

## 構造解析における動的応答解析の一方法について

ON A METHOD FOR DYNAMIC RESPONSE COMPUTATION  
FOR STRUCTURAL ANALYSIS

塩尻 弘雄\*・中村秀治\*  
By Hiroo SHIOJIRI and Hideharu NAKAMURA

### 1. まえがき

差分法、有限要素法、重みつき残差法（M.W.R.）などの構造解析理論の発展と、大型電子計算機の発達に伴い複雑な形状をした構造物の動的応答解析が盛んに行われるようになった。土木の分野においても、アーチダム、フィルダム、原子力発電所諸施設、海洋構造物、長大橋梁などの地震力、波力、風力に対する安全性を検討するうえで、動的応答計算の結果は重要な資料として用いられている。

動的応答解析法は主として次の3つの方法に分けられる。

I) 与えられた実際の外力波形に対して、二階の常微分方程式を初期値問題として解いていく方法。

II) 外力ならびに構造物の応答を統計量で扱う方法。  
III) 応答スペクトル曲線を用いる方法。

本論で述べる一方法は I) に属するが、このような方法としては種々の数値解析法が提案されている<sup>1)~16)</sup>。それらは、通常、時間領域を有限の時間きざみ  $\Delta t$  で分割し、初期条件を用いて、逐次  $\Delta t$  時間後の変位、速度などを求めていくものである。現在までに提案されている解法は次の3つに大別されるであろう。

#### 1) 差分法

加速度ベクトルを幾つかの時間点での変位ベクトルで差分近似するもの。

#### 2) 数値積分法

加速度ベクトルを1回ないし2回積分して、速度、変位ベクトルを求めるもの。

#### 3) 解析的方法

直接、解析解を近似しようとするもの。

これらのうち、1), 2) については、それぞれ Explicit

な方法と Implicit な方法に分けられ、種々の特性を有する計算方法が多数あるが、方法の選択に際して留意すべきことは所要の精度で解を得るために要する計算量を最少にすることである。誤差の原因是、打ち切り誤差、計算法の不安定性によるもの、および丸め誤差などである。全計算量は各ステップの計算量と時間きざみの細かさに依存し、時間きざみは 1), 2) については打ち切り誤差と安定性から決まる。

3つに大別した方法それぞれについて見ると、1) の範囲に入るものとしては、加速度を2階の中心差分で近似する方法がある。これは Explicit な方法であり、安定性を得るためにには時間きざみを非常に小さく（最短固有周期の  $1/\pi$ ）とらなければならないが<sup>1)~3)</sup>、反面、各ステップでの計算量は少なく、特に、質量マトリックスが対角行列の場合効率的であり、線型、非線型問題に使用されている<sup>17), 18), 20)</sup>。より高次の差分法を用いる場合、精度は高くなるが、各ステップでの計算量は増加し、出発値の計算には他の方法を必要とする<sup>1), 4)</sup>。また、安定性を得るために、十分細かく時間きざみをとる必要がある。Houbolt の方法は、2次の Implicit な方法で、時間きざみによらず無条件に安定である<sup>5)</sup>。しかし、時間きざみに比べて十分長い周期の成分以外には強い減衰が加わる<sup>22)</sup>。また、非線型演算ではマトリックスを変化させることに三角分解を行う必要がある。

2) の範囲に入るものとしては、Euler 法<sup>1), 10)</sup> および Euler-Gauss 法<sup>1)</sup> があげられる。前者は Explicit な方法で、各ステップの計算量は少ないが、打ち切り誤差が大きく、また安定性も良くない。後者は Implicit な方法で、打ち切り誤差も少なく無条件に安定である。Clough は時間きざみの間で加速度が線型に変化すると仮定して、各時間点の間の変位の漸化式を導いた。これは Euler-Gauss 法より打ち切り誤差は小さいが、時間きざみを細かくとらなければ不安定になる<sup>3), 6), 18)</sup>。Newmark は  $\beta, \gamma$  という2つのパラメーターを持つ計算法を提唱した

\* 正会員 工修 電力中央研究所土木技術研究所

が,  $r=1/2$  以外では減衰が加わり,  $\beta=1/4$  のとき Euler-Gauss 法と一致し,  $\beta=1/6$  のとき Clough の線型加速度法と一致する.  $\beta \geq 1/4$  では無条件に安定であり, 線型, 非線型問題に広く用いられている<sup>1)~3), 7), 8), 22)~24)</sup>. 藤井ら<sup>25)</sup>は, 二次元弾性問題に適用した際の安定性について有用な式を導いている. Milne 法は 4 次の積分式を用い, 打ち切り誤差は減少しているが, 安定性を確保するために, 時間きざみを細かくとらなければならぬ<sup>11), 11), 12), 21)</sup>. Wilson らは線型加速度法を修正してパラメーター  $\theta$  を導入し,  $1.37 \leq \theta$  で無条件に安定な方法を考察した. 時間きざみの 10 倍程度以下の周期の成分にはかなりの減衰が加わるが, 線型, 非線型演算を能率的に行うことができる. 特に, 線型で減衰が Rayleigh 型の場合有効である<sup>9), 22)</sup>. Runge-Kutta 法は打ち切り誤差は少ないが, 各ステップでの計算量が多く, かつ安定性を確保するために時間きざみを細かくとる必要がある<sup>10), 11), 12)</sup>. Argyris らは加速度を Hermit の多項式で近似することにより精度が良く, 無条件に安定な一連の計算法を考察している<sup>13), 14)</sup>. 1 次の場合, Newmark の  $\beta$  法で  $\beta=1/4$  と置いたものに一致し, 高次の場合精度は向上するが, 外力の微係数を必要とし, 各ステップの計算量も増加する.

3)の解析的方法としては, 一自由度の場合の Duhamel 積分法<sup>3)</sup>, Nigam らの方法<sup>15), 27)</sup> があり, 多自由度の場合は, Nigam らの方法を多自由度に拡張した滝沢の方法<sup>16)</sup>がある. Nigam らおよび滝沢の方法は, いずれも外力が折線で表わされる場合の解析解を与えており, 解析的方法では原理的に発散は起こらず, 打ち切り誤差は無い. また, Nigam らおよび滝沢の方法では, 1 ステップにつき 1 回のマトリックスとベクトルの乗算のみを行うだけ良く, 一般に他の方法と比べて比較的少ない計算量で高精度の解が得られる.

解析的方法は上記のように多くの利点を有しているにもかかわらず, あまり広く用いられていない. その理由としては, Clough の線型加速度法, Wilson の  $\theta$  法などが有限要素剛性マトリックス, 質量マトリックスの対称性, バンド性を巧みに利用した方法であり, アルゴリズムの簡明さとともに, 実用上十分な解を与えていることがあげられるであろう. また, 解析的方法自体が十分に検討されつくしていないこともあげられるであろう.

本論文は, このような認識のうえに立ち, 解析的方法の一般化ならびに Nigam らおよび滝沢によりなされた誤差評価に基づく漸化式誘導方法の再検討を行うものである. すなわち, 一自由度系の Nigam らの方法については, 時間きざみ  $4t$  における外力変化を 1 次だけでなく, 0 次, 2 次の多項式で近似した場合の厳密な漸化式について述べ, 数値計算例をあげて精度について考

察したが, これはモード解析に有効に使用できるものである. 多自由度系の滝沢の方法については, 漸化式誘導の再検討を行うとともに, 漸化式の係数マトリックスを Maclaurin 級数で近似した場合の誤差評価を行い, さらにより一般の多項式近似および有理式近似による係数マトリックス誘導方法を提案し, 安定性の議論を行い, 数値的にその近似度を検討した. 時間きざみ  $4t$  における外力変化については, 0 次, 1 次, 2 次の多項式で近似した場合のそれぞれについて扱っている.

差分法および数値積分法に属するほとんどの方法が, 時間きざみ  $4t$  を構造物の最短固有周期の何分の一かにとらなければならず,  $4t$  の大きさがそのまま全計算量に関係することを考えると, 本論文で述べる解析的方法の利点は明らかである. 時間きざみ  $4t$  は, 外力の波形を 0 次, 1 次あるいは 2 次の多項式で十分近似できる程度にとれば良い. 構造物の固有周期は, 漸化式の係数マトリックスを求める過程でべき乗項を何項とすれば良いかということに関連しているだけである. また, 剛性マトリックス, 質量マトリックス, 減衰マトリックスが非対称, フルマトリックスの場合にも適用でき, 解の安定性の良さとともに, 計算量の少ないとおり精度の良さは本解析法の大きな利点といえよう.

## 2. 解析理論

### (1) 解析的方法による漸化式の誘導

差分法, 有限要素法, 重みつき残差法など, どのような方法を用いる場合にも, 動的応答解析は次式で表わされる運動方程式を逐次積分することに帰着する.

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{U}} + \mathbf{K}\mathbf{U} = \mathbf{P}(t) \dots\dots\dots(1)$$

ここで,  $\mathbf{M}, \mathbf{C}, \mathbf{K}$  はそれぞれ質量マトリックス, 減衰マトリックス, 剛性マトリックスであり,  $\mathbf{U}$  は変位ベクトル,  $\mathbf{P}$  は外力ベクトルである.  $\mathbf{M}, \mathbf{C}, \mathbf{K}$  は線型系の場合定数マトリックスであり, 非線型系の場合も微小時間内では, 定数マトリックスとみなせるので, 以下,  $\mathbf{M}, \mathbf{C}, \mathbf{K}$  は定数マトリックスとして扱う.

有限要素法のように, エネルギー法に基づいて求める限り  $\mathbf{M}$  は正値対称マトリックスであり, 必ず  $\mathbf{M}^{-1}$  が存在する. もし  $\mathbf{M}^{-1}$  が存在しない場合にはさらに詳しい検討が必要になるが, ここでは  $\mathbf{M}^{-1}$  の存在を前提にして式(1)を次式のように表示する.

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} \ddot{\mathbf{U}} \\ \dot{\mathbf{U}} \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{C} & -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K} \\ \mathbf{I} & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{U}} \\ \mathbf{U} \end{Bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} \mathbf{M}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{P} \\ 0 \end{Bmatrix} \dots\dots\dots(2) \end{aligned}$$

ここで,  $\mathbf{I}$  は単位マトリックスとし,  $\mathbf{y}, \mathbf{A}, \mathbf{Q}$  を次の

ようすに定めると,

$$\mathbf{y} = \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{U}} \\ \mathbf{U} \end{Bmatrix} \quad \dots \dots \dots (3)$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{C} & -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K} \\ \mathbf{I} & 0 \end{bmatrix} \quad \dots \dots \dots (4)$$

$$\mathbf{Q} = \begin{Bmatrix} \mathbf{M}^{-1}\mathbf{P} \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \dots \dots \dots (5)$$

式(2)は、次のように表わされる。

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{A}\mathbf{y} + \mathbf{Q} \quad \dots \dots \dots (6)$$

式(6)の初期値問題の一般解は

$$\mathbf{y} = e^{\mathbf{At}}\mathbf{y}_0 + e^{\mathbf{At}} \int_0^t e^{-As} \mathbf{Q}(s) ds \quad \dots \dots \dots (7)$$

となる<sup>(16), (18), (19)</sup>。ここで、 $\mathbf{y}_0$  は  $t=0$  における  $\mathbf{y}$  の初期値ベクトルとする。

式(7)および  $\mathbf{P}(t)$  を  $\Delta t$  間で一次式で仮定した場合の漸化式については滝沢が検討している<sup>(16)</sup>が、一般に  $\mathbf{P}(t)$  を多項式近似すれば次式で表わされる漸化式が導かれる(図-1 参照)。

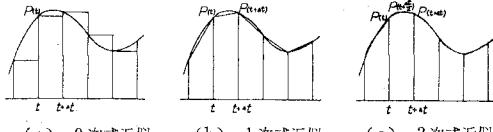


図-1 多項式による外力近似

a)  $\mathbf{P}$  が  $\Delta t$  間で一定の場合

$$\begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{U}}_{t+\Delta t} \\ \mathbf{U}_{t+\Delta t} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{E}_{11} & \mathbf{E}_{12} \\ \mathbf{E}_{21} & \mathbf{E}_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{U}}_t \\ \mathbf{U}_t \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{F}_{11} \\ \mathbf{F}_{21} \end{bmatrix} \{ \mathbf{P}_t \} \dots (8)$$

b)  $\mathbf{P}$  が  $\Delta t$  間で 1 次式で表わされる場合

$$\begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{U}}_{t+\Delta t} \\ \mathbf{U}_{t+\Delta t} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{E}_{11} & \mathbf{E}_{12} \\ \mathbf{E}_{21} & \mathbf{E}_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{U}}_t \\ \mathbf{U}_t \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{G}_{11} & \mathbf{G}_{12} \\ \mathbf{G}_{21} & \mathbf{G}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{t+\Delta t} \\ \mathbf{P}_t \end{bmatrix} \dots (9)$$

c)  $\mathbf{P}$  が  $\Delta t$  間で 2 次式で表わされる場合

$$\begin{bmatrix} \mathbf{G}_{11} & \mathbf{G}_{12} \\ \mathbf{G}_{21} & \mathbf{G}_{22} \end{bmatrix} = \int_0^{\Delta t} e^{\mathbf{A}(\Delta t-s)} \begin{bmatrix} \frac{s}{\Delta t} \mathbf{I} & \frac{\Delta t-s}{\Delta t} \mathbf{I} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} ds \begin{bmatrix} \mathbf{M}^{-1} & 0 \\ 0 & \mathbf{M}^{-1} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{11}^0 - \frac{1}{\Delta t} \mathbf{B}_{11}^1 & \frac{1}{\Delta t} \mathbf{B}_{11}^1 \\ \mathbf{B}_{21}^0 - \frac{1}{\Delta t} \mathbf{B}_{21}^1 & \frac{1}{\Delta t} \mathbf{B}_{21}^1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{M}^{-1} & 0 \\ 0 & \mathbf{M}^{-1} \end{bmatrix} \dots (19)$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{H}_{11} & \mathbf{H}_{12} & \mathbf{H}_{13} \\ \mathbf{H}_{21} & \mathbf{H}_{22} & \mathbf{H}_{23} \end{bmatrix} = \int_0^{\Delta t} e^{\mathbf{A}(\Delta t-s)} \begin{bmatrix} \frac{-s\Delta t + 2s^2}{\Delta t^2} \mathbf{I} & \frac{4s\Delta t - 4s^2}{\Delta t^2} \mathbf{I} & \frac{\Delta t^2 - 3s\Delta t + 2s^2}{\Delta t^2} \mathbf{I} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} ds \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{M}^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{M}^{-1} & \mathbf{M}^{-1} \\ 0 & 0 & \mathbf{M}^{-1} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{11}^0 - \frac{3}{\Delta t} \mathbf{B}_{11}^1 + \frac{2}{\Delta t^2} \mathbf{B}_{11}^2 & \frac{4}{\Delta t} \mathbf{B}_{11}^1 - \frac{4}{\Delta t^2} \mathbf{B}_{11}^2 & -\frac{1}{\Delta t} \mathbf{B}_{11}^1 + \frac{2}{\Delta t^2} \mathbf{B}_{11}^2 \\ \mathbf{B}_{21}^0 - \frac{3}{\Delta t} \mathbf{B}_{21}^1 + \frac{2}{\Delta t^2} \mathbf{B}_{21}^2 & \frac{4}{\Delta t} \mathbf{B}_{21}^1 - \frac{4}{\Delta t^2} \mathbf{B}_{21}^2 & -\frac{1}{\Delta t} \mathbf{B}_{21}^1 + \frac{2}{\Delta t^2} \mathbf{B}_{21}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{M}^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{M}^{-1} & \mathbf{M}^{-1} \\ 0 & 0 & \mathbf{M}^{-1} \end{bmatrix} \dots (20)$$

$$\begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{U}}_{t+\Delta t} \\ \mathbf{U}_{t+\Delta t} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{E}_{11} & \mathbf{E}_{12} \\ \mathbf{E}_{21} & \mathbf{E}_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{U}}_t \\ \mathbf{U}_t \end{Bmatrix}$$

$$+ \begin{bmatrix} \mathbf{H}_{11} & \mathbf{H}_{12} & \mathbf{H}_{13} \\ \mathbf{H}_{21} & \mathbf{H}_{22} & \mathbf{H}_{23} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{P}_{t+\Delta t} \\ \mathbf{P}_{t+\Delta t/2} \\ \mathbf{P}_t \end{Bmatrix} \dots (10)$$

ここで、 $\dot{\mathbf{U}}_{t+\Delta t}$ ,  $\mathbf{U}_{t+\Delta t}$  および  $\dot{\mathbf{U}}_t$ ,  $\mathbf{U}_t$  は、時間  $t+\Delta t$  および  $t$  における速度、変位であり、 $\mathbf{P}_{t+\Delta t}$ ,  $\mathbf{P}_{t+\Delta t/2}$ ,  $\mathbf{P}_t$  は時間  $t+\Delta t$ ,  $t+\Delta t/2$  および  $t$  における外力である。外力  $\mathbf{P}$  が  $\Delta t$  間で 3 次以上の多項式で表わされる場合も同様に表示される。また、漸化式(8), (9), (10)の係数マトリックスは、

$$\begin{bmatrix} \mathbf{E}_{11} & \mathbf{E}_{12} \\ \mathbf{E}_{21} & \mathbf{E}_{22} \end{bmatrix} = e^{\mathbf{A}\Delta t} \dots (11)$$

であり

$$\mathbf{B}^0 = \int_0^{\Delta t} e^{As} ds = \mathbf{A}^{-1} (\mathbf{e}^{\mathbf{A}\Delta t} - \mathbf{I}) \dots (12)$$

$$\mathbf{B}^1 = \int_0^{\Delta t} s e^{As} ds = \mathbf{A}^{-1} \{ \Delta t \mathbf{e}^{\mathbf{A}\Delta t} - \mathbf{A}^{-1} (\mathbf{e}^{\mathbf{A}\Delta t} - \mathbf{I}) \} \dots (13)$$

$$\mathbf{B}^2 = \int_0^{\Delta t} s^2 e^{As} ds = \mathbf{A}^{-1} [\Delta t^2 \mathbf{e}^{\mathbf{A}\Delta t} - 2 \mathbf{A}^{-1} \{ \Delta t e \mathbf{A} \Delta t - \mathbf{A}^{-1} (\mathbf{e}^{\mathbf{A}\Delta t} - \mathbf{I}) \}] \dots (14)$$

$$\mathbf{B}^0 = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{11}^0 & \mathbf{B}_{12}^0 \\ \mathbf{B}_{21}^0 & \mathbf{B}_{22}^0 \end{bmatrix} \dots (15)$$

$$\mathbf{B}^1 = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{11}^1 & \mathbf{B}_{12}^1 \\ \mathbf{B}_{21}^1 & \mathbf{B}_{22}^1 \end{bmatrix} \dots (16)$$

$$\mathbf{B}^2 = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{11}^2 & \mathbf{B}_{12}^2 \\ \mathbf{B}_{21}^2 & \mathbf{B}_{22}^2 \end{bmatrix} \dots (17)$$

と置けば、

$$\begin{bmatrix} \mathbf{F}_{11} \\ \mathbf{F}_{21} \end{bmatrix} = \int_0^{\Delta t} e^{\mathbf{A}(\Delta t-s)} \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ 0 \end{bmatrix} ds [\mathbf{M}^{-1}]$$

$$= \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{11}^0 \\ \mathbf{B}_{21}^0 \end{bmatrix} [\mathbf{M}^{-1}] \dots (18)$$

である。

## (2) $e^{At}$ の Maclaurin 級数による近似法とその誤差

解析的方法による漸化式 (8), (9), (10) の係数マトリックスが、式 (11), (18), (19), (20) で表わされることを (1) で述べた。係数マトリックスを求めるうえで問題になるのは  $e^{At}$  の計算法のみである。滝沢は  $e^{At}$  を有限項の Maclaurin 級数で近似することを述べているが、所定の誤差  $\epsilon$  で  $e^{At}$  を求めるのに必要なべき乗項の数について検討していない。ここではまず、 $At$  が大きくなつた場合、Maclaurin 級数の収束がきわめて悪くなることに対する対策として、 $At$  を 2 のべき乗で分割する方法をとり、それに対する誤差評価を行つ。

時間きざみ  $At$  に対して、 $At_l$  を、

$$At_l = \frac{At}{2^l} \quad \dots \dots \dots (21)$$

とすれば、

$$e^{At} = (e^{At_l})^{2^l} \quad \dots \dots \dots (22)$$

であり、 $e^{At_l}$  が求まれば、 $l$  回のマトリックスの乗算で  $e^{At}$  が求まることは明らかである。所定の誤差  $\epsilon$  とべき乗項数および  $l$  の関係について以下に検討する。

Maclaurin 級数を  $n$  次で打ち切った値を、

$$e_n At = \sum_{i=0}^n \frac{A^i}{i!} t^i \quad \dots \dots \dots (23)$$

とし、

$$E_n(t) = [e^{At} - e_n At] \quad \dots \dots \dots (24)$$

と置く。ここで、 $\|X\|$  をベクトル  $X$  の任意のノルムとし、マトリックス  $A$  のノルム  $\|A\|$  を

$$\|A\| = \text{Max} \left\{ \frac{\|AX\|}{\|X\|} \right\} \quad \dots \dots \dots (25)$$

と定義する。

$$\|X\| = \text{Max} \{ |x_i| \} \quad \dots \dots \dots (26)$$

とすれば、明らかに、

$$\|A\| = \text{Max} \left\{ \sum_{j=1}^k |a_{ij}| \right\} \quad \dots \dots \dots (27)$$

である。ただし、 $a_{ij}$  はマトリックス  $A$  の成分とし、 $k$  は  $A$  の元数とする。

式 (24) の  $E_n(t)$  のノルムについて考察すれば、

$$\begin{aligned} \|E_n(t)\| &= \left\| \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{A^i}{i!} t^i \right\| \\ &\leq \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{\|A\|^i}{i!} t^i \\ &\leq \frac{\|A\|^{n+1}}{(n+1)!} t^{n+1} e^{\|A\|t} \end{aligned} \quad \dots \dots \dots (28)$$

が成り立つ<sup>30)</sup>。

$E_n(At_l)$  のノルムについては、式 (28) より次式が成り立つ。

$$\|E_n(At_l)\| \leq \frac{\|A\|^{n+1} At_l^{n+1}}{(n+1)!} e^{\|A\|At_l} \cdot 2^{-l(n+1)} \quad \dots \dots \dots (29)$$

したがつて、

$$\|e_n^{At_l}\| \leq e^{\|A\|At_l} \left\{ 1 + \frac{\|A\|^{n+1} At_l^{n+1}}{(n+1)!} 2^{-l(n+1)} \right\} \quad \dots \dots \dots (30)$$

となる。さて、次式

$$e_*^{At} = (e_n^{At_l})^{2^l} \quad \dots \dots \dots (31)$$

で  $e^{At}$  を近似するものとして、

$$\epsilon_{nl} = \|e^{At} - e_*^{At}\| \quad \dots \dots \dots (32)$$

を所定の誤差  $\epsilon$  以下にすることを考える。

$$\begin{aligned} \epsilon_{nl} &\leq \|e^{At_l} - e_n^{At_l}\| \cdot \left\| \sum_{i=0}^{2^l-1} (e^{At_l})^i (e_n^{At_l})^{2^l-i} \right\| \\ &\leq \frac{\|A\|^{n+1} At_l^{n+1}}{(n+1)!} e^{\|A\|At_l} \cdot 2^{-ln} \\ &\quad \cdot \left\{ 1 + \frac{\|A\|^{n+1} At_l^{n+1}}{(n+1)!} 2^{-l(n+1)} \right\}^{2^l-1} \\ &\leq \frac{\|A\|^{n+1} At_l^{n+1}}{(n+1)!} e^{\|A\|At_l} \cdot 2^{-ln} \cdot e^{\left\{ \frac{\|A\|^{n+1} At_l^{n+1}}{(n+1)!} 2^{-ln} \right\}} \end{aligned} \quad \dots \dots \dots (33)$$

であり、結局、

$$\epsilon \geq \frac{\|A\|^{n+1} At^{n+1}}{(n+1)!} e^{\|A\|At} \cdot 2^{-ln} \cdot e^{\left\{ \frac{\|A\|^{n+1} At^{n+1}}{(n+1)!} 2^{-ln} \right\}} \quad \dots \dots \dots (34)$$

とすればよいことになる。これより、

$$2^{-ln} \leq \frac{(n+1)! \epsilon_a}{\|A\|^{n+1} At^{n+1}} \quad (\text{ただし}, \epsilon_a e^{\epsilon_a} = \epsilon e^{-\|A\|At}) \quad \dots \dots \dots (35)$$

を満たすように  $l, n$  を決めれば、Maclaurin 級数を用いて  $e^{At}$  をノルムの誤差が所定の誤差範囲  $\epsilon$  内に入るようにして求めることができる。

さらに、このときの近似マトリックスの固有値の誤差を考えよう。 $A$  は

$$A = R D R^{-1} \quad \dots \dots \dots (36)$$

と書くことができる<sup>22), 31)</sup>。ここで、 $R$  は  $A$  の固有ベクトルの列から成るマトリックスであり、 $D$  は  $A$  の固有値 ( $\lambda_i$ ) を対角成分とする Jordan 行列である。

式 (36) より  $e^{At}$  および  $e_*^{At}$  は

$$e^{At} = R e^{Dt} R^{-1} \quad \dots \dots \dots (37)$$

$$e_*^{At} = R \left( \sum_{i=1}^n \frac{(\lambda_i At_l)^i}{i!} \right)^{2^l} R^{-1} \quad \dots \dots \dots (38)$$

となり、 $e^{At}$  と  $e_*^{At}$  の固有値はそれぞれ、

$$e^{\lambda_i At}, \left( \sum_{i=1}^n \frac{(\lambda_i At_l)^i}{i!} \right)^{2^l} \quad \dots \dots \dots (39)$$

である<sup>31)</sup>。そこで、固有値の誤差は式 (33) の  $\|A\|$  のかわりに  $|\lambda_i|$  を代入することにより、

$$\left| e^{\lambda_i At} - \left( \sum_{i=1}^n \frac{(\lambda_i At_l)^i}{i!} \right)^{2^l} \right| \leq \frac{|\lambda_i At|^{n+1}}{(n+1)!} \cdot e^{|\lambda_i At|} \cdot 2^{-ln}$$

$$\cdot e^{\left\{ \frac{|\lambda_i|^{n+1} dt^{n+1}}{(n+1)!} z^{n+1} - I_n \right\}} \quad \dots \dots \dots \dots (40)$$

と表わされる。式(33), (40)から $2^l$ 分割の効果は明らかである。

### (3) 多項式近似による方法

(2)で $eA^{dt}$ のMaclaurin級数による多項式近似の誤差について考察したが、 $eA^{dt}$ を他の多項式で近似することも考えられる。最小 $\rho$ 乗近似多項式による方法はその一つであり、筆者らが検討を行ったが、 $dt$ が幾分大きくなったりとき、少ない項数でより良く近似することができる。

式(36), (37), (38)から明らかなように、 $A$ の多項式から成るマトリックスは $A$ と固有ベクトルが等しく、固有値は $A$ の固有値の同じ多項式で表わされる。 $A$ の指標関数も $A$ と固有ベクトルは等しく、固有値は $A$ の固有値の指標関数で表わされる。したがって、多項式で固有値を十分近似できれば、マトリックス自体の近似も十分なはずである。実数、複素数を変数とする関数の多項式近似は、参考文献33), 34), 35)などに述べられている。それらを利用して、係数マトリックスの固有値の誤差を最小にするような多項式を求めるこを考へる。すなわち、 $dt_i A$ の固有値が複素変数 $z$ の平面で、区分的になめらかな閉曲線 $c$ 内にあるとき、 $w(z)$ を正の実数值をとる関数として、

$$\oint_c (w(z))^p \left| K(z) e^z - \sum_{i=0}^n b_i z^i \right|^p dz \quad (41)$$

(ただし、 $p > 0$ )

を最小にするような多項式をみつけることを考へる。ここで $K(z)$ は、 $|z|$ が小さいとき $K(z) \neq 1$ なる正則関数である。 $p \rightarrow \infty$ の時、この多項式は $c$ 上で $\text{Max } w(z) \cdot |K(z) e^z - \sum_{i=0}^n b_i z^i|$ を最小にする多項式であり、 $w(z)$ が $c$ で囲まれた閉領域で正則な関数の絶対値であれば、 $c$ で囲まれた閉領域内で $\text{Max } w(z) |K(z) e^z - \sum_{i=0}^n b_i z^i|$ を最小にする多項式になる。ここでは $c$ として、原点を中心とした半径 $a$ なる円 $c_1$ と、虚軸と $c_1$ の $\text{Re}(z) < 0$ 部分からなる半円 $c_2$ の2種類を考えた。

$\rho$ が一般の場合、式(41)を最小にする多項式を求めるには収束法によるほかに無いが、 $p=2$ の場合は連立一次方程式に帰着し、容易に求められる。この場合、 $c$ が $c_1$ で、 $K(z)$ ,  $w(z)$ が恒等的に1に等しければ Maclaurin級数と一致する。

$c$ が $c_1$ のとき、 $w(z)$ を決めるにあたっては、次のことを考慮する。 $A$ の固有値は実数部が正の値をとらないので、 $\text{Re}(z) > 0$ の領域の誤差は大きくさしつかえない。また、 $|z|$ が大きい場合の誤差は、 $|z|$ が小さい場合に比べて多少大きてもさしつかえない。このことか

ら、

$$w(z) = \left| e^{-qz} \frac{1}{z^2} \right| \quad (\text{ただし、} q > 0) \quad \dots \dots \dots \dots (42)$$

としよう。ただし、このままでは $w(z)$ が $z=0$ で $\infty$ となるので工夫を加えて、

$$\oint_{c_1} |e^{-qz}|^2 \cdot \left| \frac{e^z - 1 - z}{z^2} - \sum_{i=0}^{n-1} b_i' z^i \right|^2 dz \quad (\text{ただし、} q > 0) \quad \dots \dots \dots \dots (43)$$

を最小にすることにする。

これより次式が成立つ。

$$\frac{d}{db_i} \oint_{c_1} |e^{-qz}|^2 \cdot \left| \frac{e^z - 1 - z}{z^2} - \sum_{j=0}^{n-1} b_j' z^j \right|^2 dz = 0 \quad (i=0, 1, 2, \dots, n-1) \quad \dots \dots \dots \dots (44)$$

これを留数を使って<sup>32)</sup>求めれば、次の連立一次方程式が導かれる。

$$e_i = \sum_{j=0}^{n-1} d_{ij} b_j' \quad (i=0, 1, \dots, n-1) \quad \dots \dots \dots \dots (45)$$

ここで、

$$e_i = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{a^{2m} B(i-m) + a^{2m} B(m-i)}{(m+2)!} \quad \dots \dots \dots \dots (46)$$

$$d_{ij} = a^{2j} B(j-i) + a^{2i} B(i-j) \quad \dots \dots \dots \dots (47)$$

$$B(i) = \sum_{l=k}^{\infty} \frac{(-q)^{2l-i} a^{2(l-i)}}{l! (l-i)!} \quad \dots \dots \dots \dots (48)$$

$$(ただし、k=\text{Max}(i, 0))$$

であり、 $b_j'$ が求まれば、

$$b_i = b_{i-2}' \quad (i \geq 2) \quad \dots \dots \dots \dots (49)$$

$$b_0 = 1, \quad b_1 = 1 \quad \dots \dots \dots \dots (50)$$

より $b_i$ が求まる。

$c$ が $c_2$ の場合、減衰の大きなモードの影響は小さいと考えれば、 $q < 0$ とおけばよい。

また、 $|z|$ が大きくなるとき、 $|K(z)| < 1$ になるように $K(z)$ をとれば、比較的安定性の良い近似を得ることができる。

### (4) 有理関数近似による方法

$eA^{dt_i}$ の近似方法としては、(2), (3)で述べた多項式近似法のほかに、有理関数による近似方法も考えられる(実数、複素数変数の関数の有理関数近似については、文献33), 34)などに述べられている)。多項式近似の場合、十分多くの項をとて十分な精度で $eA^{dt_i}$ に収束させねば安定といえるが、有理関数近似では項数のいかんによらず、任意の時間きざみに対して安定にすることができる。 $eA^{dt_i}$ は、

$$eA^{dt_i} = (e^{-A(dt_i/2)})^{-1} eA(dt_i/2) \quad \dots \dots \dots \dots (51)$$

と表わされる。 $eA(dt_i/2)$ および $e^{-A(dt_i/2)}$ をそれぞれ多項式で近似して式(51)へ代入すれば、これが $eA^{dt_i}$ の一つの有理関数近似になる。この場合、 $eA(dt_i/2)$ の近似多項式が

$$f(A\Delta t_l) = \sum_{i=0}^n a_i (A\Delta t_l)^i$$

(ただし,  $a_i$  は実数で,  $a_n \neq 0$ ) .....(52)

で表わされ, かつ,  $f(-A\Delta t_l)$  が  $e^{-A(\Delta t_l/2)}$  の近似多項式になっているものとする.  $f(A\Delta t_l)$  としては, たとえば (2), (3) で述べた多項式を適用してよい (ただし, 時間きざみは  $1/2$  にとる).

$e^{A\Delta t_l}$  の近似マトリックス  $e_{**}^{A\Delta t_l}$  は,

$$e_{**}^{A\Delta t_l} = [f(-A\Delta t_l)]^{-1} f(A\Delta t_l) .....(53)$$

となり, また,  $A$  の固有値を  $\lambda_i (i=1, 2, \dots, k; k \text{ はマトリックス } A \text{ の元数})$  とするとき, 対応する  $e_{**}^{A\Delta t_l}$  の固有値  $\lambda_i^{**}$  は

$$\lambda_i^{**} = \frac{f(\lambda_i \Delta t_l)}{f(-\lambda_i \Delta t_l)} \quad (i=1, 2, \dots, k) .....(54)$$

と表わされる.

逐次計算法が安定であるためには, すべての  $\lambda_i^{**}$  の絶対値が 1 以下でなければならない<sup>22)</sup>. 1 以下であることは次のように証明される.  $f(z)=0$  の根を  $z_i (i=1, 2, \dots, n)$  とすると,  $f(z)$  の係数はすべて実数であるから,  $z_i$  の共役複素数  $z_i^*$  も  $f(z)$  の根である. よって,  $f(-z)=0$  の根は  $-z_i^* (i=1, 2, \dots, n)$  である. そこで,  $\lambda_i^{**}$  について次式が成り立つ.

$$|\lambda_i^{**}| = \left| \frac{a_n \prod_{i=1}^n (\lambda_i \Delta t_l - z_i)}{a_n \prod_{i=1}^n (\lambda_i \Delta t_l + z_i^*)} \right| .....(55)$$

$z_i$  の実部がすべて 0 または負 (たとえば Hurwitz の安定条件<sup>30)</sup>により確かめられる) とすれば,  $\lambda_i$  は実部が 0 または負の複素数なので,

$$\left| \frac{(\lambda_i \Delta t_l - z_i)}{(\lambda_i \Delta t_l + z_i^*)} \right| \leq 1 .....(56)$$

よって,

$$|\lambda_i^{**}| \leq 1 .....(57)$$

となる.

有理式近似の例としては, ほかに Lagrange の連分数近似を有限項で打ち切ったものも考えられる. 森<sup>31)</sup>は  $\operatorname{Re}(z) \leq 0$  のとき, 近似式の絶対値が 1 を越えないことを証明し, 初期値問題への適用を提案している.

また, 前節 (3) で述べた方法に従い,

$$\oint_{c_2} |e^{-qz}|^p \cdot \left| \frac{1 + \frac{z}{2} + \sum_{i=2}^n b_i z^i}{1 - \frac{z}{2} + \sum_{i=2}^n b_i (-z)^i} \right|^p \cdot |dz| .....(58)$$

を最小にするように  $b_i$  を決め,

$$f(z) = 1 + \frac{z}{2} + \sum_{i=2}^n b_i z^i .....(59)$$

としてもよい.  $c_2$  は  $A\Delta t_l$  の主要な固有値のみを囲むようにとればよい.

ところで, すべての  $\lambda_i^{**}$  の絶対値が 1 以下であることは, 減化式で外力を 0 とした際, 後の変位ベクトルと初期変位ベクトルの任意に定めたノルムの比が 1 以下であることを意味しない.  $\lambda_i$  がすべて異なるとき,  $e_{**}^{A\Delta t_l}$  は,

$$e_{**}^{A\Delta t_l} = R D_{**} R^{-1} \quad (D_{**} \text{ は } \lambda_i^{**} \text{ をマトリックス成分とする対角行列}) .....(60)$$

と表わされ, ベクトル  $X$  のノルム  $\|X\|^*$  を

$$\|X\|^* = \sqrt{X^T R^{-1} X} .....(61)$$

とおけば, このノルムに対して,  $e_{**}^{A\Delta t_l}$  の作用素ノルム

$$\operatorname{Max} \frac{\|e_{**}^{A\Delta t_l} X\|^*}{\|X\|^*} .....(62)$$

は 1 を越えないことになる. ただし,  $R^{-1}$  は  $R^{-1}$  の隨伴行列とする.

運動方程式が有限要素法から導かれ, 減衰が Rayleigh 型であり, すべてのモードに対して過減衰が起こらないとき (すなわち, 臨界減衰比  $\zeta < 1$ ), 式 (61) は,

$$\|X\|^* = \sqrt{\frac{1}{2} X^T \begin{bmatrix} M & C/2 \\ C/2 & K \end{bmatrix} X} .....(63)$$

と表わされる. これは  $C=0$  のとき, 系のエネルギーの平方根に等しい.

## (5) モード解析の場合の漸化式

特殊な場合として, 式 (1) の運動方程式が一元の常微分方程式ならば, (1) で誘導した漸化式はモード解析法に適用することができる. しかしこの場合, 一自由度であるという特殊性から解析的に厳密な漸化式が陽な形で求められる<sup>15), 27)</sup>.

方程式が次の形で与えられたものとする.

$$\ddot{z} + 2\omega\zeta\dot{z} + \omega^2 z = P .....(64)$$

外力  $P$  が時間きざみ  $\Delta t$  の間で定数の場合, 1 次式で表わされる場合 (Nigam らが文献 15) に述べている), 2 次式で表わされる場合について, 以下に漸化式を示す. これにより得られる解は無条件に安定であり, 短時間に精度の良い解を得ることができる.

### (i) $P$ が $\Delta t$ の間で定数の場合

$$\dot{z}(t+\Delta t) = E_{11}\dot{z}(t) + E_{12}z(t) + F_{11}P(t) .....(65)$$

$$z(t+\Delta t) = E_{21}\dot{z}(t) + E_{22}z(t) + F_{21}P(t) .....(66)$$

### (ii) $P$ が $\Delta t$ の間で 1 次式で表わされる変化をする場合

$$\begin{aligned} \dot{z}(t+\Delta t) &= E_{11}\dot{z}(t) + E_{12}z(t) + G_{11}P(t+\Delta t) \\ &\quad + G_{12}P(t) .....(67) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z(t+\Delta t) &= E_{21}\dot{z}(t) + E_{22}z(t) + G_{21}P(t+\Delta t) \\ &\quad + G_{22}P(t) .....(68) \end{aligned}$$

### (iii) $P$ が $\Delta t$ の間で 2 次式で表わされる変化をする場合

$$\dot{z}(t+\Delta t) = E_{11}\dot{z}(t) + E_{12}z(t) + H_{11}P(t+\Delta t)$$

$$+H_{12}P(t+\frac{4t}{2})+H_{13}P(t) \dots \dots \dots (69)$$

$$\begin{aligned} z(t+4t) &= E_{21}\dot{z}(t) + E_{22}z(t) + H_{21}P(t+4t) \\ &\quad + H_{22}P(t+\frac{4t}{2})+H_{23}P(t) \dots \dots \dots (70) \end{aligned}$$

ここで、 $\omega_D = \omega\sqrt{1-\zeta^2}$  とし、

$$E_{11}=e^{-\omega\zeta 4t}\left(\cos\omega_D 4t - \frac{\omega\zeta}{\omega_D}\sin\omega_D 4t\right) \dots \dots \dots (71)$$

$$E_{12}=-\frac{\omega D^2+\omega^2\zeta^2}{\omega_D}e^{-\omega\zeta 4t}\sin\omega_D 4t \dots \dots \dots (72)$$

$$E_{21}=\frac{e^{-\omega\zeta 4t}}{\omega_D}\sin\omega_D 4t \dots \dots \dots (73)$$

$$E_{22}=e^{-\omega\zeta 4t}\left(\cos\omega_D 4t + \frac{\omega\zeta}{\omega_D}\sin\omega_D 4t\right) \dots \dots \dots (74)$$

$$F_{11}=\frac{-\omega\zeta S_1+\omega_D C_1}{\omega_D} \dots \dots \dots (75)$$

$$F_{21}=\frac{S_1}{\omega_D} \dots \dots \dots (76)$$

$$G_{11}=\frac{-\omega\zeta(4tS_1-S_2)+\omega_D(4tC_1-C_2)}{\omega_D 4t} \dots \dots \dots (77)$$

$$G_{12}=\frac{-\omega\zeta S_2+\omega_D C_2}{\omega_D 4t} \dots \dots \dots (78)$$

$$G_{21}=\frac{4tS_1-S_2}{\omega_D 4t} \dots \dots \dots (79)$$

$$G_{22}=\frac{S_2}{\omega_D 4t} \dots \dots \dots (80)$$

$$H_{11}=\frac{-\omega\zeta 4t^2 S_1+\omega_D 4t^2 C_1+3\omega\zeta 4t S_2-3\omega_D 4t C_2}{\omega_D 4t^2} \dots \dots \dots (81)$$

$$H_{12}=\frac{-4\omega\zeta 4t S_2+4\omega_D 4t C_2+4\omega\zeta S_3-4\omega_D C_3}{\omega_D 4t^2} \dots \dots \dots (82)$$

$$H_{13}=\frac{\omega\zeta 4t S_2-\omega_D 4t C_2-2\omega\zeta S_3+2\omega_D C_3}{\omega_D 4t^2} \dots \dots \dots (83)$$

$$H_{21}=\frac{4t^2 S_1-34t S_2+2 S_3}{\omega_D 4t^2} \dots \dots \dots (84)$$

$$H_{22}=\frac{44t S_2-4 S_3}{\omega_D 4t^2} \dots \dots \dots (85)$$

$$H_{23}=\frac{-4t S_2+2 S_3}{\omega_D 4t^2} \dots \dots \dots (86)$$

$$\begin{aligned} S_1 &= \int_0^{4t} e^{-\omega\zeta\tau}\sin\omega_D\tau d\tau \\ &= \frac{e^{-\omega\zeta 4t}(-\omega\zeta\sin\omega_D 4t-\omega_D\cos\omega_D 4t)+\omega_D}{\omega^2} \dots \dots \dots (87) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_1 &= \int_0^{4t} e^{-\omega\zeta\tau}\cos\omega_D\tau d\tau \\ &= \frac{e^{-\omega\zeta 4t}(-\omega\zeta\cos\omega_D 4t+\omega_D\sin\omega_D 4t)+\omega\zeta}{\omega^2} \dots \dots \dots (88) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_2 &= \int_0^{4t} \tau e^{-\omega\zeta\tau}\sin\omega_D\tau d\tau \\ &= \frac{\Delta t e^{-\omega\zeta\Delta t}(-\omega\zeta\sin\omega_D\Delta t-\omega_D\cos\omega_D\Delta t)}{\omega^2} \\ &\quad - \frac{(-\omega\zeta S_1-\omega_D C_1)}{\omega^2} \dots \dots \dots (89) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_2 &= \int_0^{4t} \tau e^{-\omega\zeta\tau}\cos\omega_D\tau d\tau \\ &= \frac{\Delta t e^{-\omega\zeta\Delta t}(-\omega\zeta\cos\omega_D\Delta t+\omega_D\sin\omega_D\Delta t)}{\omega^2} \\ &\quad - \frac{(-\omega\zeta C_1+\omega_D S_1)}{\omega^2} \dots \dots \dots (90) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_3 &= \int_0^{4t} \tau^2 e^{-\omega\zeta\tau}\sin\omega_D\tau d\tau \\ &= \frac{\Delta t^2 e^{-\omega\zeta\Delta t}(-\omega\zeta\sin\omega_D\Delta t-\omega_D\cos\omega_D\Delta t)}{\omega^2} \\ &\quad - \frac{2(-\omega\zeta S_2-\omega_D C_2)}{\omega^2} \dots \dots \dots (91) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_3 &= \int_0^{4t} \tau^2 e^{-\omega\zeta\tau}\cos\omega_D\tau d\tau \\ &= \frac{\Delta t^2 e^{-\omega\zeta\Delta t}(-\omega\zeta\cos\omega_D\Delta t+\omega_D\sin\omega_D\Delta t)}{\omega^2} \\ &\quad - \frac{2(-\omega\zeta C_2+\omega_D S_2)}{\omega^2} \dots \dots \dots (92) \end{aligned}$$

### 3. 係数マトリックスの近似度

2. で漸化式の係数マトリックスの誘導とその近似法について述べた。モード解析の厳密な漸化式についてはまったく問題ないが、直接積分法の係数マトリックスの近似方法については多項式、有理式の近似度を調べる必要がある。

#### (1) Maclaurin 級数

図-2, 3 に無減衰の場合の周期の伸びと、近似固有値

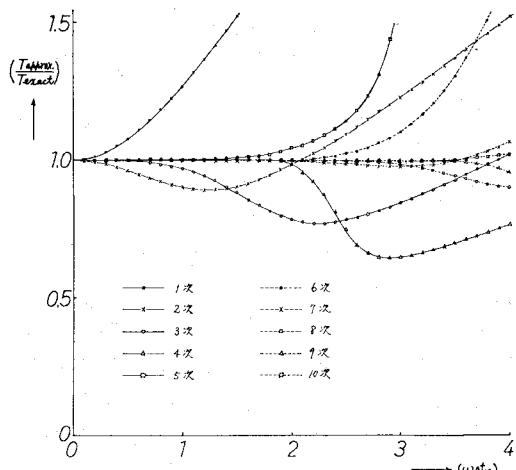


図-2 Maclaurin 級数の場合の周期の伸び

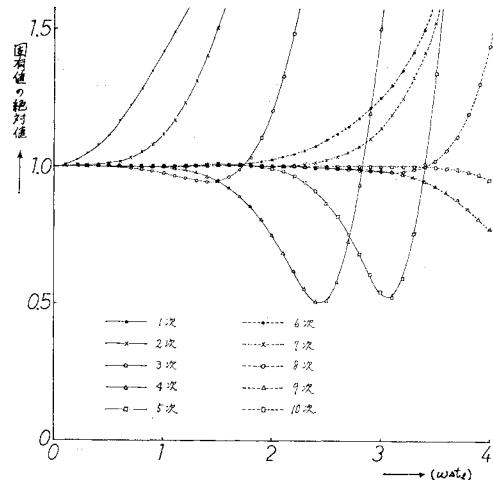


図-3 Maclaurin 級数の場合の固有値の絶対値

の絶対値を示した。ここで、 $\omega$ は固有角振動数、 $T_{exact}$ は固有周期であり、 $T_{approx}$ は近似式を使った場合の見かけの固有周期である。次数がふえると近似度は良くなる。比較的の  $\omega dt_1$  が小さくても固有値が 1 を越えることが多く、安定性を得るために細かく時間きざみを取るか、次数を大きくとって、十分な精度で近似させる必要がある。

## (2) 2乗近似多項式

図-4, 5 に無減衰の場合の 2 乗近似による周期の伸びと、近似固有値の絶対値を示した。近似多項式を計算した条件は、表-1 に示す通りである。Maclaurin 級数に比べて、より大きな  $\omega dt_1$  でも固有値が 1 を越えず、安定性の面から有効である。精度も Maclaurin 級数に劣らない。Maclaurin 級数と同様、係数マトリックスの計算に逆行列演算を含まないので、非線型計算に有効である。

表-1 2乗近似多項式の計算条件

次 数	2	3	4	6	8	10	ただし、 $C=C_2$ , $q=-1$ $K(z)=1+\frac{z^2}{R_1^2}$
半径 ( $a$ )	1.0	2.0	2.0	4.0	4.0	4.0	
$R_1$	1.0	2.0	8.0	8.0	16.0	32.0	

## (3) 有理式 (Maclaurin 級数)

図-6 に無減衰の場合の周期の伸びを図示した。有理式においては無減衰の場合、 $\omega dt_1$  のいかんによらず固有値の絶対値は 1 である。減衰のあるとき、分子の多項式が Hurwitz の条件を満たしていれば、固有値が 1 以下で  $\omega dt_1$  のいかんによらず無条件に安定であるが、分子、分母の多項式に Maclaurin 級数を用いる場合、1 次から 10 次まで検算を行った所、5 次から 10 次までは Hurwitz の条件を満たしていないので、注意が必要である。周期

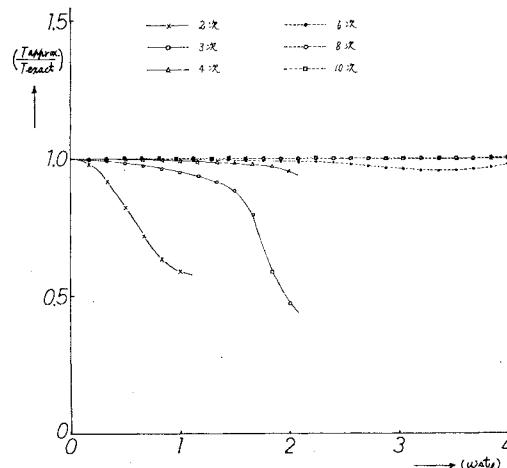


図-4 2乗近似多項式の場合の周期の伸び

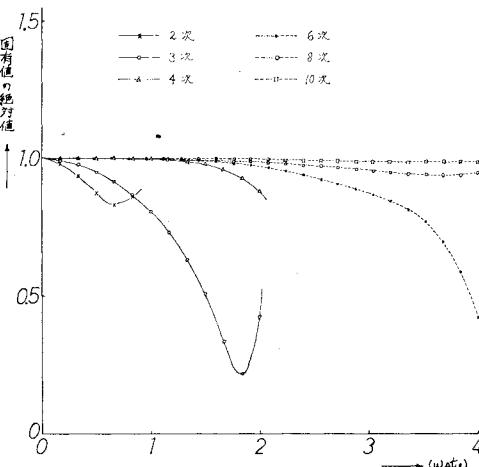


図-5 2乗近似多項式の場合の固有値の絶対値

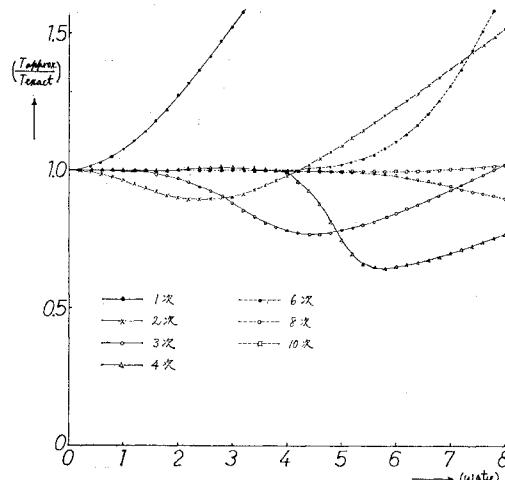


図-6 有理式 (Maclaurin 級数) の場合の周期の伸び

の伸びは、同じ次数の多項式に比べて小さい。しかし、係数マトリックスを求めるのに逆マトリックス演算を必要とする。

#### (4) 有理式(連分数)

Lagrange の連分数展開を偶数項で打ち切ると有理式となる。分母を  $F_j(z)$ 、分子を  $G_j(z)$  とすると、

$$F_0=1, \quad F_1=2-z, \quad G_0=1, \quad G_1=2+z \dots \quad (93)$$

$$F_j=2(2j-1)F_{j-1}+z^2F_{j-2} \dots \dots \dots \quad (94)$$

$$G_j=2(2j-1)G_{j-1}+z^2G_{j-2} \dots \dots \dots \quad (95)$$

と表わされ<sup>37)</sup>、 $F_j(z)$ 、 $G_j(z)$  はそれぞれ  $j$  次の多項式となる。

図-7 に無減衰の場合の周期の伸びを示した。分母、分子に Maclaurin 級数を用いた場合に比べて、同じ次数では、かなり精度が良い。しかもすべての次数について減衰の有無によらず、いかなる  $\Delta t_L$  に対しても安定である。

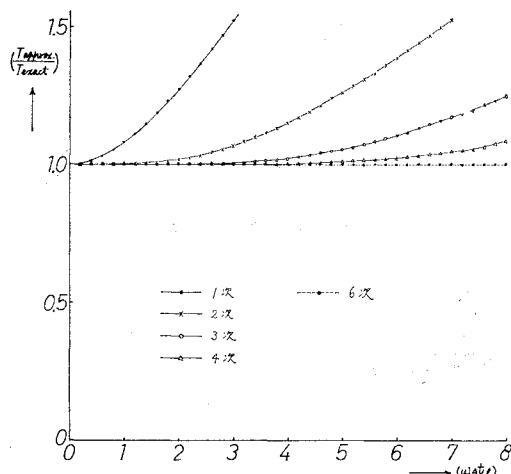


図-7 有理式(連分数近似)の場合の周期の伸び

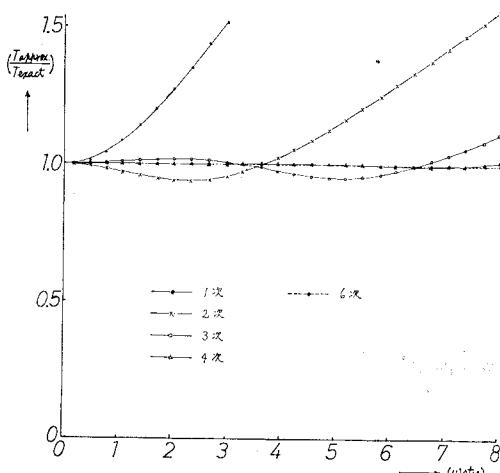


図-8 有理式( $p$ 乗近似多項式,  $p=7$ )の場合の周期の伸び

あり、優れた方法といえる。

#### (5) 有理式( $p$ 乗近似)

$c=c_1, q=0, a=8, p=7$  で、式(58)に従って求めた有理式の減衰のない場合の周期の伸びを図-8 に示した。同じ次数の連分数展開に比べて、さらに精度が良い。また、ここで計算を行った 1, 2, 3, 4, 6 次に対して、Hurwitz の条件が満足されており、連分数近似と同様に無条件安定である。なお、次数=1 の場合、(3), (4), (5) の有理式は同一で、無減衰の場合の周期の伸びは、Newmark の  $\beta$  法で  $\beta=1/4, \tau=1/2$  とした場合と一致する。

### 4. 数値計算例

#### (1) 片持ちはりの横方向荷重に対する応答計算

図-9 に示す片持ちはりに、正弦的に振動する水平方向一様分布荷重を加えた場合の応答を、Clough の線型加速度法、Wilson の  $\theta$  法 ( $\theta=1.5$ )、分母、分子に 4 次の Maclaurin 級数を使用した有理関数近似による本解析法(外力は 1 次式で近似)の 3 種類の方法で計算した。要素分割は等間隔に 10 で、最長固有周期は 1.787 秒、最短固有周期は 0.0012 秒である。

図-10, 11, 12 は荷重強度が  $\cos(1.172t)$  kg/cm なる場合の自由端の水平方向変位応答を、時間きざみを変えて計算した結果である。時間きざみが 0.0005 秒の場合、3 方法とも厳密解<sup>38)</sup>とよく一致する。時間きざみが 0.00066 秒を越えると線型加速度法は発散する。時間きざみが 0.1 秒の場合、Wilson の  $\theta$  法による計算値は、振幅の大きさは厳密解とそれほど変わらないが、位相遅れを示す。一方、有理式近似による本解析法は厳密解との良好な一致を示している。同様に、図-13 に荷重強度が  $\cos(0.3516t)$  kg/cm なる場合の応答を時間きざみ 0.6 秒で計算した結果を示す。Wilson の  $\theta$  法による結果は、振幅も厳密解と大きく異なる。有理式近似はこの場合も良好な一致を示している。

これらの計算結果から、4 次の Maclaurin 級数を使った有理式近似による方法は、長い時間きざみでも精度良く応答計算ができることが明らかである。なお、前章で

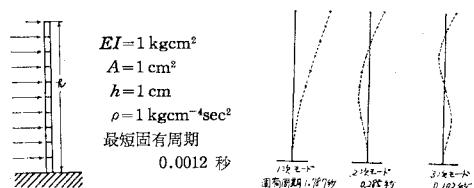


図-9 計算に用いた片持ちはり

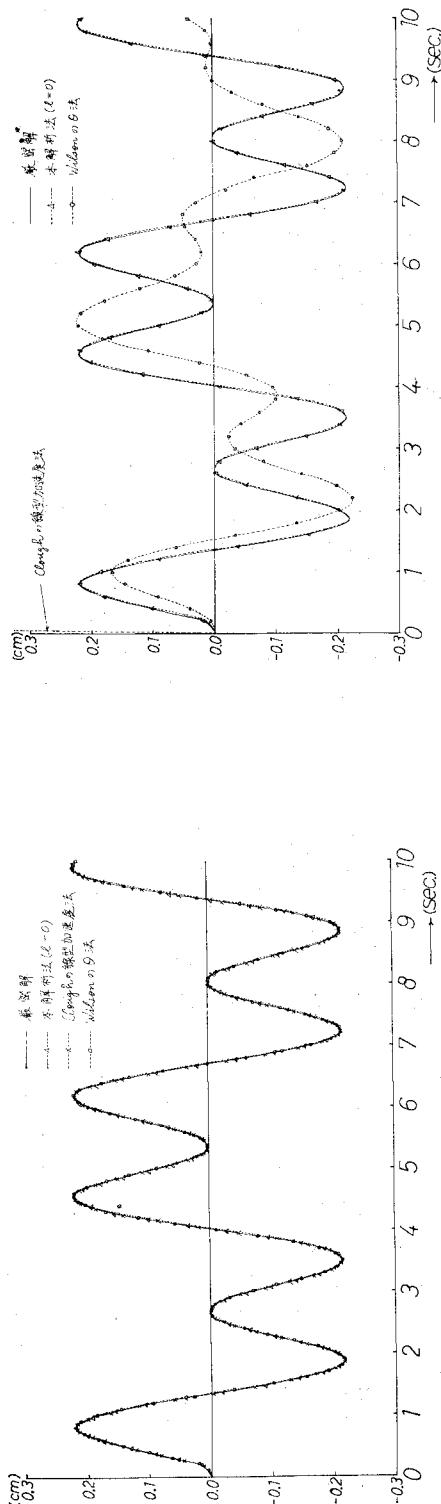


図-10 片持ちばり変位応答計算結果  
(時間きさみ, 0.0005 秒)

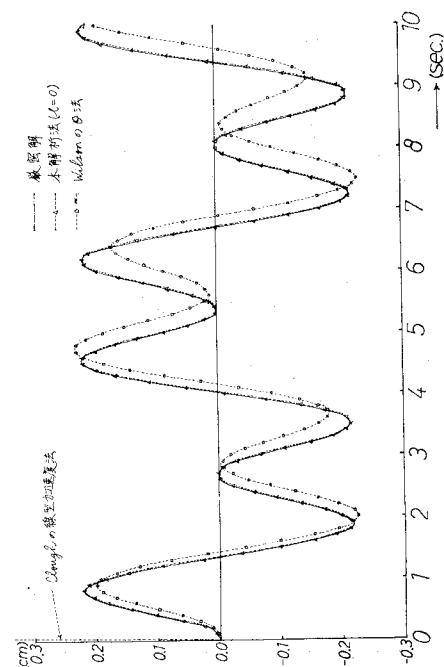


図-11 片持ちばり変位応答計算結果  
(時間きさみ, 0.1 秒)

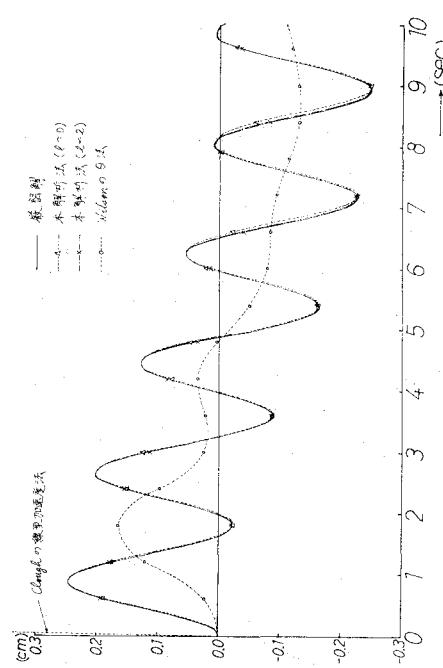


図-12 片持ちばり変位応答計算結果  
(時間きさみ, 0.2 秒)

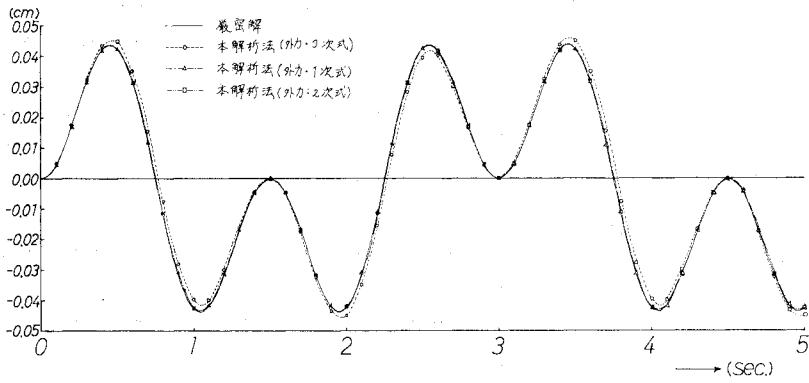
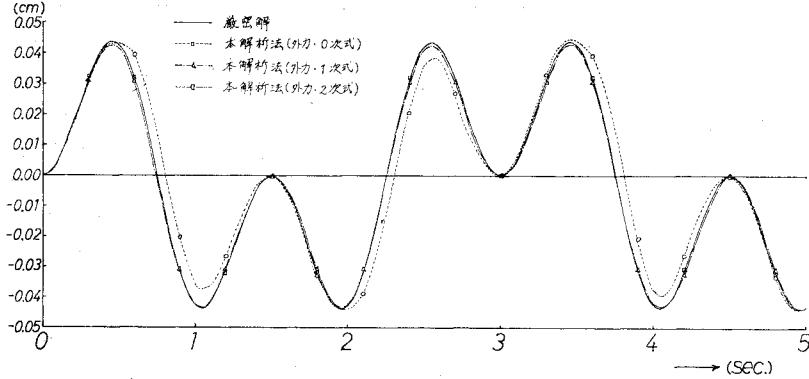
図-13 片持ちばり変位応答計算結果  
(時間きさみ, 0.6 秒)

表-2 一自由度系変位応答計算の誤差（系の周期  $T_0$ , 外力の周期  $3T_0$ ）

減衰比 外力の 多項式近似の 次数 $\frac{\Delta t}{T_0}$ 時刻		$\zeta=0.00$			$\zeta=0.01$			$\zeta=0.10$		
		0 次	1 次	2 次	0 次	1 次	2 次	0 次	1 次	2 次
0.03	$3T_0$	$0.23 \times 10^{-1}$	$0.33 \times 10^{-3}$	$0.41 \times 10^{-5}$	$0.24 \times 10^{-1}$	$0.33 \times 10^{-3}$	$0.34 \times 10^{-5}$	$0.29 \times 10^{-1}$	$0.33 \times 10^{-3}$	$0.20 \times 10^{-5}$
	$6T_0$	$0.23 \times 10^{-1}$	$0.33 \times 10^{-3}$	$0.66 \times 10^{-5}$	$0.25 \times 10^{-1}$	$0.33 \times 10^{-3}$	$0.55 \times 10^{-5}$	$0.30 \times 10^{-1}$	$0.33 \times 10^{-3}$	$0.20 \times 10^{-5}$
0.1	$3T_0$	$0.78 \times 10^{-1}$	$0.37 \times 10^{-2}$	$0.28 \times 10^{-4}$	$0.81 \times 10^{-1}$	$0.37 \times 10^{-2}$	$0.28 \times 10^{-4}$	$0.44 \times 10^{-1}$	$0.37 \times 10^{-2}$	$0.29 \times 10^{-4}$
	$6T_0$	$0.78 \times 10^{-1}$	$0.37 \times 10^{-2}$	$0.29 \times 10^{-4}$	$0.83 \times 10^{-1}$	$0.37 \times 10^{-2}$	$0.28 \times 10^{-4}$	$0.99 \times 10^{-1}$	$0.37 \times 10^{-2}$	$0.29 \times 10^{-4}$
0.3	$3T_0$	0.23	$0.35 \times 10^{-1}$	$0.49 \times 10^{-2}$	0.24	$0.35 \times 10^{-1}$	$0.49 \times 10^{-2}$	0.28	$0.35 \times 10^{-1}$	$0.47 \times 10^{-2}$
	$6T_0$	0.23	$0.35 \times 10^{-1}$	$0.49 \times 10^{-2}$	0.25	$0.35 \times 10^{-1}$	$0.49 \times 10^{-2}$	0.29	$0.35 \times 10^{-1}$	$0.48 \times 10^{-2}$

表-3 一自由度系の変位応答計算の誤差（系の周期  $T_0$ , 外力の周期  $T$ ,  $\Delta t = T/30$ ）

減衰比 外力の 多項式 近似の 次数 $\frac{T}{T_0}$ $\frac{\Delta t}{T_0}$ 時刻		$\zeta=0.00$			$\zeta=0.01$			$\zeta=0.10$		
		0 次	1 次	2 次	0 次	1 次	2 次	0 次	1 次	2 次
$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{300}$	$0.74$	$0.37 \times 10^{-2}$	$0.26 \times 10^{-3}$	0.71	$0.37 \times 10^{-2}$	$0.26 \times 10^{-3}$	0.48	$0.36 \times 10^{-2}$	$0.18 \times 10^{-3}$
	$6T_0$	0.74	$0.36 \times 10^{-2}$	$0.13 \times 10^{-2}$	0.68	$0.36 \times 10^{-2}$	$0.13 \times 10^{-2}$	0.37	$0.38 \times 10^{-2}$	$0.12 \times 10^{-2}$
$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{90}$	$0.23$	$0.37 \times 10^{-2}$	$0.88 \times 10^{-4}$	0.23	$0.37 \times 10^{-2}$	$0.80 \times 10^{-4}$	0.17	$0.37 \times 10^{-2}$	$0.63 \times 10^{-4}$
	$6T_0$	0.23	$0.37 \times 10^{-2}$	$0.13 \times 10^{-3}$	0.22	$0.37 \times 10^{-2}$	$0.11 \times 10^{-3}$	0.15	$0.37 \times 10^{-2}$	$0.67 \times 10^{-4}$
1	$\frac{1}{30}$	$0.11$	$0.37 \times 10^{-2}$	$0.34 \times 10^{-4}$	0.11	$0.37 \times 10^{-2}$	$0.41 \times 10^{-4}$	0.11	$0.36 \times 10^{-2}$	$0.32 \times 10^{-4}$
	$6T_0$	0.11	$0.37 \times 10^{-2}$	$0.35 \times 10^{-4}$	0.11	$0.37 \times 10^{-2}$	$0.38 \times 10^{-4}$	0.11	$0.37 \times 10^{-2}$	$0.34 \times 10^{-4}$
3	$\frac{1}{10}$	$0.78 \times 10^{-1}$	$0.37 \times 10^{-2}$	$0.28 \times 10^{-4}$	$0.81 \times 10^{-1}$	$0.37 \times 10^{-2}$	$0.28 \times 10^{-4}$	$0.94 \times 10^{-1}$	$0.37 \times 10^{-2}$	$0.29 \times 10^{-4}$
	$6T_0$	$0.78 \times 10^{-1}$	$0.37 \times 10^{-2}$	$0.29 \times 10^{-4}$	$0.83 \times 10^{-1}$	$0.37 \times 10^{-2}$	$0.28 \times 10^{-4}$	$0.99 \times 10^{-1}$	$0.37 \times 10^{-2}$	$0.29 \times 10^{-4}$
10	$\frac{1}{3}$	$0.82 \times 10^{-1}$	$0.39 \times 10^{-2}$	$0.10 \times 10^{-3}$	$0.87 \times 10^{-1}$	$0.39 \times 10^{-2}$	$0.10 \times 10^{-3}$	0.10	$0.39 \times 10^{-2}$	$0.17 \times 10^{-3}$
	$6T_0$	$0.65 \times 10^{-1}$	$0.39 \times 10^{-2}$	$0.10 \times 10^{-3}$	$0.71 \times 10^{-1}$	$0.39 \times 10^{-2}$	$0.10 \times 10^{-3}$	$0.87 \times 10^{-1}$	$0.39 \times 10^{-2}$	$0.14 \times 10^{-3}$

図-14 一自由度系変位応答計算結果（時間きざみ、0.1秒；臨界減衰比  $\zeta=0.0$ ；系の周期  $T_0=1$ 秒；外力、 $\cos 2\pi/t$  3cm/sec<sup>2</sup>）図-15 一自由度系変位応答計算結果（時間きざみ、0.3秒；臨界減衰比  $\zeta=0.0$ ；系の周期  $T_0=1$ 秒；外力、 $\cos 2\pi/t$  3cm/sec<sup>2</sup>）

も述べた通り、連分数展開、最小  $p$  乗近似有理式を用いれば、同じ次数でさらに精度よく計算することができるものと考えられる。

## (2) 一自由度系の応答計算

表-2, 3 に 2. の (5) で述べた漸化式を使い、一自由度系の応答計算を行った場合の誤差を示す。系の固有周期を  $T_0$ 、時間きざみを  $4t$ 、厳密な変位応答を  $g(n4t)$ 、計算された変位応答を  $f(n4t)$  としたとき、誤差  $\epsilon$  は次のように定義した。

$$\epsilon = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^m \{g(i4t) - f(i4t)\}^2}{\sum_{i=1}^m \{g(i4t)\}^2}}$$

(ただし、 $m4t = 3T_0$  or  $6T_0$ ) .....(96)

このような誤差評価式では、振幅の誤差は小さいが、少し位相おくれがある場合、大きな誤差として表現される。外力近似を 0 次とした場合、位相遅れができるので比較的大きな誤差となっている。

表-2 は  $\cos(2\pi t/3 T_0)$  cm/sec<sup>2</sup> なる外力が加わった場合の応答を時間きざみを変えて計算し、その誤差を示したものである。表-3 には外力の周期をいろいろ変え、時間きざみ  $4t$  は、外力の周期の 1/30 にとって計算した場合の誤差を示した。外力近似が 0 次、1 次、2 次と上がるにつれて精度が向上している。また、外力の周期と時間きざみの比が小さくなるにつれて精度が落ちる。外力の周期と時間きざみの比が一定ならば、系の固有周期の長さはあまり精度に影響をおよぼさない。特に、外力の次数が 1 次、2 次の場合影響が小さい。したがって、モード解析にこの方法を使用するとき、各モードで固有周期が異なっても、同一の時間きざみで計算してさしつかえない。また、一般に減衰が加わると誤差は減少する傾向が見られる。図-14, 15 に変位応答計算結果の一部を時間歴で示した。本方法では比較的長い時間きざみで、精度の良い解が得られることが明らかである。

## 5. 結 び

以上、解析的方法による漸化式の誘導、および  $e^{A4t}$  マトリックスの多項式近似法、有理関数近似法について検討した。さらに、それに基づいて片持りと一自由度系の動的応答計算を行い、他の方法と比較し考察した。

得られた結果を要約すると次の通りである。

(1) 解析的方法により漸化式を誘導した場合、時間きざみ  $4t$  間の外力変化を多項式で近似すれば、問題になるのは  $e^{A4t}$  の近似計算法のみである。多項式近似法、有理式近似法によりそれを求めることができるが、いずれにしても有限のべき乗項で打ち切らなければなら

ない。時間きざみ、べき乗項の項数と打ち切り誤差、安定性などとの関係については十分な検討が必要である。

(2)  $e^{A4t}$  を多項式近似、有理式近似するとき、 $4t$  が大きくなれば収束が悪くなり、必要な項数が多くなる。その対策として  $4t$  を  $2^l$  分割した  $4t_l$  を用いることは有効である。 $e^{A4t_l}$  が求まれば  $l$  回のマトリックスの乗算で  $e^{A4t}$  が求められる。

(3)  $e^{A4t}$  を多項式近似する場合、Maclaurin 級数を使用すると安定性を得るために、比較的小さな  $4t$  をとらなければならない。最小  $p$  乗近似多項式による方法では、より大きな  $4t$  に対しても安定で精度の良い近似を行うことができる。多項式近似では、Lumped Mass の場合、逆マトリックスの演算を必要としないので、非線型計算などに有効と思われる。

(4)  $e^{A4t}$  を多項式近似するとき、十分多くの項をとって、十分な精度で収束させれば安定な解が得られるといえるが、有理式近似では項数のいかんによらず、任意の時間きざみに対して安定にすることができる。

(5) 有理式近似法は種々の方法が考えられる。分子、分母の多項式の係数は、Maclaurin 級数、最小  $p$  乗近似および連分数近似などから求められる。 $e^{A4t}$  の近似度を数値的に調べた結果、同じ次数では、最小  $p$  乗近似が最も良く、連分数近似がそれに続く。しかし、Maclaurin 級数を 4 次までとすれば、通常十分な精度の解が得られる。Maclaurin 級数を 4 次まで分子および分母にとり有理式近似にする方法は、Hurwitz の条件から減衰の有無にかかわらず無条件に安定であり、線型計算に適している。

(6) モード解析法については、Nigam らおよび本論文に示した解析的に厳密な漸化式を用いるのが、計算時間、精度ともに最良と思われる。特に、時間きざみは構造物の固有周期とほとんど無関係に、外力を多項式で十分近似できる程度にとればよく、無条件に安定で精度の良い解が得られることは大きな利点である。

(7) 片持りおよび一自由度系の応答計算を行い、他の方法 (Clough の線型加速度法、Wilson の  $\theta$  法) と比較した結果、本解析法による値は他の方法に比べ、より大きな  $4t$  に対しても厳密解に良く一致することが確認された。

**謝 辞：**本論文をまとめるにあたり、電力中央研究所 渡辺啓行氏には種々の助言をいただいた。また、中川友康氏より連分数近似についての貴重な助言と資料をいただいた。末筆ながらここに記して感謝の意としたい。

## 参 考 文 献

- 1) Clough R.W. : Numerical Integration of the Equations of Motion, Lectures on Finite Element Methods in Continuum Mechanics, (Edited by J.T. Oden and

- E.R.A. Oliveira), The University of Alabama in Huntsville, 1973.
- 2) 土木学会編：地震応答解析と実例，1973年1月。
  - 3) 河島佑男：動的応答解析，コンピューターによる構造工学講座 II-4-A，培風館，1972。
  - 4) Lax P.D. and Richtmyer R.D. : Survey of the stability of finite difference equations, Communs Pure Appl. Math., 9, 1956.
  - 5) Houbolt J.C. : A recurrence matrix solution for the dynamic response of elastic aircraft, J. Aeronaut. Sci., 17, 1950.
  - 6) Clough R.W. : Analysis of Structural Vibration and Dynamic Response, Japan-U.S. Seminar on Matrix Methods, August 1969 U.S. 3-1.
  - 7) Newmark N.M. : A method of computation for structural dynamics, Proc. of A.S.C.E., Vol. EM, pp. 67~94, 1959.
  - 8) Chan S.P., Cox H.L. and Benfield W.A. : Transient analysis of forced vibrations of complex structural mechanical systems, J. Royal Aeronaut. Soc., 66, 1962.
  - 9) Wilson E.L., Farhoomand I. and Bathe K.J. : Non-linear dynamic analysis of complex structures, Earthquake Engineering and Structural Dynamics, Vol. 2, No. 2, 1973.
  - 10) 赤坂 隆：数値計算，応用数学講座，コロナ社，1969.
  - 11) 宇野利雄：計算機のための数値計算，応用数学力学講座 14，朝倉書店，1969.
  - 12) 平野泰彦：コンピューターによる数値計算，日刊工業新聞社，昭和47年。
  - 13) Argyris J.H., Dunne P.C. and Angelopoulos T. : Dynamic response by large step integration, Earthquake Engineering and Structural Dynamics, Vol. 2, No. 2, 1973.
  - 14) Argyris J.H., Dunne P.C. and Angelopoulos T. : Non-linear oscillations using the finite element Technique, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2, 1973.
  - 15) Nigam N.C. and Jennings P.C. : Calculation of response spectra from strong-motion earthquake records, Bulletin of the Seismological Society of America, Vol. 59, No. 2, April, 1969.
  - 16) 滝沢春男：構造物の振動解析 I, II, 東京大学建築学科修士論文，1971。  
滝沢春男：強震における建築構造物の挙動の解析，東京大学建築学科博士論文，1974。
  - 17) 畑野 正・中川友康：アーチダムの震動解析，土木学会論文報告集，No. 207, 1972.11.
  - 18) 林 正夫・北原義浩・駒田広也：連続体の三次元震動の解析（ロックフィルダムの二次元震動と三次元震動の比較），電力中央研究所技術第二研究所報告，No. 71013, 1971年4月。
  - 19) 渡辺啓行：有限要素法による粘弹性体の振動解析，土木学会論文報告集，No. 198, 1972.2.
  - 20) 渡辺啓行：構造材料の動的変形特性ならびに非弾性構造物の動的解析手法に関する研究，1973年3月。
  - 21) 五藤員雄：電子計算機による電線運動の計算法（上），（下），電気公論，第43巻，第7号，8号，1967.
  - 22) Bathe K.J. and Wilson E.L. : Stability and accuracy analysis of direct integration methods, Earthquake Engineering and Structural Dynamics, Vol. 1, 1973.
  - 23) Klein S. and Sylvester R.J. : The linear elastic dynamic analysis of shells of revolution by the matrix displacement methods, Proc. Conf. on Matrix Methods in Structural Mechanics, Air Force Inst. of Technology, Wright Patterson Air Force Base, Ohio, 1965.
  - 24) Nagarajan S. and Popov E.P. : Elastic-Plastic Dynamic Analysis of Axisymmetric Solids, Report No. UCSESM 73-9, Structural Engineering Laboratory, Univ. of Calif., 1973.
  - 25) 藤井 宏・日比野 敏：Stability of finite element schemes for vibration problems of equation of elasticity theory, 日本鋼構造協会第5回大会研究集会マトリクス構造解析法研究発表論文集，昭和46年6月。
  - 26) 杉本米夫・守谷一彦：振動解析における数値解法の検討，建築学会大会学術講演梗概集＜構造系＞，1970。
  - 27) 高野 博・佐藤宏一・塩尻弘雄：原子力発電所容器構造物の振動解析（P.C. 圧力容器の地震時応答解析への適用例），電力中央研究所技術第二研究所報告，No. 72002, 1972年2月。  
中村秀治：断面変形を考慮した薄肉はりの振動解析，土木学会論文報告集，No. 223, 1974.3.
  - 28) Понtryagin Л.С. : Обыкновенные Дифференциальные Уравнения, Наука, 1965, 邦訳, 木村俊男・千葉克裕：常微分方程式，共立出版，1968.
  - 29) Lin Y.K. : Probabilistic Theory of Structural Dynamics, McGraw-Hill, 1967, 邦訳, 森大吉郎・富田文治・小林繁夫・佐藤寿芳・小林曉峯共訳：構造動力学の確率論的方法，培風館，1972.
  - 30) 亀谷俊司：初等解析学 I, II, 岩波全書, 岩波, 1965.
  - 31) 斎藤正彦：線型代数入門，東大出版会，1966.
  - 32) Nehari Z. : Introduction to Complex Analysis, Allyn and Bacon, 1961.
  - 33) 一松 信：近似式，現代応用数学双書，竹内書店，1963.
  - 34) Walsh J.L. : Interpolation and Approximation by Rational Functions in the Complex Domain, Amer. Math. Soc., 1935.
  - 35) Finlayson B.A. : The Method of Weighted Residuals and Variational Principles, Academic Press, 1972, 邦訳, 鶴津久一郎・山本善之・川井忠彦 共訳：重みつき残差法と変分原理，培風館，1974.
  - 36) Oldenbourg R.C. and Sartorius H. : Dynamik Selbstst iger Regelungen, Verlag von R. Oldenbourg, München, 1951, 邦訳, 高橋安人, 伊訳計介 共訳：自動制御の力学，誠文堂新光社，1953.
  - 37) 森 正武：行列の指數関数の連分数近似，Computation and Analysis Seminar, Japan, Vol. 5, No. 3, 第4回 C & A サマーセミナー特集号, 1973.
  - 38) 岡本舜三：建設技術者のための振動学，オーム社，1969.

(1975.6.14・受付)