

## 曲げとせん断の影響を考慮した塑性円板の極限解析

### LIMIT ANALYSIS OF PLASTIC CIRCULAR PLATE UNDER CONSIDERATION OF BOTH BENDING AND SHEARING FORCES

園田 恵 一 郎\*  
By Keiichiro SONODA

#### 序 文

曲げを受ける剛塑性板の極限解析の研究は、1950年代初期に始められた。今日、Tresca (トレスカ) の降伏条件式に従う円板が軸対称荷重を受ける場合は、Hopkins, Prager<sup>1)</sup> によって解析解が与えられており、Tresca または Mises (ミセス) の降伏条件式に従う長方形板に対しては、十分接近した上、下界解が解析的または数値的に求められている<sup>2)~5)</sup>。

しかしながら、載荷面の小さな局所荷重を受けるとか、スパンに比して板厚が大きくなると、平板は曲げの他にせん断力の影響を受けて、曲げ理論による終局荷重より小さな荷重で崩壊することが考えられる。金属板においては、ひずみ硬化の影響でせん断力の影響は顕著に現われないが、鉄筋コンクリート板の場合には、押抜き破壊が起こり、せん断力の影響は非常に顕著になることはよく知られている。

Mises の降伏条件式に従う平板の断面の塑性崩壊に対するせん断力の影響は、1968年、Landgraf によって調査された<sup>6)</sup>。彼は Feinberg の原理を用いて断面内の応力分布を決定し、断面の塑性崩壊に対する曲げとせん断の相関曲面を求めた。その後、Oschatz と Mohaghegh ならびに Coon は Landgraf の相関曲面を用いて、単純支持および固定円板の極限解析を行った<sup>7), 8)</sup>。これらの研究では、相関曲面の非線形性のために、終局荷重の決定は非線形方程式の解析の問題に帰着している。

本研究では、平板断面の塑性崩壊に対する曲げとせん断の相関曲面を極限解析法の上、下界定理に従って誘導し、それに基づいて軸対称荷重を受ける円板の終局強度の決定方法を提案した。対象平板を一般化するために、材料の引張強度と圧縮強度が異なることを考慮した。

極限解析法の基本定理によれば、終局荷重の決定は、

上界定理または下界定理に基づいて決定できる。ここでは後者による数値解析法を展開しているが、曲げ崩壊に対する既知解と比較することによって、十分に正しい終局荷重の値が得られることを確認している。

次に、同様の解析法を鉄筋コンクリート板の問題への応用を試みた。金属板と鉄筋コンクリート板との本質的な相異は塑性変形能力の大きさにある。鉄筋を弾・完全塑性体と仮定することは安全側であるが、コンクリートの特性は複雑である。極限解析法においては、構造物は十分塑性流動を起こし、それに伴って必要な応力再配分が行われることを前提としているので、コンクリート構造物に極限解析法を適用することは、この意味において注意を要する。

本研究では、鉄筋コンクリート板の断面要素に対する曲げとせん断の相関曲面の決定に対しては、曲げ引張力は鉄筋のみによって受け取り、コンクリートの引張強度を無視した。一方、曲げ圧縮とせん断を受けるコンクリートは破壊に至るまでに応力の再配分に必要な塑性流動を起こすと仮定した。圧縮とせん断を受けるコンクリートの挙動は複雑であり、破壊条件式の定式化は確立されているわけでもなく、異論もあるが<sup>9)</sup>、ここでは解析上の取扱い易さのために、八面体せん断応力と八面体直応力の直線関係式を用いた。

次に、鉄筋コンクリート円板の終局荷重の決定に対しては、断面の塑性変形能力の有無に依存して2つの方法を提案した。1つは、塑性変形能力が十分に期待できる場合で、この時は金属板と同じ解析法が適用でき、これは曲げ崩壊に対する降伏線理論の修正として位置づけられる。他は、塑性変形能力がまったく期待できない場合で、これは弾性曲げモーメント分布と弾性せん断力分布から直接に終局荷重の値が決定できる。最後に、既往の鉄筋コンクリート床板の押抜き破壊実験結果と比較して、上述の2つの方法の適用性を議論した。

\* 正会員 工修 大阪市立大学助教授 工学部土木工学科

### 1. 金属塑性板の極限解析法

本論文における理論の展開は極限解析法の基本定理に基づいているので、最初にこの定理を概説する。

#### (1) 極限解析法の基本定理<sup>10),11)</sup>

剛塑性材料から成る平板が、荷重  $\rho T$  ( $\rho$  は 0 から徐々に増加する係数) を受ける場合を考える。  $\rho=s$  のときに平板は塑性崩壊 (一定荷重の下で無制限塑性流れを起こす) するとすれば、崩壊時の内部エネルギー逸散速度は次式で与えられる。

$$\dot{D} = \int_V CQ' \dot{q} dV \dots \dots \dots (1)$$

ここに積分は体積積分、 $Q$  は崩壊時の平板の応力ベクトル、 $\dot{q}$  は対応する塑性ひずみ速度ベクトル、 $C$  は正のスカラ量、ダッシュは転置行マトリックスを表わす。なお  $Q, q$  は式 (1) の内部エネルギー逸散量に関連づける一般化した応力と一般化したひずみを意味する。

降伏条件を

$$F(Q) = 0 \dots \dots \dots (2)$$

と定義すれば、 $\dot{D} \geq 0$  であることより式(2)は原点  $(Q=0)$  を内包する凸閉曲面を表す<sup>12)</sup>。極限解析法では、応力場  $Q^0$  が次の条件を満足するとき静的許容であるという。

(イ)  $Q^0$  は内的小および外的小につり合っている。

(ロ) 構造物のいたるところで  $F(Q) \leq 0$  である。

また、崩壊時の変形速度場  $U^*$  が次の条件を満足するとき変形適合であるという。

(イ)  $U^*$  は連続で、幾何学的境界条件を満足する。

(ロ)  $U^*$  によって外力の成す仕事は正である。

そして、極限解析法の基本定理は次のことを主張する。「荷重  $\rho^+ T$  の下で少なくとも一つの静的許容場  $Q^0$  が見出せるなら、 $\rho^+ T$  は真の崩壊荷重  $sT$  より必ず小さいかまたは等しい。一方、荷重  $\rho^- T$  に対して少なくとも一つの変形適合場  $U^*$  が見出せるなら、 $\rho^- T$  は  $sT$  より必ず大きいまたは等しい。すなわち  $\rho^- \leq s \leq \rho^+$  である」これは以下のように証明される。

崩壊時の真の変形速度場、応力場およびひずみ速度場をそれぞれ、 $U, Q$  および  $\dot{q}$  とし、任意の変形適合場  $U^*$  に対するひずみ速度場、応力場をそれぞれ  $q^*, Q^*$  とし、そして任意の静的許容場を  $Q^0$  とすれば、降伏曲面の凸性および直交性の法則<sup>12)</sup> (塑性ひずみ速度ベクトルの方向は降伏曲面の外法線の方向と一致する (図-1 参照)) より、

$$(Q - Q^0)' \cdot \dot{q} \geq 0$$

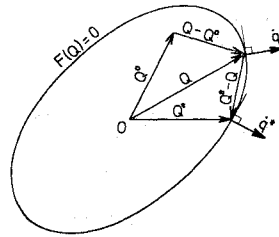


図-1 降伏曲面と塑性ひずみ速度ベクトル

仮想仕事の原理より、

$$\int_V C(Q - Q^0)' \cdot \dot{q} dV = \int_A (sT - \rho^- T)' \cdot U dA = (s - \rho^-) \int_A T' U dA \geq 0 \dots \dots \dots (3)$$

ここに  $dA$  は荷重の作用する表面要素である。崩壊時の外部逸散エネルギー速度は正であるから、式 (3) より

$$s \geq \rho^- \dots \dots \dots (4)$$

同様に、図-1 より、

$$(Q^* - Q)' \cdot \dot{q}^* \geq 0$$

仮想仕事の原理より、

$$\int_V C(Q^* - Q)' \cdot \dot{q}^* dV = \int_A (\rho^+ T - sT)' \cdot U^* dA = (\rho^+ - s) \int_A T' \cdot U^* dA \geq 0 \dots \dots \dots (5)$$

$U^*$  の定義より最後の積分値は正であるので、

$$\rho^+ \geq s \dots \dots \dots (6)$$

以上は剛塑性体に対して証明したが、弾・完全塑性体に対しても本定理が成立することが証明されている<sup>11)</sup>。

#### (2) 平板の断面の塑性崩壊に対する曲げとせん断の関連曲面

後に示す鉄筋コンクリート板への拡張をもくろんで、平板は均質であるが圧縮強度と引張強度の相異を考慮する。圧縮強度と引張強度の相異なる材料の降伏条件には Nadai および Drucker と Prager の提案式がある。

それらを取りまとめて表示すれば次のようになる。

$$\alpha J_1 + J_2^n = k^{2n} \dots \dots \dots (7)$$

ここに  $J_1$  は 3 主応力の和、 $J_1 = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z$ 、 $J_2$  は 偏差応力の二次の不変量、 $J_2 = 1/6 \cdot [(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_x - \sigma_z)^2] + \tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2$ 、 $k$  はせん断降伏応力、 $\alpha$  は引張降伏応力と圧縮降伏応力の比に関係する定数で、 $k^{2n}/3\alpha$  は 3 軸等引張状態での降伏応力を表わす。式 (7) において、 $\alpha=0, n=1$  とおけば、Mises の式、 $\alpha > 0, n=1$  とおけば、Nadai が示唆した主応力空間における Space Diagonal ( $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$  の直線) を軸とした放物回転体、 $\alpha > 0, n=1/2$  とおけば円錐体を表わし、これは Drucker と Prager の式になる。以下、Mises 式の拡張として位置づけられる  $\alpha \geq 0, n =$

1のみを採用するが、他の場合についても同様に取り扱うことができる。

平板の微小断面要素を取り出し、この要素は隣接する要素から曲げモーメント  $M_x, M_y$ , ねじりモーメント  $M_{xy}$ , そしてせん断力  $Q_x, Q_y$  を受けているとし、この要素の降伏条件式を  $M_x, M_y, M_{xy}, Q_x, Q_y$  によって決定する問題を考える。

板の中央面内に  $x, y$  軸、面に垂直に  $z$  軸をとり、薄板の曲げ理論の修正という目的で、 $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$  のほかに  $\tau_{xz}, \tau_{yz}$  を考慮するが  $\sigma_z$  の影響を無視する。すると式 (7) の降伏条件式は次のように表わされる。

$$F = \sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_x \sigma_y + \sqrt{3} \alpha' \sigma_0 (\sigma_x + \sigma_y) + 3\tau^2 - \sigma_0^2 = 0 \dots\dots\dots (8)$$

ここに  $\sigma_0$  は基準降伏応力で  $\sigma_0 = \sqrt{3}k, \alpha' = \alpha/k, \tau^2 = \tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2$  である。なお単純圧縮降伏応力を  $\sigma_{cb}$  とし、それに対する単純引張降伏応力の比を  $\delta$  とすれば、 $\sigma_0$  および  $\alpha'$  は次式で関連づけられる。

$$\alpha' = (1-\delta) \sqrt{1/(3\delta)}$$

$$\sigma_0 = 0.5 \sigma_{cb} (\sqrt{3\alpha'^2 + 4} - \sqrt{3}\alpha')$$

a) 静的許容場からの決定 (下界)

$x, y$  軸を主モーメントの方向にとる。解析の簡単化のために一定応力場からなる静的許容場に着目し、図-2 (a), (b) の応力分布を考える。若干の試算により、(a) より (b) の方が同じ曲げモーメントの値に対するせん断力の値がはるかに大きくなるのが容易にわかるので、以下 (b) についてのみ考える。

$$\left. \begin{aligned} N_x &= \int_0^h \sigma_x dz = h\{\eta\sigma_{x1} + (1-\eta)\sigma_{xz}\} = 0 \\ N_y &= \int_0^h \sigma_y dz = h\{\eta\sigma_{y1} + (1-\eta)\sigma_{yz}\} = 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (9)$$

$$\left. \begin{aligned} M_x &= \int_0^h \sigma_x z dz = -\frac{h^2\eta}{2} \sigma_{x1} \\ M_y &= \int_0^h \sigma_y z dz = -\frac{h^2\eta}{2} \sigma_{y1} \\ Q &= \sqrt{Q_x^2 + Q_y^2} = \int_0^h \tau dz = \eta h \tau_1 + h(1-\eta)\tau_2 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (10)$$

式 (9) より、

$$\eta = \frac{\sigma_{xz}}{\sigma_{xz} - \sigma_{x1}} = \frac{\sigma_{yz}}{\sigma_{yz} - \sigma_{y1}} \dots\dots\dots (11)$$

$\lambda = \sigma_{x1}/\sigma_{y1} = \sigma_{xz}/\sigma_{yz} = M_x/M_y$  とおけば、式 (8) より

$$\left( \frac{\sigma_{y1}}{\sigma_{x1}} \right) = \frac{\sigma_0}{2(1-\lambda+\lambda^2)} \left\{ -\sqrt{3}\alpha'(1+\lambda) \mp \sqrt{3\alpha'^2(1+\lambda)^2 + 4(1-\lambda+\lambda^2)} \left[ 1 - \frac{3}{\sigma_0^2} \left( \frac{\tau_1^2}{\tau_2^2} \right) \right] \right\} \dots\dots\dots (12)$$

ここに

$$\tau_1 = \sqrt{\tau_{x1}^2 + \tau_{y1}^2}, \tau_2 = \sqrt{\tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2}$$

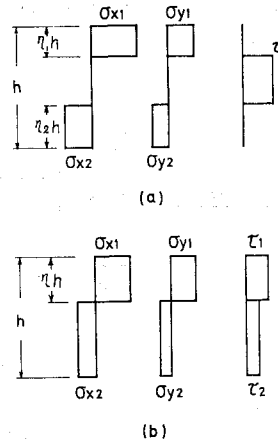


図-2 静的許容場

式 (12), 式 (11) を式 (10) に代入すれば、

$$\sqrt{3} hQ = \sqrt{\eta^2 h^4 \sigma_0^2 - 4(1-\lambda+\lambda^2) M_y^2} \left\{ \begin{aligned} &+ 2\sqrt{3} \alpha' h^2 \sigma_0 \eta (1+\lambda) M_y \\ &+ \sqrt{(1-\eta)^2 h^4 \sigma_0^2 - 4(1-\lambda+\lambda^2) M_y^2} \\ &- 2\sqrt{3} \alpha' h^2 \sigma_0 (1-\eta) (1+\lambda) M_y \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (13)$$

$M_y, \lambda$  の一定値に対して  $Q$  を極大にするために、式 (13) の変分を零とおけば、

$$\eta = \frac{1}{2} - \sqrt{3} \alpha'^2 (1+\lambda) \frac{M_y}{h^2 \sigma_0} \dots\dots\dots (14)$$

式 (14) を式 (13) に代入し、 $\lambda = M_x/M_y$  の関係を用いて整理すれば、

$$\left( 1 + \frac{3}{4} \alpha'^2 \right) M_x^2 + \left( 1 + \frac{3}{4} \alpha'^2 \right) M_y^2 - \left( 1 - \frac{3}{2} \alpha'^2 \right) M_x M_y + \frac{3}{16} (hQ)^2 = M_0^2 \dots\dots\dots (15)$$

ここに  $M_0 = h^2 \sigma_0 / 4$

次に主モーメントの方向が  $x, y$  軸に一致しない場合には、ねじりによる降伏モーメントが  $M_0/\sqrt{3}$  であることより、式 (15) は次のように変わる。

$$\left( 1 + \frac{3}{4} \alpha'^2 \right) M_x^2 + \left( 1 + \frac{3}{4} \alpha'^2 \right) M_y^2 - \left( 1 - \frac{3}{2} \alpha'^2 \right) M_x M_y + 3 M_{xy}^2 + \frac{3}{16} (hQ)^2 = M_0^2 \dots\dots\dots (16)$$

式 (15) で  $\alpha' = 0$  とおけば、等方等質板に対する Landgraf の誘導した近似降伏曲面の一つに一致する。

b) 変形適合場からの決定 (上界)

中央面内の主曲率の方向に  $x, y$  軸をとり、それらに垂直に  $z$  軸をとる。 $x, y, z$  方向の速度を  $u, v, w$  とし、板の断面内の速度分布を中央面上の速度  $u_0, v_0, w_0$  と回転速度  $\theta_x, \theta_y$  で表わす。

$$w=w_0, u=u_0+\theta_x z, v=v_0+\theta_y z \dots\dots\dots(17)$$

するとひずみ速度は

$$\left. \begin{aligned} \dot{\epsilon}_x &= \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u_0}{\partial x} + z \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \\ \dot{\epsilon}_y &= \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial v_0}{\partial y} + z \frac{\partial \theta_y}{\partial y} \\ \dot{\gamma}_{xz} &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = \theta_x + \frac{\partial w_0}{\partial x} \\ \dot{\gamma}_{yz} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = \theta_y + \frac{\partial w_0}{\partial y} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(18)$$

次の記号を導入すれば、

$$\begin{aligned} \bar{\epsilon}_x &= \frac{\partial u_0}{\partial x}, \bar{\epsilon}_y = \frac{\partial v_0}{\partial y}, \bar{\gamma}_x = \dot{\gamma}_{xz}, \bar{\gamma}_y = \dot{\gamma}_{yz}, \\ \bar{\kappa}_x &= h \left( \frac{\partial \dot{\gamma}_{xz}}{\partial x} - \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \right), \bar{\kappa}_y = h \left( \frac{\partial \dot{\gamma}_{yz}}{\partial y} - \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right), \\ \zeta &= \frac{\bar{\epsilon}_x}{\bar{\kappa}_x}, \xi = \frac{\bar{\epsilon}_y}{\bar{\kappa}_y}, z' = \frac{z}{h} \end{aligned}$$

式 (18) は

$$\left. \begin{aligned} \dot{\epsilon}_x &= \bar{\kappa}_x (\zeta + z'), \dot{\epsilon}_y = \bar{\kappa}_y (\xi + z'), \\ \dot{\gamma}_{xz} &= \bar{\gamma}_x, \dot{\gamma}_{yz} = \bar{\gamma}_y \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(19)$$

塑性流れ法則よりひずみ速度と応力の関係を定めれば、

$$\left. \begin{aligned} \dot{\epsilon}_x &= d\lambda \frac{\partial F}{\partial \sigma_x} = d\lambda (2\sigma_x - \sigma_y + \sqrt{3}\alpha'\sigma_0) \\ \dot{\epsilon}_y &= d\lambda \frac{\partial F}{\partial \sigma_y} = d\lambda (2\sigma_y - \sigma_x + \sqrt{3}\alpha'\sigma_0) \\ \dot{\gamma}_{xz} &= d\lambda \frac{\partial F}{\partial \tau_{xz}} = d\lambda 6\tau_{xz} \\ \dot{\gamma}_{yz} &= d\lambda \frac{\partial F}{\partial \tau_{yz}} = 6d\lambda\tau_{yz} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(20)$$

ここに  $d\lambda$  は塑性流れ係数 ( $d\lambda > 0$ )

式 (20) の逆関係を求めれば、

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{\sigma_0}{3d\lambda'} \{ 2\zeta\bar{\kappa}_x + \xi\bar{\kappa}_y + (\bar{\kappa}_x + 2\bar{\kappa}_y)z' - \sqrt{3}\alpha'\sigma_0 \} \\ \sigma_y &= \frac{\sigma_0}{3d\lambda'} \{ 2\xi\bar{\kappa}_y + \zeta\bar{\kappa}_x + (\bar{\kappa}_x + 2\bar{\kappa}_y)z' - \sqrt{3}\alpha'\sigma_0 \} \\ \tau &= \frac{\sigma_0}{6d\lambda'} \dot{\gamma} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(21)$$

ここに

$$d\lambda' = d\lambda\sigma_0, \tau = \sqrt{\tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2}, \dot{\gamma} = \sqrt{\dot{\gamma}_{xz}^2 + \dot{\gamma}_{yz}^2}$$

式 (21) を式 (8) に代入して  $d\lambda'$  を決定し、式 (21) に代入して応力を求める。そして式 (9) より膜力  $N_x, N_y$  の式をつくり、その結果、 $N_x=0, N_y=0$  の条件より次式を得る。

$$\left. \begin{aligned} (2\xi + \mu\zeta)I_F + (2+\mu) \left\{ \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{2}g(\zeta, \xi) + f(\zeta, \xi, \lambda)} \right. \\ \left. - \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{1}{2}g(\zeta, \xi) + f(\zeta, \xi, \lambda)} \right\} \\ - \frac{2+\mu}{2}g(\zeta, \xi)I_F - \frac{\sqrt{3}\alpha'}{\Phi(\mu)} = 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(22)$$

[上式の左辺を、 $(2\xi + \mu\zeta) \rightarrow (2\xi + \mu\zeta), (2+\mu) \rightarrow (2\mu+1)$  に置き換えたもの] = 0

ここに

$$\begin{aligned} \mu &= \frac{\bar{\kappa}_x}{\bar{\kappa}_y}, \lambda = \frac{\dot{\gamma}}{2\bar{\kappa}_y}, \Phi(\mu) = \frac{\sqrt{3(1+3\alpha'^2)}}{3\sqrt{1+\mu+\mu^2}}, \\ g(\zeta, \xi) &= \frac{2\xi + 2\zeta\mu^2 + (\xi + \zeta)\mu}{1+\mu+\mu^2}, \\ f(\zeta, \xi, \lambda) &= \frac{\xi^2 + \zeta^2\mu^2 + \zeta\xi\mu + \lambda^2}{1+\mu+\mu^2}, \\ I_F &= \int_{-1/2}^{1/2} \frac{1}{\sqrt{z^2 + gz + f}} dz \\ &= \log \left| \frac{1+g+2\sqrt{\frac{1}{4} + \frac{g}{2} + f}}{-1+g+2\sqrt{\frac{1}{4} - \frac{g}{2} + f}} \right| \end{aligned}$$

曲げモーメントおよびせん断力は式 (21) の積分により、

$$\left. \begin{aligned} \frac{M_x}{\sigma_0 h^2 \Phi} &= \left[ 2\mu\zeta + \xi + \frac{(2\mu+1)(1-3g)}{4} \right] \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{g}{2} + f} \\ &\quad - \left[ 2\mu + \xi - \frac{(2\mu+1)(1+3g)}{4} \right] \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{g}{2} + f} \\ &\quad - \left[ \frac{1}{2}g \cdot (2\mu\zeta + \xi) - \frac{2\mu+1}{8}(3g^2 - 4f) \right] I_F \\ \frac{M_y}{\sigma_0 h^2 \Phi} &= \left\{ \begin{array}{l} \text{上式の右辺を、} (2\mu\zeta + \xi) \rightarrow (2\xi + \mu\zeta), \\ (2\mu+1) \rightarrow (2+\mu) \text{ に置き換えたもの} \end{array} \right\} \\ \frac{Q}{\sigma_0 h \Phi} &= \lambda I_F \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(23)$$

したがって、 $-\infty < \mu < \infty, -\infty < \lambda < \infty$  に対して式 (22) より  $\zeta, \xi$  の値を求め、それらを式 (23) に代入し、 $M_x, M_y, Q$  の関係を求めれば、上界の降伏曲面が

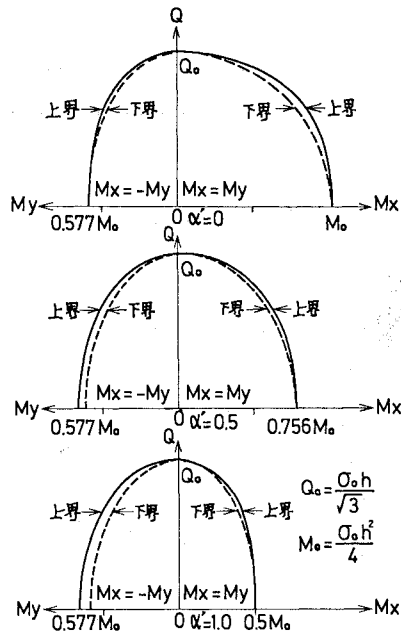


図-3 上、下界相関曲面の比較 ( $M_x = M_y, M_x = -M_y$  の各断面における)

決定できる。降伏曲面は  $M_x=M_y$  および  $M_x=-M_y$  面に対称であるから、これらの対称面上における  $\xi, \zeta$  を求めれば、

$M_x=M_y$  の場合 ( $\mu=1$ ) : 対称条件より  $\xi=\zeta$ , 式 (22) より、

$$\xi = \frac{K\sqrt{1+\frac{4}{3}\lambda^2-K^2}}{2\sqrt{1-K^2}}$$

ここに  $K=\sqrt{3}a'/(3\sigma)$

$M_x=-M_y$  の場合 ( $\mu=-1$ ) : 逆対称条件より  $\xi=-\zeta$ , 式 (22) より、

$$\xi \log \frac{1+2\sqrt{\frac{1}{4}+3\xi^2+\lambda^2}}{-1+2\sqrt{\frac{1}{4}+3\xi^2+\lambda^2}} = K$$

上式より  $\zeta, \xi$  の値を決定し、式 (23) に代入すれば、上界の降伏曲面が求められる。図-3 には、対称面  $M_x=M_y$  および  $M_x=-M_y$  における上界降伏曲面と下界降伏曲面の比較が示されているが、その開きは大きくない。したがって、簡単な静的許容場 (図-2 (b)) により求めた下界の降伏曲面 (相関曲面) を平板の終局荷重の解析に使用しても工学的には十分であることがわかる。

(3) 円板の終局荷重の計算法

半径方向のモーメントを  $M_r$ , 円周方向のそれを  $M_\theta$ , せん断力を  $Q$ , 基準塑性モーメントを  $M_0(=\sigma_0 h^2/4)$ , 基準塑性せん断力を  $Q_0(=\sigma_0 h/\sqrt{3})$  とし、無次元量:  $m=M_r/M_0, t=M_\theta/M_0, q=Q/Q_0, r_g=Q_0 a/M_0$  ( $a$  は円板の半径) を導入する。式 (1) で定義した一般化した応力は、この問題に対して、 $(m, t, q)$  であり、降伏条件式 ( $F=0$ ) は式 (15) の相関曲面である。静的許容場を単位の強さの荷重 ( $P=1$ ) とつり合う応力場  $(m_0, t_0, q_0)$  と零荷重とつり合う応力場  $(\bar{m}, \bar{t}, 0)$  との和によって与えれば、軸対称荷重を受ける円板の終局荷重の決定は、基本定理により、次の数理計画の問題になる。

$$\left. \begin{aligned} &\text{maximize } P, \\ &\text{subjected to} \\ &F(m, t, q) \leq 0, \\ &m = m_0 P + \bar{m}, \\ &t = t_0 P + \bar{t}, \\ &q = q_0 P, \\ &\bar{m} + \frac{d\bar{m}}{d\rho} \rho - \bar{t} = 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (24)$$

ここに  $\rho=r/a, r$  は中心からの距離,  $P$  は荷重強さ。 ( $m_0, t_0, q_0$ ) に既知の弾性解 (文献 15) などを参照) を利用すれば、 $(\bar{m}, \bar{t}, 0)$  は終局状態におけるモーメント分布の弾性モーメント分布からの修正量と解釈することができる。つり合いの微分方程式を差分式に変換して取

扱い、各網目点において  $F \leq 0$  を満足させることにする。したがって網目点間において降伏条件式を犯す可能性があるが、網目間隔を十分小さくすれば、式 (24) の  $(m, t, q)$  は静的許容を保証するものと思われる。

以上の操作によって式 (24) は非線形計画の問題になるが、さらに Dantzig-Wolfe<sup>16)</sup> の分割原理 (Decomposition Principle) により、非線形制約条件式を線形化して、式 (24) を次の線形計画の問題に変換する。すなわち、この原理は降伏曲面 ( $F=0$ ) を内接凸多面体に近似させて解析することを意味している。

$$\left. \begin{aligned} &\text{maximize } P, \\ &\text{subjected to} \\ &\sum_{k=1}^r \alpha_i^k = 1, \quad \sum_{k=1}^r \alpha_i^k \bar{q}_k - P q_{0i} = 0, \\ &\sum_{k=1}^r \alpha_i^k (\bar{m}_k - \bar{t}_k) + \frac{\rho_i}{2A} \left( \sum_{k=1}^r \alpha_{i+1}^k \bar{m}_k - \sum_{k=1}^r \alpha_{i-1}^k \bar{m}_k \right) \\ &\quad - P(m_{0i} - t_{0i}) - P \rho_i \left( \frac{dm_0}{d\rho} \right)_i = 0, \\ &\alpha_i^k \geq 0, \quad i=1, 2, 3, \dots, n, \quad k=1, 2, 3, \dots, r \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (25)$$

ここに  $\alpha_i^k$  は新たに導入した非負の変数,  $A=a/(n-1)$ ,  $\rho_i=r_i/a, n$  は差分の網目数,  $\bar{m}_k, \bar{t}_k, \bar{q}_k$  は降伏曲面上に選んだ端点 (凸多面体の頂点) の座標であり,  $r$  は端点の数である。式 (25) の最適解  $P_{\max}$ ,  $\alpha_i^k$  はシンプレックス法にて求めることができ、終局状態でのモーメント分布は次式で決定できる。

$$m_i = \sum_{k=1}^r \alpha_i^k \bar{m}_k, \quad t_i = \sum_{k=1}^r \alpha_i^k \bar{t}_k, \quad q_i = \sum_{k=1}^r \alpha_i^k \bar{q}_k \dots\dots\dots (26)$$

(4) 数値計算結果と考察

最初に本解析法による解の精度を調べるために、Tresca の降伏条件式に従う円板の曲げ崩壊に対して、Hopkins, Prager の求めた解析解<sup>1)</sup> との比較を行う。Tresca の降伏条件式に対する式 (25) の  $(\bar{m}_k, \bar{t}_k)_{k=1,2,\dots,r}$  は  $(1, 0), (1, 1), (0, 1), (-1, 0), (-1, -1), (0, -1)$  であり、部分荷重を受ける単純支持板 (図-4) および固定板 (図-5) に対して使用した差分の網目数  $n$  と得られた終局荷重の値を表-1 に示す。ここでは降伏関数  $F$  は厳密に取扱われているので、表-1 における誤差は差分近似による正味の誤差である。この結果、 $n$  を 10 以上にとれば、0.5% 内の誤差で終局荷重の値が得られることが推測できる。

次に、曲げとせん断の両方を考慮した場合の終局荷重の計算値を表-2 に示す。これらの値は相関曲面 (15) を、図-6 に示すような対称面上および座標軸上に頂点  $(\bar{m}_k, \bar{t}_k, \bar{q}_k)_{k=1,2,3,\dots,13}$  を持つ内接凸多面体に置き換え、差分の網目数 ( $n$ ) を 11~16 (せん断力の最大点に必ず網目点がかかるように選んだ) として求めたものである。

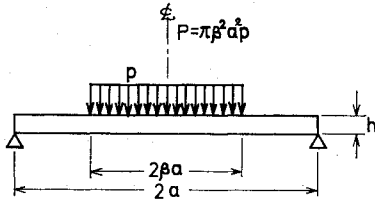


図-4 部分荷重を受ける単純支持円板

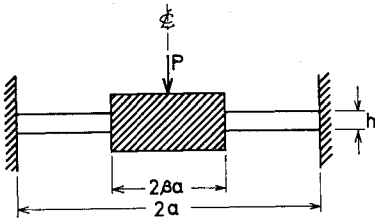
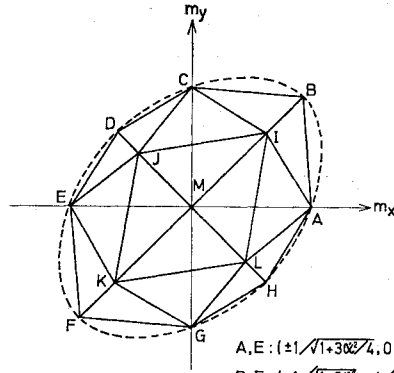


図-5 剛域を通して荷重を受ける固定円板



- A,E:  $(\pm 1/\sqrt{1+3\alpha^2}/4, 0, 0)$
- B,F:  $(\pm 1/\sqrt{1+3\alpha^2}, \pm 1/\sqrt{1+3\alpha^2}, 0)$
- C,G:  $(0, \pm 1/\sqrt{1+3\alpha^2}/4, 0)$
- D,H:  $(\pm 1/\sqrt{3}, \pm 1/\sqrt{3}, 0)$
- I,K:  $(\pm 1/\sqrt{2(1+3\alpha^2)}, \pm 1/\sqrt{2(1+3\alpha^2)}, 1/\sqrt{3})$
- J,L:  $(\pm 1/\sqrt{6}, \pm 1/\sqrt{6}, 1/\sqrt{3})$
- M:  $(0, 0, 1)$

図-6 式(15)に対する近似相関曲面

表-1 部分荷重を受ける円板(図-4)に対して、差分の網目数(n)と終局荷重( $P_{max}/\pi M_0$ )の関係

	$\beta$	n										Exact*
		5	6	7	8	9	10	12	14	16	18	
単純支持	0.1	2.29	2.22	2.18	2.15	2.13	2.12	2.13	2.15	2.15	2.15	2.14
	0.3	2.50	2.54	2.49	2.48	2.51	2.50	2.50	2.49	2.50	2.49	2.50
	1.0	5.82	5.88	5.92	5.94	5.95	5.96	5.98	5.98	5.99	5.99	6.00
固定	0.1	3.45	3.36	3.25	3.16	3.10	3.05	3.10	3.18	3.19	3.17	3.17
	0.3	4.03	4.15	4.07	4.04	4.13	4.11	4.11	4.10	4.12	4.10	4.12
	1.0	10.91	11.07	11.10	11.16	11.17	11.17	11.21	11.22	11.24	11.24	11.26

\* Hopkins, Prager による解析解<sup>1)</sup>

表-2(a) 部分荷重を受ける単純支持板(図-4)の終局荷重( $P_{max}/2\pi M_0$ )

$h/a$	$\beta$							
	0.06667	0.08333	0.1	0.16667	0.2	0.3	0.5	1.0
$\alpha' = 0.0$ ( $\delta = 1.0$ )								
0	1.03 (1.00)	1.04 (1.00)	1.05 (1.00)	1.12 (1.00)	1.14 (1.00)	1.24 (1.00)	1.49 (1.00)	2.99 (1.00)
0.05	1.00 (0.97)	1.01 (0.97)	1.02 (0.97)	1.09 (0.97)	1.12 (0.98)	1.22 (0.98)	1.47 (0.99)	2.95 (0.99)
0.1	0.94 (0.89)	0.96 (0.92)	0.98 (0.93)	1.06 (0.95)	1.09 (0.96)	1.19 (0.96)	1.44 (0.97)	2.90 (0.97)
0.2	0.76 (0.74)	0.85 (0.82)	0.88 (0.84)	0.99 (0.88)	1.03 (0.90)	1.14 (0.92)	1.40 (0.94)	2.82 (0.94)
0.3	0.51 (0.50)	0.64 (0.62)	0.75 (0.71)	0.92 (0.82)	0.96 (0.84)	1.09 (0.88)	1.35 (0.91)	2.74 (0.92)
$\alpha' = 0.7379$ ( $\delta = 0.3$ )								
0	1.01 (1.00)	1.02 (1.00)	1.03 (1.00)	1.05 (1.00)	1.07 (1.00)	1.13 (1.00)	1.30 (1.00)	2.45 (1.00)
0.05	0.98 (0.97)	0.99 (0.97)	1.00 (0.97)	1.03 (0.98)	1.05 (0.98)	1.11 (0.98)	1.28 (0.98)	2.42 (0.99)
0.1	0.94 (0.93)	0.95 (0.93)	0.96 (0.93)	1.01 (0.96)	1.03 (0.96)	1.09 (0.96)	1.26 (0.97)	2.40 (0.98)
0.2	0.83 (0.82)	0.88 (0.86)	0.90 (0.87)	0.96 (0.91)	0.98 (0.92)	1.05 (0.93)	1.23 (0.95)	2.34 (0.96)
0.3	0.61 (0.60)	0.74 (0.73)	0.82 (0.80)	0.91 (0.87)	0.93 (0.87)	1.02 (0.90)	1.19 (0.92)	2.29 (0.93)

(注) ( ) 内は曲げ崩壊荷重に対する比を示す。

$$\bar{M}_0 = M_0 / \sqrt{1+3\alpha'^2/4}$$

表-2(b) 部分荷重を受ける固定板の終局荷重( $P_{max}/2\pi M_0$ )

$h/a$	$\beta$							
	0.06667	0.08333	0.1	0.16667	0.2	0.3	0.5	1.0
$\alpha' = 0.0$ ( $\delta = 1.0$ )								
0	1.50 (1.00)	1.54 (1.00)	1.57 (1.00)	1.77 (1.00)	1.84 (1.00)	2.07 (1.00)	2.64 (1.00)	5.65 (1.00)
0.05	1.39 (0.93)	1.44 (0.94)	1.50 (0.96)	1.71 (0.97)	1.78 (0.97)	2.02 (0.98)	2.57 (0.97)	5.44 (0.96)
0.1	1.26 (0.84)	1.34 (0.87)	1.39 (0.89)	1.63 (0.92)	1.71 (0.93)	1.96 (0.95)	2.50 (0.95)	5.24 (0.93)
0.2	0.77 (0.51)	0.95 (0.60)	1.07 (0.68)	1.48 (0.84)	1.57 (0.85)	1.84 (0.89)	2.36 (0.89)	4.87 (0.86)
0.3	0.51 (0.34)	0.64 (0.42)	0.77 (0.49)	1.28 (0.72)	1.40 (0.76)	1.72 (0.83)	2.24 (0.85)	4.54 (0.80)
$\alpha' = 0.7379$ ( $\delta = 0.3$ )								
0	1.59 (1.00)	1.62 (1.00)	1.64 (1.00)	1.81 (1.00)	1.87 (1.00)	2.08 (1.00)	2.57 (1.00)	5.34 (1.00)
0.05	1.50 (0.94)	1.54 (0.95)	1.57 (0.96)	1.74 (0.96)	1.80 (0.96)	2.02 (0.97)	2.50 (0.97)	5.10 (0.96)
0.1	1.39 (0.87)	1.45 (0.90)	1.49 (0.91)	1.68 (0.93)	1.74 (0.93)	1.96 (0.94)	2.43 (0.95)	4.88 (0.91)
0.2	0.87 (0.55)	1.03 (0.64)	1.18 (0.72)	1.57 (0.87)	1.63 (0.87)	1.85 (0.89)	2.30 (0.89)	4.49 (0.84)
0.3	0.61 (0.38)	0.75 (0.46)	0.87 (0.53)	1.40 (0.77)	1.51 (0.81)	1.75 (0.84)	2.18 (0.85)	4.14 (0.78)

(注) ( ) 内は曲げ崩壊荷重に対する比を示す。

$$\bar{M}_0 = M_0 / \sqrt{1+3\alpha'^2/4}$$

表-2(c) 剛域を通して載荷された単純支持板の終局荷重 ( $P_{max}/2\pi M_0$ )

$h/a$	$\beta$	0.1	0.16667	0.2	0.3	0.5
$\alpha'=0.0$ ( $\delta=1.0$ )						
0		1.09 (1.00)	1.20 (1.00)	1.25 (1.00)	1.43 (1.00)	2.01 (1.00)
0.05		1.06 (0.97)	1.16 (0.97)	1.21 (0.97)	1.39 (0.97)	1.95 (0.97)
0.1		1.02 (0.94)	1.13 (0.94)	1.18 (0.94)	1.35 (0.94)	1.89 (0.94)
0.2		0.90 (0.83)	1.06 (0.88)	1.11 (0.89)	1.28 (0.90)	1.78 (0.89)
0.3		0.75 (0.69)	0.96 (0.80)	1.03 (0.82)	1.21 (0.85)	1.68 (0.84)
$\alpha'=0.7379$ ( $\delta=0.3$ )						
0		1.03 (1.00)	1.09 (1.00)	1.12 (1.00)	1.29 (1.00)	1.83 (1.00)
0.05		1.01 (0.98)	1.07 (0.98)	1.10 (0.98)	1.26 (0.98)	1.78 (0.97)
0.1		0.98 (0.95)	1.05 (0.96)	1.08 (0.96)	1.23 (0.96)	1.73 (0.95)
0.2		0.92 (0.89)	1.00 (0.92)	1.03 (0.92)	1.18 (0.91)	1.63 (0.89)
0.3		0.82 (0.80)	0.95 (0.87)	0.98 (0.88)	1.12 (0.87)	1.55 (0.85)

(注) ( ) 内は曲げ崩壊荷重に対する比を示す。  
 $M_0 = M_0/\sqrt{1+3\alpha'^2/4}$

表-2(d) 剛域を通して載荷された固定板 (図-5) の終局荷重 ( $P_{max}/2\pi M_0$ )

$h/a$	$\beta$	0.1	0.16667	0.2	0.3	0.5
$\alpha'=0.0$ ( $\delta=1.0$ )						
0		1.71 (1.00)	1.99 (1.00)	2.11 (1.00)	2.52 (1.00)	3.73 (1.00)
0.05		1.62 (0.95)	1.89 (0.95)	2.01 (0.95)	2.42 (0.96)	3.55 (0.95)
0.1		1.54 (0.90)	1.81 (0.91)	1.92 (0.91)	2.32 (0.92)	3.39 (0.91)
0.2		1.16 (0.68)	1.57 (0.79)	1.73 (0.82)	2.13 (0.85)	3.10 (0.83)
0.3		0.77 (0.45)	1.28 (0.68)	1.45 (0.67)	1.87 (0.74)	2.81 (0.75)
$\alpha'=0.7379$ ( $\delta=0.3$ )						
0		1.77 (1.00)	1.97 (1.00)	2.06 (1.00)	2.49 (1.00)	3.68 (1.00)
0.05		1.65 (0.93)	1.89 (0.96)	1.99 (0.97)	2.39 (0.96)	3.49 (0.95)
0.1		1.58 (0.89)	1.83 (0.93)	1.92 (0.93)	2.30 (0.92)	3.32 (0.90)
0.2		1.34 (0.76)	1.69 (0.86)	1.80 (0.87)	2.12 (0.85)	3.01 (0.82)
0.3		0.91 (0.51)	1.47 (0.75)	1.59 (0.77)	1.97 (0.79)	2.75 (0.75)

(注) ( ) 内は曲げ崩壊荷重に対する比を示す。  
 $M_0 = M_0/\sqrt{1+3\alpha'^2/4}$

表-2の結果より終局荷重に対するせん断力の影響をまとめれば次のようになる。

- (イ) 載荷面が小さくなるにつれて大きくなる。
- (ロ) スパンに対する板厚の比が大きくなるにつれて大きくなる。
- (ハ) 単純支持板より固定板の方が大きい。
- (ニ) 同じ大きさの載荷面の場合、部分等分布荷重より剛域を通して載荷する方が若干大きい。

## 2. 鉄筋コンクリート板の極限解析への応用

前節で示した金属板に対する極限解析の方法を鉄筋コンクリート板への応用を試みる。金属板と鉄筋コンクリート板との本質的な相異は塑性変形能力の大きさにある。金属板では、「弾性限界を越えた材料は構造全体の変形適合機構が形成されるまで十分塑性変形し得る」という仮定は適当であるが、鉄筋コンクリート板では事情が異なる。すなわち比較的鉄筋量が少ない板が曲げを受ける場合で、断面の変形が鉄筋の塑性変形によって支配される時は金属板と同じ仮定が適用できるが、他の場合で圧縮コンクリートの塑性変形に期待する時は、上記の仮定は終局荷重を過大に評価することになる。金属板の場合と同様、曲げとせん断の相関曲面の決定問題とそれに基づく終局荷重の決定問題を分けて取扱う。最初の問題に対しては、等筋単鉄筋板を対象として以下の仮定

を設ける。

- (イ) 断面の変形適合機構の形成に際して、曲げによる引張側のコンクリートの破壊が先行するとし、終局状態では曲げ引張力は鉄筋のみによって受け取られ、中立面より上の2軸圧縮状態にあるコンクリートが曲げ圧縮とせん断に抵抗する。
- (ロ) 2軸圧縮状態でのコンクリートは断面内での応力の再配分に必要な塑性流動を起こすものとし、見かけの降伏応力は破壊応力の  $k$  倍 ( $k < 1$ ) に等しいとする。
- (ハ) 圧縮コンクリートの破壊条件式としては八面体せん断応力と八面体直応力の直線関係式を用いる。
- (ニ) 鉄筋は弾・完全塑性材料であるとし、鉄筋のせん断抵抗を無視する。

以上の仮定と金属板の結果を参考にして終局状態での静的許容場を図-7のように考える。図において、 $d$ は

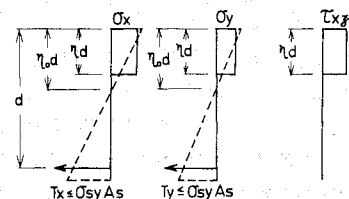


図-7 鉄筋コンクリート板の静的許容場

有効高さ、 $\eta_0 d$  は上表面から中立面までの高さ、 $\eta d$  は応力ブロックの高さであり、仮定 (イ) と圧縮コンクリートの塑性ひずみ量の有限性より、 $k' \eta_0 d$  ( $k' \leq 1$ ) より大きくはとれないものとする。

曲げモーメントおよびせん断力は次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} \frac{M_x}{\sigma_0 d^2} &= -\eta(1-0.5 \eta) \sigma_x' \\ \frac{M_y}{\sigma_0 d^2} &= -\eta(1-0.5 \eta) \sigma_y' \\ \frac{Q_x}{\sigma_0 d} &= \eta \tau_{xz}' \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(27)$$

ここに

$$\eta = p_s \omega / |\sigma_x'| \leq k' \eta_0, \quad \sigma_x' = \sigma_x / \sigma_0, \\ \sigma_y' = \sigma_y / \sigma_0, \quad \omega = \sigma_{sy} / \sigma_0$$

$\sigma_{sy}$  : 鉄筋の降伏応力

$\sigma_0$  : コンクリートの単純圧縮降伏応力

$p_s$  : 鉄筋比 (=  $A_s/d$ )

仮定 (ハ) より圧縮コンクリートの降伏条件式 (破壊条件式と相似と仮定する) は

$$\tau_{oct} = -c_a \sigma_{oct} + c_b \sigma_0 \dots\dots\dots(28)$$

ここに

$$\tau_{oct} = \frac{1}{3} \sqrt{2(\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_x \sigma_y) + 6 \tau_{xz}^2},$$

$$\sigma_{oct} = \frac{1}{3} (\sigma_x + \sigma_y), \quad c_a, c_b \text{ は材料定数}$$

次に無次元量:  $m_x = M_x/M_0$ ,  $m_y = M_y/M_0$ ,  $q_x = Q_x/\sigma_0 d$ , ただし  $M_0$  は降伏モーメント [=  $\sigma_0 d^2 p_s \omega (1-0.5 p_s \omega)$ ],  $\eta_0' = k' \eta_0$  を導入すれば, 下界定理に基づく相関曲面は式 (27), 式 (28) より以下のように与えられる。

$$m_x \geq \frac{1-0.5 \eta_0'}{1-0.5 p_s \omega} \text{ の場合,} \\ (2-c_a^2) (p_s \omega)^2 \left[ 1 - \frac{2(1+c_a)^2}{2-c_a^2} \cdot \frac{m_y}{m_x} + \frac{m_y^2}{m_x^2} \right] \\ - 36 c_b^2 [1 - (1-0.5 p_s \omega) m_x]^2 - 12 c_a c_b p_s \omega \\ \cdot \left( 1 + \frac{m_y}{m_x} \right) [1 - (1-0.5 p_s \omega) m_x] + 6 q_x^2 = 0 \\ \dots\dots\dots(29)$$

$$m_x < \frac{1-0.5 \eta_0'}{1-0.5 p_s \omega} \text{ の場合,} \\ (2-c_a^2) \left( \frac{1-0.5 p_s \omega}{1-0.5 \eta_0'} \right)^2 (p_s \omega)^2 \left[ m_x^2 - \frac{2(1+c_a^2)}{2-c_a^2} \right. \\ \cdot m_x m_y + m_y^2 \left. \right] - 6 \eta_0' c_a c_b p_s \omega (m_x + m_y) \\ \cdot \frac{1-0.5 p_s \omega}{1-0.5 \eta_0'} + 6 q_x^2 - 9 \eta_0'^2 c_b^2 = 0 \dots\dots\dots(30)$$

以上の式は  $m_x \geq m_y$  の領域のみに対して適用できるが,  $m_x < m_y$  の領域に対しては  $m_x$  と  $m_y$  を入れ替えばよい。式 (30) が描く相関曲面は係数  $p_s, \omega, c_a, c_b$  に関する複雑な形状を示すが, 金属板に対する図-6 と同様な内接多面体を考えれば, 次の座標を持つ点:  $A, B, B', C, C', \dots, F$  および原点を頂点とする凸

多面体を近似相関曲面として用いることができる。

$$\left. \begin{aligned} (m_x)_A &= (m_y)_A = \frac{1-0.5 \eta'}{1-0.5 p_s \omega}, \\ \eta' &= \frac{p_s \omega (1-2 c_a^2)}{3 c_b (c_a + 1/\sqrt{2})}, \\ (q_x)_A &= 0, \quad (m_x)_B = (m_y)_{B'} = 1.0, \\ (m_y)_B &= (m_x)_{B'} = 0, \quad (q_x)_B = (q_x)_{B'} = 0, \\ (m_x)_C &= (m_y)_{C'} = (m_x)_E = (m_y)_E \\ &= \frac{1-0.5 \eta_0'}{1-0.5 p_s \omega}, \quad (m_y)_C = (m_x)_{C'} = 0, \\ (q_x)_C &= (q_x)_{C'} = (q_x)_E \\ &= \frac{\eta_0'}{\sqrt{6}} \sqrt{\left( \frac{2 c_a}{\eta_0'} p_s \omega + 3 c_b \right)^2 - 2 \left( \frac{p_s \omega}{\eta_0'} \right)^2}, \\ (m_x)_D &= (m_y)_D = 1.0, \\ (q_x)_D &= \frac{p_s \omega}{\sqrt{6}} \sqrt{(2 c_a + 3 c_b)^2 - 2}, \\ (q_x)_F &= \sqrt{\frac{3}{2}} c_b \eta_0' \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(31)$$

次に, 鉄筋コンクリート円板の終局荷重を求める問題を考える。式 (31) の相関曲面を  $F(m, t, q) = 0$  と定義する。ここに  $m, t$  は半径方向, 円周方向のモーメント,  $q$  は半径方向のせん断力である。式 (1) における一般化した応力  $m, t, q$  に対応する一般化した塑性ひずみ速度  $\dot{\epsilon}_r, \dot{\epsilon}_\theta, \dot{\gamma}$  とすれば, 断面の塑性変形能力の大きさ, すなわち  $\epsilon_r, \epsilon_\theta, \gamma$  の限界容量に依存して終局荷重を決定する方法を次の2つに分ける。

(イ) 断面の塑性変形能力が十分期待できる場合  
[式 (24) と同じ].....(32)

(ロ) 断面の塑性変形能力が全く期待できない場合  
maximize  $P$   
subjected to  
 $F(m, t, q) \leq 0,$   
 $m = m_0 P, t = t_0 P, q = q_0 P$  } .....(33)

ここに  $m_0, t_0, q_0$  は弾性モーメントおよびせん断力である。式 (32) は金属板の問題と同様, 線型計画の問題 (25) に帰着する。一方, 式 (33) は,  $m_0, t_0, q_0$  は既知であるので, 直接法で  $P$  の最大値が決定できる。一般に鉄筋量が少なく, 載荷面が大きい場合には, 鉄筋の塑性引張に基づく曲げ変形が支配するので, 式 (32) が適用できるが, そうでない場合には断面の塑性変形能力は有限であり, 式 (32) で与える終局荷重は過大になる。したがって, この意味において式 (32) は終局荷重の上界値を与え, 式 (33) は下界値を与える。

### 3. 数値計算結果および既往の実験データとの比較

最初に鉄筋コンクリート板の特性を調べるために,



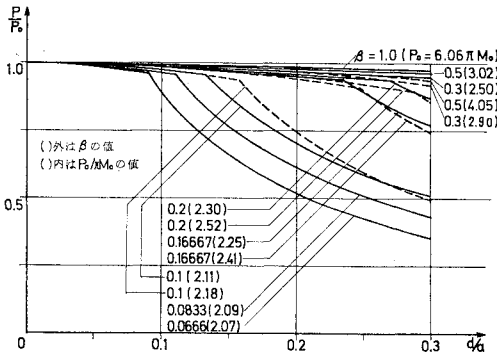


図-8 鉄筋比 0.5% の単純支持板の終局荷重  
[実線は部分荷重(図-4)、点線は剛域押込み(図-5)を表わす]

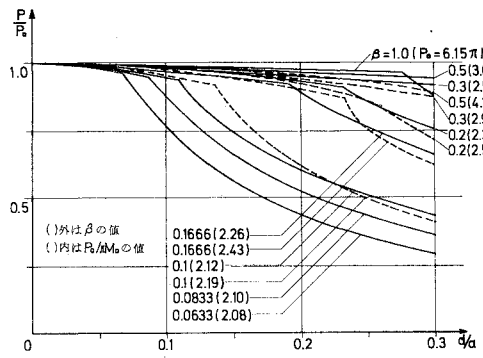


図-9 鉄筋比 1% の単純支持板の終局荷重  
[実線は部分荷重(図-4)、点線は剛域押込み(図-5)を表わす]

種々の鉄筋量, 板厚比, 載荷面寸法に対する終局荷重の値を式 (32) によって求めた. コンクリートの破壊条件式 (28) における係数  $c_a, c_b$  は, 坪井・末永<sup>17)</sup> による中空円筒の圧縮・引張, 圧縮・ねじり試験結果の整理により,

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{oct} \leq \frac{3}{2} \sigma_0 \text{ の時, } c_a = 1.12, c_b = 0.098 \\ \sigma_{oct} > \frac{3}{2} \sigma_0 \text{ の時, } c_a = 0.5, c_b = 1.028 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (34)$$

鉄筋とコンクリートの降伏応力比  $\omega = \sigma_{sy} / \sigma_0 = 10$ , 弾性係数比  $n = E_s / E_c = 15$ , コンクリートの降伏応力と破壊応力の比  $k = \sigma_0 / \sigma_{cb} = 1.0$ , 応力ブロックの限界高さ  $\eta_0' = \eta_0 = n p_s \{-1 + \sqrt{1 + 2 / (n p_s)}\}$ , ここに  $p_s$  は鉄筋比(単鉄筋)と仮定した. 計算結果を図-8, 9, 10 に示す. 図中の半径に対する有効高さの比 ( $d/a$ ) が零の時の値は純粋な曲げ崩壊荷重 ( $P_0$ ) を示す. せん断力の影響の全般的な傾向は金属板の場合と同様であるが, 鉄筋比の影響は顕著である. すなわち同じ  $d/a, \beta$  (載荷幅比) に対して,  $p_s$  が大きくなれば, それだけせん断力の影響は大きくなる. また等分布満載荷重 ( $\beta = 1$ ) の場合でも, 板厚が大きい場合には, 支点部のせん断破壊によって支配されることが認められる.

次に, 単鉄筋・等配筋単純支持正方形床板を正方形載荷面で押抜き破壊実験して得られた角田・井藤・藤田の結果<sup>18)</sup> と本解析法による計算値との比較を行った. 計算においては, 正方形床板は内接円板, 正方形載荷面を内接円形面に置き換えた. 実験板では荷重は鋼板を通してかけられたが, 計算では部分等分布荷重とした. そのほか, 解析上の仮定として仮定 (ロ) および式 (27) における係数  $k, k'$  をともに 1 とし, コンクリートの破壊条件式における係数  $c_a, c_b$

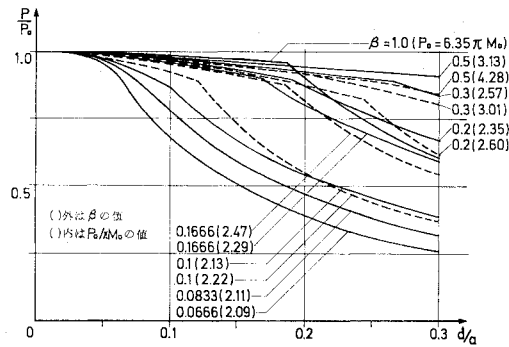


図-10 鉄筋比 2% の単純支持板の終局荷重  
[実線は部分荷重(図-4)、点線は剛域押込み(図-5)を表わす]

は式 (34) によった.

終局荷重の計算値は次に示す降伏線理論(円錐形崩壊モード)による曲げ崩壊荷重を基準にとり, その比で整

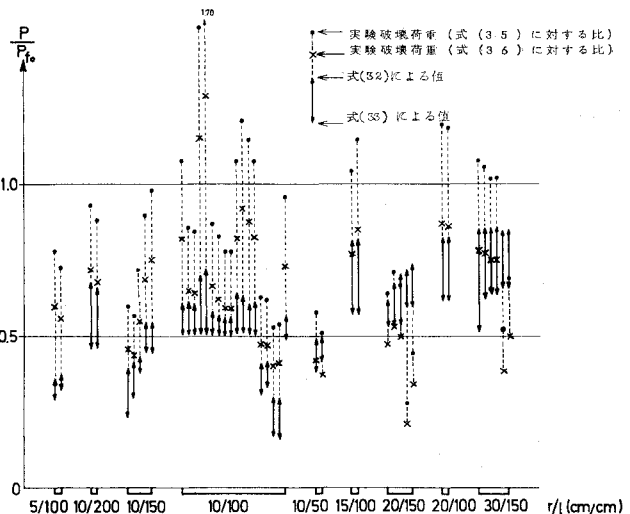
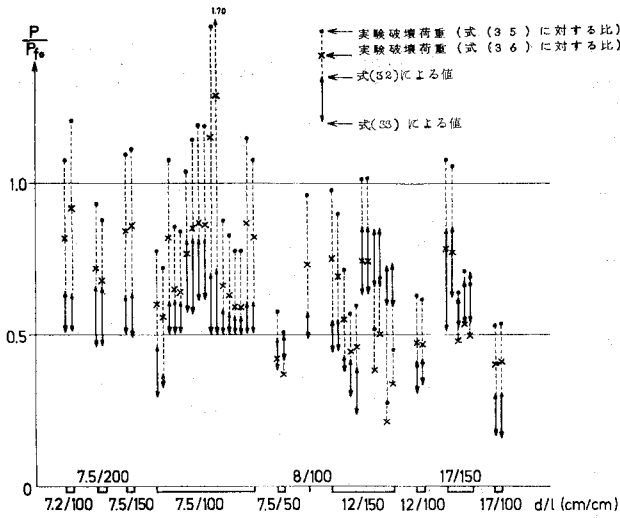
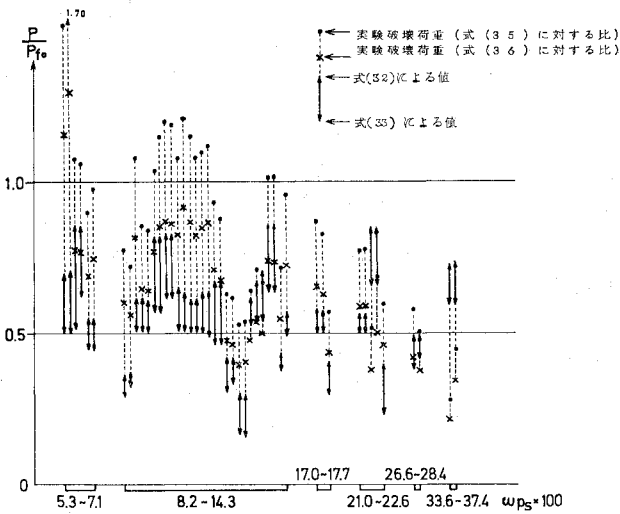


図-11 単純支持正方形床板に対する実験結果と計算結果の比較



図—12 単純支持正方形床板に対する実験結果と計算結果の比較



図—13 単純支持正方形床板に対する実験結果と計算結果の比較

理された。

$$P_{f0} = 2\pi M_0 \left( \frac{L/l}{1-2\beta/3} \right) \dots\dots\dots (35)$$

ここに  $L$  は辺長,  $l$  はスパン長,  $\beta = r/l$ ,  $r$  は載荷面の辺長,  $M_0$  は降伏モーメント [ $=\sigma_0 d^2 p_s \omega (1-0.5 p_s \omega)$ ] である。一方, 実験正方形板の破壊荷重は式 (35) の  $P_{f0}$  および式 (36) の  $P_{f0}$  の比によって二通りに整理された。

$$P_{f0} = 8 M_0 \left( \frac{L/l}{1-\beta} \right) \dots\dots\dots (36)$$

というのは実験正方形板では, 載荷板の剛性が小さく, 板の角部に負側の配筋がないならば, 曲げ崩壊荷重は式 (35) の値に近づくが, 載荷板が非常に剛で, 板の角部に負側の配筋があり, しかも角部の浮き上がりが防止さ

れているならば, 截頭角錐面崩壊モードにより求めた式 (36) の値に近づくからである。計算結果と実験結果の比較が 図—11, 12, 13 に示されている。降伏線理論による崩壊荷重は, せん断力の影響を考慮した板に対する理論上の上界値であるから, 図において実験破壊荷重比 ( $P/P_{f0}$ ) が 1 を越えているのは鉄筋の加工硬化, 鉄筋のせん断抵抗, コンクリートの破壊条件に対する板厚方向の応力の影響など, ここでは考慮されていない二次的影響によるものと思われる。全般的に計算値は実験値より下回っているが,  $\omega p_s$  が 0.2 (鉄筋比  $p_s$  にして約 2%) 付近を越えると実験値が下回る場合が起こる。明らかにこのことは鉄筋比が大きくなると, 終局状態での断面の応力分布が 図—7 とはほど遠くなることを意味している。

以上の結果より, 実験値のばらつきおよび一般に降伏線理論値は曲げ実験破壊荷重 (実験で得られた最高荷重) を下回ることが通例であることを考慮すれば, 鉄筋比が 1% 強以下ならば, 金属板と同等な極限解析法が, 曲げに対する降伏線理論の信頼性と同程度で, 鉄筋コンクリート板にも適用できることが推察できる。

#### 4. 結 論

本論文では, 極限解析法の定理を用いて曲げとせん断を受ける円板の終局荷重の計算方法を提案した。終局状態の応力分布は, 弾性応力分布を基準にとり, その修正量のみを数理計画法の手法を用いて決定された。この方法の信頼性については, 曲げ崩壊に対する既知解析解との比較によって確かめられた。引張強度と圧縮強度の異なることを考慮した金属板に対する解析

結果より, 載荷状態 (載荷面の大きさ, 等分布載荷または剛域を通しての押し込み), またはスパンに対する板厚比によってせん断力の影響がどのように変わるかを明らかにした。

次に, この解析法を鉄筋コンクリート板の問題に適用した。コンクリートの材料特性に関するいくつかの仮定のうえ, 数値解析し, 載荷状態, 板厚, 鉄筋比の崩壊荷重に与える影響を調べた。また, 正方形板に対する既往の押抜き破壊実験結果と本解析法による計算結果を比較した。コンクリートのせん断強度, 破壊条件式, 変形特性などに関しては不明確な点が多いが, 鉄筋比が大きくなければ, 金属板と同等な極限解析法が, 曲げに対する降伏線理論と同程度の信頼性でもって適用できることが

推察できた。

参 考 文 献

- 1) Hopkins H.G. and W. Prager : The Load Carrying Capacities of Circular Plates, *J. Mech. Phys. Solids* **2** (1953), pp. 1~13.
- 2) Shull H.E. and L.W. Hu : Load-Carrying Capacities of Simply Supported Rectangular Plates, *J. Appl. Mech.* **30** (1963), pp. 617~623.
- 3) Koopmann D.C. and R.H. Lance : On Linear Programming and Plastic Limit Analysis, *J. Mech. Phys. Solids* **13** (1965), pp. 77~87.
- 4) Hodge P.G. and T. Belytschko : Numerical Method for the Limit Analysis of Plate, *J. Appl. Mech.* **35** (1968), pp. 796~802.
- 5) 園田恵一郎・倉田宗章 : A Numerical Method for the Limit Analysis of Grillage Girders and Plates, 土木学会論文報告集, No. 182 (1970), pp. 94~114.
- 6) Landgraf G. : Aufstellung von Fließbedingungen für Schnittgrößen von Flächentragwerken, *ZAMM* **48** (1968), pp. 317~323.
- 7) Oschatz A. : Bestimmung der Traglast von Kreis und Kreis-ringplatten mit Berücksichtigung der Querkraftschubspannungen, *ZAMM* **48** (1968), pp. 325~332.
- 8) Mohaghegh M.M. and M.D. Coon : Plastic Analysis of Thick Circular Plates, *Int. J. Mech. Sci.* **15** (1973), pp. 935~942.
- 9) 小柳 治 : コンクリートの破壊, *コンクリート・ライブラリー*, 第 34 号 (1972), 土木学会.
- 10) Drucker D.C., W. Prager and H.J. Greenberg : Extended Limit Design Theorems for Continuous Media, *Quart. Appl. Math.* **9** (1951), pp. 381~389.
- 11) Hodge P.G. : Plastic Analysis of Structures, McGraw-Hill (1959).
- 12) Drucker D.C. : A More Fundamental Approach to Plastic Stress-Strain Relations. Proc. 1st. U.S. Nat. Congr. Appl. Mech. June (1951), pp. 487~491.
- 13) Nadai A. : Theory of Flow and Fracture of Solids, McGraw-Hill (1950).
- 14) Drucker D.C. and W. Prager : Soil Mechanics and Plastic Analysis or Limit Design, *Quart. Appl. Math.* **10** (1952), pp. 157~165.
- 15) たとえば, 坪井善勝 : 平面構造論 (昭 30), 丸善.
- 16) Dantzig G.B. and P. Wolfe : Decomposition Principle of Linear Programs, *Operations Res.* **8** (1960), pp. 101~111.
- 17) Tsuboi Y. and Y. Suenaga : A Study on the Elastic Plastic Behavior of Reinforced Concrete Members under Combined Stress. Report of the Institute of Industrial Science, University of Tokyo, Vol. 11, No. 1 (1961).
- 18) 角田与史雄・井藤昭夫・藤田嘉夫 : 鉄筋コンクリートスラブの押抜きせん断耐力に関する実験的研究, 土木学会論文報告集, No. 229 (1974), pp. 105~118.

(1975.4.15・受付)