

線形粘弾性基礎上のはりの解析

SOLUTIONS FOR BEAMS ON LINEAR VISCO-ELASTIC FOUNDATION

園田 恵一郎*・小林 治俊**・石尾 年光***

By Keiichiro SONODA, Harutoshi KOBAYASHI and Toshimitsu ISHIO

1. ま え が き

線形ばね基礎、いわゆる Winkler 基礎上のはりの解析の問題は、林¹⁾、Hetényi²⁾の研究に代表されるように、今日すでに解決済であるだろう。そして鉛直ばねのほかにせん断ばねを考慮した基礎、または半無限弾性地盤上のはりの問題もすでに数多く研究されている^{3)~5)}。しかしながら、これに比してはりのたわみと基礎反力の関係が時間に依存する、いわゆる粘弾性基礎上のはりの研究は意外に少なく、われわれの知る限りでは、無限長ばりに対する Freudenthal・Lorsch の研究⁶⁾、有限長ばりに対する Lisowski の差分法による数値解析の研究⁷⁾などわずかあるにすぎない。

本論文は、線形粘弾性基礎上にあり種々な両端支持条件をもつ有限長ばりのたわみ、曲げモーメントおよび基礎反力の解式を、はりの曲げ自由振動において知られている固有関数^{8),9)}を用いて誘導したものである。取り扱った基礎の粘弾性モデルは Freudenthal らが用いた3種のモデル、すなわち Kelvin (Voigt) モデル、Maxwell モデルそして実際の基礎のクリープや応力緩和をより良く表わし得る Standard Solid モデル(三要素モデル)である。はりの曲げ剛性は、はりの全長にわたり一定とし、荷重は、時間に依存せず一定であるとした。

本論文において各種の荷重に対する解を固有関数よりなる級数によって与えた。この級数の収束性は、たわみに関しては非常に優れており、最初の数項をとるだけで十分であるが、曲げモーメントに関しては荷重分布幅によって影響され、集中荷重の場合は 50 項位採る必要があることがわかった。

2. 記 号

- x : 座標
 l : はりの長さ
 y : はりのたわみ、粘弾性モデルにおける変形
 EI : はりの曲げ剛性
 M_x : はりの曲げモーメント
 q : 分布荷重
 q_m : 荷重により定まる係数(荷重展開係数)
 q_0 : 等分布荷重
 P : 集中荷重
 M_0 : モーメント荷重
 p : 基礎反力、粘弾性モデルにおける作用力
 a, b : 両端自由な境界条件の場合に用い、式(A.10)で与えられる係数
 k, k_1, k_2 : ばね定数 (kg/cm²)
 K, K_1, K_2 : 長さの次元をもつパラメーター
 η : 粘性係数 (kg・sec/cm²)
 τ : 遅延または緩和時間 (= η/k)
 t : 時間 (sec)
 $\{y\}_{\text{winkler}}$: Winkler 基礎の場合のたわみ
 $\{p\}_{\text{winkler}}$: Winkler 基礎の場合の基礎反力
 ϕ_m : 境界条件を満足する固有関数
 α_m : 固有値

本論文中 ϕ_m' , ϕ_m'' , ϕ_m''' は ϕ_m を $\alpha_m x/l$ に関してそれぞれ 1, 2, 3 回微分したものを意味する。

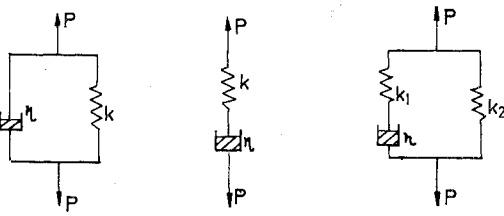
3. 線形粘弾性の力学モデル

よく知られているように、粘弾性挙動は弾性を表わすばねと粘性を表わすダッシュポットを基本要素とする力学モデルにより表現される。弾性ばねは瞬間的に力に比例した変形を生じ、ダッシュポットは任意の瞬間において力に比例した速度を生じると仮定される。本論文にお

* 正会員 工修 大阪市立大学助教授 工学部土木工学科

** 正会員 工修 大阪市立大学助手 工学部土木工学科

*** 大阪市立大学研究員 工学部土木工学科



(a) Kelvin Model (b) Maxwell Model (c) Standard Solid Model

図-1 線形粘弾性モデル

いて用いられる基礎の線形粘弾性モデルは、図-1 に示されている3種のモデルである。これらはばねとダッシュポットの最も単純な組み合わせよりなるものである。以下に各モデルにおける力 p と変形 y の関係および初期条件を記す。

(1) Kelvin モデル (Voigt モデル)

力 p は2つの要素の変形が等しくなるようばねとダッシュポットに分配されることより、

$$p = ky + \eta \frac{dy}{dt} = k \left(y + \tau \frac{dy}{dt} \right) \dots\dots\dots (1)$$

ここで、 $\tau = \eta/k$ は遅延時間であり、変形の速さの減衰率を表わす。初期条件は、

$$y = 0, \text{ at } t = 0 \dots\dots\dots (2)$$

(2) Maxwell モデル

2つの要素の変形の和が全体の変形であるから、

$$\frac{dy}{dt} = \frac{1}{k} \frac{dp}{dt} + \frac{1}{\eta} p = \frac{1}{k} \left(\frac{dp}{dt} + \frac{1}{\tau} p \right) \dots\dots (3)$$

ここで、 $\tau = \eta/k$ は緩和時間であり、力の減衰率を表わす。初期条件は、

$$p = ky, \text{ at } t = 0 \dots\dots\dots (4)$$

(3) Standard Solid モデル (3要素モデル)

Maxwell 要素、ばね要素へ分配される力を p_1, p_2 とし、 $p = p_1 + p_2$ 、式 (3) および $p_2 = k_2 y$ を用いれば、

$$\frac{dy}{dt} = \frac{1}{k_1} \frac{dp_1}{dt} + \frac{1}{\eta} p_1 = \frac{1}{k_2} \frac{dp_2}{dt} = \frac{1}{k_2} \left(\frac{dp}{dt} - \frac{dp_1}{dt} \right)$$

となり、これより次式が得られる。

$$\frac{dp_1}{dt} + \frac{1}{\tau} p_1 = \frac{\eta}{k_2 \tau} \frac{dp}{dt}$$

ここで、 $\tau = \eta \left(\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} \right)$ である。

次に、初期条件：

$$p = (k_1 + k_2) y, \text{ at } t = 0 \dots\dots\dots (5)$$

に留意して上の2つの微分方程式を解くことにより、次式が得られる。

$$y = \frac{\eta}{k_1 k_2 \tau} \left\{ p + \frac{k_1}{k_2 \tau} e^{-t/\tau} \int_0^t p e^{t'/\tau} dt \right\} \dots\dots\dots (6)$$

4. 線形粘弾性基礎上のはりの微分方程式

基礎反力 $p(x, t)$ を考慮したはりの微分方程式は、

$$EI \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = q(x) - p(x, t) \dots\dots\dots (7)$$

によって表わされる。ただし EI ははりの曲げ剛性、 $q(x)$ は分布荷重強度であり、本論文においては時間に依存しないものとする。ここで $p = ky$ とすれば、ばね定数 k の Winkler 基礎の場合に相当する。図-2 にみられる粘弾性基礎の場合には、基礎反力とたわみとの間に 3. において求めた力と変形の関係がある。それゆえ各基礎モデルの場合に対応するはりの微分方程式は、それらの関係式、式 (1), (3), (6) を上の式 (7) と関連づけることにより導くことができる。

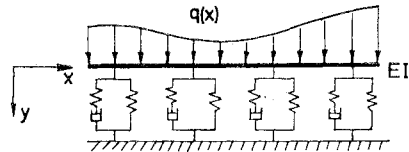


図-2 線形粘弾性基礎 (Standard Solid モデル) 上のはり

(1) Kelvin モデルの場合

式 (1) を式 (7) に代入することにより、たわみ y で表わされた微分方程式が次のように得られる。

$$\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \frac{\tau}{K^4} \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{1}{K^4} y = \frac{q}{EI} \dots\dots\dots (8)$$

ここで、

$$K^4 = EI/k, \tau = \eta/k \dots\dots\dots (9)$$

式 (8) の同次解は、 $y = f(x)g(t)$ にて変数分離することにより次のように求められる。

$$y_0 = (a_0 + b_0 x + c_0 x^2 + d_0 x^3) e^{-t/\tau} + \sum_{m=1}^{\infty} X_m \exp \left[- \left\{ 1 + \left(\frac{\tau m K}{l} \right)^4 \right\} \frac{t}{\tau} \right] \dots (10)$$

ここで、

$$X_m = A_m \cosh r_m x/l + B_m \sinh r_m x/l + C_m \cos r_m x/l + D_m \sin (r_m x/l)$$

であり、 $a_0, \dots, A_m, \dots, D_m$ は積分定数、 r_m は任意の正の定数。

次に特解は、式 (8) より時間 t に関係のない項として考えられる微分方程式：

$$\frac{d^4 y}{dx^4} + \frac{1}{K^4} y = \frac{q}{EI}$$

の解として求めることができる。ところで、この式はばね定数 k の Winkler 基礎上のはりの微分方程式であり、物理的には $t = \infty$ の最終状態において成立するものである。これを解くにあたり、同次解にみられる X_m の式型と種々な境界条件の場合を想定し、付録 A-1 に示

した固有関数 $\phi_m(x)$ による解法を採用した。それで式 (A. 12) が特解となり、一般解は次式で与えられる。

$$y = y_0 + \{y\}_{\text{winkler}} = y_0 + \frac{1}{k}(a+bx) + \frac{1}{EI} \sum_{m=1}^{\infty} q_m \phi_m(x) \cdot \left\{ \left(\frac{\alpha_m}{l} \right)^4 + \frac{1}{K^4} \right\} \dots (11)$$

(2) Maxwell モデルの場合

式 (3) を x について、式 (7) を t について微分を行い、しかるのちに両者を組み合わせると基礎反力 p で表わされた微分方程式が次のように得られる。

$$K^4 \frac{\partial^5 p}{\partial t \partial x^4} + \frac{K^4}{\tau} \frac{\partial^4 p}{\partial x^4} + \frac{\partial p}{\partial t} = 0 \dots (12)$$

ここで、
 $K^4 = EI/k, \tau = \eta/k \dots (13)$

この同次形微分方程式の解は、 $p = f(x)g(t)$ にて変数分離することにより次のように求められる。

$$p = a_0 + b_0 x + c_0 x^2 + d_0 x^3 + \sum_{m=1}^{\infty} X_m \cdot \exp \left\{ - \frac{1}{1 + \left(\frac{l}{r_m K} \right)^4} \cdot \frac{t}{\tau} \right\} \dots (14)$$

ここで、
 $X_m = A_m \cosh r_m x/l + B_m \sinh r_m x/l + C_m \cos r_m x/l + D_m \sin r_m x/l$

であり、 $a_0, \dots, A_m, \dots, D_m$ は積分定数、 r_m は任意の正の定数。

これよりたわみ式は、式 (3) を t について積分し、それに式 (14) を代入することにより求められて、

$$y = \frac{1}{k} p + \frac{1}{\eta} \int_0^t p dt = 1/k \cdot (a_0 + b_0 x + c_0 x^2 + d_0 x^3) (1+t/\tau) + \frac{1}{k} \sum_{m=1}^{\infty} X_m \left[1 + \left(\frac{l}{r_m K} \right)^4 \left[1 - \exp \cdot \left\{ \frac{-1}{1 + \left(\frac{l}{r_m K} \right)^4} \cdot \frac{t}{\tau} \right\} \right] \right] \dots (15)$$

と表わされる。

(3) Standard Solid モデルの場合

式 (6) を式 (7) に代入し、その後 t について (微分し積分項を消去することにより、基礎反力 p で表わされた微分方程式が次のように得られる)。

$$K^4 \frac{\partial^5 p}{\partial t \partial x^4} + K^4 \frac{k_1}{\eta} \frac{\partial^4 p}{\partial x^4} + \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{p}{\tau} = \frac{q}{\tau} \dots (16)$$

ここで、
 $K^4 = EI/(k_1 + k_2) = EI\eta/k_1 k_2 \tau \dots (17)$

式 (16) の同次解は、 $p = f(x)g(t)$ にて変数分離することにより次のように求められる。

$$p_0 = (a_0 + b_0 x + c_0 x^2 + d_0 x^3) e^{-t/\tau} + \sum_{m=1}^{\infty} X_m \cdot \exp \left\{ - \frac{1 + \left(\frac{K_2}{K_1} \right)^4 + \left(\frac{l}{r_m K} \right)^4}{1 + \left(\frac{l}{r_m K} \right)^4} \cdot \frac{t}{\tau} \right\} \dots (18)$$

ここで、
 $K_1^4 = EI/k_1, K_2^4 = EI/k_2 \dots (19)$

$$X_m = A_m \cosh r_m x/l + B_m \sinh r_m x/l + C_m \cos r_m x/l + D_m \sin r_m x/l$$

であり、 $a_0, \dots, A_m, \dots, D_m$ は積分定数、 r_m は任意の正の定数。

次に特解は、式 (16) より時間 t に関係のない項として考えられる微分方程式：

$$K_2^4 \frac{d^4 p}{dx^4} + p = q$$

の解として求めることができる。上式に、 $p = k_2 y$ を代入することによりばね k_2 の Winkler 基礎上のはりの微分方程式になることがわかる。すなわち、 $t = \infty$ の最終状態において成立するものである。この解には、Kelvin モデルの場合と同じく固有関数による解を用いる。それで付録 A-1 の式 (A.13) を用いて一般解は次式で与えられる。

$$p = p_0 + \{p\}_{\text{winkler}, k=k_2} = p_0 + (a+bx) + \frac{1}{K_2^4} \sum_{m=1}^{\infty} q_m \phi_m(x) \cdot \left\{ \left(\frac{\alpha_m}{l} \right)^4 + \frac{1}{K_2^4} \right\} \dots (20)$$

5. 種々な両端支持条件をもつ場合の解

4. において各モデル基礎上のはりのたわみ、もしくは基礎反力が満足せねばならない微分方程式を導き、その一般解を求めた。一般解には、未定積分定数が含まれているので、境界条件より決定せねばならない。

さて、付録 A-1 にみられるような種々の両端条件を満たす固有関数と一般解に含まれる X_m とを比較すれば、いずれも \cosh, \sinh, \cos, \sin の一次結合からなるものであることがわかる。本論文は、この点に着目し Winkler 基礎の場合の解に固有関数を用いることにより、未定積分定数を決定してゆくものである。

(1) Kelvin モデル基礎上のはりの解

$t=0$ における初期条件は、式 (2) を参照し、たわみが 0 となることより、

$$y(x, 0) = 0 \dots (21)$$

式 (11) に $t=0$ を代入し、係数間比較を行うことにより積分定数が各支持条件の場合について求まる。ところでこれらは先に述べた ϕ_m と X_m の関係を考慮すれ

ば、各支持条件の場合を一括して2次のように求めることができる。

$$\left. \begin{aligned} a_0 &= -a/k, \quad b_0 = -b/k, \quad c_0 = d_0 = 0, \quad r_m = \alpha_m, \\ X_m &= -\frac{1}{EI} q_m \phi_m(x) \left/ \left\{ \left(\frac{\alpha_m}{l} \right)^4 + \frac{1}{K^4} \right\} \right. \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (22)$$

これより、たわみ、基礎反力および曲げモーメント、 $\left(M_x = -EI \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right)$ が表-1 のように求められる。

これらの諸量についてその初期 ($t=0$) より最終状態 ($t=\infty$) にいたる変化を考察する。 $t=0$ において、たわみが0となり、基礎反力が荷重 $q(x)$ に等しくなることがわかる。つまり、 $t=0$ の瞬間では剛基礎上のはりとしての挙動を示し、荷重は直接的に基礎へ伝えられることを意味している。 $t=\infty$ の状態は、いずれの量も Winkler 基礎上の場合に相当している。 $0 \leq t \leq \infty$ にあっては、本質的にたわみの遅延挙動が支配している。

(2) Maxwell モデル基礎上のはりの解

初期条件は、たわみが Winkler 基礎上の場合に等しいことである：

$$y(x, 0) = \{y\}_{\text{Winkler}} \dots\dots\dots (23)$$

式 (15)、式 (A.12) を用いることにより積分定数が決まり、さらに X_m が次のように求まる。

$$\left. \begin{aligned} a_0 &= a, \quad b_0 = b, \quad c_0 = d_0 = 0, \quad r_m = \alpha_m, \\ X_m &= \frac{k}{EI} q_m \phi_m(x) \left/ \left\{ \left(\frac{\alpha_m}{l} \right)^4 + \frac{1}{K^4} \right\} \right. \end{aligned} \right\} \dots\dots (24)$$

これらにより、たわみ、基礎反力および曲げモーメントが表-2 のように求められる。

これらの諸量の最終状態 ($t=\infty$) を考察する。

a) 両端自由の場合

$$\begin{aligned} y(x, \infty) &= \frac{1}{EI} \sum_{m=1}^{\infty} q_m \phi_m(x) \left/ \left(\frac{\alpha_m}{l} \right)^4 \right. \\ &\quad + \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{k} (a+bx) \left(1 + \frac{t}{\tau} \right) \\ p(x, \infty) &= a+bx \end{aligned}$$

となり、基礎反力のはりが剛体である場合に等しく、たわみは曲げの効果を伴いつつ線形的に増大し無限大になってゆく。すなわち、はりには floating beam としての挙動を示すことになるが、これは Maxwell モデルがもつ粘性流体としての性質からして当然の帰結である。

b) 他の支持条件の場合

$a=b=0$ であるから、

$$y(x, \infty) = \frac{1}{EI} \sum_{m=1}^{\infty} q_m \phi_m(x) \left/ \left(\frac{\alpha_m}{l} \right)^4 \right., \quad p(x, \infty) = 0$$

基礎反力はすべて緩和され、両端にて支持されている結果 floating beam にはならず、単なる弾性ばりとなる。

$0 \leq t \leq \infty$ にあっては基礎反力の緩和が支配的であ

る。

(3) Standard Solid モデル基礎上のはりの解

初期条件は、基礎反力がばね k_1, k_2 を並列に配置させた Winkler 基礎の場合に等しいことである。よってばね係数を $k (=k_1+k_2)$ として付録 A-1、式 (A.13) を用いれば条件式を

$$p(x, 0) = \{p\}_{\text{Winkler}, k=k_1+k_2} \dots\dots\dots (25)$$

と書き表わすことができる。左辺には式 (20) を用いればよく、これより積分定数、そして X_m を次のように求めることができる。

$$\left. \begin{aligned} a_0 &= b_0 = c_0 = d_0 = 0, \quad r_m = \alpha_m, \\ X_m &= \left(\frac{\alpha_m}{l} \right)^4 q_m \phi_m(x) \left/ \left[K_1^4 \left\{ \left(\frac{\alpha_m}{l} \right)^4 \right\} \right. \right. \end{aligned} \right\} \dots\dots (26)$$

表-1 Kelvin モデル基礎上のはりの解式

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{k} (a+bx) (1-e^{-t/\tau}) + \frac{1}{EI} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{q_m \phi_m(x)}{\left\{ \left(\frac{\alpha_m}{l} \right)^4 + \frac{1}{K^4} \right\}} [1-T(t)] \\ p &= (a+bx) + \frac{1}{K^4} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{q_m \phi_m(x)}{\left\{ \left(\frac{\alpha_m}{l} \right)^4 + \frac{1}{K^4} \right\}} \left[1 + \left(\frac{\alpha_m K}{l} \right)^4 T(t) \right] \\ M_x &= -\frac{1}{l^2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\alpha_m^2 q_m \phi_m''(x)}{\left\{ \left(\frac{\alpha_m}{l} \right)^4 + \frac{1}{K^4} \right\}} [1-T(t)] \\ \text{ただし、} T(t) &= \exp \left\{ - \left[1 + \left(\frac{\alpha_m K}{l} \right)^4 \right] \frac{t}{\tau} \right\} \end{aligned}$$

表-2 Maxwell モデル基礎上のはりの解式

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{k} (a+bx) \left(1 + \frac{t}{\tau} \right) + \frac{1}{EI} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{q_m \phi_m(x)}{\left\{ \left(\frac{\alpha_m}{l} \right)^4 + \frac{1}{K^4} \right\}} \\ &\quad \cdot \left[1 + \left(\frac{l}{\alpha_m K} \right)^4 (1-T(t)) \right] \\ p &= (a+bx) + \frac{1}{K^4} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{q_m \phi_m(x)}{\left\{ \left(\frac{\alpha_m}{l} \right)^4 + \frac{1}{K^4} \right\}} T(t) \\ M_x &= -\frac{1}{l^2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\alpha_m^2 q_m \phi_m''(x)}{\left\{ \left(\frac{\alpha_m}{l} \right)^4 + \frac{1}{K^4} \right\}} \left[1 + \left(\frac{l}{\alpha_m K} \right)^4 (1-T(t)) \right] \\ \text{ただし、} T(t) &= \exp \left\{ - \frac{1}{1 + \left(\frac{l}{\alpha_m K} \right)^4} \frac{t}{\tau} \right\} \end{aligned}$$

表-3 Standard Solid モデル基礎上のはりの解式

$$\begin{aligned} y &= \frac{a+bx}{k_1+k_2} \left\{ 1 + \frac{k_1}{k_2} (1-e^{-t/\tau}) \right\} + \frac{1}{EI} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{q_m \phi_m(x)}{\left\{ \left(\frac{\alpha_m}{l} \right)^4 + \frac{1}{K_2^4} \right\}} \\ &\quad \cdot \left[1 - \frac{1}{K_1^4 \left\{ \left(\frac{\alpha_m}{l} \right)^4 + \frac{1}{K^4} \right\}} T(t) \right] \\ p &= (a+bx) + \frac{1}{K_2^4} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{q_m \phi_m(x)}{\left\{ \left(\frac{\alpha_m}{l} \right)^4 + \frac{1}{K_2^4} \right\}} \\ &\quad \cdot \left[1 + \frac{K_2^4}{K_1^4} \frac{\left(\frac{\alpha_m}{l} \right)^4}{\left(\frac{\alpha_m}{l} \right)^4 + \frac{1}{K^4}} T(t) \right] \\ M_x &= -\frac{1}{l^2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\alpha_m^2 q_m \phi_m''(x)}{\left\{ \left(\frac{\alpha_m}{l} \right)^4 + \frac{1}{K_2^4} \right\}} \left[1 - \frac{1}{K_1^4 \left\{ \left(\frac{\alpha_m}{l} \right)^4 + \frac{1}{K^4} \right\}} T(t) \right] \\ \text{ただし、} T(t) &= \exp \left\{ - \frac{1 + \left(\frac{K_2}{K_1} \right)^4 + \left(\frac{l}{\alpha_m K} \right)^4}{1 + \left(\frac{l}{\alpha_m K} \right)^4} \frac{t}{\tau} \right\} \end{aligned}$$

$$+ \frac{1}{K_2^4} \left\{ \left(\frac{\alpha_m}{l} \right)^4 + \frac{1}{K_2^4} \right\} \right\}$$

これを式 (20) に代入し基礎反力 p を求めたのち、それを式 (6) に代入し積分を実行することによりたわみ式が得られる。これらを表-3 に記す。

$0 \leq t \leq \infty$ におけるはりの挙動は、基礎のばね係数が $k (=k_1+k_2)$ より k_2 に変化するときの、たわみのクープ性状と基礎反力の緩和とである。

6. 数値計算例

5. において、各粘弾性基礎上のはりの解式を与え、それをもとに初期から最終状態へのはりと基礎の挙動を考察したが、ここでは両端自由なはりでスパンの中央点に集中荷重が載荷された場合を例にとり、数値計算を行い検討を加える。

本例で用いるパラメーターは次のとおりである。

3つのモデルにおけるばね定数は、すべて等しいものとする： $k=k_1=k_2$ 。また、 $(K/L)^4 = (EI/k)/l^4 = 10^{-3}$ とする。タイムスケールについては、無次元量 t/τ をパラメーターとして計算を行う。

図-3, 4, 5 は、各基礎上の場合におけるたわみ、基礎反力そして曲げモーメントを時刻 $t/\tau=0$ より $t/\tau=\infty$ における変化について描いたものである。図-6 は、集中荷重の載荷点下のたわみと基礎反力の変化を、時刻 $t/$

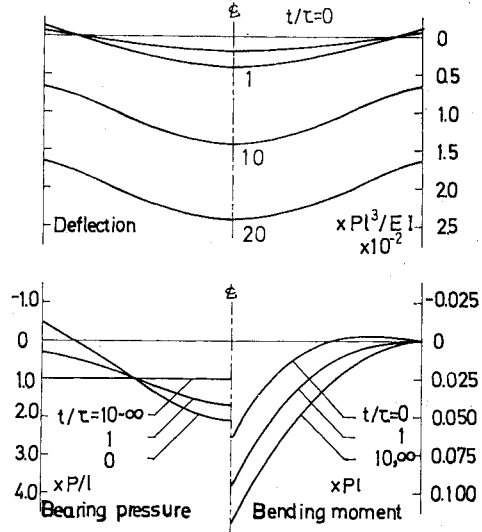
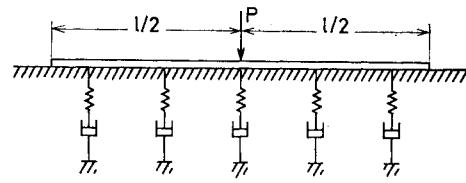


図-4 Maxwell モデル基礎上のはりのたわみ、曲げモーメントおよび基礎反力

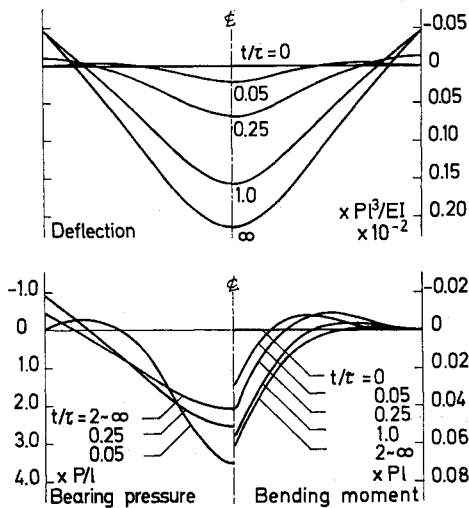
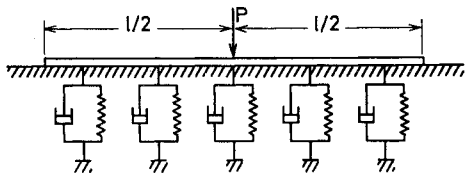


図-3 Kelvin モデル基礎上のはりのたわみ、曲げモーメントおよび基礎反力

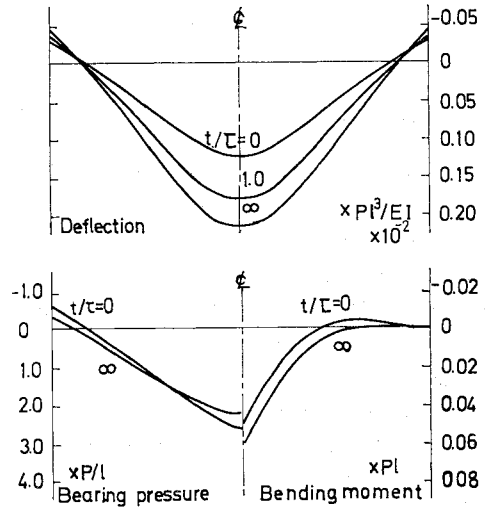
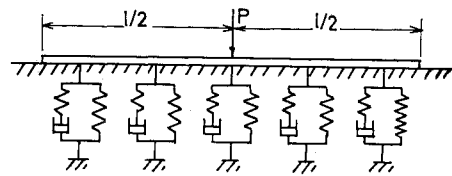


図-5 Standard Solid モデル基礎上のはりのたわみ、曲げモーメントおよび基礎反力

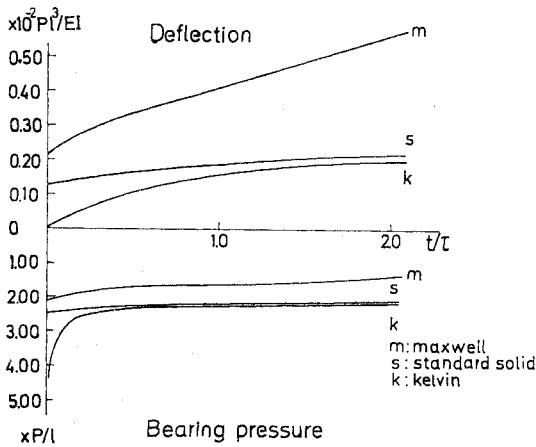


図-6 各モデル基礎上のはりのスパン中央のたわみ、基礎反力-時間曲線

$t/\tau=0$ より $t/\tau=2$ まで描いたものである。これらの図より以下のことが考察される。

(1) Kelvin モデル基礎

$t/\tau=0$ においてたわみ、曲げモーメントが0であり、基礎反力は荷重点下のみ値をもち、それは無限大となる(図-3には描いていない)。これは載荷の瞬間には完全剛基礎上のはりの挙動であることを示すものである。基礎反力には、荷重をうけた後ただちに負になる領域が現われ、 $t/\tau=\infty$ にいたるまではりの両端付近にその領域が存在することになる。この負の反力の生じる結果、わずかながらたわみには浮き上がる傾向がみられる。曲げモーメントは、時刻にかかわらずはりの大部分のところ負の値をとることがわかる。初期状態以後の挙動は、たわみや曲げモーメントはゆるやかに収束してゆき、基礎反力は急速な収束性をみせているが、いずれも $t/\tau=2$ でほぼ $t/\tau=\infty$ の Winkler 基礎の場合に収束するようである。

(2) Maxwell モデル基礎

いずれの値も $t/\tau=0$ では Winkler 基礎の場合に等しい。たわみは時間とともに線形的に増大しており、いわゆる floating beam としてのふるまいを示している。基礎反力では両端付近における負の反力も時間とともに消失し、緩和現象を伴いつつ最終的には、はりが剛体であるとした場合の値に収束している。これは、ほぼ $t/\tau=10$ で達せられる。曲げモーメントは初期より最終状態にかけて増大する傾向を示しており、はりの中央点においては $t/\tau=0$ における値の約 100% の増加が認められる。基礎反力と同じように、曲げモーメントも $t/\tau=10$ においてほぼ最終値に収束するようである。

(3) Standard Solid モデル基礎

はり全体の挙動は、ばね係数が $k(=k_1+k_2)$ である Winkler 基礎の場合から、 k_2 のそれへの変化であることは前に述べたが、図からもわかるようにたわみ、基礎反力、曲げモーメントの変化の度合いは少ない。特に基礎反力、曲げモーメントは $t/\tau=1\sim 2$ においてその最終値に収束するようである。たわみのクリープ性状、基礎反力の緩和が非常にゆるやかに行われることを示しているものである。

最後に、本数値計算における級数の収束性とその精度について言及しておく。両端自由な支持条件で、(a) スパン中央に集中荷重が作用するとき、(b) スパンの中央に幅 $l/3$ にわたり等分布荷重が作用するときの Winkler 基礎の場合についてスパン中央のたわみと曲げモーメントの値を Hetényi の解式²⁾より求めた値(正確値)と本論文における級数解法による値とを比較したものが表-4である。これより、たわみについては収束性は非常に優れており、5項まで採れば十分の精度が得られる。曲げモーメントについては、荷重の分布幅が広い場合には比較的収束性が良いが、集中荷重の場合は悪く 50 項ぐらい採る必要がある。

表-4 級数の収束状況

項数 m	(a) 集中荷重		(b) 部分等分布荷重	
	$(y)_{x=l/2}$	$(M_x)_{x=l/2}$	$(y)_{x=l/2}$	$(M_x)_{x=l/2}$
1	0.1984	0.02879	0.6182	0.00833
2	0.2114	0.04427	0.6413	0.01108
3	0.2137	0.05089	0.6419	0.01128
4	0.2143	0.05448	0.6415	0.01106
5	0.2146	0.05673	0.6414	0.01092
10	0.2148	0.06141	0.6414	0.01096
20	0.2148	0.06384	0.6414	0.01095
30	0.2148	0.06467	0.6414	0.01095
40	0.2148	0.06509	0.6414	0.01095
50	0.2148	0.06534	0.6414	0.01095
Exact ²⁾	0.2148	0.06634	0.6414	0.01095
単位	$10^{-2} Pl^3/EI$	Pl	q/k	ql^2

注) 対称性により項数 (m) は 1, 3, 5, ……をとっている。

7. むすび

本論文において、線形粘弾性基礎上の有限長ばりのたわみ、基礎反力および曲げモーメント式を誘導した。ここで取り扱った基礎の粘弾性モデルは、Kelvin (Voigt), Maxwellそして Standard Solid (3要素モデル) の3種類である。単純支持、固定および自由の各支持条件をもつはりの各種の荷重に対する解式を、固有関数からなる級数によって簡潔にまとめることができた。

参 考 文 献

- 1) Hayashi, K.: Theorie des Trägers auf elastischer

Unterlage und ihre Anwendung auf den Tiefbau, Verlag von Julius Springer, Berlin, 1921.

- 2) Hetényi, M.: Beams on Elastic Foundation, The Univ. of Michigan Press, Ann Arbor, Mich., 1946.
- 3) Kerr, A.D.: Elastic and Viscoelastic Foundation Models, Journal of Applied Mechanics, Vol. 31, Trans. ASME, Vol. 86, pp. 491~498, 1964.
- 4) Wieghardt, K.: Über den Balken auf nachgiebiger Unterlage, Z.A.M.M., Bd. 2, Heft 3, ss. 165~184, 1922.
- 5) Vlasov, V.Z. and U.N. Leontév: Beams, Plates and Shells on Elastic Foundations, Israel Program for Scientific Translations, Jerusalem, 1966.
- 6) Freudenthal, A.M. and H.G. Lorsch: The Infinite Elastic Beam on a Linear Viscoelastic Foundation, Journal of the Engineering Mechanics Division, Proc. ASCE, Vol. 83, No. EM 1, pp. 1158-1~1158-22, 1957.
- 7) Lisowski, A.: Bending of Elastic Beams on Visco-Elastic Foundation (in Polish), Archiwum Inzynierii Ladowej, Vol. 17, pp. 621~636, 1971.
- 8) Timoshenko, S. (谷下市松・渡辺 茂 訳): 工業振動学, 東京図書出版, 1956.
- 9) 安部清孝: 実用フーリエ級数, (増補改訂・11 刷), 森北出版, pp. 124~161, 1969.
- 10) Hetényi, M.: Series Solution for beams on elastic foundation, Journal of Applied Mechanics, Vol. 38, Trans. ASME, Vol. 93, pp. 507~514, 1971.

【付 録】

A-1 固有関数による Winkler 基礎上のはりの解

はりの曲げ自由振動の微分方程式より導かれる固有関数を用いることにより, 静的なはりの曲げ問題が解析され得ることが知られている^{8),9)}. この固有関数 $\phi_m(x)$ は次のような性質をもつものである.

- (i) はりの境界条件を満足する.
- (ii) $d^4\phi_m/dx^4 = c_m\phi_m, c_m: \text{const.}$
- (iii) 直交条件: $\int_0^l \phi_m(x)\phi_n(x)dx = 0, (m \neq n)$
 $= \varphi(\text{const.}), (m = n)$

上の条件を満たす固有関数は, 種々な境界条件に対し次のように与えられる.

- (1) 単純支持-単純支持 (S-S):

$$\phi_m(x) = \sin \alpha_m \frac{x}{l}, \alpha_m = m\pi (m=1, 2, \dots) \dots\dots\dots (A.1)$$

- (2) 固定-固定 (C-C):

$$\phi_m(x) = \cosh \alpha_m \frac{x}{l} - \cos \alpha_m \frac{x}{l} - \lambda_m \left(\sinh \alpha_m \frac{x}{l} - \sin \alpha_m \frac{x}{l} \right) \dots\dots\dots (A.2)$$

ここに, λ_m, α_m は次の関係を満たすものである.

$$\lambda_m = \frac{\cosh \alpha_m - \cos \alpha_m}{\sinh \alpha_m - \sin \alpha_m} = \frac{\sinh \alpha_m + \sin \alpha_m}{\cosh \alpha_m - \cos \alpha_m}$$

$\cosh \alpha_m \cos \alpha_m = 1, \alpha_m$ の値を表-A.1 に示す.

- (3) 固定-ヒンジ (C-S):

$$\phi_m(x) = \cosh \alpha_m \frac{x}{l} - \cos \alpha_m \frac{x}{l} - \lambda_m \left(\sinh \alpha_m \frac{x}{l} - \sin \alpha_m \frac{x}{l} \right) \dots\dots\dots (A.3)$$

ここに, λ_m, α_m は次の関係を満たすものである.

$$\lambda_m = \frac{\cosh \alpha_m - \cos \alpha_m}{\sinh \alpha_m - \sin \alpha_m} = \frac{\cosh \alpha_m + \cos \alpha_m}{\sinh \alpha_m + \sin \alpha_m}$$

$\tan \alpha_m = \tanh \alpha_m, \alpha_m$ の値を表-A.1 に示す.

- (4) 固定-自由 (C-F):

$$\phi_m(x) = \cosh \alpha_m \frac{x}{l} - \cos \alpha_m \frac{x}{l} - \lambda_m \left(\sinh \alpha_m \frac{x}{l} - \sin \alpha_m \frac{x}{l} \right) \dots\dots\dots (A.4)$$

ここに, λ_m, α_m は次の関係を満たすものである.

$$\lambda_m = \frac{\cosh \alpha_m + \cos \alpha_m}{\sinh \alpha_m + \sin \alpha_m} = \frac{\sinh \alpha_m - \sin \alpha_m}{\cosh \alpha_m + \cos \alpha_m}$$

$\cosh \alpha_m \cos \alpha_m = -1, \alpha_m$ の値を表-A.1 に示す.

- (5) 自由-自由 (F-F):

$$\phi_m(x) = \cosh \alpha_m \frac{x}{l} + \cos \alpha_m \frac{x}{l} - \lambda_m \left(\sinh \alpha_m \frac{x}{l} + \sin \alpha_m \frac{x}{l} \right) \dots\dots\dots (A.5)$$

ここに, λ_m, α_m は (2) 固定-固定の場合の λ_m, α_m をもちいる.

また, 積分値 φ の値は, 表-A.2 に示されている.

表-A.1 固有値 α_m

Case <i>m</i>	(1) S-S	(2) C-C (5) F-F	(3) C-S	(4) C-F
1	$m\pi$	4.73004	3.92660	1.87510
2	$(m \geq 1)$	7.85320	7.06858	4.69409
3		10.99561	10.21018	7.85476
4		14.13717	13.35177	10.99554
5		17.27876	16.49336	14.13717
> 5		$(2m+1)\pi/2$	$(4m+1)\pi/4$	$(2m-1)\pi/2$

表-A.2 $\varphi = \int_0^l \phi_m^2 dx$

Case	(1) S-S	(2) C-C	(3) C-S	(4) C-F	(5) F-F
φ	$l/2$	l	l	l	l

さて, Hetényi¹⁰⁾ が上述の固有関数を利用して, 種々な境界条件をもつ Winkler 基礎上のはりの解を求めた方法を記す.

Winkler 基礎上のはりの微分方程式は,

$$EI \frac{d^4 y}{dx^4} = q(x) - ky \dots\dots\dots (A.6)$$

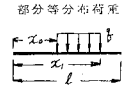
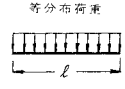
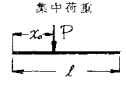
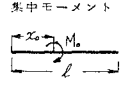
たわみ y と荷重 $q(x)$ は固有関数 $\phi_m(x)$ によって,

$$y = (a+bx)/k + \sum_{m=1}^{\infty} y_m \phi_m(x) \dots\dots\dots (A.7)$$

$$q = \sum_{m=1}^{\infty} q_m \phi_m(x) \dots\dots\dots (A.8)$$

のように表わすことができる。これはすべての支持条件の場合：(1)～(5)を含んで表現されており、式(A.7)の第1項は両端自由な場合におけるはりの剛体変位に関与する付加項であり、他の両端条件の場合：(1)～(4)には省かれるものである。 q_m は、荷重が与えられれば定まる荷重展開係数であって、若干の荷重形に対しA-2で与えられている。未定定数 a, b, y_m は系のポテンシャル・エネルギー Π を最小にする条件：

表—A.3 荷重展開係数 q_m および a, b

荷重形 係数	部分等分布荷重 	等分布荷重 	集中荷重 	集中モーメント 
$\frac{q}{\phi_m}$	$\frac{q}{\phi} \left(\frac{l}{\alpha_m}\right) \left[\phi_m'''\right]_{x_1}^{x_2}$	$\frac{q}{\phi} \left(\frac{l}{\alpha_m}\right) \left[\phi_m'''\right]_0^l$	$\frac{P}{\phi} \phi_m(x_0)$	$\frac{M_0}{\phi} \left(\frac{\phi_m}{l}\right) \phi_m'(x_0)$
a	$q \left(\frac{x_2-x_1}{l}\right) \left(1-3\frac{x_1+x_2}{l}\right)$	q	$\frac{2P}{l} \left(2-3\frac{x_0}{l}\right)$	$-6\frac{M_0}{l^2}$
b	$\frac{6q}{l} \left(\frac{x_2-x_1}{l}\right) \left(-1+\frac{x_1+x_2}{l}\right)$	0	$\frac{6P}{l^2} \left(-1+2\frac{x_0}{l}\right)$	$12\frac{M_0}{l^3}$

注) a, b は両端自由の場合のみ用いられる。

$$\Pi = \frac{EI}{2} \int_0^l \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 dx + \frac{k}{2} \int_0^l y^2 dx - \int_0^l q(x)y dx + \frac{1}{K^4} \sum_{m=1}^{\infty} q_m \phi_m(x) \left\{ \left(\frac{\alpha_m}{l}\right)^4 + \frac{1}{K^4} \right\} \dots\dots\dots (A.13)$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial a} = 0, \frac{\partial \Pi}{\partial b} = 0, \frac{\partial \Pi}{\partial y_m} = 0 \dots\dots\dots (A.9)$$

となる。

より次のように求められる。

A-2 荷重展開係数 q_m

$$a = \frac{2}{l} (2s_1 - 3s_2), \quad b = \frac{6}{l^2} (-s_1 + 2s_2)$$

ただし、

$$s_1 = \int_0^l q(x) dx, \quad s_2 = \frac{1}{l} \int_0^l xq(x) dx \dots\dots\dots (A.10)$$

荷重 $q(x)$ は、固有関数 $\phi_m(x)$ を用いれば、はりの区間 $(0, l)$ にて式(A.8)のように表わされる。式(A.8)の両辺に $\phi_m(x)$ を乗じ、区間 $(0, l)$ にて積分し、 $\phi_m(x)$ の直交性を利用することにより q_m が次のように得られる。

$$y_m = \frac{q_m}{EI} \left\{ \left(\frac{\alpha_m}{l}\right)^4 + \frac{1}{K^4} \right\}, \quad K^4 = EI/k \dots\dots\dots (A.11)$$

したがって、たわみは式(A.10)、(A.11)を式(A.7)に代入することにより、基礎反力 p は $p=k y$ より得ることができて、これらを、 $\{y\}_{\text{winkler}}, \{p\}_{\text{winkler}}$ と書けば、

$$q_m = \int_0^l q(x) \phi_m(x) dx \Big/ \int_0^l \phi_m^2(x) dx \dots\dots (A.14)$$

分母の積分値 ϕ は、表—A.2 に与えられている。

荷重の分布形が具体的に与えられれば、式(A.14)の積分を行うことにより荷重展開係数 q_m が決定される⁹⁾。ここでは、部分等分布荷重、等分布荷重、集中荷重そして集中モーメントの場合について q_m を求めた。またこれらの荷重に対する a, b の値も求め、表—A.3 にまとめた。

ここで、 ϕ_m', ϕ_m''' は ϕ_m を $\alpha_m x/l$ についてそれぞれ1回、3回微分したものを意味する。この表以外の荷重形については、これらの基本荷重の重ね合わせにより求めることが可能である。

$$\{y\}_{\text{winkler}} = \frac{1}{k} (a+bx) + \frac{1}{EI} \sum_{m=1}^{\infty} q_m \phi_m(x) \left\{ \left(\frac{\alpha_m}{l}\right)^4 + \frac{1}{K^4} \right\} \dots\dots\dots (A.12)$$

$$\{p\}_{\text{winkler}} = (a+bx)$$

(1975.7.15・受付)