

ひずみ場の仮定に基づく薄肉曲がりばりの静的挙動の 定式化

FORMULATION OF STATIC BEHAVIOR OF THIN-WALLED
CURVED BEAMS UNDER ASSUMPTIONS OF STRAIN FIELD

西野文雄*・深沢泰晴**

By Fumio NISHINO and Yasuharu FUKASAWA

1. 緒 言

薄肉曲がりばりが鋼構造要素として随所に使用されるようになった今日、その力学的挙動の解明も内外の多数の研究者の関心を集め、すでにぼう大な研究成果が報告されている。

それらのうち、薄肉棒理論に関するものは、次の3つのグループに大別することができる。第1のグループは Vlasov¹⁾の研究に代表されるものであり、曲率は比較的小さいという前提のもとに、はりを構成する母線ごとの曲率の変化をまったく無視しているものである。これに対して、第2のグループでは、中立軸とせん断中心軸との曲率については区別しているが、その他の母線間の曲率の差異については、定式化の過程で各種の近似的な措置が講じられている。結果的には、断面の中立点およびせん断中心の位置、断面定数などいわゆる断面特性値は、直線ばりのものと同一となっている。Cheney²⁾、Dabrowski³⁾、Becker⁴⁾、Kollbrunner-Hajdin⁵⁾などの研究はこのグループに属している。

第3のグループは、その基礎理論が小西・小松⁷⁾、倉西⁸⁾、深沢⁹⁾など主としてわが国において開発されたものである。この理論の特徴は、母線ごとの曲率の差異についてはいかなる近似も行っていない点にあり、たとえば断面特性値も曲率の影響を含んだ曲がりばり固有の式として定義されている。後に発表された Nitzsche-Miller¹⁰⁾、Williams¹¹⁾の研究もこのグループに属するが、特記すべきほどの進展はみられていない。なお最近では、母線ごとに異なる曲率を含む断面積分の煩雑さの解消を目指した深沢¹³⁾の研究、3次元の曲がりばりの支配方程式を導いた築地¹²⁾の研究などがある。

一方、薄肉ばりの解析の手法には、最近一つの進歩が

もたらされた。それは3次元の弾性体におけるひずみと変位の一般的关系を1次元の棒理論に固有な関係に還元するのに、必要十分な仮定を、比較的妥当な形でひずみ場に統一したことである。そして、この仮定を解析の基盤として出発し、エネルギー原理の助けをかりれば、従来曲げ、St. Venantのねじり、反り拘束ねじりなど、個々の現象として扱われていた薄肉ばりの力学的挙動のすべてを、ほとんど数学的演算のみによって、包括的な形で系統的に定式化することができる。なお、ここでいう妥当なひずみ場の仮定とは、断面形状不変の仮定に対応するひずみの仮定と、はりの工学的曲げ理論における Bernoulli-Euler のせん断ひずみに関する仮定を薄肉ばりに拡張したものとの2つである。

このような解析手法は、すでに Kollbrunner-Hajdin⁹⁾や川井・藤谷¹⁴⁾の薄肉直線ばりの解析、西野ら^{15)、16)}の薄肉直線ばりの有限変位理論、深沢¹⁷⁾の薄肉多角開断面ばりの計算などにおいて適用されている。

本報告は、断面形一定の薄肉円弧曲がりばりの静的挙動の定式化を、前述のようなひずみ場の仮定を基礎とする解析手法によって行ったものである。すなわち、ひずみ場の仮定より1次元の棒理論としての変位場およびひずみ場を求め、これをもとに仮想仕事の原理を用いてつり合い方程式の誘導を行った。さらに、解析過程の全体を通じて、解にできるだけ一般性をもたせるよう留意した。

以上の定式化の演算過程においては、はりの構成母線ごとの曲率の差異に関するいかなる仮定も導入していないので、本報告の結果は前述の第3グループに属することになる。従来の理論^{7)~9)、13)}においては、薄肉板厚方向の力学量の変化を無視し、薄肉中心線上の値で代表させているが、本報告ではその変化をも考慮しているの、その点ではより高精度の理論となっている。鋼構造物のように極く薄肉のはりに関する限りでは、その差は実用上は意味をもたないため、両者の結果はほとんど同

* 正会員 Ph.D. 東京大学助教授 工学部土木工学科

** 正会員 工博 山梨大学助教授 工学部土木工学科

等とはいえ、本報告においてなされた定式化過程の合理化は、次にくる有限変位問題や、弾-塑性問題などのより複雑な現象の解析段階への進展の基礎として、有効であると考えられる。

2. ひずみ場

この報告で扱う一平面内で曲がり、その曲率と断面形とがはり軸方向に一定な薄肉曲がりはりの一例を Fig. 1 に示す。

Fig. 1(a) のように、はり上の点を表わす座標系として、右手系の円柱座標系 (ρ, θ, ζ) を定める。その原点 O' ははりの曲率中心線にとり、 ρ - θ 面をはりの曲率面に一致させる。

さらに、Fig. 1(b) に示すように、 $\theta = \text{const.}$ の断面上の点を表わす目的で、 θ - ζ 面上に直角座標系 (x, y) および直交曲線座標系 (n, s) を設ける。 x, y 座標の原点 O は任意に選び、 x, y 軸はそれぞれ ρ, ζ 軸に平行に定める。また、曲線座標 s は原点を D として板厚中心線に一致させ、 n はその法線方向の座標とする。座標系 (x, y, θ) および (n, s, θ) はともに右手系を形成するものとする。

微小変位理論における3次元弾性体の任意点 $P(x, y, \theta)$ のひずみと変位の関係は、 (x, y, θ) および (ρ, θ, ζ) 座標系を用いると次のように書ける；

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \\ \epsilon_\theta &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial w}{\partial \theta} + \frac{u}{\rho}, \quad r_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \\ r_{y\theta} &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{\partial w}{\partial y}, \quad r_{x\theta} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \rho \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{w}{\rho} \right) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2.1 \cdot a-f)$$

ここに、 u, v, w ははり上の任意点 $P(x, y, \theta)$ のそれぞれ x, y, θ 方向の変位成分を表わす。

式(2.1)で表わされるひずみと変位の3次元の関係を、慣用のはりの解析の場合と同様に、1次元の関係に還元するためにひずみ場に対する仮定を導入する。

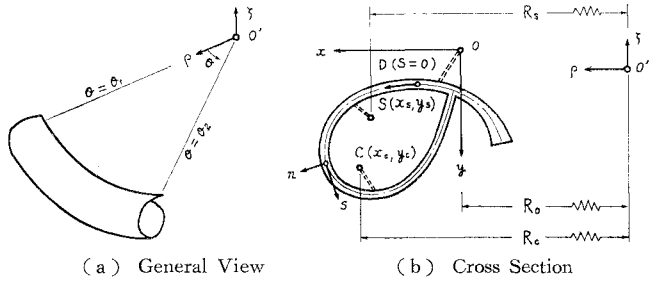
まず、ひずみ場の第一の仮定として、断面形不変を意味する次式を設定する；

$$\epsilon_x = 0, \quad \epsilon_y = 0, \quad r_{xy} = 0 \dots\dots\dots (2.2 \cdot a-c)$$

式(2.2)に式(2.1 a, b, d)を代入して積分すると、次式が得られる；

$$\left. \begin{aligned} u &= u_s - (y - y_s) \varphi \\ v &= v_s + (x - x_s) \varphi \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2.3 \cdot a, b)$$

ここに、 u_s, v_s, φ は積分定数で θ のみの関数である。 u_s, v_s は $\theta = \text{const.}$ の $x-y$ 面上に任意に定めた点 $S(x_s, y_s)$ の x, y 軸方向の変位成分であり、 φ は $x-y$ 面内での断面の回転変位を表わし、断面内で一定値をと



(a) General View (b) Cross Section
Fig. 1 Typical Cross Section and Coordinate Systems.

る。なお、 S 点がはりの断面上にない場合には、Fig. 1(b) に示すように、はりの力学的性質に影響を与えない板厚 $t=0$ の仮定の薄板で、その点がはりに結合されていると考えればよい¹⁶⁾。点 S を極とよぶことにする。

次に、ひずみ場の第二の仮定を導入するため、ひずみ成分を座標系 (n, s, θ) に変換する。はり上の任意点 $P(n, s, \theta)$ の n, s 方向の変位成分をそれぞれ ξ, η とすると、 u, v との関係は次式で書かれる；

$$\xi = ul + vm, \quad \eta = -um + vl \dots\dots\dots (2.4 \cdot a, b)$$

ここに、 l, m は次式で定義される方向余弦を表わす；

$$l = \cos(x, n), \quad m = \cos(n, y) \dots\dots\dots (2.5 \cdot a, b)$$

さらに、式(2.4)に式(2.3)を代入すると、式(2.3)に対応する関係として次式を得る；

$$\left. \begin{aligned} \xi &= u_s l + v_s m - h_s \varphi \\ \eta &= -u_s m + v_s l + h_n \varphi \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2.6 \cdot a, b)$$

ここに、 h_n および h_s は

$$\left. \begin{aligned} h_n &= (x - x_s)l + (y - y_s)m \\ h_s &= -(x - x_s)m + (y - y_s)l \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2.7 \cdot a, b)$$

であり、極 S から断面上の任意点 $P(n, s)$ にひいた位置ベクトル h の成分を表わしている。すなわち、 i_n および i_s をそれぞれ板厚中心線の単位接線ベクトルおよび単位法線ベクトルとすると

$$h = h_n i_n + h_s i_s \dots\dots\dots (2.8)$$

となる。Fig. 2 参照。

一方、座標系 (n, s, θ) で表わしたせん断ひずみ $r_{n\theta}$ および $r_{s\theta}$ と式(2.1 e, f) の $r_{x\theta}$ および $r_{y\theta}$ との間には次式が成り立つ；

$$\left. \begin{aligned} r_{n\theta} &= r_{x\theta} l + r_{y\theta} m \\ r_{s\theta} &= -r_{x\theta} m + r_{y\theta} l \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2.9 \cdot a, b)$$

そこで、式(2.9)に式(2.1 a, b)を代入し、式(2.4)ならびに

$$\left. \begin{aligned} l &= \frac{\partial x}{\partial n} = \frac{\partial y}{\partial s}, \quad m = -\frac{\partial y}{\partial n} = -\frac{\partial x}{\partial s} \text{ (注1)} \\ &\dots\dots\dots (2.10 \cdot a, b) \end{aligned} \right\}$$

注 1) s が曲線座標であるため、厳密には

$$l = \frac{\partial y}{\partial s}, \quad m = -\frac{\partial x}{\partial s}$$

は成り立たない。ここでは近似式として用いており、その詳細については、文献 16) を参照されたい。

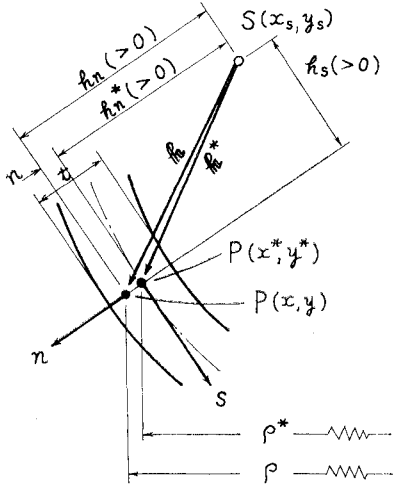


Fig. 2 Vector h and h^* .

を考慮すると、次式が得られる;

$$\left. \begin{aligned} \tau_{n\theta} &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial \xi}{\partial \theta} + \rho \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{w}{\rho} \right) \\ \tau_{s\theta} &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial \eta}{\partial \theta} + \rho \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{w}{\rho} \right) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2.11 \cdot a, b)$$

ひずみ場の第二の仮定として、はり軸方向へのせん断変形に関する仮定を導入する。すなわち、はりの曲げ問題における Bernoulli-Euler の仮定の拡張として、次式を設定する;

$$\tau_{n\theta} = 0 \dots\dots\dots (2.12)$$

ならびに

$$\left. \begin{aligned} \tau_{s\theta} &= 0 && \text{: 開区間注2)} \\ \frac{\partial}{\partial s} (\rho^{*2} \tau_{s\theta}^*) &= 0 \text{注3)} && \text{: 閉区間} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2.13 \cdot a, b)$$

ここに、*印は板厚中心線上 ($n=0$) での量であることを意味する (Fig. 2)。 t は板厚である。なお、式 (2.13・b) はその特別な場合として式 (2.13・a) を含んでいるといえる。

式 (2.12) に式 (2.11・a) および (2.6・a) を代入して、積分および式の変形の過程で

$$x - x^* = \rho - \rho^* = nl, \quad y - y^* = nm \dots\dots (2.14 \cdot a, b)$$

ならびに式 (2.7・b) を考慮すると、結局次式が得られる;

$$\frac{w}{\rho} = \frac{w^*}{\rho^*} - \frac{1}{\rho \rho^*} (x - x^*) \left(u_s' - \frac{y - y_s}{R_s} v_s' \right)$$

注 2) ここでいう開区間とは、開断面ばりの場合は全断面を、また開閉複合断面ばりの場合にはその開断面部分を指している。

注 3) この条件ははりの微小要素 $t ds d\theta$ に作用する力の θ 方向のつり合い条件を表わす式 (5.2) において、左辺の第 2 および第 3 項を無視して得られる。すなわち、 θ 方向の直応力および同方向の外力とつり合うべきせん断応力によるせん断ひずみを無視することになる。

$$- \frac{1}{\rho^* R_s} (y - y^*) v_s' + \frac{1}{\rho \rho^*} n h_s \left(\varphi' - \frac{v_s'}{R_s} \right) \dots\dots\dots (2.15)$$

ここに、 w^*/ρ^* は積分定数であり、板厚中心線上の点 $P^*(n=0, s, \theta)$ における w/ρ の値を意味している。また、 R_s は極 S を通る母線の曲率半径であり、 $(\quad)'$ は θ に関する (\quad) の微分の意である。

式 (2.13・b) を積分すると

$$\tau_{s\theta}^* = \left(\frac{R_k}{\rho^*} \right)^2 \cdot \frac{q_k^*}{Gt} \dots\dots\dots (2.16)$$

ここに、 $R_k^2 q_k^*/G = (\rho^{*2} \tau_{s\theta}^*)_{s=s_k}$ は積分定数で θ のみの関数である。 s_k は着目点 P^* が属しているループ k 上に任意に定めた点の s 座標、 R_k はその点 ($n=0, s_k$) を通る母線の曲率半径を表わす。 G はせん断弾性係数。 q_k^* は各ループごとの一周に対する w^* の連続条件を表わす次式で定まる;

$$\oint_k \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{w^*}{\rho^*} \right) ds = 0 \dots\dots\dots (2.17)$$

ここに、 $\oint_k (\quad) ds$ はループ k についての一周積分を表わしている。式 (2.13・a) および (2.16) より明らかのように開区間に対しては $q_k^* = 0$ である。

式 (2.16) の左辺に、*印を付した ($n=0$ とした) 式 (2.11・b) および (2.6・b) を代入すると

$$\frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{w^*}{\rho^*} \right) = - \frac{1}{\rho^{*2}} (-u_s' m^* + v_s' l^* + \varphi' h_n^*) + \frac{R_s^2}{\rho^{*3}} \cdot \frac{q_k^*}{Gt} \dots\dots\dots (2.18)$$

ここに

$$h_n^* = (x^* - x_s) l^* + (y^* - y_s) m^* \dots\dots\dots (2.19)$$

ここで、

$$l = \frac{\partial y^*}{\partial s}, \quad m = - \frac{\partial x^*}{\partial s} \dots\dots\dots (20 \cdot a, b)$$

および式 (2.19) を用いて、式 (2.18) を s について積分すると、やや面倒な演算を経て、次式が得られる;

$$\begin{aligned} \frac{w^*}{\rho^*} &= \frac{w_c}{R_c} - \frac{1}{\rho^*} (x^* - x_c) \left(\frac{u_s'}{R_c} + \frac{y_s - y_c}{R_s} \cdot \frac{v_s'}{R_c} \right) \\ &\quad - \frac{1}{\rho^*} (y^* - y_c) \frac{v_s'}{R_s} - R_s \left(\frac{\varphi'}{R_s} - \frac{v_s'}{R_s^2} \right) \\ &\quad \cdot \int_{s_c}^s \frac{1}{\rho^{*2}} h_n^* ds + R_k^2 \frac{q_k^*}{G} \int_{s_c}^s \frac{1}{\rho^{*3}} \frac{1}{t} ds \end{aligned} \dots\dots\dots (2.21)$$

ここに、 w_c/R_c は積分定数であり、 $x-y$ 面上に任意に定めた点 $C(x_c, y_c)$ における w/ρ の値である。すなわち、 w_c は点 C の母線方向の変位成分であり、 R_c は点 C を通る母線の曲率半径である。点 C がはりの断面上にない場合には、極 S の場合と同様な措置を講ずればよい (Fig. 1(b) 参照)。また、 s_c は仮定の薄板も含めてはかられる点 C の s 座標を表わす。式 (2.21) は $q_k^* = 0$ とすれば開区間に対する式になる。

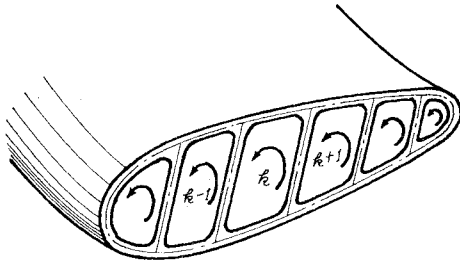


Fig. 3 Multi-Cell Beam.

式 (2.16) と式 (2.21) より, q_k^* を求めることができる. たとえば, Fig. 3 のような並列多室断面の場合には

$$q_k^* = G\bar{q}_k^* \left(\frac{\varphi'}{R_s} - \frac{v_s'}{R_s^2} \right) \dots\dots\dots (2.22)$$

ならびに, s の分岐点におけるせん断流のつり合い条件から得られる次式;

$$\bar{q}_k^* = \begin{cases} \bar{q}_k^0 - \bar{q}_{k-1}^0 & : \text{ループ } k-1 \text{ と } k \text{ との境界区間} \\ \bar{q}_k^0 & : \text{境界でない区間} \\ \bar{q}_k^0 - \bar{q}_{k+1}^0 & : \text{ループ } k+1 \text{ と } k \text{ との境界区間} \end{cases} \dots\dots\dots (2.23)$$

とによって, それぞれループ k に属す区間のねじり関数 \bar{q}_k^* , およびループ k の循環ねじり関数 \bar{q}_k^0 を定義すると, \bar{q}_k^0 を定める次式が得られる;

$$\begin{aligned} -\bar{q}_{k-1}^0 \int_{k-1,k} \frac{1}{\rho^{*3}} \frac{1}{t} ds + \bar{q}_k^0 \oint_k \frac{1}{\rho^{*3}} \frac{1}{t} ds \\ -\bar{q}_{k+1}^0 \int_{k,k+1} \frac{1}{\rho^{*3}} \frac{1}{t} ds = \frac{R_s}{R_k^2} \oint_k \frac{1}{\rho^{*2}} h_n^* ds \end{aligned} \dots\dots\dots (2.24)$$

ここに, $\int_{k-1,k}(\) ds$ および $\int_{k,k+1}(\) ds$ はそれぞれループ $k-1$ と k との境界区間およびループ k と $k+1$ との境界区間に対する積分を意味する. もちろん, 開閉区間に対しては, $\bar{q}_k^* = \bar{q}_k^0 = 0$ である.

特に単一閉断面の場合には

$$\bar{q}^* = \begin{cases} 0 & : \text{開区間} \\ \bar{q}^0 = \frac{R_s}{R_k^2} \cdot \begin{cases} \oint \frac{1}{\rho^{*2}} h_n^* ds & : \text{開区間} \\ \oint \frac{1}{\rho^{*3}} \frac{1}{t} ds & : \text{閉区間} \end{cases} \end{cases} \dots\dots\dots (2.25 \cdot a, b)$$

式 (2.21) を式 (2.22) を用いて書き直すと, 開閉両区間に対して

$$\begin{aligned} w^* = w_c - (x^* - x_c) \left(\frac{u_s'}{R_c} + \frac{y_s - y_c}{R_s} \cdot \frac{v_s'}{R_c} - \frac{w_c}{R_c} \right) \\ - (y^* - y_c) \frac{v_s'}{R_s} - \omega^* \left(\frac{\varphi'}{R_s} - \frac{v_s'}{R_s^2} \right) \end{aligned} \dots\dots\dots (2.26)$$

ここに,

$$\left(R_s \rho^* \int_{s_c}^s \frac{1}{\rho^{*2}} h_n^* ds \right) : \text{開区間}$$

$$\omega^* = \begin{cases} R_s \rho^* \int_{s_c}^s \frac{1}{\rho^{*2}} h_n^* ds - R_k^2 \rho^* \bar{q}_k^* \\ \cdot \int_{s_c}^s \frac{1}{\rho^{*3}} \frac{1}{t} ds \end{cases} : \text{閉区間} \dots\dots\dots (2.27 \cdot a, b)$$

なお,

$$\Omega^* = \begin{cases} R_s \rho^* \int_0^s \frac{1}{\rho^{*2}} h_n^* ds & : \text{開区間} \\ R_s \rho^* \int_0^s \frac{1}{\rho^{*2}} h_n^* ds - R_k^2 \rho^* \bar{q}_k^* \\ \cdot \int_0^s \frac{1}{\rho^{*3}} \frac{1}{t} ds & : \text{閉区間} \end{cases} \dots\dots\dots (2.28 \cdot a, b)$$

とおくと, 式 (2.27) は次のように書くことができる;

$$\omega^* = \Omega^* - \frac{\rho^*}{R_c} \Omega_c^* \dots\dots\dots (2.29)$$

ここに, Ω_c^* は点 $C(n=0, s=s_c)$ における Ω^* の値を表わしている.

結局, 式 (2.15) および (2.26) より, u, v に関する式 (2.3) に対応する w の式として開閉両区間に対して次式を得る;

$$\begin{aligned} w = w_c - (x - x_c) \left(\frac{u_s'}{R_c} + \frac{y_s - y_c}{R_s} \cdot \frac{v_s'}{R_c} - \frac{w_c}{R_c} \right) \\ - (y - y_c) \frac{v_s'}{R_s} - \omega \left(\frac{\varphi'}{R_s} - \frac{v_s'}{R_s^2} \right) \end{aligned} \dots\dots\dots (2.30)$$

ここに,

$$\omega = \frac{\rho}{\rho^*} \Omega^* - \frac{R_s}{\rho^*} n h_s - \frac{\rho}{R_c} \Omega_c^* \dots\dots\dots (2.31)$$

式 (2.1c) に式 (2.3a) および (2.30) を代入し, また式 (2.11b) に式 (2.6a) および (2.30) を代入すると, 式 (2.2), (2.12) および (2.13) で表わされるひずみ場の仮定を満たすひずみ成分が, 開閉両区間に対して次のように表わされる;

$$\begin{aligned} \varepsilon_\theta = \frac{R_s}{\rho} \left\{ \left(\frac{w_c'}{R_s} + \frac{u_s}{R_s} + \frac{y_s - y_c}{R_s} \varphi \right) \right. \\ \left. - (x - x_c) \frac{R_s}{R_c} \left(\frac{u_s''}{R_s^2} + \frac{y_s - y_c}{R_s} \right. \right. \\ \left. \left. \cdot \frac{v_s''}{R_s^2} - \frac{w_c'}{R_s^2} \right) - (y - y_c) \left(\frac{v_s''}{R_s^2} + \frac{\varphi}{R_s} \right) \right\} \\ - \omega \left(\frac{\varphi''}{R_s^2} - \frac{v_s''}{R_s^3} \right) \\ \tau_{s\theta} = \frac{R_s}{\rho} \theta \left(\frac{\varphi'}{R_s} - \frac{v_s'}{R_s^2} \right) \end{aligned} \dots\dots\dots (2.32)$$

ここに,

$$\theta = \begin{cases} \frac{R_s}{\rho^*} n \left(2 + \frac{nl}{\rho^*} \right) & : \text{開区間} \\ \frac{R_s}{\rho^*} n \left(2 + \frac{nl}{\rho^*} \right) + \frac{R_k^2 \rho^2}{R_s \rho^{*3}} \cdot \frac{\bar{q}_k^*}{t} & : \text{閉区間} \end{cases} \dots\dots\dots (2.33)$$

他のひずみ成分 $\varepsilon_n, \varepsilon_s, \tau_{ns}, \tau_{n\theta}$ は式 (2.2) および (2.12) よりすべて 0 である。

3. つり合い式と境界条件

薄肉曲がりばりに作用する外力として、はりの単位体積あたりに作用する力 \mathbf{p} と、はりの両端断面の単位面積あたりに作用する力 $\bar{\mathbf{p}}$ とを考え、それぞれ次のように表わす：

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{p} &= p_x \mathbf{i}_x + p_y \mathbf{i}_y + p_\theta \mathbf{i}_\theta \\ \bar{\mathbf{p}} &= \bar{p}_n \mathbf{i}_n + \bar{p}_s \mathbf{i}_s + \bar{p}_\theta \mathbf{i}_\theta \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (3.1 \cdot a, b)$$

ここに、 $\mathbf{i}_x, \mathbf{i}_y, \mathbf{i}_\theta$ はそれぞれ x, y, θ 方向の単位ベクトルである。

これらの外力を受けて、つり合い状態にある曲がりばりに対する仮想仕事の原理は、 $\varepsilon_\theta, \tau_{s\theta}$ 以外のひずみ成分

$$\int_{\theta_1}^{\theta_2} \left[\left\{ \frac{N'}{R_s} + \frac{1}{R_c R_s} (M_y' - x_c N') + \frac{R_c}{R_s} q_\theta + \frac{m_y}{R_s} \right\} \delta w_c + \left\{ \frac{1}{R_s^2} (M_x'' - y_c N'') + \frac{y_s - y_c}{R_c R_s^2} (M_y'' - x_c N'') \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{M_\omega''}{R_s^3} - \frac{T_{st}'}{R_s^2} + q_y + \frac{R_c}{R_s^2} m_x' + \frac{y_s - y_c}{R_s^2} m_y' - \frac{m_\omega'}{R_s^2} \right\} \delta v_s + \left\{ -\frac{N}{R_s} + \frac{1}{R_c R_s} (M_y'' - x_c N'') + q_x + \frac{m_y'}{R_s} \right\} \delta u_s \right. \\ \left. + \left\{ \frac{1}{R_s} (M_x - y_s N) + \frac{M_\omega''}{R_s^2} + \frac{T_{st}'}{R_s} + m_\theta + \frac{m_\omega'}{R_s} \right\} \delta \varphi \right] R_s d\theta - \left[(N - n_\theta \bar{N}) \delta \left\{ w_c + x_c \left(\frac{u_s'}{R_c} + \frac{y_s - y_c}{R_s} \frac{v_s'}{R_c} \right. \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{w_c}{R_c} \right) + y_c \frac{v_s'}{R_s} \right\} + \left\{ \frac{1}{R_s} (M_x' - y_c N') + \frac{y_s - y_c}{R_c R_s} (M_y' - x_c N') - \frac{M_\omega'}{R_s^2} - \frac{T_{st}}{R_s} + \frac{y_s - y_c}{R_s} m_y + \frac{R_c}{R_s} m_x - \frac{m_\omega}{R_s} \right. \right. \\ \left. \left. - n_\theta \bar{Q}_y \right\} \delta v_s + \left\{ \frac{1}{R_c} (M_y' - x_c N') + m_y - n_\theta \bar{Q}_x \right\} \delta u_s + \left(\frac{M_\omega'}{R_s} + T_{st} + m_\omega - n_\theta \bar{T} \right) \delta \varphi - (M_x - n_\theta \bar{M}_x) \delta \frac{v_s'}{R_s} \right. \\ \left. - (M_y - n_\theta \bar{M}_y) \delta \left(\frac{u_s'}{R_c} + \frac{y_s - y_c}{R_s} \frac{v_s'}{R_c} - \frac{w_c}{R_c} \right) - (M_\omega - n_\theta \bar{M}_\omega) \delta \left(\frac{\varphi'}{R_s} - \frac{v_s'}{R_s^2} \right) \right]_{\theta_1}^{\theta_2} = 0 \dots\dots\dots (3.4)$$

ここに、 N, M_x, M_y, M_ω および T_{st} は、それぞれ次式で定義される応力の合力（断面力）を表わす：

$$\left. \begin{aligned} N &= \int_F \sigma_\theta dF, \quad M_x = \int_F \sigma_\theta y dF \\ M_y &= \int_F \sigma_\theta x dF, \quad M_\omega = \int_F \sigma_\theta \omega dF \\ T_{st} &= \int_F \tau_{s\theta} \theta dF \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (3.5 \cdot a-e)$$

q_x, q_y, m_θ および m_ω は極 S を通る母線の単位長さあたりの外力 \mathbf{p} の合力を、また q_θ, m_x, m_y は点 C を通る母線の単位長さあたりの外力 \mathbf{p} の合力を表わす。すなわち

$$\left. \begin{aligned} q_x &= \int_F \frac{\rho}{R_s} p_x dF, \quad q_y = \int_F \frac{\rho}{R_s} p_y dF \\ m_\theta &= \int_F \frac{\rho}{R_s} \{ p_y (x - x_s) - p_x (y - y_s) \} dF \\ m_\omega &= \int_F \frac{\rho}{R_s} p_\theta \omega dF \\ q_\theta &= \int_F \frac{\rho}{R_c} p_\theta dF, \quad m_x = \int_F \frac{\rho}{R_c} p_\theta (y - y_c) dF \\ m_y &= \int_F \frac{\rho}{R_c} p_\theta (x - x_c) dF \end{aligned} \right\}$$

はすべて 0 であることを考慮すると、次式のように書ける¹⁸⁾；

$$\int_{\theta_1}^{\theta_2} \int_F (\sigma_\theta \delta \varepsilon_\theta + \tau_{s\theta} \delta \tau_{s\theta}) \rho dF d\theta \\ - \int_{\theta_1}^{\theta_2} \int_F (p_x \delta u + p_y \delta v + p_\theta \delta w) \rho dF d\theta \\ - \left[n_\theta \int_F (\bar{p}_n \delta \xi + \bar{p}_s \delta \eta + \bar{p}_\theta \delta w) dF \right]_{\theta_1}^{\theta_2} = 0 \dots\dots\dots (3.2)$$

ここに、 θ_1, θ_2 ははりの両端断面の θ 座標、 F ははりの断面積、 $\int_F (\) dF$ ははりの断面全体についての断面積分を表わす。 n_θ は $\theta_1 < \theta_2$ のとき次式で定義される；

$$n_\theta = \begin{cases} -1 : \theta = \theta_1 \\ 1 : \theta = \theta_2 \end{cases} \dots\dots\dots (3.3)$$

式 (3.2) に式 (2.3), (2.6), (2.30) および (2.32) を代入し、部分積分を行うと次式を得る；

$$\dots\dots\dots (3.6 \cdot a-e)$$

さらに、 $\bar{N}, \bar{M}_x, \bar{M}_y, \bar{M}_\omega, \bar{Q}_x, \bar{Q}_y$ および \bar{T} ははりの両端断面に作用する外力 $\bar{\mathbf{p}}$ の合力を表わす。すなわち

$$\left. \begin{aligned} \bar{N} &= \int_F \bar{p}_\theta dF, \quad \bar{M}_x = \int_F \bar{p}_\theta y dF \\ \bar{M}_y &= \int_F \bar{p}_\theta x dF, \quad \bar{M}_\omega = \int_F \bar{p}_\theta \omega dF \\ \bar{Q}_x &= \int_F (\bar{p}_n l - \bar{p}_s m) dF \\ \bar{Q}_y &= \int_F (\bar{p}_n m + \bar{p}_s l) dF \\ \bar{T} &= \int_F (-\bar{p}_n h_s + \bar{p}_s h_n) dF \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (3.7 \cdot a-g)$$

任意の仮想変位に対して、式 (3.4) が成立するための必要十分条件として、つり合い方程式および境界条件が次のように求まる。すなわち、 $\theta_1 < \theta < \theta_2$ におけるつり合い方程式として

$$\left. \begin{aligned} \frac{N'}{R_s} + \frac{1}{R_c R_s} (M_y' - x_c N') + \frac{R_c}{R_s} q_\theta + \frac{m_y}{R_s} &= 0 \\ \frac{1}{R_c R_s} (M_x'' - y_c N'') - \frac{N}{R_s} + q_x + \frac{m_y'}{R_s} &= 0 \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} & \frac{1}{R_s^2} (M_x'' - y_c N'') + \frac{y_s - y_c}{R_c R_s^2} (M_y'' - x_c N'') \\ & - \frac{M_\omega''}{R_s^3} - \frac{T_{st}'}{R_s^2} + q_y + \frac{R_c}{R_s^2} m_x' \\ & + \frac{y_s - y_c}{R_s^2} m_y' - \frac{m_\omega'}{R_s^2} = 0 \\ & \frac{M_\omega''}{R_s^3} + \frac{T_{st}'}{R_s^2} + \frac{1}{R_s^2} (M_x - y_s N) + \frac{m_\theta}{R_s} \\ & + \frac{m_\omega'}{R_s^2} = 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (3.8 \cdot a-d)$$

また, $\theta = \theta_1, \theta_2$ における境界条件として

$$\left. \begin{aligned} & w_c + x_c \left(\frac{u_s'}{R_c} + \frac{y_s - y_c}{R_s} \cdot \frac{v_s'}{R_c} - \frac{w_c}{R_c} \right) \\ & + y_c \frac{v_s'}{R_s} = \bar{C}_1 \\ & v_s = \bar{C}_2 \\ & u_s = \bar{C}_3 \\ & \varphi = \bar{C}_4 \\ & v_s' = \bar{C}_5 \\ & u_s' + \frac{y_s - y_c}{R_s} v_s' - w_c = \bar{C}_6 \\ & \varphi' - \frac{v_s'}{R_s} = \bar{C}_7 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} & \text{または } N = n_\theta \bar{N} \\ & \text{または } Q_y = n_\theta \bar{Q}_y \\ & \text{または } Q_x = n_\theta \bar{Q}_x \\ & \text{または } T = n_\theta \bar{T} \\ & \text{または } M_x = n_\theta \bar{M}_x \\ & \text{または } M_y = n_\theta \bar{M}_y \\ & \text{または } M_\omega = n_\theta \bar{M}_\omega \end{aligned} \dots\dots\dots (3.9 \cdot a-g)$$

を得る. ここに, $\bar{C}_1 \sim \bar{C}_7$ は境界で与えられる量. さらに

$$\left. \begin{aligned} & Q_x = \frac{1}{R_c} (M_y' - x_c N') + m_y \\ & Q_y = \frac{1}{R_s} (M_x' - y_c N') + \frac{y_s - y_c}{R_c R_s} (M_y' - x_c N') \\ & \quad - \frac{1}{R_s} \left(\frac{M_\omega'}{R_s} + T_{st} + m_\omega \right) \\ & \quad + \frac{R_c}{R_s} m_x + \frac{y_s - y_c}{R_s} m_y \\ & T = \frac{M_\omega'}{R_s} + T_{st} + m_\omega \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (3.10 \cdot a-c)$$

である. この Q_x, Q_y および T はせん断応力 $\tau_{n\theta}$ および $\tau_{s\theta}$ の合力を意味し注4), それぞれ x, y 軸方向のせん断力およびねじりモーメントにほかならない. すなわち

$$\left. \begin{aligned} & Q_x = \int_F (\tau_{n\theta} l - \tau_{s\theta} m) dF \\ & Q_y = \int_F (\tau_{n\theta} m + \tau_{s\theta} l) dF \\ & T = \int_F (-\tau_{n\theta} h_s + \tau_{s\theta} h_n) dF \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (3.11 \cdot a-c)$$

注 4) はりの微要素 $d\theta$ に対して, 仮想仕事の原理(式(3.2))を適用すると, 式(3.10) および(3.11)の関係が得られる.

式(3.11)を用いると, 式(3.8)は次のように表わされる;

$$\left. \begin{aligned} & \frac{N'}{R_s} + \frac{Q_x}{R_s} + \frac{R_c}{R_s} q_\theta = 0 \\ & \frac{Q_x'}{R_s} - \frac{N}{R_s} + q_x = 0 \\ & \frac{Q_y'}{R_s} + q_y = 0 \\ & \frac{T'}{R_s} + \frac{1}{R_s} (M_x - y_s N) + m_\theta = 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (3.12 \cdot a-d)$$

4. 断面力と変位の関係

直応力と直ひずみの関係として, 棒理論で通常用いられている Hooke の法則をここでも仮定すると, 応力-ひずみ関係は次のように書ける;

$$\left. \begin{aligned} & \sigma_\theta = E \varepsilon_\theta \\ & \tau_{s\theta} = G \gamma_{s\theta} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (4.1 \cdot a, b)$$

ここに, E はヤング率である.

式(3.5)に式(4.1)および(2.32)を代入すると, 断面力と変位の関係式が次のように得られる;

$$\left. \begin{aligned} & N = \frac{R_s}{R_0} E F_0 \varepsilon - \frac{R_s}{R_0} E (Z_x - y_c F_0) \kappa_x \\ & \quad - \frac{R_s}{R_0} E (Z_y - x_c F_0) \kappa_y - E Z_\omega \vartheta \\ & M_x = \frac{R_s}{R_0} E Z_x \varepsilon - \frac{R_s}{R_0} E (J_x - y_c Z_x) \kappa_x \\ & \quad - \frac{R_s}{R_0} E (J_{xy} - x_c Z_x) \kappa_y - E C_x \vartheta \\ & M_y = \frac{R_s}{R_0} E Z_y \varepsilon - \frac{R_s}{R_0} E (J_{xy} - y_c Z_y) \kappa_x \\ & \quad - \frac{R_s}{R_0} E (J_y - x_c Z_y) \kappa_y - E C_y \vartheta \\ & M_\omega = E Z_\omega \varepsilon - E (C_x - y_c Z_\omega) \kappa_x \\ & \quad - E (C_y - x_c Z_\omega) \kappa_y - E C_\omega \vartheta \\ & T_{ct} = G J_{st} \kappa_\theta \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (4.2 \cdot a-e)$$

ここに

$$\left. \begin{aligned} & F_0 = \int_F \frac{R_0}{\rho} dF, \quad Z_x = \int_F \frac{R_0}{\rho} y dF \\ & Z_y = \int_F \frac{R_0}{\rho} x dF, \quad J_x = \int_F \frac{R_0}{\rho} y^2 dF \\ & J_{xy} = \int_F \frac{R_0}{\rho} xy dF, \quad J_y = \int_F \frac{R_0}{\rho} x^2 dF \\ & Z_\omega = \int_F \frac{R_s}{\rho} \omega dF, \quad C_x = \int_F \frac{R_s}{\rho} \omega y dF \\ & C_y = \int_F \frac{R_s}{\rho} \omega x dF, \quad C_\omega = \int_F \frac{R_s}{\rho} \omega^2 dF \\ & J_{st} = \int_F \frac{R_s}{\rho} \theta^2 dF \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (4.3 \cdot a-k)$$

さらに、

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon &= \frac{1}{R_s}(w_c' + u_s), \quad \kappa_x = \frac{1}{R_s^2}(v_s'' + R_s\varphi) \\ \kappa_y &= \frac{1}{R_c R_s} \left(u_s'' + \frac{y_s - y_c}{R_s} v_s'' - w_c' \right) \\ \kappa_\theta &= \frac{1}{R_s} \left(\varphi' - \frac{1}{R_s} v_s' \right), \quad \vartheta = \frac{1}{R_s^2} \left(\varphi'' - \frac{1}{R_s} v_s'' \right) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(4.4\cdot a-e)$$

式(4.2)は、任意座標を用いた場合、すなわち x, y 座標の原点 O, s 座標の原点 D, u_s, v_s が定義されている極 S および w_c が定義されている点 C のいずれも任意に定めた場合の断面力と変位の関係式である。しかしながら、まず点 O, D および S に関しては、次式を満足するように選ぶことができる(点 C に関しては 6. で述べる);

$$\left. \begin{aligned} Z_x = 0, \quad Z_y = 0, \quad Z_w = 0, \quad C_x = 0, \quad C_y = 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(4.5\cdot a-e)$$

これらの条件を満たすいわゆる主座標を用いることによって、式(4.2-a-d)はより簡潔になる。すなわち

$$\left. \begin{aligned} N &= \frac{R_s}{R_0} E F_0 (\varepsilon + y_c \kappa_x + x_c \kappa_y) \\ M_x &= -\frac{R_s}{R_0} (E J_x \kappa_x + E J_y \kappa_y) \\ M_y &= -\frac{R_s}{R_0} (E J_x \kappa_y + E J_y \kappa_x) \\ M_\theta &= -E C_\theta \vartheta \end{aligned} \right\} \dots\dots(4.6\cdot a-d)$$

式(4.5-a, b)から x, y 座標の原点 O が定まり、これは一定曲率の薄肉曲がりばりの断面の中立点の定義式と考えることができる。 x, y 軸に平行な \bar{x}, \bar{y} 軸をもつ直角座標系 $(\bar{O}-\bar{x}, \bar{y})$ における点 O の座標を \bar{x}_0, \bar{y}_0 とすると、式(4.3-b, c) および(4.5-a, b)より

$$\left. \begin{aligned} \bar{x}_0 &= \frac{\int_F (1/\rho) \bar{x} dF}{\int_F (1/\rho) dF}, \quad \bar{y}_0 = \frac{\int_F (1/\rho) \bar{y} dF}{\int_F (1/\rho) dF} \\ R_0 &= \frac{F}{\int_F (1/\rho) dF} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(4.7\cdot a-c)$$

このような主座標に対しては、式(4.3-a) および式(4.7-c)より

$$F_0 = F \dots\dots\dots(4.8)$$

を得る。

式(4.5-c)に式(4.3-g) および(2.31)を代入すると、 ω が自己つり合い系である場合、すなわち主座標である場合の ω_c^* の値が求まる。すなわち

$$\omega_c^* = \frac{1}{F} \int_F \frac{R_c}{\rho^*} \left(\omega^* - \frac{R_s}{\rho} n h_s \right) dF \dots\dots\dots(4.9)$$

ω_c^* を知れば、 s 座標の原点 D のシフト量を計算することができる。

式(4.4-d, e)は以下に述べるように、極 S の座標 (x_s, y_s) を与えるが、この特定点は曲率一定な薄肉曲りばりの断面の主極あるいはせん断中心とよばれるものにほかならない。

点 S と異なる点 $A(x_A, y_A)$ を $x-y$ 面上に定めると(断面上にない場合には板厚 $t=0$ の仮定の薄板で断面に結ぶ)、点 S および A から断面上の任意点 $P(n, s)$ に引いた位置ベクトルの i_n, i_s 方向の成分の間の関係は

$$\left. \begin{aligned} h_n &= h_{n,A} + (x_A - x_s)l + (y_A - y_s)m \\ h_s &= h_{s,A} + (x_A - x_s)m - (y_A - y_s)l \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(4.10\cdot a, b)$$

ここに、

$$\left. \begin{aligned} h_{n,A} &= (x - x_A)l + (y - y_A)m \\ h_{s,A} &= -(x - x_A)m + (y - y_A)l \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(4.11\cdot a, b)$$

式(2.27)に式(4.10-a)を代入し、式(2.20)ならびに

$$R_s \oint_k \frac{1}{\rho^2} h_n^* ds = R_A \oint_k \frac{1}{\rho^2} h_{n,A}^* ds \dots\dots(4.12)$$

を考慮すると、次式を得る;

$$\begin{aligned} \omega^* &= \frac{R_s^2}{R_A^2} \omega_A^* + \frac{R_s}{R_c} \left(y_s - \frac{R_s}{R_A} y_A \right) (x^* - x_c) \\ &\quad - \frac{R_s}{R_A} (x_s - x_A) \left(y^* - \frac{\rho^*}{R_c} y_c \right) \dots\dots(4.13) \end{aligned}$$

ここに、

$$\begin{aligned} \omega_A^* &= R_A \rho^* \int_{s_c}^s \frac{1}{\rho^{*2}} h_{n,A} ds - R_A^2 \rho^* \bar{q}_k^* \\ &\quad \cdot \int_{s_c}^s \frac{1}{\rho^{*3}} \frac{1}{t} ds \dots\dots\dots(4.14) \end{aligned}$$

さらに、式(2.29) および(2.31)に対し、式(4.10-b) および(4.13)を代入し、 x, y を式(4.5-a, b)を満たす主座標、 ω および ω_A をともに自己つり合い系とすると、次式が得られる;

$$\begin{aligned} \omega &= \frac{R_s^2}{R_A^2} \omega_A + \frac{R_s}{R_0} \left(y_s - \frac{R_s}{R_A} y_A \right) x \\ &\quad - \frac{R_s}{R_A} (x_s - x_A) y \dots\dots\dots(4.15) \end{aligned}$$

ここに、

$$\omega_A = \frac{\rho}{\rho^*} \omega_A^* + \frac{R_A}{\rho^*} n h_{s,A} \dots\dots\dots(4.16)$$

式(4.5-d, e)に式(4.3-h, i) および(4.15)を代入し、式(4.3-d-f)を考慮すると、主極(せん断中心) S の座標 x_s, y_s が次のように求まる;

$$\left. \begin{aligned} x_s' - x_A &= \frac{R_0}{R_A} \cdot \frac{C_{xA} J_y - C_{yA} J_{xy}}{4} \\ y_s - y_A &= \\ &= \frac{R_0^2}{R_A} \cdot \frac{C_{yA} \left(J_x + \frac{y_A}{R_0} J_{xy} \right) - C_{xA} \left(J_{xy} + \frac{y_A}{R_0} J_y \right)}{4} \end{aligned} \right\}$$

$$R_s = R_A \cdot \frac{J_x J_y - J_{xy}^2}{A} \quad \dots\dots\dots(4.17 \cdot a-c)$$

ここに

$$\Delta = J_y \left(J_x - \frac{R_0}{R_A^2} C_{xA} \right) - J_{xy} \left(J_{xy} - \frac{R_0}{R_A^2} C_{yA} \right) \quad \dots\dots\dots(4.18)$$

式 (3.8) に式 (4.2) および (4.4) を代入すると、任意座標で表わした変位表示のつり合い方程式が得られ、式 (3.8) に式 (4.6) および (4.4) を用いると、主座標で表わした変位表示のつり合い方程式が得られる。

5. 応力場

2. で求めたひずみ場に対応する応力場は、式 (4.1) に式 (2.32) を代入して得られる。これらの応力を直交条件 (式 (4.5)) を満たす式 (4.6) および式 (4.2.e) によって断面力で表わすと、開閉両区間に対して次のように書ける；

$$\left. \begin{aligned} \sigma_\theta &= \frac{R_0}{\rho} \cdot \frac{N}{F} + \frac{R_0}{\rho} \cdot \frac{M_y J_x - M_x J_{xy}}{J_x J_y - J_{xy}^2} x \\ &\quad + \frac{R_0}{\rho} \cdot \frac{M_x J_y - M_y J_{xy}}{J_x J_y - J_{xy}^2} y + \frac{R_s}{\rho} \cdot \frac{M_\omega}{C_\omega} \omega \\ \tau_{s\theta} &= \frac{R_s}{\rho} \cdot \frac{T_{st}}{J_{st}} \theta \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots(5.1 \cdot a, b)$$

他の応力成分はすべて 0 である。

しかしながら、式 (5.1) で表わされる応力場は、微小要素についての力のつり合い条件を満足していない。そこで通常の棒理論で行われているように、式 (5.1.a) の直応力 σ_θ とつり合うようにせん断応力の方を修正する。

Fig. 4 に示すように、はりの微小要素 $t ds d\theta$ に作用する力の θ 方向のつり合い条件より、次式が得られる；

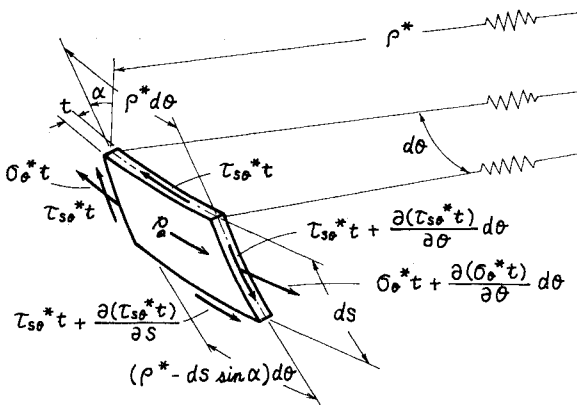


Fig. 4 Infinitesimal Element ($t ds d\theta$).

$$\frac{1}{\rho^{*2}} \frac{\partial}{\partial s} (\rho^{*2} \tau_{s\theta}^* t) + \frac{t}{\rho^*} \frac{\partial \sigma_\theta^*}{\partial \theta} + \int_{-t/2}^{t/2} p_\theta dn = 0 \quad \dots\dots\dots(5.2)$$

ただし、薄肉の前提から、 σ_θ および $\tau_{s\theta}$ の板厚方向の分布は n の一次関数であるとしている。

式 (5.2) に式 (5.1.a) を代入して s について積分すると

$$\tau_{s\theta}^* = \frac{R_k^2 \bar{q}_k^*}{\rho^{*2} t} + \bar{\tau}_{s\theta}^* \quad \dots\dots\dots(5.3)$$

ここに、 $R_k^2 \bar{q}_k^* = (\rho^{*2} \tau_{s\theta}^* t)_{s=s_k}$ は積分定数で θ のみの関数である。さらに

$$\begin{aligned} \bar{\tau}_{s\theta}^* &= -\frac{R_0}{\rho^{*2} t} \left\{ \frac{N'}{F} \tilde{F} + \frac{M_x' J_y - M_y' J_{xy}}{J_x J_y - J_{xy}^2} \tilde{Z}_x^* \right. \\ &\quad \left. + \frac{M_y' J_x - M_x' J_{xy}}{J_x J_y - J_{xy}^2} \tilde{Z}_y^* + \frac{R_s}{R_0} \frac{M_\omega'}{C_\omega} \tilde{Z}_\omega^* \right\} \\ &\quad - \frac{\bar{q}_\theta}{t} \quad \dots\dots\dots(5.4) \end{aligned}$$

ここに、

$$\left. \begin{aligned} \tilde{F} &= \int_{s_k}^s t ds, \quad \tilde{Z}_x^* = \int_{s_k}^s y^* t ds \\ \tilde{Z}_y^* &= \int_{s_k}^s x^* t ds, \quad \tilde{Z}_\omega^* = \int_{s_k}^s \omega^* t ds \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots(5.5 \cdot a-d)$$

$$\bar{q}_\theta = \frac{1}{\rho^{*2}} \int_{s_k}^s \rho^{*2} \int_{-t/2}^{t/2} p_\theta dn ds \quad \dots\dots\dots(5.6)$$

\bar{q}_k^* は開区間では自由縁での境界条件 ($\tau_{s\theta}^* = 0$) によって定めることができる。 s_k を自由縁にとると、 $\bar{q}_k^* = 0$ となる。

閉区間では、 \bar{q}_k^* は式 (2.16) の q_k^* と同様に、ループごとの s の一周に対する w^* の連続の条件 (式 (2.17)) によって定めることができる。すなわち、式 (5.3) を G で除してせん断ひずみで表わした式を、式 (2.16) の代わりに用いて、式 (2.18) から式 (2.24) までと同様な演算を行うと、次式が得られる；

$$\bar{q}_k^* = G \bar{q}_k^* \left(\frac{\rho'}{R_s} - \frac{v_s'}{R_s^2} \right) + \hat{q}_k^* \quad \dots\dots\dots(5.7)$$

ここに、 \hat{q}_k^* は Fig. 3 のような並列多室断面の場合には

$$\hat{q}_k^* = \begin{cases} \hat{q}_k^0 - \hat{q}_{k-1}^0 & : \text{ループ } k-1 \text{ と } k \text{ との境界区間} \\ \hat{q}_k^0 & : \text{境界でない区間} \\ \hat{q}_k^0 - \hat{q}_{k+1}^0 & : \text{ループ } k \text{ と } k+1 \text{ との境界区間} \end{cases} \quad \dots\dots\dots(5.8 \cdot a-c)$$

と書ける。ループ k の循環せん断流を表わす \hat{q}_k^0 は、次式を解いて求められる；

$$\begin{aligned} -\hat{q}_{k-1}^0 \int_{k-1, k} \frac{1}{\rho^{*3}} \frac{1}{t} ds + \hat{q}_k^0 \oint_k \frac{1}{\rho^{*3}} \frac{1}{t} ds \\ - \hat{q}_{k+1}^0 \int_{k, k+1} \frac{1}{\rho^{*3}} \frac{1}{t} ds = -\frac{1}{R_k^2} \oint_k \frac{\bar{\tau}_{s\theta}^*}{\rho^*} ds \end{aligned} \quad \dots\dots\dots(5.9)$$

なお、式 (5.7) の \hat{q}_k^* はすでに式 (2.23), (2.24) で与えられている。

特に単一閉断面の場合には

$$\hat{q}_1^* = \begin{cases} 0 & \text{: 開区間} \\ \hat{q}_1^0 = -\frac{1}{R_1^2} \cdot \frac{\int \frac{\bar{\tau}_{s\theta}^* ds}{\rho^*}}{\int \frac{1}{\rho^{*3}} \frac{1}{t} ds} & \text{: 閉区間} \end{cases} \dots\dots\dots(5.10 \cdot a, b)$$

ただし、開区間に対しては、 s_1 を自由縁にとっている。以下同様。

式 (5.7) の誘導過程で得られた w^* の式を式 (2.15) に代入し、得られた w を用いて式 (2.11・b) を計算すると、修正せん断応力 $\tau_{s\theta}$ が次式のように求まる；

$$\tau_{s\theta} = \begin{cases} \frac{R_s}{\rho} \cdot \frac{T_{st}}{J_{st}} \theta + \frac{\rho}{\rho^*} \bar{\tau}_{s\theta}^* & \text{: 開区間} \\ \frac{R_s}{\rho} \cdot \frac{T_{st}}{J_{st}} \theta + \frac{R_k^2 \rho}{\rho^{*3}} \frac{\hat{q}_k^*}{t} + \frac{\rho}{\rho^*} \bar{\tau}_{s\theta}^* & \text{: 閉区間} \end{cases} \dots\dots\dots(5.12 \cdot a, b)$$

6. 定式過程に関する 2, 3 の考察

(1) ひずみ場の仮定とその周辺

本報告の特徴の一つは、薄肉曲りばりの力学的挙動の解析の基盤となる仮定を、ひずみ場に統一したことである。

断面形不変の仮定に対応するひずみ場の第一の仮定 (式 (2.2)) は、従来幾何学的考察から求められていた式 (2.3) の関係を、この仮定式の積分として与えるものである。

はりの工学的曲げ理論における Bernoulli-Euler の仮定に対応する薄肉ばりの軸方向のせん断変形に関する仮定として、従来は $r_{s\theta}$ に関する式 (2.13) のみを用いている。そのため St. Venant のねじりと曲げねじりとを別個の現象として扱い、両者を重ね合わせねばならないため、理論展開上の若干すっきりしない側面があった。ところが本報告におけるひずみ場の第2の仮定のように、式 (2.13) に加えて式 (2.12) をもう一つの仮定として導入すると、両者を包含する一つの現象として統一的に解析することが可能となった。またそれに関連して、開断面、閉断面、開閉複合断面などの区別は、解析上では本質的なものではなくなくなる。

一方、本報告のように式 (2.12) および (2.13) に基づいて解析を展開する場合、板厚方向の断面のひろがりも意味をもってくるため、定式過程の演算そのものはやや煩雑になることは避けられない。鋼構造材を対象とする限りでは、このような板厚方向の断面のひろがりを考慮することは、あくまでも理論展開上要求されるもので

あり、実用上は意味をもつものではない。したがって、本報告で得られた基本式は実用上は、従来のもの^{(7)・(9)・(13)}と同等といってよい。

(2) 軸方向変位 w_c の定義点 C の選定

2. における解析では、 x, y 座標の原点 O, s 座標の原点 D, u_s, v_s の定義点 S, w_c の定義点 C はすべて任意に選んでよかった。また、点 O, S, C は断面上にのっていない点でも、板厚 $t=0$ の仮想の板で断面に結合することによって定義し得た。このように、点 C を他の点とは独立に任意に定めたことは、直線ばりも含めて従来行われておらず、本報告の特徴の一つである。

点 O, D, S に関しては、4. において座標の直交条件 (式 (4.5)) を用いて、それぞれ断面の特定点として定め、式の構成を簡潔化した。点 C に関してはそのような特別な条件はない。直ばりの場合には、点 C を断面の中立点 (直ばりの場合は図心に一致) O に一致させれば、すなわちばりの軸方向変位を中立点 O の変位 w_0 で表わせば、変位表示のつり合い方程式において、 w_0 が他の変位 u_s, v_s, φ と連成せず便利である。従来は西野・倉方・長谷川・奥村⁽¹⁾を除けば一般に中立点 O を断面に仮想板で結合する手法を用いていないため、点 O の軸方向変位が定義できず、 w_0 を断面の平均変位として定義している。

曲がりばりの場合には、 w_c の定義点 C を断面の中立点 O に一致させても、変位表示のつり合い式における w_0 と他の変位との連成関係は消滅しないので、有利さはなく、むしろ、せん断中心 S に一致させた方がよいことを深沢⁽¹³⁾が指摘している。

点 C をせん断中心 S に一致させた場合、すなわち式 (3.8) において、

$$x_c = x_s, y_c = y_s, R_c = R_s \dots\dots\dots(6.1 \cdot a \cdot c)$$

とおくと、つり合い式は次のようになる；

$$\left. \begin{aligned} \frac{N'}{R_s} + \frac{1}{R_s^2} (M_y' - x_s N') + q_\theta + \frac{m_y}{R_s} &= 0 \\ \frac{1}{R_s^2} (M_y'' - x_s N'') - \frac{N}{R_s} + q_x + \frac{m_y'}{R_s^2} &= 0 \\ \frac{1}{R_s^2} (M_x'' - y_s N'') - \frac{M\omega''}{R_s^3} - \frac{T_{st}'}{R_s^2} \\ &+ q_y + \frac{m_x'}{R_s} - \frac{m\omega'}{R_s^2} = 0 \\ \frac{M\omega''}{R_s^3} + \frac{T_{st}'}{R_s^2} + \frac{1}{R_s^2} (M_x - y_s N) \\ &+ \frac{m_\theta}{R_s} + \frac{m\omega'}{R_s^2} = 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(6.2 \cdot a \cdot d)$$

式 (6.2・d) は式 (3.8・d) と同一であり、はり軸まわりのつり合い条件には点 C の選定は無関係であることを示している。

また、式 (4.4) に式 (6.1) を代入すると

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon &= \frac{1}{R_s} (w_s' + u_s), \quad \kappa_x = \frac{1}{R_s^2} (v_s'' + R_s \varphi) \\ \kappa_y &= \frac{1}{R_s^2} (u_s'' - w_s'), \quad \kappa_\theta = \frac{1}{R_s} \left(\varphi' - \frac{1}{R_s} v_s' \right) \\ \vartheta &= \frac{1}{R_s^2} \left(\varphi'' - \frac{1}{R_s} v_s'' \right) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (6.3\text{-a-e})$$

を得る。式 (6.3.b, d, e) は式 (4.4.b, d, e) と同一である。式 (6.3.a-d) で表わされる $\varepsilon, \kappa_x, \kappa_y, \kappa_\theta$ は点 S を通る母線について、その伸び率 (直ひずみ)、 x, y 軸のまわりの曲率の変化、ねじり率を表わし、幾何学的意味をもつようになる^{9), 13)}。

式 (4.2.e), (4.6) および (6.3) を式 (6.2) に代入して得られるせん断中心 S の変位 u_s, v_s, w_s および φ に関する変位表示の微分方程式は深沢^{9), 13)}の与えているものと一致する。

なお、曲がりばりの曲率面外のみへの変形問題に関しては、 w_c の定義点 C の選定は無関係である^{19), 20)}。

7. 結 語

一平面内で曲がり、しかもその曲率と断面形状が一定の薄肉開断面および閉断面の曲がりばりの静力学的挙動の定式化を行った。

まず、はりの変形に際しての断面形状不変の仮定 (式 (2.2)) と、比較的妥当と思われるせん断ひずみに関する仮定 (式 (2.12) および (2.13)) に基づき、微小変位理論における円柱座標系の 3 次元のひずみ-変位関係から、棒理論に固有な変位場 (式 (2.3) および (2.30)) を求めた。このせん断ひずみに関する仮定は、はりの工学的曲げ理論における Bernoulli-Euler の仮定の薄肉ばりへの拡張ともいえるものである。

次に、得られた変位場を満たすひずみ場 (式 (2.32)) をもとに、仮想仕事の原理により、はりの微小変位に対する支配方程式とそれに随伴する境界条件 (式 (3.8) および (3.9)) を導いた。また、直応力と直ひずみの間には 1 次元の Hooke の法則を適用して、断面力と変位の関係 (式 (4.2), (4.4) および (4.6)) ならびに、妥当と思われる応力場 (式 (5.1.a) および (5.11)) を求めた。

これらの定式化の過程を通じて、解にはできるだけ一般性を与えるため、断面上の位置を表わす x, y 座標の原点 O およびはりの $x-y$ 面内の変位を代表させる点 S 、さらに軸方向変位を代表させる点 C のいずれをも、それぞれ独立に任意に定め得ることを示した。なお、これらの点のはりの断面上に直接ない場合には、はりの力学的性質に影響をおよぼさない仮想の薄板によって、それらの

点をはりの断面に結合して考えればよいことを示した。

以上の解析で得られた結果は、解析の出発点となったひずみ場の仮定さえ満たすものであれば、はりの構成母線ごとの曲率の違いに対してはいかなる仮定も導入していないので、曲率がどんなに厳しい場合にも適用し得るものであることは明らかである。なお、曲率が厳しい場合でのひずみ場の仮定の妥当性については、この解析結果の特別の場合として得られる曲率面内の 1 軸曲げの解が、起重機のフックやチェーンの設計公式として知られている Winkler²¹⁾ の解と一致することも、その妥当性を裏づける一つの資料といえよう。

また、本解析の結果は、はりの構成母線ごとの曲率の差異を考慮した既往の理論^{7)-9), 13)}に比べて、薄肉板厚方向の力学量の変化をも考慮している点で、より高精度のものといえる。もちろん、鋼構造物のような極く薄肉の場合には、両者の差は実用上意味をもたないが、本報告の主たる目的であるこの種の問題の定式化手法の合理化は、薄肉曲がりばりの有限変位理論や、非弾性解析への発展に寄与するものと考えられる。

参 考 文 献

- 1) Vlasov V.Z.: Thin-Walled Elastic Beams, Israel Program for Scientific Translation, Ltd, Ierusalem, 1961, 奥村敏恵ほか共訳: 薄肉弾性ばりの理論, 技報堂, 1967.
- 2) Cheney J.A.: Bending and buckling of thin-walled open-section rings, Proc. of ASCE, No. EM 5, pp. 17~44, Oct. 1963.
- 3) Dabrowski R.: Zur Berechnung von gekrümmten dünnwandigen Trägern mit offenem Profil, Der Stahlbau, Heft 12, pp. 364~372, Dec. 1964.
- 4) Dabrowski R.: Wölbkrafttorsion von gekrümmten Kastenträgern mit nichtverformbarem Profil, Der Stahlbau, Heft 5, pp. 135~141, May 1965.
- 5) Becker G.: Ein Beitrag zur statischen Berechnung beliebig gelagerter ebener gekrümmter Stäbe mit einfach symmetrischen dünnwandigen offenen Profilen von in Stabachse veränderlichem Querschnitt unter Berücksichtigung der Wölbkrafttorsion, Der Stahlbau, Heft 11/12, pp. 334~346, 368~377, Nov./Dec. 1965.
- 6) Kollbrunner C.F. and N. Hajdin: Dünnwandige Stäbe, Band 1, Springer Verlag, Berlin, 1972.
- 7) 小西一郎・小松定夫: 薄肉曲線桁の基礎理論, 土木学会論文集, No. 87, pp. 35~48, 1962-11.
- 8) 倉西 茂: 一般薄肉曲りばりの解析, 土木学会論文集, No. 108, pp. 7~12, 1964-8.
- 9) 深沢泰晴: 薄肉曲線材の静力学的解析に関する基礎的理論, 土木学会論文集, No. 110, pp. 30~51, 1964-10.
- 10) Nitzsche R.N. and R.E. Miller: Torsion and flexure of curved thin-walled beams or tubes, Proc. of ASCE, Vol. 98, No. EM 4, pp. 867~889, Aug. 1972.
- 11) Williams H.E.: Linear theory of thin rings, Proc. of ASCE, Vol. 98, No. EM 5, pp. 1031~1051, Oct. 1972.
- 12) 築地恒夫: 初期曲率, ねじれ率を有する薄肉断面曲線ばりの基礎方程式, 土木学会論文報告集, No. 230, pp. 11~22, 1974-10.

- 13) 深沢泰晴 : 薄肉多角開断面曲りばりの曲げねじれ問題, 土木学会論文報告集, No. 234, pp. 45~59, 1975-2.
- 14) 川井忠彦・藤谷義信 : 梁理論の精密化に関する二, 三の試み(その1), 生産研究, Vol. 25, No. 6, pp. 1~10, 1973-6.
- 15) Nishino F., C. Kasemset and S.L. Lee : Variational formulation of stability problems for thin-walled members, Ingenier-Archiv, Band 43, Heft 1, pp. 58~68, Nov. 1973.
- 16) 西野文雄・倉方慶夫・長谷川彰夫・奥村敏恵 : 軸力と曲げおよびねじりを受ける薄肉断面部材, 土木学会論文報告集, No. 225, pp. 1~15, 1974-5.
- 17) 深沢泰晴 : 薄肉多角断面ばりの曲げねじれに関する基礎理論(開断面の場合), 橋梁と基礎, Vol. 9, No. 7, pp. 24~29, 1975-7.
- 18) Washizu K. : Variational Methods in Elasticity and Plasticity Pergamon Press, 1968.
- 19) 西野文雄・倉方慶夫 : 渡辺昇他著「曲げねじれ剛性をもった曲線桁橋の剛性マトリックス法による解析」への討議, 土木学会論文報告集, No. 229, pp. 119~120, 1974-9.
- 20) 深沢泰晴・小林 潔 : 薄肉曲線桁の伝達行列と変断面連続桁橋解析へのその応用, 土木学会論文報告集, No. 244, 1975-12.
- 21) Timoshenko S.P. : Strength of Materials, Part I, 3rd. Ed., Van Nostrand Reinhold Co., New York, 1955.

(1975. 7.18・受付)