【討　議】

諸戸靖史 河上房義 共著 "砂の変形における状態関数"への討議

（土木学会論文報告集第229号・1974年9月掲載）

▶討議者（*Discussion*）——橋口公一・上野正美（九州大学農学部）
By Koichi Hashiguchi and Masami Ueno

著者らは，砂の非回復な変形すなわち塑性変形過程において，塑性仕事増分を平均応力で除した量の集積値が基本的状態量となり得ることを見い出したと強調している．しかるに，本集積値は一般に応力径路に依存し，状態量になり得るとは解し得ず，著者らの非可逆変形過程に関する基本的認識あるいは粒状体の変形挙動究明に対する現状認識に少なからぬ疑義を感じるとともに，本文中の諸論展開にも納得し難い諸点が見受けられるので，以下の諸点についてご質問し，これらについてご意見をお伺い致したいと存じます．

（**1**） 著者らは，$\int dS_{cs}^*$, $\int dS_s^*$ および $\int d\bar{S}^*$ に関する式 (16)，(17) および (18) は γ および v に関する独自の仮定式 (8) および (9) を用いることにより導きうると述べている．しかるに，これらの関係式さらには式 (29) は式 (7) および次式から直接的に導かれ，普遍的に成立することはいうまでもない．

$$dW_s=P'dvd+(213)qd\gamma \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\text{(A)}$$

また，これらの量が応力径路に依存しない状態量であるとすれば，式 (13) におけるように P' および γ ではなく，直接的には P' および η を独立変数として，これらが完全微分型を満たすという論証形式に従うべきである．しかし，(**3**) に述べるように，非可逆変形過程においては，これらが応力径路によらない状態量になり得るとは思われない．

（**2**） 著者らは，等方応力下で塑性的体積ひずみ v^P は生じないとして $v^P=v_d$ としている．しかし，一般に巨視的間隙の多大な粒子集合体においては，平均応力の増大により粒子配列変化さらには粒子破砕などの粒子自体の非可逆な変化を生じて，より密な状態へ移行し，降伏応力は上昇，硬化する．これにより降伏曲面は閉曲面を呈する．さらに，等方応力状態から限界間隙比状態を経て過圧密状態にわたる全応力域を通じて生じる塑性体積ひずみが粒状体の第一義的な硬化の要因であると解される[a]．また，v^P こそが応力径路によらない基本的な状態量であると思われる．他方，巨視的きれつの無い金属においては塑性的体積変化は無視し得，塑性仕事が硬化の主因である点，両材料は本質的に異なり，大いに留意されるべきところである．

（**3**） 著者らは，式 (8) および (9) のように，v および γ を P' および η により一義的に規定している．本場合には，式 (7) の補式における関係により，応力 σ_1 および σ_3 とひずみ ε_1 および ε_3 の間に一意的な関係が存在することになる．しかし，塑性変形過程においては，一般に応力とひずみの間に一対一の対応が存在しないことはいうまでもない．また，式 (8) に局限しても，η 一定の条件で応力を変化させる場合，γ が著しく変化することは，異方圧密試験などにおいて，従来確かめられている通りであり[b),c)]，本式が妥当であることは解し得ない．著者らは，同一の η 値に対して γ 一定という実測結果を示しているが，これは，限界間隙比状態より過圧な状態における実測資料を対象とし，このような状態においては降伏曲面が η 一定（軸対称圧縮，伸張で異なる）な Coulomb·Mohr 形式で大まかに示されることによると思われる．

なお，過圧密な状態に局限しても，過圧密度により変化する Dilatancy 特性を示す砂などの粒状体の降伏あるいは破壊曲面は線型な Coulomb·Mohr 則によっては適切に表現し得ないことは周知の通りである．また Taylor[d)]，Bishop[e),f)] 以来，Dilatancy 補正という立場で Rowe[g)] その他により本則を是正する試みが活発に進められている．このような状況下で，"砂のせん断に関する降伏条件はモール・クーロン的なものであるという明確な根拠を示した"として，本則の有用性をあらためて強調すべきであるか否かについては少なからず疑問を感じる．

（**4**） 著者らは，$dS_s^*=\{D'(\gamma)+(2/3)G(\gamma)\}d\gamma$ としているが，その具体形を与えていない．しかるに，古く Roscoe 他[h)]は

$$dW^P/P'=dv^P+(213)\eta d\gamma=Md\gamma \quad \cdots\cdots\cdots\text{(B)}$$

を提案しており，かりに著者らのように $dv^P=dv_d$ と

おけば，$dS_s{}^*=dW^P/P'$ となり，具体的に

$$dS_s{}^*=Md\gamma$$

となる．さらに，その後，dW^P に関する考察が進められ γ のみならず v^P をも考慮して Burland[i] により式 (B) を修正して，より適切な

$$dW^P/P'=\sqrt{[(dvP)^2+(Md\gamma)^2]} \cdots\cdots\cdots\cdots (D)$$

が提案され，また，橋口[j]は

$$dW^P/P'=\sqrt{[(dv^P)^2+\eta dv^P d\gamma+(Md\gamma)^2]} \cdots (E)$$

などを提案し，さらに，これらに基づく具体的な降伏関数がそれぞれ導かれている状況である．ところで，著者らのように v^P および γ を η の関数であると仮定すれば，式 (B)～(E) などのいかなる形式を与えても $\int dS_s{}^*$ は応力径路によらず η 値により決まる量となる．しかし，(**3**) に述べたことからわかるように，v^P, γ, さらに $\int dS_s{}^*$ は応力径路に依存し，これらの量が一定の応力状態は応力空間で一意的には示し得ない．

他方，硬化測度となり得る量，たとえば，Mises 則の適用しうる金属における $\int dW^P$(work-hardening) あるいは粒状体に対して第一義的に妥当であると思われる v^P (Volumetric strain-hardening とでも名付けられよう) が一定な応力状態は応力空間において固有な閉曲面すなわち降伏曲面を形成する．このような量こそ構成則展開上，重要な基本的状態量とみなし得る．

なお，木村孟博士[k]による指摘にも見られるように，諸戸氏は非可逆変形過程を含む砂の変形挙動を弾性論により解明すべく試みていると思われる．その顕著な場合は，応力に対してひずみを対応させている点に見られる．金属塑性論においても，古く Hencky, Nadai その他により，応力とひずみを対応させる構成関係が種々，提案されたが，非可逆変形過程においては明らかに矛盾を生じることが認識され，以来，応力に対してひずみ増分を対応させることにより，塑性変形過程における構成則が発展されてきたのである．これは可逆すなわち弾性変形過程におけるのと本質的に異なり，特に留意すべき点である．なお，塑性変形基礎論は，従来，主に金属を対象に発展されてきたが，その他の力学分野においてもそうであるように，現在，特殊な材料に局限されず，一般自然材料の非可逆変形現象を説明し得る一般基礎論として確立されつつあり，本論の認識に基づいて究明を進めるべき状況に至ったといえる．

(**5**) 著者らは，金属塑性論における work-hardening hypothesis に基づく状態量としての塑性仕事 $\int dW^P$, あるいはエントロピーの定義式 $dS=d'Q/T$ ($d'Q$：可逆径路に応ずる受熱量，T：絶対温度) からの形式的類推により $\int dS_s{}^*=\int dW^P/P'$ を状態量として想定したと思われる．しかし，硬化測度 $\int dW^P$ は本質的にはエントロピーに対してではなく，内部エネルギーに関連しており，上述の推察には，多少の飛躍が感じられる．

また，$\int dS_s{}^*$ を最上博士が主張された粒状体のエントロピ S と関連づけている．ところで，同博士[l]は内部エネルギーは無変化，すなわち粒子は完全剛体であるとしている．ゆえに，$dW^P=d'W$ であり，また，粒子間摩擦により発生する熱量を $d'Q$ とすれば，$dW^P=d'Q$ である．しかるに，等温過程においては，$d'Q$ は周囲の大気に吸収され，粒状体自身が吸収あるいは放出する熱量ではないことに注意すべきである．すなわち，$d'Q$ は粒状体のエントロピーに直接関連しているのではなく，粒状体のエントロピーに対して $dS=d'Q/T=dW^P/T$ とおくことは基本的矛盾をきたすと思われる．

なお，ここで対象としているような本質的に非可逆な現象過程における熱力，統計力学とくに非補償熱量を伴うエントロピーの概念には理論的に未解決な事柄が余りにも多いが，このような状況に頓着なく，単に形式的類似性を求めて諸説を提案することは，新奇な興味はもたらそうが，他面，学問・理論としての厳正さを度外視し，これを見失わせる影響をもたらすことが危惧されないではない．

参 考 文 献

a) 橋口公一：粒状体に関する等方硬化理論，土木学会論文報告集，227 号，1974, pp. 45-60.

b) Roscoe, K.H. and H.B. Poorooshasb : A theoretical and experimental study of strains in triaxial compression test on normally comsolidated clays, Geotechnique, Vol. 13. No.1, 1963, pp. 12-38.

c) Poorooshasb, H.B., I. Holubec and A.N. Sherbourne: Yielding and flow of sand in triaxial compression Part I, Canadian Geotechnical Journal, Vol. 3, No. 4, 1966, pp. 179-190.

d) Taylor, D.W. : Foundations of Soil Mechanics, John Wiley, New York, 1948.

e) Bishop, A.W. : Discussion on Paper by A.W. Skempton and A.W. Bishop, Measurement of shear strength of soil, Geotechnique, Vol. 2, No. 2, p. 113-116.

f) Bishop, A.W. : Correspondence on a paper by A.D.M. Penman, Geotechnique, Vol. 4, No. 1, 1954, pp. 43-45.

g) Rowe, P.W. : The stress-dilatancy relation for static equilibrium of an assembly of Particles in contact, Proc. Royal Soc. London, Sr. A, Vol. 269, 1962, pp. 500-527.

h) Roscoe, K.H., A.N. Schofield and A. Thurairajah : Yielding of clays in state wetter than critical, Geotechnique, Vol. 13, No. 3, 1963, pp. 211-240.

i) Burland, J.B. : The yielding and dilation of Clay, Geotechnique, Vol. 15, No. 3, 1965, pp. 211-214.

j) 橋口公一：土の等方硬化理論―負荷関数に関する力学的考察，土木学会第 28 回年次学術講演概要集，1973, pp. 29-31.

k) 木村 孟：諸戸靖史著"Anisotropic and stress distribution in sand"への討議，土木学会論文報告集，223号，1974, pp. 73.
l) 最上武雄：土質力学，技報堂，1969, pp. 998-1032.

▶回答者（*Closure*）――――諸 戸 靖 史・河 上 房 義（東北大学）
By Yoshichika Moroto and Fusayoshi Kawakami

橋口公一・上野正美両氏から著者らの小文についてご討議をいただいた．討議者は，数理学的塑性論の立場から，土のような材料の変形則を整備されようとしている．このことにまず敬意を表したい．ただ，今回のご討議の内容に対して筆者には理解できないところが多い．それは，ご討議の内容に観念的部分があり，基本的な誤解も見られるからであります．ご討議の内容に関連して，砂のような材料の変形に関する筆者の貧弱な所見を述べることで回答とさせていただきたい．

A. 討議者は，塑性的な間隙比こそが基本的に重要な降伏関数であると述べておられる．せん断変形に対してこのことは不適当であると筆者は考える．理由は次のようである．塑性変形は回復不可能なエネルギーの消散を伴う一方的な過程である．しかし，排水せん断試験において砂供試体はダイレイタンシーの出方によってその体積を収縮させたり膨張させたりする．また非排水試験や定体積試験のようにせん断中に体積変化が無い場合にもせん断変形は進みエネルギーの消散は続く．このように単純に考えても，せん断に関する砂供試体の降伏というものを体積ひずみでとらえていこうとする試みが正しい方向であるようには思えない．

ではどのようにすればよいか．それはRowe[16]，Horne[17]，小田[18]，Poorooshasb[19]，竜岡[20]などの研究から読みとれる．つまりせん断ひずみを重視する方向なのである．

B. 著者らは，砂のせん断変形に関して，塑性せん断仕事増分を平均主応力で除した量の集積値を状態量と定義した．これは

$$S_s{}^* = \int \frac{d\dot{W}_s{}^p}{p'} \quad \cdots\cdots(42)$$

と書かれている．著者らは，同じ初期間隙比をもつ複数の砂供試体を等方で圧縮し単調に増大する経路でせん断する場合について関数 $S_s{}^*$ がほとんど状態関数とみなせることを述べている．ただし，応力比一定経路，繰返し載荷経路は対象外である．

なぜ，式(42)の関数 $S_s{}^*$ を導入しているのか．

塑性仕事 $W_s{}^p$ は応力経路に非常に大きく依存するが関数 $S_s{}^*$ は応力経路にほとんど依存しないようになる．$W_s{}^p$ が大きく応力経路に依存するのは粒状体の変形の基本的な特性である．

（1） せん断変形が応力比によって第一義的に支配される

（2） ダイレイタンシー現象を示す

ことに帰因している．関数 $S_s{}^*$ はほとんどせん断ひずみ γ で定まる量である．単にせん断の進み具合いを指定するためならばわざわざ $S_s{}^*$ を導入する必要はないのではないかという疑問が生ずる．しかし，ここで強調しなければならないのは $S_s{}^*$ が仕事量を基礎にして導かれていることである．式(42)の $S_s{}^*$ の増分は

$$dS_s{}^* = \eta_\omega d\epsilon, \quad \eta_\omega = \frac{q}{p'} + \frac{dv_d}{d\epsilon} \quad \cdots\cdots(43)$$

と書ける．この式の右辺の係数 η_ω は変形のあとの方でCambridge大学の研究者達のいうcritical stateの摩擦係数に相当する．そして，この η_ω の値は粒子の物性に関係している．ガラスビーズの場合より自然の砂の場合の方がかなり大きい η_ω の値を示すことは周知である．同じせん断ひずみに対しても η_ω の値の大きいものほど大きい $S_s{}^*$ の値を示す．このことは粒状体内でせん断による乱れが大きいものほど $S_s{}^*$ が大きいことを示唆するものであると考えられる．つまり，$S_s{}^*$ は単にせん断の進み具合いを規定する関数であるばかりではなく，粒状体の乱れの大きさを示す量でもあるものと考えられるのである．

C. 金属塑性論におけるHenky, Nadaiの応力・ひずみ関係に対するものと同じ批判を，本文の式(8)，(9)に対して受けている．筆者ら[21]はガラスビーズについて式(8)，(9)がほとんど当てはまることを示している．また，竜岡はせん断ひずみ γ が応力状態だけでほとんど定まることを砂について報告している．もちろん，ここで考えている応力経路は，等方圧縮から出発する単調は増大するものである．

D. 討議者は，たとえばBurlandが，

$$dW^P/p' = \sqrt{dv^p + (Md\epsilon)^2} \quad \cdots\cdots(44)$$

のような形式をもともと提案しているような書き方をされているが，このことは好ましいものではない．なぜなら原論文には

$$dW^P = \sqrt{p'(dv^p)^2 + (Md\epsilon)^2} \quad \cdots\cdots(45)$$

の形で書かれている．そして dW^P を dW^P/p' の形に

変えるところに筆者の発想があるからである.

E. 討議者は金属における硬化測度として $\int dW^P$ をあげ，これが基本的な状態量であるとされている.

塑性変形に際して外部からなされる仕事 W の大部分は熱としてでていき，その残りが内部エネルギー U として蓄積される．そしてこの内部エネルギーの増加，したがって転位密度の増加が加工硬化の原因であることも Taylor と Quinney の実験からほとんどまちがいないものとされている.

したがって金属の降伏条件として

$$f\left(J_2', J_3', \int d\varepsilon_{ij}\right)=H(U) \cdots\cdots\cdots\cdots (46)$$

J_2', J_3'：偏差応力の不変量

と考えるのが自然である．しかし，特に変形の経路を一定にしておけば，U と W の間には関数関係が成立する．ここで，

$$f\left(J_2', J_3', \int d\varepsilon_{ij}\right)=F(W) \cdots\cdots\cdots\cdots (47)$$

と書くと便利である．この式 (47) が金属の加工硬化法則のとりあつかいに用いられる．等方性を仮定し，バウシンガー効果を無視すると

$$f(J_2', J_3')=F(W) \cdots\cdots\cdots\cdots (48)$$

となる．以上は塑性論の教科書からの知識である．内部エネルギー U を状態量とし，外力からなされる仕事 W は状態量としないのが金属塑性論の基本的な考え方である.

F. 砂のような材料の場合，圧密とせん断を単一の降伏関数を用いて統一的に表わしえない．いま，仮りにせん断だけに着目する．この場合，式 (48) に代って

$$f(p', J_2', J_3')=? \cdots\cdots\cdots\cdots (49)$$

のような降伏条件が用いられよう．ここで，式 (49) の右辺に何を選ぶかが問題になる．このことに対して，筆者らのせん断に関する状態関数の議論がその答を用意する．それは，三軸試験の場合

$$f(p', q)=H(S_s^*) \cdots\cdots\cdots\cdots (50)$$

とすることである．つまり，金属の硬化測度は内部エネルギーであるが，砂のような材料の場合には，ほとんど塑性変形によって硬化が生ずるものと考えられる. Rowe, Horne, 小田などの研究はこのことを裏付けている．定体積試験や非排水試験結果と排水試験結果の間には本質的な違いがほとんどないのであるから，体積変化がせん断に関する硬化測度として適当であるようには思えない.

G. 砂のような材料の硬化現象は粒子の並び方の変化によって起こる．したがって，粒子の配列に関するエントロピーは硬化測度と密接な関係を持つことが理解されよう．最上の粒状体のエントロピーも配列に関するエントロピーの一つの例である．砂のような材料の処女せん断変形において弾性的な変形は小さいものとして無視すると，筆者の導入している状態量 S_s^* にある係数を乗じたものが熱力学的関係におけるエントロピーとなっているようである．このような量を熱力学的なエントロピーとよべる場合に，熱力学的エントロピーと配列エントロピーの関係を追求することが砂のような材料の硬化法則を理解するうえで有用となろう.

関数 S_s^* と最上の粒状体のエントロピー $S=\log z$ とを連結して考えようとする著者らの意図は上に述べた通りである．したがって，著者らが状態量 S_s^* を導入していることはきわめて正統的な発想によるものである．討議者のいわれるような単なる新奇な興味をもたらす議論では決してないことはもうすでにご理解いただけたことであると考える.

H. 討議者は異方性弾性地盤に関する筆者の論文[22]について批判されている．非可逆変形の典形的な例である圧密計算にまで弾性公式が用いられている．この計算法は地盤を等方体としている．しかし，inherent anisotropy が無視できない地盤や岩盤の問題を取扱うためには，まず簡単な異方性地盤問題から手をつけていかなければならない.

参考文献

16) 討議，g)
17) たとえば，Horne, M.R.: The behaviour of an assembly of retund, rigid cohesionless particles, Proc. Roy. Soc. London, Series A, Vol. 286, 1965, pp. 62–78.
18) たとえば，Oda, M.: A mechanical and statistical model of granular material, S & F, JSME, Vol. 14, No. 1, Mar., 1974, pp. 14-27.
19) 本文，7)
20) 本文，10)，12)，13)
21) 諸戸靖史・遠藤秋主・河上房義：ガラスビーズにおける粒状体の三軸圧縮特性，土木学会論文報告集，第 239 号，1975, pp. 47–56.
22) Moroto, N.: Anisotropy and stress distribution in sand, Proc. JSCE, No. 212, 1973, pp. 121-129.

訂正：次のように，筆者の関係論文のミスを訂正いたします.

本文　式 (10)　$dp \to dp'$

引用論文 21)　p. 49

$$p'\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ & 0 & 1 & \\ & & 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \to p'\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$dp'\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ & 0 & 1 & \\ & & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}+\frac{dq}{3}\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ & -1 & \\0 & 0 & -1\end{pmatrix}$$

$$\to dp'\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}+\frac{dq}{3}\begin{pmatrix}2&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$$

$$\frac{dr}{3}\begin{pmatrix}2&0&0\\0&-1&\\0&0&-1\end{pmatrix}\to\frac{dr}{3}\begin{pmatrix}2&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$$

図—11 と図—13 の図を入れ変える．

説明文はそのまま．

引用論文 22)

Eq. (43) $B_2e^{-\eta_2 mZ} \to B_2\eta_2{}^2e^{-\eta_2 mZ}$

Eq. (59) $\dfrac{q}{\pi}\cdot\dfrac{1}{\eta_2-\eta_1}\left[\to\dfrac{\bar{q}}{\pi}\dfrac{\eta_1\eta_2}{\eta_2-\eta_1}\right]$

Eq. (60) $\dfrac{q}{2\pi}\dfrac{1}{\eta_2-\eta_1}\left[\to\dfrac{\bar{q}}{2\pi}\dfrac{\eta_1\eta_2}{\eta_2-\eta_1}\right]$

Eq. (62) $\sigma_{zc}=\dfrac{\bar{q}}{\pi}\dfrac{2k}{1-k}\left[\to\sigma_{zc}=\dfrac{\bar{q}}{\pi}\dfrac{2}{1-k}\right]$

Fig. 4 の横軸 $\pi/\bar{q} \to \sigma_{zc}/\bar{q}$