

【ノート】

直交異方性板の剛性マトリックスによる解法

Analysis of Orthotropic Plate by Stiffness Matrix Method

渡 辺 昇*・松 元 照 幸**

By Noboru WATANABE and Teruyuki MATSUMOTO

1. まえがき

直交異方性板の1つの矩形要素の曲げ剛性を B_x, B_y , ねじり剛性を H とするとき, 相対する2辺が単純支持の場合, $H^2 > B_x B_y, H^2 = B_x B_y, H^2 < B_x B_y, H=0, B_x=0, H=B_x=0$ のすべての場合について, Anfang Parameter Method を用いて, 要素の剛性マトリックスを誘導した. また, 単純支持辺と直交し弾性沈下する横桁(弾性横桁)の曲げ剛性とねじり剛性を, 矩形板の剛性マトリックスにとり入れることにより, 弾性横桁上連続直交異方性板をも解くことができた.

本論文で導いた剛性マトリックスを用いることによって, この種の構造, たとえば, 閉じリブの鋼床版などに対して, いわゆる変位法の電子計算が, 一層有効になるものと思われる.

2. 記 号

本論文に用いた記号は, 次のとおりである.

- B_x, B_y : 直交異方性板の x, y 方向の単位幅あたりの曲げ剛性
- μ_x, μ_y : 直交異方性板の x, y 方向のポアソン比
- H : 直交異方性板の単位幅あたりの有効ねじり剛性
- G : せん断弾性係数
- I_B : 弾性横桁の断面二次モーメント
- J_B : 弾性横桁のねじり抵抗
- A_B : 弾性横桁のせん断断面積
- w : 直交異方性板中立面のたわみ
- θ : 直交異方性板中立面の y 方向たわみ角
- R : y 方向に垂直な断面における反力
- M : y 方向に垂直な断面における曲げモーメント

3. 基礎方程式

図-1のような一つの直交異方性帯状板要素において, たわみ w に関する微分方程式は, 式(1)で与えられる.

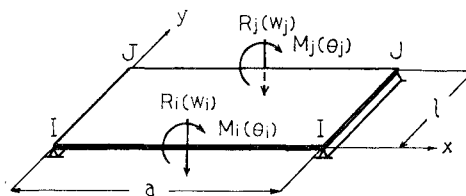


図-1 直交異方性板の帯状板要素

$$B_x \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2H \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + B_y \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = p \quad \dots\dots (1)$$

式(1)の解に対して要素の変位および断面力は, 式(2)で与えられる.

$$\left. \begin{aligned} w(x, y) &= w, & \theta(x, y) &= -\frac{\partial w}{\partial y}, \\ R(x, y) &= -B_y \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} - (2H - \mu_y B_x) \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y}, \\ M(x, y) &= -B_y \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \end{aligned} \right\} \dots\dots (2)$$

剛性マトリックス法においては, 要素内に荷重が作用しないものとするため, 式(1)の右辺の荷重項は消え, 式(3)の同次微分方程式となる.

$$B_x \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2H \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + B_y \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = 0 \quad \dots\dots (3)$$

式(3)の一般解は, 対辺単純支持の仮定から, Levy級数で与えられる. ここで,

$$w = \sum_{n=1}^{\infty} w_n(y) \cdot \sin \frac{n\pi}{a} x \quad \dots\dots (4)$$

とおくと, たわみの振幅 $w_n(y)$ は, 係数 B_x, H, B_y の相互関係により, 式(5)から式(10)で表わされる.

a) $H^2 > B_x B_y$ の場合:

$$w_n(y) = C_1 \sinh \alpha y + C_2 \cosh \alpha y + C_3 \sinh \beta y + C_4 \cosh \beta y \quad \dots\dots (5)$$

* 正会員 工博 北海道大学教授 工学部土木工学科
 ** 正会員 工修 日本鋼管(株)

ここで、

$$\begin{cases} \alpha^2 = \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 \frac{1}{B_y} (H + \sqrt{H^2 - B_x B_y}) \\ \beta^2 = \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 \frac{1}{B_y} (H - \sqrt{H^2 - B_x B_y}) \end{cases}$$

b) $H^2 = B_x B_y$ の場合：

$$w_n(y) = C_1 \sinh \alpha y + C_2 \cosh \alpha y + C_3 \alpha y \sinh \alpha y + C_4 \alpha y \cosh \alpha y \dots (6)$$

ここで、

$$\alpha^2 = \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 \frac{1}{B_y} \sqrt{B_x B_y}$$

c) $H^2 < B_x B_y$ の場合：

$$w_n(y) = C_1 \sinh \alpha y \sin \beta y + C_2 \sinh \alpha y \cos \beta y + C_3 \cosh \alpha y \sin \beta y + C_4 \cosh \alpha y \cos \beta y \dots (7)$$

ここで、

$$\begin{cases} \alpha^2 = \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 \frac{1}{2B_y} (\sqrt{B_x B_y} + H) \\ \beta^2 = \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 \frac{1}{2B_y} (\sqrt{B_x B_y} - H) \end{cases}$$

d) $H=0$ の場合：

$$w_n(y) = C_1 \sinh \alpha y \sin \alpha y + C_2 \sinh \alpha y \cos \alpha y + C_3 \cosh \alpha y \sin \alpha y + C_4 \cosh \alpha y \cos \alpha y \dots (8)$$

ここで、

$$\alpha^2 = \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 \frac{1}{2B_y} \sqrt{B_x B_y}$$

e) $B_x=0$ の場合：

$$w_n(y) = C_1 \sinh \alpha y + C_2 \cosh \alpha y + C_3 \alpha y + C_4 \dots (8)$$

ここで、

$$\alpha^2 = \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 \frac{2H}{B_y}$$

f) $H=B_x=0$ の場合：

$$w_n(y) = C_1 y^2 + C_2 y^2 + C_3 y + C_4 \dots (10)$$

4. 直交異方性板の剛性マトリックスの誘導

式 (5), (6), (7), (8), (9), (10) を式 (2) に代入し、 $y=0$ とすると、積分定数 $C_1 \sim C_4$ は、要素端 i の変位と力の振幅 $w_{ni}, \theta_{ni}, R_{ni}, M_{ni}$ で表わされる。したがって、 $y=l$ の要素端 j の変位と力の振幅 $w_{nj}, \theta_{nj}, R_{nj}, M_{nj}$ が、 $w_{ni}, \theta_{ni}, R_{ni}, M_{ni}$ によって線形変換され、これをマトリックス表示すると式 (11) となる。

$$\begin{pmatrix} w_{nj} \\ \theta_{nj} \\ R_{nj} \\ M_{nj} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_{ni} \\ \theta_{ni} \\ R_{ni} \\ M_{ni} \end{pmatrix} \dots (11)$$

ここで、基礎方程式 (式 (1)) の誘導において、1 要素の両端の力の方向と剛性マトリックス法における要素両端の力の方向との符号の相違に注意を払い、変換マトリックスの要素 a_{ij} を求めると、次のようになる。

a) $H^2 > B_x B_y$ の場合：

$$a_{11} = \frac{1}{(\alpha^2 - \beta^2)} [(X - \beta^2) \cosh \alpha l - (X - \alpha^2) \cosh \beta l]$$

$$a_{12} = \frac{1}{B_y \alpha \beta (\alpha^2 - \beta^2)} [\beta (Z - B_y \beta^2) \sinh \alpha l - \alpha (Z - B_y \alpha^2) \sinh \beta l],$$

$$a_{13} = \frac{1}{B_y \alpha \beta (\alpha^2 - \beta^2)} [\beta \sinh \alpha l - \alpha \sinh \beta l],$$

$$a_{14} = -a_{23} = -\frac{1}{B_y (\alpha^2 - \beta^2)} [\cosh \alpha l - \cosh \beta l],$$

$$a_{21} = \frac{1}{(\alpha^2 - \beta^2)} [\alpha (X - \beta^2) \sinh \alpha l - \beta (X - \alpha^2) \sinh \beta l],$$

$$a_{22} = \frac{1}{B_y (\alpha^2 - \beta^2)} [(Z - B_y \beta^2) \cosh \alpha l - (Z - B_y \alpha^2) \cosh \beta l],$$

$$a_{24} = -\frac{1}{B_y (\alpha^2 - \beta^2)} [\alpha \sinh \alpha l - \beta \sinh \beta l],$$

$$a_{31} = \frac{1}{(\alpha^2 - \beta^2)} [\alpha (X - \beta^2) (Z - B_y \beta^2) \sinh \alpha l - \beta (X - \alpha^2) (Z - B_y \alpha^2) \sinh \beta l],$$

$$a_{32} = \frac{1}{B_y (\alpha^2 - \beta^2)} [(Z - B_y \beta^2) (Z - B_y \alpha^2) \times (\cosh \alpha l - \cosh \beta l)],$$

$$a_{33} = \frac{1}{B_y (\alpha^2 - \beta^2)} [(Z - B_y \alpha^2) \cosh \alpha l - (Z - B_y \beta^2) \cosh \beta l],$$

$$a_{34} = -\frac{1}{B_y (\alpha^2 - \beta^2)} [\alpha (Z - B_y \alpha^2) \cosh \alpha l - \beta (Z - B_y \beta^2) \cosh \beta l],$$

$$a_{41} = -\frac{1}{(\alpha^2 - \beta^2)} [B_y (X - \alpha^2) (X - \beta^2) \times (\cosh \alpha l - \cosh \beta l)],$$

$$a_{42} = \frac{1}{\alpha \beta (\alpha^2 - \beta^2)} [\beta (X - \alpha^2) (Z - B_y \beta^2) \sinh \alpha l - \alpha (X - \beta^2) (Z - B_y \alpha^2) \sinh \beta l],$$

$$a_{43} = -\frac{1}{\alpha \beta (\alpha^2 - \beta^2)} [\beta (X - \alpha^2) \sinh \alpha l - \alpha (X - \beta^2) \sinh \beta l],$$

$$a_{44} = \frac{1}{(\alpha^2 - \beta^2)} [(X - \alpha^2) \cosh \alpha l - (X - \beta^2) \cosh \beta l].$$

ここで、

$$X = \mu_x \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2, \quad Z = (2H - \mu_y B_x) \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2.$$

b) $H^2 = B_x B_y$ の場合 :

$$\begin{aligned}
 a_{11} &= \frac{1}{2\alpha^2} [2\alpha^2 \cosh \alpha l - (\alpha^2 - X)\alpha l \sinh \alpha l], \\
 a_{12} &= \frac{1}{2B_y \alpha^3} [(3B_y \alpha^2 - Z) \sinh \alpha l \\
 &\quad - (B_y \alpha^2 - Z)\alpha l \cosh \alpha l], \\
 a_{13} &= -\frac{1}{2B_y \alpha^2} [\sinh \alpha l - \alpha l \cosh \alpha l], \\
 a_{14} &= -a_{23} = -\frac{1}{2B_y \alpha^2} [\alpha l \sinh \alpha l], \\
 a_{21} &= \frac{1}{2\alpha} [(\alpha^2 + X) \sinh \alpha l - (\alpha^2 - X)\alpha l \cosh \alpha l], \\
 a_{22} &= \frac{1}{2B_y \alpha^2} [2B_y \alpha^2 \cosh \alpha l - (B_y \alpha^2 - Z)\alpha l \sinh \alpha l], \\
 a_{24} &= -\frac{1}{2B_y \alpha} [\sinh \alpha l + \alpha l \cosh \alpha l], \\
 a_{31} &= \frac{1}{2\alpha} [\{\alpha^2 (B_y \alpha^2 + Z) - (3B_y \alpha^2 - Z)X\} \sinh \alpha l \\
 &\quad + (B_y \alpha^2 - Z)(\alpha^2 - X)\alpha l \cosh \alpha l], \\
 a_{32} &= \frac{1}{2B_y \alpha^2} [(B_y \alpha^2 - Z)^2 \alpha l \sinh \alpha l], \\
 a_{33} &= -\frac{1}{2B_y \alpha^2} [2B_y \alpha^2 \cosh \alpha l \\
 &\quad + (B_y \alpha^2 - Z)\alpha l \sinh \alpha l], \\
 a_{34} &= \frac{1}{2B_y \alpha} [(3B_y \alpha^2 - Z) \sinh \alpha l \\
 &\quad + (B_y \alpha^2 - Z)\alpha l \cosh \alpha l], \\
 a_{41} &= -\frac{1}{2\alpha^2} [B_y (\alpha^2 - X)^2 \alpha l \sinh \alpha l], \\
 a_{42} &= \frac{1}{2\alpha^3} [\{\alpha^2 (B_y \alpha^2 + Z) - (3B_y \alpha^2 - Z)X\} \sinh \alpha l \\
 &\quad - (B_y \alpha^2 - Z)(\alpha^2 - X)\alpha l \cosh \alpha l], \\
 a_{43} &= \frac{1}{2\alpha^3} [(\alpha^2 + Z) \sinh \alpha l + (\alpha^2 - Z)\alpha l \cosh \alpha l], \\
 a_{44} &= -\frac{1}{2\alpha^2} [(\alpha^2 - X)\alpha l \cosh \alpha l + 2B_y \alpha^2 \cosh \alpha l].
 \end{aligned}$$

ここで,

$$X = \mu_x \left(\frac{n\pi}{a} \right)^2, \quad Z = (2H - \mu_y B_x) \left(\frac{n\pi}{a} \right)^2.$$

c) $H^2 < B_x B_y$ の場合 :

$$\begin{aligned}
 a_{11} &= \frac{1}{2\alpha\beta} [2\alpha\beta \cosh \alpha l \cos \beta l \\
 &\quad - \{(\alpha^2 - \beta^2) - X\} \sinh \alpha l \sin \beta l], \\
 a_{12} &= \frac{1}{2B_y \alpha \beta (\alpha^2 + \beta^2)} [\beta \{B_y (3\alpha^2 - \beta^2) \\
 &\quad - Z\} \sinh \alpha l \cos \beta l \\
 &\quad - \alpha \{B_y (\alpha^2 - 3\beta^2) - Z\} \cosh \alpha l \sin \beta l], \\
 a_{13} &= -\frac{1}{2B_y \alpha \beta (\alpha^2 + \beta^2)} [\beta \sinh \alpha l \cos \beta l \\
 &\quad - \alpha \cosh \alpha l \sin \beta l],
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 a_{14} &= -a_{23} = -\frac{1}{2B_y \alpha \beta} [\sinh \alpha l \sin \beta l], \\
 a_{21} &= \frac{1}{2\alpha\beta} [\beta \{(\alpha^2 + \beta^2) + X\} \sinh \alpha l \cos \beta l \\
 &\quad - \alpha \{(\alpha^2 + \beta^2) - X\} \cosh \alpha l \sin \beta l], \\
 a_{22} &= \frac{1}{2B_y \alpha \beta} [2B_y \alpha \beta \cosh \alpha \beta \cos \beta l \\
 &\quad - \{B_y (\alpha^2 - \beta^2) - Z\} \sinh \alpha l \sin \beta l], \\
 a_{24} &= -\frac{1}{2B_y \alpha \beta} [\beta \sinh \alpha l \cos \beta l + \alpha \cosh \alpha l \sin \beta l], \\
 a_{31} &= \frac{1}{2\alpha\beta} [\beta (\alpha^2 + \beta^2) \{B_y (\alpha^2 + \beta^2) + Z\} \\
 &\quad + X \{B_y (3\alpha^2 - \beta^2) - Z\}] \sinh \alpha l \cos \beta l \\
 &\quad + \frac{1}{2\alpha\beta} [\alpha (\alpha^2 + \beta^2) \{B_y (\alpha^2 + \beta^2) - Z\} \\
 &\quad + X \{B_y (3\beta^2 - \alpha^2) - Z\}] \cosh \alpha l \sin \beta l, \\
 a_{32} &= \frac{1}{2B_y \alpha \beta} [\{B_y (\alpha^2 - \beta^2) + Z\}^2 \\
 &\quad + 4B_y^2 \alpha^2 \beta^2] \sinh \alpha l \sin \beta l, \\
 a_{33} &= -\frac{1}{2B_y \alpha \beta} [\{B_y (\alpha^2 - \beta^2) - Z\} \sinh \alpha l \sin \beta l \\
 &\quad + 2B_y \alpha \beta \cosh \alpha l \cos \beta l], \\
 a_{34} &= \frac{1}{2B_y \alpha \beta} [\beta \{B_y (3\alpha^2 - \beta^2) - Z\} \sinh \alpha l \cos \beta l \\
 &\quad + \alpha \{B_y (\alpha^2 - 3\beta^2) - Z\} \cosh \alpha l \sin \beta l], \\
 a_{41} &= -\frac{1}{2\alpha\beta} [B_y \{(\alpha^2 - \beta^2) - X\}^2 \\
 &\quad + 4B_y^2 \alpha^2 \beta^2] \sinh \alpha l \sin \beta l, \\
 a_{42} &= \frac{1}{2\alpha\beta (\alpha^2 + \beta^2)} [\beta (\alpha^2 + \beta^2) \{B_y (\alpha^2 + \beta^2) + Z\} \\
 &\quad - \beta X \{B_y (3\alpha^2 - \beta^2) - Z\}] \sinh \alpha l \cos \beta l \\
 &\quad + \frac{1}{2\alpha\beta (\alpha^2 + \beta^2)} [\alpha (\alpha^2 + \beta^2) \{B_y (\alpha^2 + \beta^2) - Z\} \\
 &\quad + \beta X \{B_y (\alpha^2 - 3\beta^2) - Z\}] \cosh \alpha l \sin \beta l, \\
 a_{43} &= \frac{1}{2\alpha\beta (\alpha^2 + \beta^2)} [\beta \{(\alpha^2 + \beta^2) + X\} \sinh \alpha l \cos \beta l \\
 &\quad + \alpha \{(\alpha^2 + \beta^2) - X\} \cosh \alpha l \sin \beta l], \\
 a_{44} &= -\frac{1}{2\alpha\beta} [\{(\alpha^2 - \beta^2) - X\} \sinh \alpha l \sin \beta l \\
 &\quad + 2\alpha\beta \cosh \alpha l \cos \beta l].
 \end{aligned}$$

ここで,

$$X = \mu_x \left(\frac{n\pi}{a} \right)^2, \quad Z = (2H - \mu_y B_x) \left(\frac{n\pi}{a} \right)^2.$$

d) $H=0$ の場合 :

$$\begin{aligned}
 a_{11} &= \frac{1}{2\alpha^2} [X \sinh \alpha l \sin \alpha l + 2\alpha^2 \cosh \alpha l \cos \alpha l], \\
 a_{12} &= \frac{1}{4B_y \alpha^3} [(2B_y \alpha^2 - Z) \sinh \alpha l \cos \alpha l \\
 &\quad + (2B_y \alpha^2 + Z) \cosh \alpha l \sin \alpha l], \\
 a_{13} &= -\frac{1}{4B_y \alpha^3} [\sinh \alpha l \cos \alpha l - \cosh \alpha l \sin \alpha l],
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 a_{14} &= -a_{23} = -\frac{1}{2B_y\alpha^2} [\sinh al \sin al], \\
 a_{21} &= \frac{1}{2\alpha} [(2\alpha^2 + X) \sinh al \cos al \\
 &\quad - (2\alpha^2 - X) \cosh al \sin al], \\
 a_{22} &= \frac{1}{2B_y\alpha^2} [2B_y\alpha^2 \cosh al \cos al \\
 &\quad + Z \sinh al \sin al], \\
 a_{24} &= -\frac{1}{2B_y\alpha^2} [\sinh al \cos al + \cosh al \sin al], \\
 a_{31} &= \frac{1}{2\alpha} [\{2\alpha^2(2B_y\alpha^2 + Z) \\
 &\quad - X(2B_y\alpha^2 - Z)\} \sinh al \cos al \\
 &\quad + \{2\alpha^2(2B_y\alpha^2 - Z) \\
 &\quad + X(2B_y\alpha^2 + Z)\} \cosh al \sin al], \\
 a_{32} &= \frac{1}{2B_y\alpha^2} [(Z^2 + 4B_y^2\alpha^4) \sinh al \sin al], \\
 a_{33} &= \frac{1}{2B_y\alpha^2} [Z \sinh al \sin al \\
 &\quad - 2B_y\alpha^2 \cosh al \cos al], \\
 a_{34} &= \frac{1}{2B_y\alpha} [(2B_y\alpha^2 - Z) \sinh al \cos al \\
 &\quad - (2B_y\alpha^2 + Z) \cosh al \sin al], \\
 a_{41} &= -\frac{1}{2\alpha^2} [B_y(4\alpha^4 + X^2) \sinh al \sin al], \\
 a_{42} &= \frac{1}{4\alpha^3} [\{2\alpha^2(2B_y\alpha^2 + Z) \\
 &\quad - X(2B_y\alpha^2 - Z)\} \sinh al \cos al \\
 &\quad - \{2\alpha^2(2B_y\alpha^2 - Z) \\
 &\quad - X(2B_y\alpha^2 + Z)\} \cosh al \sin al], \\
 a_{43} &= \frac{1}{4\alpha^3} [(2\alpha^2 + X) \sinh al \cos al \\
 &\quad + (2\alpha^2 - X) \cosh al \sin al], \\
 a_{44} &= \frac{1}{2\alpha^2} [X \sinh al \sin al - 2B_y\alpha^2 \cosh al \cos al].
 \end{aligned}$$

ここで、

$$X = \mu_x \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2, \quad Z = \mu_y B_x \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2.$$

e) $B_x = 0$ の場合：

$$\begin{aligned}
 a_{11} &= \frac{1}{\alpha^2} [X \cosh al + (\alpha^2 - X)], \\
 a_{12} &= \frac{1}{B_y\alpha^3} [Z \sinh al + (B_y\alpha^2 - Z)al], \\
 a_{13} &= \frac{1}{B_y\alpha^3} [\sinh al - al], \\
 a_{14} &= -a_{23} = -\frac{1}{B_y\alpha^2} [\cosh al - 1], \\
 a_{21} &= \frac{1}{\alpha} [X \sinh al], \\
 a_{22} &= \frac{1}{B_y\alpha^2} [Z \cosh al + (B_y\alpha^2 - Z)],
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 a_{24} &= -\frac{1}{B_y\alpha} [\sinh al], \\
 a_{31} &= -\frac{1}{\alpha} [X(B_y\alpha^2 - Z) \sinh al], \\
 a_{32} &= -\frac{1}{B_y\alpha^2} [Z(B_y\alpha^2 - Z)(\cosh al - 1)], \\
 a_{33} &= -\frac{1}{B_y\alpha^2} [(B_y\alpha^2 - Z) \cosh al + Z], \\
 a_{34} &= \frac{1}{B_y\alpha} [(B_y\alpha^2 - Z) \sinh al], \\
 a_{41} &= \frac{1}{\alpha^2} [X(\alpha^2 - X)(\cosh al - 1)], \\
 a_{42} &= \frac{1}{\alpha^3} [Z(\alpha^2 - X) \sinh al - X(B_y\alpha^2 - Z)al], \\
 a_{43} &= \frac{1}{\alpha^3} [(\alpha^2 - X) \sinh al + Xal], \\
 a_{44} &= -\frac{1}{\alpha^2} [(\alpha^2 - X) \cosh al - X].
 \end{aligned}$$

ただし、

$$X = \mu_x \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2, \quad Z = 2H \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2.$$

f) $H = B_x = 0$ の場合：

$$\begin{aligned}
 a_{11} &= a_{22} = -a_{34} = -a_{43} = 1, \\
 a_{12} &= a_{33} = l, \\
 a_{13} &= \frac{l^3}{6B_y}, \\
 a_{14} &= -a_{23} = -\frac{l^2}{2B_y}, \\
 a_{24} &= -\frac{l}{6B_y}, \\
 a_{21} &= a_{31} = a_{32} = a_{41} = a_{42} = a_{44} = 0.
 \end{aligned}$$

式 (11) の右辺の正方行列の行列式を計算すると 1 に等しくなる性質がある。

式 (11) を部分マトリックスに分割して表示すると、式 (12) となる。

$$\begin{bmatrix} \delta_{nj} \\ X_{nj} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_{ni} \\ X_{ni} \end{bmatrix} \dots\dots\dots (12)$$

ここで、

$$\begin{aligned}
 \delta_n &= \begin{bmatrix} w_n \\ \theta_n \end{bmatrix}, \quad X_n = \begin{bmatrix} R_n \\ M_n \end{bmatrix}, \\
 A_{11} &= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, \quad A_{12} = \begin{bmatrix} a_{13} & a_{14} \\ a_{23} & a_{24} \end{bmatrix}, \\
 A_{21} &= \begin{bmatrix} a_{31} & a_{32} \\ a_{41} & a_{42} \end{bmatrix}, \quad A_{22} = \begin{bmatrix} a_{33} & a_{34} \\ a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} \dots\dots\dots (13)
 \end{aligned}$$

式 (12) を展開し、変形すると直交異方性帯状板要素の剛性関係式が、式 (14) で表わされる。

$$\begin{bmatrix} X_{ni} \\ X_{nj} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -A_{12}^{-1}A_{11} & A_{12}^{-1} \\ A_{21} - A_{22}A_{12}^{-1}A_{11} & A_{22}A_{12}^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_{ni} \\ \delta_{nj} \end{bmatrix} \dots\dots\dots (14)$$

式(14)に式(13)を代入すると、式(15)をうる。

$$\begin{pmatrix} R_{ni} \\ M_{ni} \\ R_{nj} \\ M_{nj} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} & K_{14} \\ & K_{22} & K_{23} & K_{24} \\ \text{(Sym.)} & & K_{33} & K_{34} \\ & & & K_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_{ni} \\ \theta_{ni} \\ w_{nj} \\ \theta_{nj} \end{pmatrix} \dots\dots\dots (15)$$

ここで、剛性マトリックスの各要素 K_{ij} ($i, j=1\sim 4$) は、次のようになる。

a) $H^2 > B_x B_y$ の場合 :

$$\begin{aligned} K_{11} &= K_{33} = S[B_y \alpha \beta (\alpha^2 - \beta^2) (\alpha \sinh al \cosh \beta l \\ &\quad - \beta \cosh al \sinh \beta l)], \\ K_{12} &= -K_{34} = S\{B_y \alpha \beta (\alpha^2 + \beta^2) \\ &\quad - 2\alpha \beta Z\} (1 - \cosh al \cosh \beta l) \\ &\quad + \{B_y (\alpha^4 + \beta^4) - (\alpha^2 + \beta^2) Z\} \sinh al \sinh \beta l, \\ K_{13} &= -S[B_y \alpha \beta (\alpha^2 - \beta^2) (\alpha \sinh al - \beta \sinh \beta l)], \\ K_{14} &= -K_{23} = S[B_y \alpha \beta (\alpha^2 - \beta^2) (\cosh al - \cosh \beta l)], \\ K_{22} &= K_{44} = -S[B_y (\alpha^2 - \beta^2) (\beta \sinh al \cosh \beta l \\ &\quad - \alpha \cosh al \sinh \beta l)], \\ K_{24} &= S[B_y (\alpha^2 - \beta^2) (\beta \sinh al - \alpha \sinh \beta l)]. \end{aligned}$$

ここで、

$$S = 1/[2\alpha\beta(1 - \cosh al \cosh \beta l) + (\alpha^2 + \beta^2) \sinh al \sinh \beta l].$$

b) $H^2 = B_x B_y$ の場合 :

$$\begin{aligned} K_{11} &= K_{33} = S[2B_y \alpha^3 (\sinh al \cosh al + al)], \\ K_{12} &= -K_{34} = S[B_y \{(\alpha^2 + X) \sinh^2 al \\ &\quad + (\alpha^2 - X) \alpha^2 l^2\}], \\ K_{13} &= -S[2B_y \alpha^3 (\sinh al + al \cosh al)], \\ K_{14} &= -K_{23} = S[2B_y \alpha^2 (al \sinh al)], \\ K_{22} &= K_{44} = S[2B_y \alpha (\sinh al \cosh al - al)], \\ K_{24} &= -S[2B_y \alpha (\sinh al - al \cosh al)]. \end{aligned}$$

ここで、

$$S = 1/[\sinh^2 al - \alpha^2 l^2].$$

c) $H^2 < B_x B_y$ の場合 :

$$\begin{aligned} K_{11} &= K_{33} = S[2B_y \alpha \beta (\alpha^2 + \beta^2) \{\beta \sinh al \cosh al \\ &\quad + \alpha \sin \beta l \cos \beta l\}], \\ K_{12} &= -K_{34} = S[\beta^2 \{B_y (3\alpha^2 - \beta^2) + Z\} \sinh^2 al \\ &\quad + \alpha^2 \{B_y (3\beta^2 - \alpha^2) - Z\} \sin^2 al, \\ K_{13} &= -S[2B_y \alpha \beta (\alpha^2 + \beta^2) \{\beta \sinh al \cos \beta l \\ &\quad + \alpha \cosh al \sin \beta l\}], \\ K_{14} &= -K_{23} = S[2B_y \alpha \beta (\alpha^2 + \beta^2) \sinh al \sin \beta l], \\ K_{22} &= K_{44} = S[2B_y \alpha \beta (\beta \sinh al \cosh al \\ &\quad - \alpha \sin \beta l \cos \beta l)], \\ K_{24} &= -S[2B_y \alpha \beta (\beta \sinh al \cos \beta l \\ &\quad - \alpha \cosh al \sin \beta l)]. \end{aligned}$$

ここで、

$$S = 1/[\beta^2 \sinh^2 al - \alpha^2 \sin^2 \beta l].$$

d) $H=0$ の場合 :

$$\begin{aligned} K_{11} &= K_{33} = S[4B_y \alpha^3 (\sinh al \cosh al \\ &\quad + \sin al \cos al)], \\ K_{12} &= -K_{34} = S[B_y (2\alpha^2 + X) \sinh^2 al \\ &\quad + (2\alpha^2 - X) \sin^2 al], \\ K_{13} &= -S[4B_y \alpha^3 (\sinh al \cos al + \cosh al \sin al)], \\ K_{14} &= -K_{23} = S[4B_y \alpha^2 \sinh al \sin al], \\ K_{22} &= K_{44} = S[2B_y \alpha (\sinh al \cosh al \\ &\quad - \sin al \cos al)], \\ K_{24} &= -S[2B_y \alpha (\sinh al \cos al - \cosh al \sin al)]. \end{aligned}$$

ここで、

$$S = 1/[\sinh^2 al - \sin^2 al].$$

e) $B_x=0$ の場合 :

$$\begin{aligned} K_{11} &= K_{33} = -K_{13} = S[B_y \alpha^3 \sinh al], \\ K_{12} &= K_{14} = -K_{23} = -K_{34} = S[B_y \alpha^2 (\cosh al - 1)], \\ K_{22} &= K_{44} = S[B_y \alpha (al \cosh al - \sinh al)], \\ K_{24} &= S[B_y \alpha (al \cosh al - \sinh al)]. \end{aligned}$$

ここで、

$$S = 1/[al \sinh al + 2(1 - \cosh al)].$$

f) $H=B_x=0$ の場合 :

$$\begin{aligned} K_{11} &= K_{33} = -K_{13} = \frac{12B_y}{l^3}, \\ K_{12} &= K_{14} = -K_{23} = -K_{34} = \frac{6B_y}{l^2}, \\ K_{22} &= K_{44} = \frac{4B_y}{l}, \\ K_{24} &= \frac{2B_y}{l}. \end{aligned}$$

f) の場合は、曲げ剛性 B_y を有する桁要素の剛性マトリックスとまったく一致している。

5. 弾性横桁上連続直交異方性板の剛性マトリックス

弾性横桁は曲げ剛性およびねじり剛性を有するものとする。図-2は弾性横桁位置での要素力のつり合い状態を示す。弾性横桁上に作用する正弦鉛直荷重の振幅 R_{NB} とたわみの振幅 w_{NB} の関係式は、式(16)で与えられる。

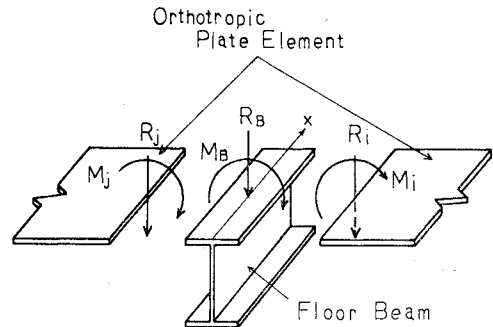


図-2 弾性横桁位置の要素力のつり合い

$$R_{nB} = \frac{EI \left(\frac{n\pi}{a}\right)^4 AG \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2}{EI \left(\frac{n\pi}{a}\right)^4 + AG \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2} \cdot w_{nB} \dots (16)$$

また、正弦波状ねじり荷重の振幅 M_{nB} とねじり角の振幅 θ_{nB} の関係式は、式 (17) で与えられる。

$$M_{nB} = GJ_B \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 \dots (17)$$

式 (16) と式 (17) より、弾性横桁に関する剛性関係式が、式 (18) で与えられる。

$$\begin{pmatrix} R_{nB} \\ M_{nB} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{EI_B \left(\frac{n\pi}{a}\right)^4 A_B G \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2}{EI_B \left(\frac{n\pi}{a}\right)^4 + A_B G \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2} & 0 \\ 0 & GJ_B \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} w_{nB} \\ \theta_{nB} \end{pmatrix} \dots (18)$$

6. あとがき

橋の鋼床版の解析法としては、従来、フーリエ級数による Pelikan・Esslinger による近似解法があり、これは異方性板と横桁とを別々に分離した形で解いているが、

本論文の解析法では、異方性板と横桁とを一体として解くことができる。また、鋼床版を多数の有限帯状板に分割し、変位関数を仮定しながら解く、いわゆる、Finite strip method があり、最近よく用いられている解法であるが、これは、要素分割数を多数とることによって精度をあげなければならないが、本論文の解析法では、等断面の範囲の異方性板内は、さらに要素を分割する必要はない（ただし、集中線荷重荷線は、分割線となる）。実際の数値計算結果の比較を行ったが、ここでは省略する。

参 考 文 献

- 1) W. Pelikan u. M. Esslinger: Die Stahlfahrbahn Berechnung und Konstruktion, M.A.N. Forschungsheft, Nr 7, 1957.
- 2) 国広哲男・藤原 稔: 直交異方性版理論による鋼床版実用設計法, 建設省土木研究所報告 137 号の 1, 同 690 号 (補遺).
- 3) Heins C. P. and Looney C. T. G.: Analysis of Orthotropic Steel Bridge Decks, Proceedings of ASCE, 94 (1968), ST 2, p. 565~592.
- 4) Powell G. H. and Ogden D. W.: Analysis of Orthotropic Steel Bridge Decks, Proceedings of ASCE, 94 (1968), ST 5, p. 905~922.
- 5) 多田和夫: 任意の支持条件をもつ閉断面リブ鋼床版の実用計算法, 橋梁と基礎, 5-2 (1971).

(1975. 8. 20・受付)