(21)~(24)に基づいて行っている。応力~ひずみ関係は Hardin 形のものを用い、 $\alpha_p = \alpha_c = 500$ ,  $\zeta_m = 0.33$ , 基盤層上端での上昇波の加速度振幅  $f_0$  を  $20 \text{ cm/sec}^2$  とした場合の地表面の振幅特性  $|2A_1/f_0|$  を  $\eta_j$  の展開次数をパラメーターとして示

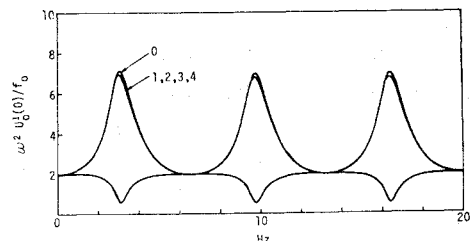


図-8  $\eta_j$  の展開次数が応答特性におよぼす影響

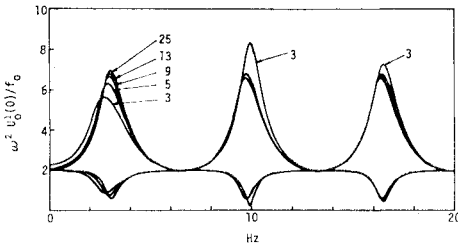


図-9 積分点数が応答におよぼす影響

してある。これから、展開次数は2次程度で十分な数値解を与えることが明らかになる。

また、式(21)~(24)に現われる積分は数値積分によっているから、積分点の数も問題になる。図-9は積分点の数が解の精度におよぼす影響について示したものである。計算条件は図-8の場合と同じものを用いている。これから積分点の数が25程度になれば十分な数値解を与えることがわかる。

(2) 応力~ひずみ関係が周波数伝達特性におよぼす影響

ここでは、基盤層上端での上昇波の加速度振幅  $f_0$  が与えられた場合の地表面の加速度応答倍率、その位相特性ならびに基盤層と表層との境界面での加速度応答倍率におよぼす応力~ひずみ関係の影響について考察を加える。これらは式(36)を適当に変形することによって次のように与えられる。

$$\left. \begin{aligned} \text{地表面での加速度応答倍率} : \varphi_s &= |2 A_1 / f_0| \\ \text{地表面の応答の入力に対する位相特性} \\ &: \tan^{-1} \{ I_m(2 A_1 / f_0) / R_e(2 A_1 / f_0) \} \\ \text{表層と基盤層との境界面での加速度応答倍率} \\ &: \varphi_b = |(B_{N+1} + f_0) / f_0| \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (57)$$

なお、地盤特性は表-2のものと同じものを用いる。

a) 応力~ひずみ関係が bi-linear 要素で与えられる場合

計算に用いた  $\mu_{eq}$  ならびに  $\zeta_{eq}$  と  $r_0/r_y$  の関係は図-4で与えられる。図-10は  $f_0=50 \text{ cm/sec}^2$ ,  $r_y=5 \times 10^{-4}$ ,  $\zeta=\zeta_{eq}$  とした場合の地表層の応答特性を弾塑性傾斜率  $n$  をパラメーターとして表示したものである。図(a)の  $\varphi_s$  は地表面での加速度応答倍率を、図(a)の  $\varphi_b$  は表層と基盤層との境界面での加速度応答倍率を、図(b)は地表面の応答の入力に対する位相特性を、図(c)は表層と基盤層の境界面でのせん断応力の入力に対する応答倍率を示している。線形系の応答は地盤のせん断弾性係数を初期せん断弾性係数  $\mu_1$  に等しいとして求めた。

図から明らかなように、ここで用いた入力、降伏ひずみの場合には、1次モードが卓越する領域(ここで用いた地盤モデルでは0~6.6 Hzの領域に相当する)では

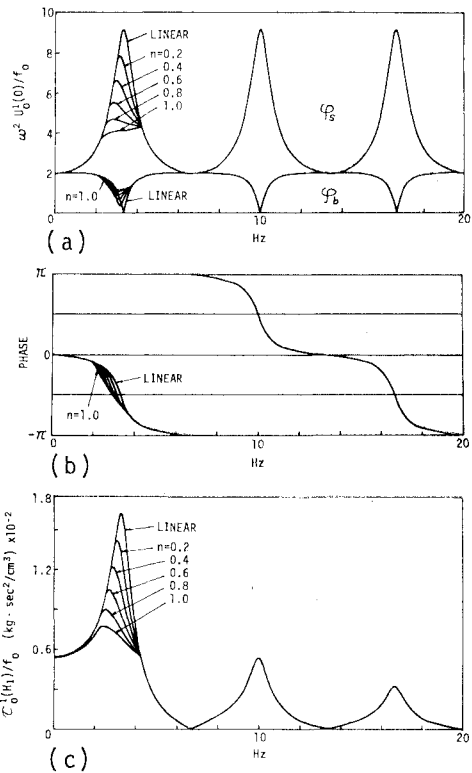


図-10 bi-linear 要素から求める等価弾性係数と等価減衰定数を用いた場合の周波数伝達特性 ( $f_0=50 \text{ cm/sec}^2$ ,  $n$  が変化)

弾塑性傾斜率  $n$  が大きくなるにつれて地表面の応答倍率は減少する。応答倍率の曲線は共振点より低周波側では、線形のものから滑らかにずれるが、共振点より大きいところでは、 $n$  に関係しないある特定の周波数で屈曲して線形のものと同じ傾向のあることがわかる。なお共振振動数は  $n$  が0.8程度までは  $n$  の増加とともに減少するが、 $n$  が0.8以上になると応答倍率の曲線はかなり平坦になり明確な共振点を定めにくくなり、 $n$  が1.0に近づくと、共振振動数は応答倍率の曲線が屈曲する点の値に一致するようになる。また、地表の応答の入力に対する位相は、 $n$  が大きくなるにつれて、線形のものよりおくれることも明らかである。以上は1次モードの卓越する領域での結果であるが、2次以上のモードが卓越する領域では、 $n$  のいかにかわからず、周波数特性は線形系のものでまったく一致してしまう。これは高次のモードが卓越する場合には地盤内に発生するひずみ振幅の大きさが、1次モードの卓越する場合のものよりかなり小さくなり、降伏点  $r_y$  を越えるようなひずみが地盤内に発生しなくなるためと考えられる。このことは、地盤の震動問題を取り扱う場合、bi-linear な応力~ひずみ関係に基づく履歴減衰は高周波数領域ではきかなくなることを意味しており、周波数の全領域にわたって、一



様に作用する粘性減衰が存在する場合の応答特性とはかなり異なったものになる。このことを明らかにするために、 $\zeta_{vs}$  の値を 0, 2, 5, 10 と変えた場合の応答特性を示したのが 図-11 である。いずれの応答特性も減衰のきき方は高周波数領域で著しく、bi-linear 履歴減衰のみを考えた 図-10 のものとは高次モードにおける相違が著しい。なお、図-10, 11 の (c) より、いずれの場合も、せん断応力の応答倍率は 1 次モードの卓越する領域で最大値を示し、振動モードが高くなるにしたがって、小さくなることも明らかである。

**b) 応力~ひずみ関係が Ramberg-Osgood 要素で与えられる場合**

まず Ramberg-Osgood 要素のパラメーターのうち、 $r$  を変化させた場合について考える。 $\alpha=0.1$  として、 $r$  を 3, 5, 11 と変化させる。計算に用いた  $\mu_{eq}$  ならびに  $\zeta_{eq}$  と  $r_0/r_y$  の関係は 図-5 によって与えられる。この関係は  $r=1$  の場合は線形要素 ( $\mu_{eq}=\mu_1, \zeta_{eq}=0$ ) のものに、 $r=\infty$  の時には完全弾塑性要素のものに一致する。すなわち、 $r$  が大きくなると、 $r_0/r_y < 1$  の範囲で  $\mu_{eq}$  は  $\mu_1$  に、 $\zeta_{eq}$  は 0 に近づくことになる。

図-12 は  $f_0=50 \text{ cm/sec}^2, r_y=5 \times 10^{-4}, \zeta=\zeta_{eq}$  とした場合の表層の周波数応答特性を示したものである。図 (a) の  $\varphi_s$  の特性から、1 次モードの卓越する周波数領

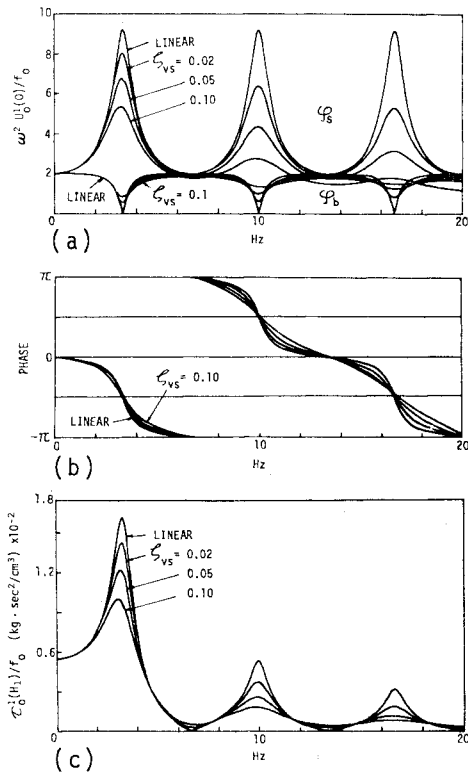


図-11 ひずみ速度非依存性の粘性減衰を考慮した場合の周波数伝達特性

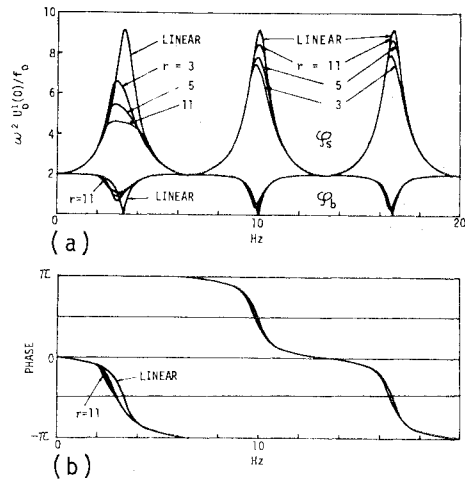


図-12 Ramberg-Osgood 要素から求まる等価弾性係数と等価減衰定数を用いた場合の周波数伝達特性 ( $f_0=50 \text{ cm/sec}^2, \alpha=0.1, r$  が変化)

域では、 $r$  が增大するにともない、応答倍率が減少すること、また共振点が低周波側へ移動し、それにともなって位相特性も変化することが明らかとなる。一方、高次モードの卓越する領域では、 $r$  が小さいほど応答倍率は小さく、 $r$  の増加にともなって線形のものに近づく傾向を示す。また、共振点の移動は 1 次モードが卓越している領域ほど顕著ではない。このため位相特性は線形のものとはほぼ一致するようになる。これらのことから、 $r$  が大きくなると、Ramberg-Osgood 要素から求まる履歴減衰は高周波数領域で小さくなるのが判明する。

次に、パラメーター  $\alpha$  の変化によって表層の波動伝達特性がどのように変化するかをみる。計算に用いた  $\mu_{eq}$  ならびに  $\zeta_{eq}$  と  $r_0/r_y$  の関係は 図-6 で与えられる。

図-13 は  $f_0=50 \text{ cm/sec}^2, r_y=5 \times 10^{-4}, \zeta=\zeta_{eq}$  とした

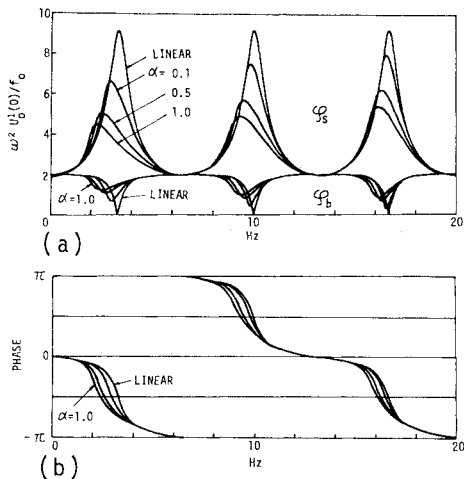


図-13 Ramberg-Osgood 要素から求まる等価弾性係数と等価減衰定数を用いた場合の周波数伝達特性 ( $f_0=50 \text{ cm}^2, r=3, \alpha$  が変化)

ときの計算結果である。 $\alpha$ が大きくなるにつれて、1次の共振点は低周波側へ移行し、加速度応答倍率も減少することがわかる。なお、 $\alpha$ のわずかな変化によって共振点はかなり移動する。 $r$ の変化による共振点の移動があまり大きくなかったことと比較すると、 $\alpha$ は要素の剛性変化に関係していることが明らかになる。また高次のモードが卓越する周波数領域でも、 $\alpha$ の増加にともなって応答倍率は減少し共振点も低周波側へ移行し、 $r$ を変化させた場合の特性とは異なったものになる。

c) 応力～ひずみ関係が Hardin 形の場合

$\mu_{eq}$  ならびに  $\zeta_{eq}$  は表-1 で与えられる。 $\alpha_\mu$  ならびに  $\alpha_\zeta$  が表層の応答特性におよぼす影響について調べる。a), b) では  $f_0=50 \text{ cm/sec}^2$  としたが、この値を用いると  $\alpha_\mu$  あるいは  $\alpha_\zeta$  の変動が周波数伝達特性におよぼす影響が小さすぎ、これを明確にとらえることができないので、 $f_0=20 \text{ cm/sec}^2$  とし、 $\zeta=\zeta_{eq}$  として数値解析を行った。図-14 は  $\alpha_\zeta=500$  とし、 $\alpha_\mu$  を 500, 1000, 1500, 2000 と変化させた場合の地表層の振動特性を示したものである。 $\alpha_\mu$  が大きくなるにしたがい、共振点は低周波側へ移行し応答倍率も減少し位相もおかれていくことがわかる。減衰の非線形性を表わすパラメーター  $\alpha_\zeta$  が一定値を保つにもかかわらず  $\alpha_\mu$  が大きくなると応答倍率が減少するのは、地盤内に発生するひずみの分布が減衰特性に大きな影響を与えているからである。

図-15 は非線形減衰を表わすパラメーター  $\alpha_\zeta$  が表層の応答特性におよぼす影響を示したものである。 $\alpha_\mu=500$  とし、 $\alpha_\zeta$  を 500, 1000, 1500, 2000 と変化させている。 $\alpha_\zeta$  が大きくなるにつれて応答倍率は減少するが、共振点の変動はほとんど起こらないことがわか

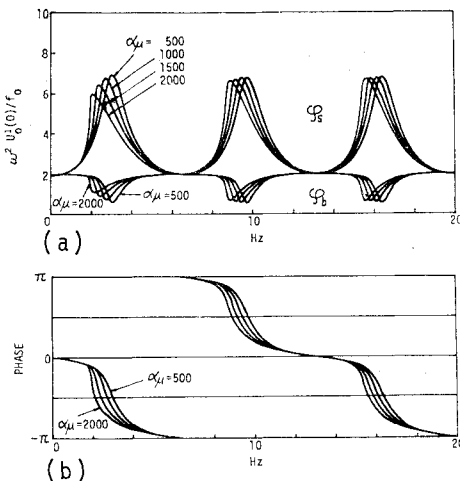


図-14 Hardin 形の等価弾性係数と等価減衰定数を用いた場合の周波数伝達特性 ( $f_0=20 \text{ cm/sec}^2$ ,  $\alpha_\zeta=500$ ,  $\alpha_\mu$  が変化)

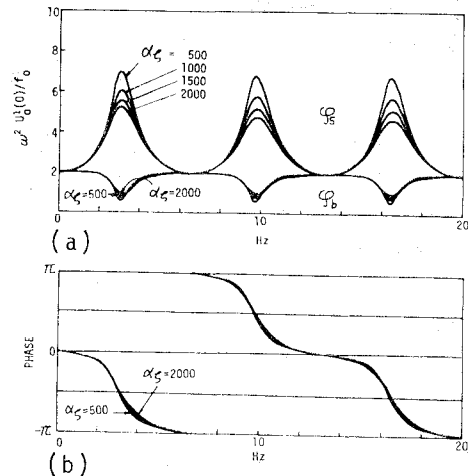


図-15 Hardin 形の等価弾性係数と等価減衰定数を用いたときの周波数伝達特性 ( $f_0=20 \text{ cm/sec}^2$ ,  $\alpha_\mu=500$ ,  $\alpha_\zeta$  が変化)

る。

(3) 入力強度が周波数伝達特性におよぼす影響

以上は応力～ひずみ関係が周波数特性におよぼす影響について調べたものであるが、ここでは、基盤層を上昇する波動の振幅特性が変化したときに表層の周波数特性がどのように変化するかについて考察を加える。図-16 は Ramberg-Osgood 形の応力～ひずみ関係を用いた場合のもので、 $r=3$ ,  $\alpha=0.1$ ,  $\zeta=\zeta_{eq}$  とし、基盤層上端での上昇波の加速度振幅  $f_0$  を 50, 100, 150  $\text{cm/sec}^2$  と変化させた場合のものである。図 (a) の  $\varphi_s$  より入力が大きくなるにつれて、地表面の加速度応答倍率は減少し、共振点が低周波側へ移行することがわかる。図 (b) は入力が大きくなるにつれて位相がおくれることを示している。なお、応答倍率の減少ならびに共振点の低周波側へ

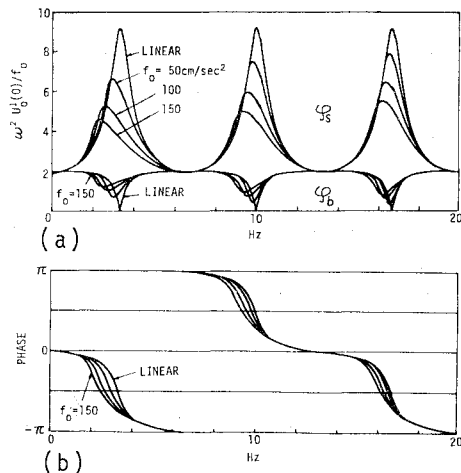
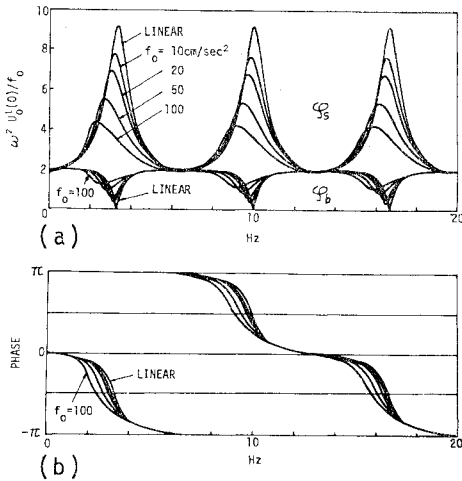


図-16 入力の強度が周波数伝達特性におよぼす影響 (Ramberg-Osgood 要素を使用,  $\alpha=0.1$ ,  $r=3$ )

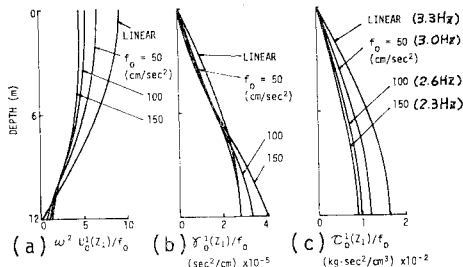


図一七 入力強度が周波数伝達特性におよぼす影響 (Hardin 要素を使用,  $\alpha_\mu = \alpha_c = 500$ )

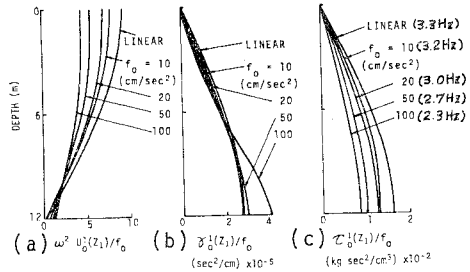
の移行の度合は振動モードが高くなるにつれて小さくなる。

図一七は Hardin 形の応力～ひずみ関係を用いたときのもので、 $\alpha_\mu = 500$ ,  $\alpha_c = 500$ ,  $\zeta_m = 0.33$ ,  $\zeta = \zeta_{eq}$  とし、 $f_0$  を 10, 20, 50, 100 cm/sec<sup>2</sup> と変化させた場合のものである。この場合も地表面の加速度応答倍率は入力が大きくなるにつれて減少し、共振点も低周波数側へ移行するが、加速度応答倍率の減少の度合は、振動モードが大きくなると、わずかであるが増大するようである。これは Hardin 形の減衰のほうが、Ramberg-Osgood 形の減衰より高次の振動において良くきくことを表わしているものと考えられる。一方、共振点の移行の度合は振動モード次数にはあまり関係しないようである。

図一八、一九はおのおの、応力～ひずみ関係として Ramberg-Osgood ならびに Hardin 形を使用したときの表層地盤内の震動分布を示したものである。これらは地表面の加速度応答倍率が最初に極大値を示すときの周波数にほぼ等しい点のものを示してある。図 (a) は加速度応答倍率を、図 (b) はひずみ振幅の入力に対する倍率を、図 (c) は応力振幅の入力に対する倍率を示してある。なお、図中に記入した周波数は、震動分布を図示し



図一八 表層地盤内の震動分布 (Ramberg-Osgood 要素を使用,  $\alpha = 0.1$ ,  $r = 3$ )



図一九 表層地盤内の震動分布 (Hardin 要素を使用,  $\alpha_\mu = \alpha_c = 500$ )

た点の周波数である。図から、入力が大きくなるにつれて、加速度応答倍率は深いところで大きくなり浅いところで小さくなること、またひずみ振幅の倍率は、表層と基盤層の境界面で最大値を取り、入力が大きくなるにつれて、深いところでは大きくなり浅いところでは逆に小さくなる傾向のあること、応力振幅の倍率は入力が大きくなるにつれて単調に減少することなどが判明する。なおここで取り扱った入力範囲では、ひずみの倍率は最大で線形の約 1.3 倍程度まで大きくなり、応力の倍率は線形の約 0.6 倍程度まで減少する。ひずみ振幅の分布形は入力が大きくなると線形のものに比べてかなり変化すが、応力振幅のそれは線形の場合とほぼ同じ形を保つ。

(4) 表層地盤の不均質性が周波数伝達特性におよぼす影響

これまで、表層地盤内の初期弾性係数、降伏ひずみ、非線形度パラメーターなどが深さに関係しない一定値として解析を行ってきたが、これらの値は深さとともに変化するはずである。ここでは、Hardin 形の等価弾性定数と非線形度パラメーターが深さの関数として与えられる場合に、入力の強度が表層の周波数伝達特性にどのような影響を与えるかについて考察を加える。表一I では等価弾性係数と減衰定数の非線形度パラメーターは異なるものとしたが、ここでは両者とも  $\alpha_h = 1/\tau_f$  で与えられるものとする。この場合  $\alpha_h$  は次式で与えられる。

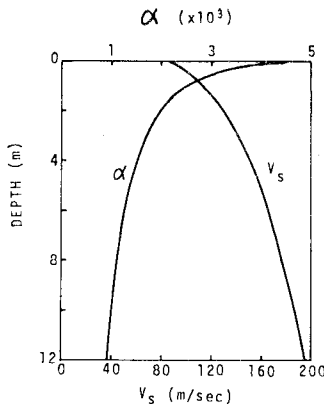
$$\alpha_h = \mu_1 / \tau_f \dots \dots \dots (58)$$

ここに、 $\mu_1$  は初期弾性係数であり、 $\tau_f$  は次式で求める<sup>14)</sup>。

$$\tau_f = \sqrt{\left( c' \cos \phi' + \frac{1+K_0}{2} \sigma' \sin \phi' \right)^2 - \left( \frac{1-K_0}{2} \sigma' \right)^2} \dots \dots \dots (59)$$

ただし、 $c'$ ,  $\phi'$  は有効応力で表現した場合の静的強度定数、 $K_0$  は静止土圧係数、 $\sigma'$  は有効上載圧を表わしている。

表層地盤の初期弾性係数は微小ひずみのもとのせん断波速度  $V_s$  から  $\mu_1 = \rho V_s^2$  で求める。 $V_s$  の応力依存性は次式で与えられる<sup>21)</sup>。



図—20  $V_s, \alpha_h$  の深さ方向分布

$$V_s = A(\sigma' + \sigma'_0)^{1/4} \dots \dots \dots (60)$$

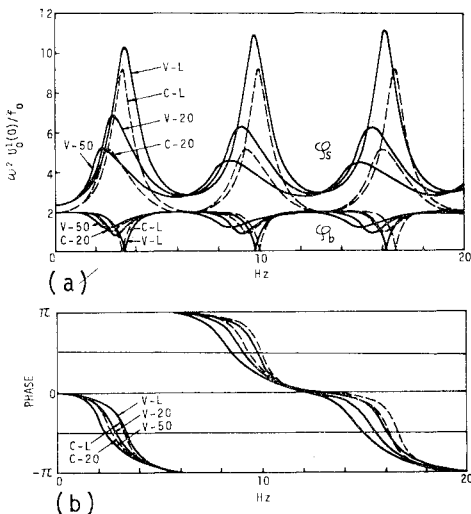
ここに、 $\sigma'_0$  は地表面での有効上載圧である。

いま、 $c' = 0.05 \text{ kg/cm}^2$ 、 $\phi' = 40^\circ$ 、 $\sigma'_0 = 0.112 \text{ kg/cm}^2$  とした場合の  $\alpha_h$  ならびに  $V_s$  の分布形を求めたのが、図—20 である。 $V_s$  の深さ方向の平均値は 160 m/sec になるように式 (60) の  $A$  を決めた。また  $\alpha_h$  の深さ方向の平均値は 1490 となった。

図—20 で与えられる分布形を用いて数値計算を行うが、比較のために地盤が均質と考えた場合のものも同時に示す。表—3 に数値計算を行った入力強度と地盤条件

表—3  $\alpha_h$  値とせん断波速度

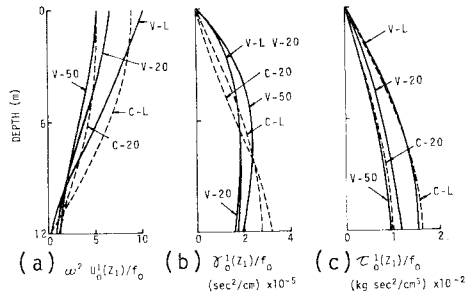
記号	せん断波速度 $V_s$ m/sec	$\alpha_h$ 値	解析法	入力強度 $f_0$ cm/sec <sup>2</sup>
C—L	160	—	線形	—
C—20	(深さ方向に一定)	1490 (深さ方向に一定)	非線形	20
V—L	(深さ方向に変化) 図—20 参照	—	線形	—
V—20	(深さ方向に変化) 図—20 参照	(深さ方向に変化) 図—20 参照	非線形	20
V—50				50



図—21 不均質性を考慮した場合の周波数伝達特性

を示した。なお以下の図中に記入した C-L, C-20, V-L, V-20, V-50 の記号の意味も同時に示してある。図—21 は表層の周波数特性を示したものである。実線は地盤を不均質と考えた場合のものであり、破線は均質と考えた場合のものである。図 (a) の  $\varphi_s$  の形状より、不均質性を考慮したときの地表面の応答は均質な場合のものより常に大きくなること、いずれの場合も入力が大きくなるにつれて応答倍率は減少し、共振周波数も減少することなどが明らかになる。なお、1次モードが卓越する領域での V-50 曲線のピークと C-20 曲線のピークにおける加速度応答倍率の値はほぼ一致している。入力の大きさが異なるにもかかわらず、このような一致が得られるのは表層の加速度応答特性におよぼす不均質性の影響がかなり大きいことを示している。図 (b) は地表面の加速度応答の位相特性を示したものである。

図—22 は表層地盤内の震動分布を示したものである。分布形は1次モードの卓越する周波数領域での共振状態でのものである。図 (a) から、加速度応答倍率は不均質性を考慮すると、地表面近くでの増幅率が大きくなることが明らかになる。図 (b) はせん断ひずみ振幅の入力に対する倍率を示したものである。不均質性を考慮した場合の分布形は均質な場合のものとはかなり異なった形になる。均質な地盤内でのひずみは、表層と基盤層の境界面で最大値をとり、入力が大きくなるにつれて、深いところでは大きくなり浅いところでは逆に小さくなる傾向があるが、不均質地盤内ではこのような傾向は見られない。図 (c) よりせん断応力振幅の分布形は、地盤の物理的な特性がかなり変化しても影響を受けないことが明らかになる。



図—22 表層地盤内の震動分布

### 5. むすび

本論文では、土の動的非線形性が表層地盤の震動特性にどのような影響を与えるかを調べるために、水平な成層地盤を対象とし、基盤層から SH 波が鉛直上方に入射したときの表層地盤の波動伝達特性に考察を加えたものである。計算に使用した土の動的応力～ひずみ関係は、

履歴特性を有する要素を等価線形化したものであり、bi-linear, Ramberg-Osgood, Hardin 形の3種類である。得られた応力～ひずみ関係は、いずれも、弾性係数ならびに減衰定数がひずみ振幅の関数になるようなものである。こうした特性をもつ地盤の運動方程式の調和波動解を求めるために、地盤を数多くの薄層に分割し、周波数領域での定常調和波動解を重複反射理論によって求めておき、薄層の厚さを無限小にすることによって非線形調和波動の解析的表現形式を求めた。解の形式は閉じた形では求まらないので、繰り返し収束計算を行わなければならない。表層と基盤層の2層から構成される地盤を対象とし、このような収束計算を行った。本研究によって得られた結果を要約すると以下のようである。

(1) 数値計算を行うときの積分点の数は1つの層内で25点ほどあれば十分な精度の解が求まる。

(2) bi-linear 要素から求まる等価弾性係数ならびに等価減衰定数を用いて表層の周波数特性を調べたところ、加速度振幅一定の入力の場合、高次モードの卓越する周波数領域では bi-linear 形の履歴減衰は小さくなることが明らかになった。したがって、周波数の全領域にわたって一様に作用する粘性減衰を考えた場合の応答とは非常に異なる。

(3) Ramberg-Osgood 要素から求まる等価減衰定数を用い、一定加速度入力の場合の表層の周波数特性を調べた。Ramberg-Osgood 要素のパラメーター  $\alpha$  を0.1とし、 $r$ を変化させた場合には、高次モードの卓越する周波数領域では、 $r$ が大きくなるにしたがって減衰が小さくなる。また、 $r$ を3とし  $\alpha$ を変化させた場合には、振動モードに関係なく、 $\alpha$ が大きくなると減衰が大きくなり、 $r$ を変化させた場合は表層の応答特性が異なることを示した。なお、地表面の加速度応答倍率の共振点は、 $\alpha$ のわずかな変化によって大きく低周波側へ移動することも明らかにした。

(4) Hardin 形の減衰定数の非線形度パラメーター  $\alpha_c$ を増加させた場合、地表面の加速度応答倍率から求まる共振点はあまり変動せず、応答倍率が減少する。 $\alpha_c$ を一定に保ち  $\alpha_u$ を増加させると共振点が低周波側へ移行するだけでなく応答倍率も減少する。

(5) 入力の強度が増加すると、地表面の加速度応答倍率は減少し共振点は低周波側へ移行する。また、表層地盤内のひずみ振幅の分布形状は、入力強度の増大にもなっかなり変化するが、せん断応力振幅の分布形状は線形の場合と相似である。

(6) 不均質性を考慮した場合の加速度応答倍率ならびにひずみ振幅の入力に対する倍率は、均質な場合のものに比べてかなり異なったものになるが、せん断応力振幅の倍率は両者の間であまり顕著な差を見出すことは

できない。

以上が本研究における結果であるが、表層地盤の震動特性は、地盤を構成する土の動的応力～ひずみ関係をどのように設定するかによって、大きく変化する。特に減衰特性の評価についての詳しい考察がなされなければならないと考えられる。なお、ここでは基盤層から定常な単一の調和波動が入射する場合、表層を同じ周波数の強制波動が伝播するとして解を求めてきたが、解の安定性についてはほとんど考察を加えなかったし、高調波ならびに分数調和波動の伝播問題も今後の問題として残されている。また、地震波動は非定常非調和波動と考えられるが、このような波動に対して、ここで求めた解析手法を適用するためには、式(1)に現われる  $r_0(Z)$  をどのように推定するかが問題となる。 $r_0(Z)$  の値として地盤内に発生するひずみの2乗平均値の定数倍を用いることも一手法であるが、このためには土の動的履歴特性を忠実に追った地震時の地盤内ひずみの値が必要になる。今後このような面についての研究を行うつもりである。

最後に本研究を行うにあたり、地盤内の非線形度パラメーターの推定に関し有益なご助言をいただいた、京都大学教授 柴田 徹先生に謝意を表わします。

#### 参考文献

- 1) 後藤尚男・佐藤忠信：飽和した多孔質弾性体中を伝播する非線形波動について、土木学会論文報告集，第209号，pp. 37-50, 1973.
- 2) Toki, K. and T. Sato: One-Dimensional Acceleration Waves in a Mixture of 2 Phases., Theoretical and Applied Mechanics, Vol. 22, pp. 89-102, 1974.
- 3) Caughey, T.K.: Forced Oscillations of a Semi-Infinite Rod Exhibiting Weak Bilinear Hysteresis., Journal of Applied Mechanics, pp. 644-648, 1960.
- 4) Seed, H.B. and I.M. Idris: Soil Moduli and Damping Factors for Dynamic Response Analysis., Report No. EERC 70-10, Col. of Eng., Univ. of Calif. Berkeley, 1970.
- 5) Hardin, B.O. and V.P. Drnevich: Shear Modulus and Damping in Soils: Measurement and Parameter Effects., Jour. SMF Div., Proc. ASCE, Vol. 98, SM 6, pp. 603-624, 1972.
- 6) 柴田 徹・D.S. Soelarno: 繰返し載荷を受ける土の挙動，第9回土質工学研究発表会講演集，pp. 351-354, 1974.
- 7) 柴田 徹・D.S. Soelarno: 砂の動的応力・ひずみ特性，土木学会第29回年次学術講演概要集第3部，pp. 148-149, 1974.
- 8) 栗林栄一・岩崎敏男・龍岡文夫・堀内俊一：土の動的変形特性—共振土質試験機による測定—，土木研究所資料第912号，1974.
- 9) Yoshizawa, S., Tanaka, T. and K. Kanai: Some Features of Strong Underground Earthquake Motions Computed from Observed Surface Records., Bulletin of the Earthquake Research Institute, Univ. of Tokyo, Vol. 46, pp. 667-686, 1968.
- 10) Idriss, I.M. and H.B. Seed: An Analysis of Ground Motions During the 1957 San Francisco Earthquake., Bull. Seism. Soc. Am., Vol. 58, No. 6, pp. 2013-

- 2032, 1968.
- 11) Seed, H.B. and I.M. Idriss : Influence of Soil Condition on Ground Motions During Earthquakes., Jour. SMF Div., Proc. ASCE, Vol. 95, SM 1, pp. 99-137, 1969.
  - 12) 岡本舜三・伯野元彦 : 地盤の非線型振動に関する研究, 第1回日本地震工学シンポジウム論文集, pp. 45-50, 1962.
  - 13) 藤野陽三・伯野元彦 : 強震特性に関する一つのシミュレーション, 土木学会第29回年次学術講演会講演概要集第1部, pp. 547-548, 1974.
  - 14) Hardin, B.O. and V.P. Drnevich : Shear Modulus and Damping in Soils : Design Equation and Curves., Jour. SMF Div., Proc. ASCE, Vol. 98, SM 7, pp. 667-692, 1972.
  - 15) 土岐憲三・佐藤忠信 : 非線形挙動をする表層地盤内における地震時応力, 京都大学防災研究所年報 17号 B, pp. 403-415, 1974.
  - 16) 堀 正幸 : 不均質弾性地盤の震動特性に関する近似解法について, 第8回土質工学研究発表会講演集, pp. 629-632, 1973.
  - 17) Jacobsen, L.S. : Damping in Composite Structures., Proc. 2nd World Conf. on Earthquake Eng., Vol. II, pp. 1029-1044, 1960.
  - 18) 後藤廉平・平井西夫・花井哲也 : レオロジーとその応用, 共立出版, 1962.
  - 19) Jennings, P.C. : Periodic Response of a General Yielding Structure., Jour. EM Div., Proc. ASCE, Vol. 54, EM 2, pp. 131-166, 1964.
  - 20) Hardin, B.O. : The Nature of Damping in Sands., Jour. SMF Div., Proc. ASCE, Vol. 90, pp. 63-67, 1965.
  - 21) 柴田 徹・佐藤忠信・酒井和広 : 砂質土中を伝播するS波速度の応力依存性, 第9回土質工学研究発表会講演集, pp. 407-410, 1974.

(1975. 8. 26・受付)