土木学会論文報告集
第 246 号・1976 年 2 月

利水用単一貯水池の最適操作計画に関する方法論

A METHOD FOR PLANNING THE OPTIMUM OPERATION OF A RESERVOIR FOR WATER UTILIZATIONS

室　田　　明*・神　田　　徹**
By Akira MUROTA and Tohru KANDA

1. 概　　説

貯水池システムが関与する水資源計画上の問題を要約すれば次のように分類できる.

（i） 貯水池群の配置および規模の決定問題

（ii） 貯水池系に期待する目標出力の決定問題

（iii） 貯水池操作方式の決定問題

(i) は対象流域に設置すべき貯水池群の適正な数，位置，規模や建設スケジュールなどを流域の自然特性と社会的，経済的条件から決定する計画問題 (planning problem) である. (ii) の目標出力は，流域の水需要に密接に関係する点において計画問題としての性格が強い. しかし，目標出力として固定的な値がシステムの操作に先行して定められていなければならぬ必要はない. むしろ，水需要に関する評価基準から判断できるように，供給可能水量と水需要計画の適正なバランスあるいは相互のフィードバックをはかることが水資源の効率的利用の点から妥当であろう. 本研究では計画問題は対象外であるが，以上の点から目標出力の決定問題を (iii) の操作問題に含める.

さて，本研究は (iii) の操作問題 (operational problem) を対象とするが，その中心課題は次の事項である.

1. 貯水池入力としての河川流量の予測または計画流量の設定.
2. 需要水の評価関数.
3. 貯水池最適操作ルールを決定するための数学的アルゴリズム.
4. 貯水池最適放流ルールの特性.
5. 貯水池操作による流量調整機構の解明.

第 1 の問題は貯水池計画における最も基本的な課題であるが，本文の直接の対象ではない.

第 2 の問題は，貯水池から供給される水を需要者の立場から評価し水需要に関する評価関数を定める問題であり，最適化問題の定式化における核といってよいであろう. これは利水問題の性格から明らかな通り工学の範囲外におよぶ問題であって，現段階では水利用の価値を一般的に表現する評価関数形を見い出すことはきわめて困難である. そこで従来とられているのは，個々の利水目的に対応する指標（たとえば経済指標）を用いて現実的な評価関数を与えたり，あるいは慣行的な水配分形式を維持したままその半固定的な水量からの増減が評価されることが多い. このような取り扱いは現況あるいは慣行的な水利用のあり方に対しては十分であっても，将来の抜本的な水利用の改善を志向するものではない. したがって，評価関数の適切な表現を見い出すことは水利用最適化の根本的問題であることはいうまでもなく，また研究上の成果を畜積し発展させるうえでも key point となっている課題である.

第 3 の問題は，この評価関数を最適化するための貯水池放流量の空間的・時間的配分の決定法に関するものである. この問題に対しては従来，LP[1]，DP[2]，シミュレーション[3] による手法に改良が加えられてきた. さらに，近年水資源システムの大規模化にともなう計算上の次元や演算時間の巨増化を克服するための手法として，Heidari らによる DDDP[4]，竹内による DCL 手法[5] などが開発されている. しかしながら，これらの各手法に含まれる前提条件あるいは仮定のためにその適用範囲にはおのずから限界がある. これに対して大規模システムを直接的に解くかわりに，貯水池群システム自体にある種の単純化を加える方法も検討されている[6].

一般にこのような最適化手法は，われわれが貯水池操作計画に際して知りたい情報のすべてを提供してくれない. これらの数学的手法は貯水池操作ルールの決定だけを直接の目標とするから，操作ルールが決定されたと

* 正会員　工博　大阪大学教授　工学部土木工学科
** 正会員　工博　神戸大学助教授　工学部土木工学科

き，そのルールにシステムの要素がどのように関係するのか，また流量調整の機構に各要素がどのように寄与するのかは明らかにされない．つまり，一般の最適化問題に見られるように，われわれはこれらの手法の適用によってシステム・モデルの操作ルールを短絡的に知るのみである．ゆえに，これに対して流量調整に関する貯水池機能特性や流量調整の機構を解明することが意義をもつことはいうまでもない．第４，第５の問題はこのような最適放流ルールの特性に関する問題および流量調整機構に関するものであり，種々の数理計画法とシミュレーション技法による接近が行われつつある．

本研究は貯水池操作問題の一環として存在する以上の各問題のうち，第２，第３の問題を取り扱い，第４の問題について基礎的考察を加えたものである．研究の重点は手法の数学的アルゴリズムよりもむしろ，貯水池流入量の特性から水需要の要件に至る全体的な把握を目指す立場から最適操作問題の方法論を考究する点にあり，このためにわが国の中規模程度の貯水池を対象としてその現実的な諸条件を重視し，かつそれらの数値には一般性を与えた．

本文の概要は次の通りである．１年間の水配分計画を対象とした貯水池最適操作問題をダイナミック・プログラミングにより定式化する．このために，最適化の基準となる評価関数が水需要に関する一般的要件を満たすように設定される．また，貯水池流入量と放流量との関数である推移確率行列が，流量時系列特性を導入することにより簡単な形で表現される．最適放流ルールの基本構造を各時間ステップの初期貯水量と流入量の関数で表わし，このルールを特性づける貯水池システム要素について考察する．なお，本文の対象とするシステムは単一貯水池で，評価は貯水池から放流される流量について行うものとし，ダム放流地点での水量が評価地点での水量と等しい場合を考える．

2. 貯水池流入量の時系列構造および放流方式の仮定

（1） 流量時系列の構造と統計的特性

筆者らはすでに，木津川の流量資料についてその時系列構造および統計的特性を解析するとともに，流量シミュレーションのための推計学的モデルを構成し，それらを参考文献 7),8) 等に報告した．得られた結果のうち，本文に必要な事項のみを要約すれば次の通りである．

（ｉ） 月流量時系列のシミュレーション・モデルが高水流量集団と低水流量集団おのおのの自己相関特性を再現するように構成された．このモデルは利水計画の対象となる低水流況および流量の長期変動のシミュレーションに良好な適用性を持つことが検証された．

（ii） 半旬流量はある基準流量によって高水流量と低水流量集団に大別でき，この低水流量集団は平均流量を適当に定義すればその変動係数の値から統計的に均質な資料によって構成されているものと見なせる．

（iii） 低水流量集団の i 年 j 月の第 k 半旬流量を $q_{ij}{}^{k}$，i 年 j 月の平均半旬流量を $\bar{q}_{ij}$，$q_{ij}{}^{k}$ の変換流量を

$$X=\frac{q_{ij}{}^{k}-\bar{q}_{ij}}{\bar{q}_{ij}} \cdots\cdots(1)$$

とするとき，j 月について X はすべての i 年の資料について２次の定常性をもち，またその頻度分布としてすべての i 年について同一の対数正規分布をあてはめることができる．

（iv） X の自己相関係数はすべての i 年 j 月についてゼロと見なせる．

（ｖ） 月流量および半旬流量についての以上の特性を導入して，年間を通ずる半旬流量時系列（低水流量集団）のシミュレーション・モデルが次のように構成された．

$$q_{ij}{}^{k}=\bar{q}_{ij}+q'=(1+X)\bar{q}_{ij} \cdots\cdots(2)$$

$$Q_{ij}=\overline{Q}_{j}+Q' \cdots\cdots(3)$$

ただし，

$$\bar{q}_{ij}=\frac{1}{6}Q_{ij} \cdots\cdots(4)$$

ここに，q' は $\bar{q}_{ij}$ のまわりのストカスティック成分，Q_{ij} は i 年 j 月の月流量，$\overline{Q}_{j}$ は j 月の平均月流量，Q' は $\overline{Q}_{j}$ のまわりのストカスティック成分である．

この時系列モデルは，式 (3) の長期変動成分 Q_{ij} に拘束されながら，短期成分 q' が式 (2) によって長期変動成分，$(1/6)Q_{ij}(=\bar{q}_{ij})$ のまわりに変動するモデルである．このモデルの特徴をあげれば次の通りである．(i) 非定常時系列が定常な部分時系列の連結で近似されること．(ii) 長期変動成分の持続性および短期変動成分の偶発性をよく再現すること．(iii) 短期変動の平均値が非定常でしかもストカスティックな特性を持つので，決定論的成分であるトレンドやジャンプを含む非定常時系列モデルと本質的に異なること．(iv) ただしこのモデルでは，部分時系列のジャンプによる流量変動の不連続性は貯水池の貯留・調節機能でカバーできることを前提としている．

以上の特徴から，貯水池流入量の設定に関するこのモデルの意義は，水資源計画に共通して重要である長期変動特性と中小規模の貯水池操作問題に重要である短期変動特性の両者を再現し得ることである．

（2） 貯水池操作の計画期間と時間単位

貯水池によって流量調整を行う場合，どのような計画期間を想定するのか，またどのような時間単位で水量制

御を行うかが貯水池機能の効率に影響する．その効率性からいえば，計画期間や時間単位は基本的には貯水池容量と貯水池流入量の変動特性との相対的関係から定められるものであり，たとえば年単位の流入量変動を調整しうる容量をもつ貯水池は年を越える（overyear）水量制御が適切であるから計画期間を数年～数十年，時間単位を１年と選ぶべきであるし，また流量の季節的変動より長期の変動を調整できない貯水池容量に対しては計画期間を数か月～１年，時間単位を日～月に選ぶことが妥当であろう．

本研究では，用いた資料の基準地点である木津川の高山ダムの諸量および水資源計画の信頼度から時間単位を規定した室田・江藤の研究[9]を参考にして，これらの時間スケールとして次の値を用いる．

A. 計画期間：１水年

B. 時間単位：

（１） 流入量および貯水量変動の時間単位：半旬．

（２） 貯水池操作の時間単位：１か月．

すなわち計画期間１年内での水配分方式を，長期的観点から１か月ごとに決定することとし，その場合に月内での短時間の流量変動が貯水池操作ルールをどのように規定するのかを明らかにせんとするものである．

（3） 貯水池流入量の設定

さて，貯水池操作を対象とした具体的な流入量時系列の設定に関しては大別して次の方法が考えられる．

（i） 既往流量資料について，対象となる利水期間，たとえば潅漑期，非潅漑期ごとに渇水流況を抽出し，それらの中から基準渇水流況を定める．

（ii） 流量シミュレーションによって，生起可能な種々の低水流量時系列を作成し，その中からいくつかの渇水流況モデルを設定する．

（iii） 低水流況の生起時期，継続期間および流量強度を確率評価し，これに基づいて確率渇水流況を設定する．

上記の方法のうち，(i) は従来わが国で慣用されている方法であるが，採用した流量資料の sample size の影響を受けて確率論的根拠が乏しく，したがって計画利水量あるいは必要貯水池容量を過大または過小評価する可能性が大きい．(ii) は前述のようなモデルにより流量時系列をシミュレートするものであるが，これによって利水計画を決定するには trial and error の手順を経なければならないから多大の計算量を要する．したがってこの方法は，(iii) の方法などによって設定された流況に基づく利水計画を，さらに詳細に検討する場合に有効である．(iii) の方法によって渇水流況に確率評価を与えることは望ましいことであり，設定された渇水流況は貯水池操作ルールや必要貯水池容量を決定するための直接的な資料となり得る．しかしながら，流量時系列の非定常性および需要水量の時間的特性のために確率評価には問題が残されているので[10),11)]，治水計画におけるピーク流量に対応する精度は現段階では期待できない．

本研究では次のように流入量時系列を設定する．

流量の長期変動は年周期性の比較的強い成分を含むので，その決定論的な性質を重視してある長期的低水流況を設定し，それを一応固定する．一方，短期変動はその偶発的性質をそのまま残す．具体的には，長期変動は月流量時系列，短期変動は半旬流量時系列とし，まず前者のシミュレーションによって長期変動の代表流況となる時系列を一組決定する．月流量つまり平均半旬流量の値が定まれば，そのまわりの半旬流量の変動特性は前述の関係（式（2））から与えられる．

以上の方法において月流量時系列（長期変動）はシミュレーションによることを前提とするが，それらに対する最も基準的な時系列として，低水流量集団についての各月の平均月流量を採用することができるだろう．

（4） 貯水池放流方式

貯水池操作の時間単位を１か月とするので，どの月でも月内では目標放流量は一定値である．ただし，この目標放流量はその月の初期貯水量の関数であり，後述の方法で決定される．

１か月内での放流方式は次のように仮定する．月内の各半旬の放流量は，その半旬の初期貯水量によって目標放流量が放流可能である場合にのみこれを放流し，半旬初期貯水量だけでは目標放流量が放流できない場合にはまったく放流は行わない．前者を完全放流，後者をゼロ放流とよぶ．また，貯水池が満杯時には目標放流量以上の無効放流が行われる．実際的な放流方式としては半旬初期貯水量が目標放流量以下であっても，その半旬の流入量を期待して目標放流量にできるだけ近い水量を放流する方式がとられるかもしれないが，翌半旬の初期貯水池は空に近い状態となり，再び完全放流が不可能になる．ここに仮定した放流方式では，ゼロ放流の期間に貯留した水量によって翌半旬の完全放流が可能になる．ゆえに，貯水池の貯留機能を考慮すればこの方式によって放流される水量や貯水量状態の平均値は，より実際的な放流方式での平均放流量，平均貯水量とほとんど差異がない．したがって，放流水の価値を月平均値で評価する場合にはここで採られる放流方式はこの点において妥当であり，さらにその特色は，放流量が目標放流量（完全放流）とゼロ（ゼロ放流）の二通りであるため，放流水に関する統計量が明確，単純であり，流量調整の定量的評価にとって好都合となることである．

3. 評価関数

（1） 評価関数設定上の基本的仮定

最適化問題の取り扱いがケース・スタディーに終ることなく，得られる成果に一般性を与えるためには，評価関数の設定が重要な鍵を握っていることはいうまでもない．種々の水資源プロジェクトにおいて利益あるいは損失（負の利益）に関する評価法とその関数形が報告されているが[12),13)]，それらのほとんどが究極的には貨幣価値に基づく経済的評価であり，利水上の他の価値を対象とした評価が試みられた例はきわめて少ない．そこで，貯水池操作の最適解に一般性を期待する場合には評価関数設定にあたって留意すべき点がある．一つは利水問題の複雑さ，多様性のために，水利用の価値を一般的に表現することが本質的にきわめて困難であること，いま一つは従来用いられている評価関数では各利水目的に対応した現実的表現を重視するために，流量そのものの変換特性，たとえば流入量平均値あるいは分散と放流量平均値あるいは分散との関係などは直接の評価対象とならず，したがってこれら水文量そのものの制御に関する貯水池機能についての知見が蓄積しないことである．

本研究では以上の点を考慮して，評価関数は現実の個々の利水目的との整合性よりもむしろ次の性質を保持するように設定すべきであると考える．

1. 利水上の効用を形成する基本的要素，すなわちどの需要水についての利益にも含まれる要素によって評価関数が構成されること．

2. 関数形が種々の利水目的を表現できる自由度をもつこと．

評価関数に以上の要件を課すことによって，水需要に関するいくつかの代表的な関数形に対する最適解の特性を一般的に調べることができる．

さて，上記の要件-1 に関する基本的要素として次の量を採用する．

（i） 水需要に対して貯水池から供給すべき水量——目標放流量とよぶことにする．

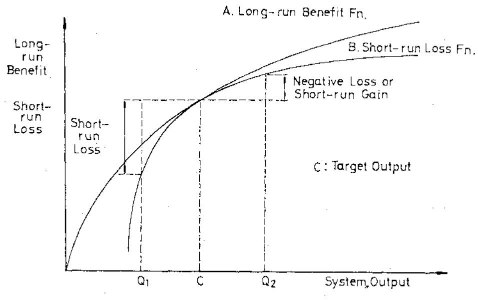
（ii） 目標放流量が定められたときの供給の信頼度（あるいは充足度）——供給の信頼度とよぶことにする．

次に，要件-2 に対して評価関数をこれら二つの量の関数とする．すなわち，

$$f=f(C,M) \cdots\cdots (5)$$

ここに，f は評価関数（または利益関数），C は目標放流量，M は目標放流量 C が供給される信頼度である．

さて，この f の関数形を定めるにあたって通常の水需要に対して従来用いられる表現は次のごとくである．



図—1 水需要に関する評価関数

評価関数は図—1 のように 2 つの成分すなわち，(i) 目標水量が完全に供給された場合の利益 (long-run benefit)，(ii) 目標水量に不足したり，目標水量以上の水量を供給した場合の損失 (short-run loss)，から合成される[14),15)]．曲線 B は目標水量を C とした場合に，不完全な供給しか達成できなかった場合の利益関数を表わす．

現実の水資源計画では long-run benefit と short-run loss が各需要水ごとに詳細に算定されるのであるが，本研究では要件-2 に基づいて上述のような評価関数の基本的性質を再現するように式 (5) の関数形を定めればよい．以下にその関数形を規定する．

（2） 評価関数形

まず式 (5) に含まれる信頼度 M を次のように定義する．

1 か月内の第 k 半旬 $(k=1, 2, \cdots, 6)$ において，完全放流の確率を第 k 半旬の信頼度 M^k とする．

次に，各半旬の信頼度の算術平均値をその月の信頼度 M とする．すなわち，

$$M=\frac{1}{6}\sum_{k=1}^{6} M^k \cdots\cdots (6)$$

このように定義した M^k は前述の貯水池放流方式から，半旬初期貯水量 z^k と目標放流量 C の大小関係だけでその値が定まる．すなわち，

$$\left.\begin{array}{ll} z^k \geq C \text{ のとき} & M^k=1.0 \\ z^k < C \text{ のとき} & M^k=0 \end{array}\right\} \cdots\cdots (7)$$

ところで各半旬の初期貯水量は流入量の不確定性のゆえに確率量であるから，M^k は z^k の確率によって与えられ，一般には $0 \leq M^k \leq 1.0$ の種々の値をとる（したがって，$0 \leq M \leq 1.0$）．

M は各半旬で完全放流が行われる確率の月平均値であるが，これは 1 か月（6 半旬）間での完全放流期間の相対比率を表わす量と考えることもできる．このような M を用いて評価関数を次式のごとく設定する．

$$f(C,M)=C^a \cdot M^b \cdots\cdots (8)$$

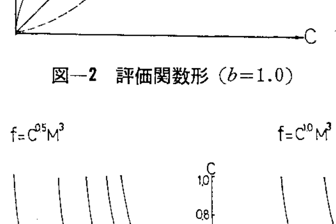
または

$$f(Q, M)=Q^a \cdot M^c \quad \cdots\cdots(9)$$

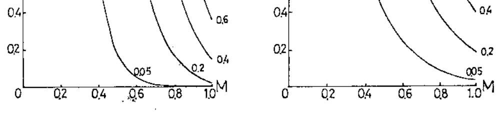
ここに，$Q=C \cdot M$ は供給される実質水量で，これを実放流量とよぶ．a, b, c は需要水の種類などによって異なる定数で，$c=a-b$ である．また，目標放流量 C を越える放流が行われる場合（無効放流）にも $M=1.0$ とし，したがって目標放流量以上の水量による付加利益はゼロと仮定する．

式 (8) または (9) の評価関数で (1) に述べた水需要の性質を表現するためには，まず $M=1$ の場合（完全放流）の評価関数，$f=C^a$ において，放流量に対する限界効用低減の法則から $0<a<1.0$ でなければならない．通常の需要水に対しては $a=1.0$ とするのは適当でないが，本研究ではこれを特別の場合として $0<a\leqq 1.0$ としておく．また実放流量 Q が同一であっても M の増加とともに f は増加すべきものとすれば，$c=b-a\geqq 0$，したがって $b\geqq a>0$ である．

式 (8) または (9) によれば，a, b の値は評価関数に占める C, M の相対的重みを意味するから，a, b 値の相対的関係によって，水量に重点を置く評価関数や供給の信頼度に重点を置く評価関数を表現することができる．式 (8) において完全放流が行われる場合 ($b=1.0$) の f は図—2 のごとくであり，また特定の a, b に対する f 値は図—3 のごとくである．これらの図から，この関数形は図—1 に示した通常の水需要に対する評価関数のパターンを再現しうることがわかり，また a, b の値を変化させることによって比較的一般的な評価関数形の設定が可能であろう．



図—2　評価関数形 ($b=1.0$)



図—3　評価関数の値

(3)　確率量の最適化

一般に確率変数を含む最適化問題では，評価関数の設定においてその不確定性を考慮する必要がある．不確定性下の計画法で評価基準として採用される代表量は，利益の期待値および利益の変動の強さ（分散）であり，後者は計画に内在する危険性の指標であることはいうまでもない．

本研究では利水計画を対象としているので，従来の取り扱いと同様に計画期間内の総利益の期待値を最大化する方法を採る．利益の危険性は二次的なものと考えるが，計画決定後の結果について利益の分散を検討する必要がある．

4．貯水量の確率

任意の月の初期貯水量および月内の各半旬初期貯水量の確率，および貯水量の推移確率行列を求める方法を以下に述べる．

まず，半旬期間ごとの貯水量変化は次式の関係で表わされる．

（i）　完全放流の場合 (${}^tz^k \geqq C$)：

$${}^tz^{k+1}={}^tz^k+{}^tq^k-C \quad \cdots\cdots(10)$$

（ii）　ゼロ放流の場合 (${}^tz^k < C$)：

$${}^tz^{k+1}={}^tz^k+{}^tq^k \quad \cdots\cdots(11)$$

（iii）　無効放流の場合：

$${}^tz^{k+1}=V_N \quad \cdots\cdots(12)$$

ここに，${}^tz^k$ は t 月の第 k 半旬初期貯水量，${}^tq^k$ は t 月の第 k 半旬流入量，C は t 月内一定の目標放流量，また有効貯水池容量を N 等分してその貯水量の値を V_i ($i=1, 2, \cdots, N$) で表わすことにすれば，V_N は満杯時の貯水量（貯水池容量）である．ただし，$t=1, 2, \cdots, 12$；$k=1, 2, \cdots, 6$．

上式において ${}^tz^k$, C を与え，${}^tq^k$ の値およびその確率を与えれば，${}^tz^k$ から ${}^tz^{k+1}$ への推移確率を求めることができる．ここに，1水年間の月流量時系列はあらかじめ設定されており（たとえば低水流量集団の平均月流量），この月平均流量のまわりに変動する半旬流量成分は自己相関性を無視できるので，${}^tz^k$ から ${}^tz^{k+1}$ への推移確率は ${}^tq^k$ のみの確率で決まり第 ($k-1$) 半旬以前の流入量は関係しない．従来，流入量時系列の独立性を仮定した Moran のモデル[16]を自己相関性の流入量に拡張する方法として，Langbein の方法[17]，二変数推移確率行列による Lloyd のモデル[18]，Moran のモデルと Lloyd のモデルを統一的に表現した Klemes の方法[19]，などが提案されているが，これらの推移確率行列の計算はきわめて煩雑である．上述の流入量特性によれば推移

確率行列の次元をこれらの方法より飛躍的に減少することができる．また C は t 月初期貯水量に依存する．結局，${}^tz^k$ から ${}^tz^{k+1}$ への推移確率は，t 月初期貯水量 ${}^tz^1=V_i(i=1, 2, \cdots, N)$ の関数であり，この推移確率行列 ${}^t\boldsymbol{p}(V_i)$ を次のように表わす．

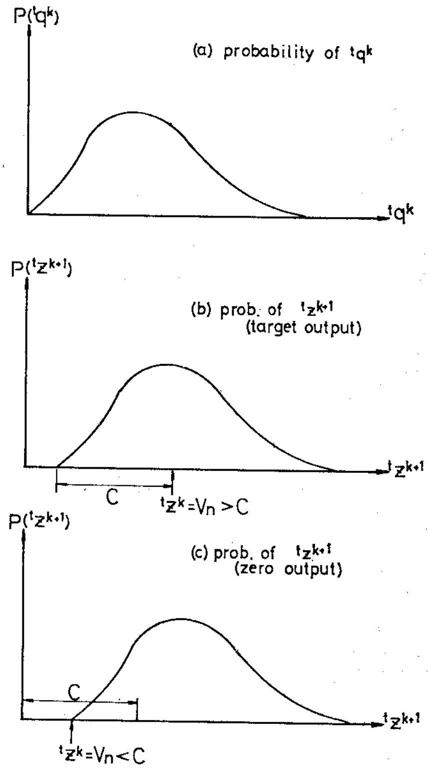
$$
{}^t\boldsymbol{p}(V_i)
$$

$$
=\begin{bmatrix} {}^tp_{11}(V_i) & {}^tp_{12}(V_i) & \cdots {}^tp_{1i}(V_i) & \cdots & {}^tp_{1N}(V_i) \\ {}^tp_{21}(V_i) & {}^tp_{22}(V_i) & \cdots {}^tp_{2i}(V_i) & \cdots & {}^tp_{2N}(V_i) \\ \vdots & & & & \\ {}^tp_{N1}(V_i) & {}^tp_{N2}(V_i) & \cdots {}^tp_{Ni}(V_i) & \cdots & {}^tp_{NN}(V_i) \end{bmatrix} \quad \cdots\cdots(13)
$$

ここに，${}^tp_{mn}(V_i)$ は ${}^tz^1=V_i$ であるとき，${}^tz^k=V_n$ から ${}^tz^{k+1}=V_m$ への推移確率である．t 月内では半旬流量 ${}^tq^k$ の確率分布はどの半旬でも同一であるから，${}^t\boldsymbol{p}(V_i)$ の値はどの半旬（$k=1, 2, \cdots, 6$）にも共通する．

${}^tz^k=V_n$ であるとき，完全放流後およびゼロ放流後の ${}^tz^{k+1}$ の確率分布は，図—4 (b)，(c) のように ${}^tq^k$ の確率分布形がそれぞれ $({}^tz^k-C)$，${}^tz^k$ だけ z の正方向へ平行移動した分布になる．ゆえに，おのおのの場合について，${}^tz^{k+1}<V_n-C$ となる確率，${}^tz^{k+1}<V_n$ となる確率はゼロとなり，式 (13) の推移確率行列の要素は表—1 のようになる．

次に，t 月初期貯水量が ${}^tz^1=V_i$ である場合の第 k 半旬初期貯水量の確率ベクトル ${}^t\boldsymbol{P}^k(V_i)$ は次式で与えられる．



図—4　流入量と貯水量の確率分布

表—1　貯水量の推移確率行列

${}^tz^k$ ＼ ${}^tz^{k+1}$	ゼロ放流					完全放流					
	V_1	V_2	V_3	・・・		$V_C=C$	V_{C+1}	V_{C+2}	・・・	V_{N-1}	V_N
V_1		0	0	0	0		0	0	0	0	0
V_2			0	0	0			0	0	0	0
V_3				0	0				0	0	0
⋮				0	0				0	0	0
					0						
$V_C=C$											
⋮											
V_N											

$$
{}^t\boldsymbol{P}^k(V_i)=[{}^t\boldsymbol{p}(V_i)]^{k-1}\cdot{}^t\boldsymbol{P}_i{}^1,\quad (k=2, 3, \cdots, 7) \quad \cdots\cdots(14)
$$

ここに，

$$
{}^t\boldsymbol{P}^k(V_i)=\begin{bmatrix} {}^tP_1{}^k(V_i) \\ {}^tP_2{}^k(V_i) \\ \vdots \\ {}^tP_m{}^k(V_i) \\ \vdots \\ {}^tP_N{}^k(V_i) \end{bmatrix} \quad \cdots\cdots(15)
$$

$$
{}^t\boldsymbol{P}_i{}^1=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ {}^tP_i{}^1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \Bigg\} i \quad \cdots\cdots(16)
$$

${}^tP_m{}^k(V_i)$ は ${}^tz^1=V_i$ で，かつ ${}^tz^k=V_m$ である確率，${}^tP_i{}^1$ は ${}^tz^1=V_i$ である確率．また，$[{}^t\boldsymbol{p}(V_i)]^{k-1}$ は ${}^t\boldsymbol{p}(V_i)$ の $(k-1)$ 次の行列で，${}^tz^1=V_i$ の条件下での $(k-1)$ 個の半旬だけ離れた期間への推移確率行列であり，その要素を次のように表わす．

$$
[{}^t\boldsymbol{p}(V_i)]^{k-1}
$$

$$
=\begin{bmatrix} {}^tp_{11}{}^{k-1}(V_i) & {}^tp_{12}{}^{k-1}(V_i) & \cdots {}^tp_{1N}{}^{k-1}(V_i) \\ {}^tp_{21}{}^{k-1}(V_i) & {}^tp_{22}{}^{k-1}(V_i) & \cdots {}^tp_{2N}{}^{k-1}(V_i) \\ \vdots & & \\ {}^tp_{N1}{}^{k-1}(V_i) & {}^tp_{N2}{}^{k-1}(V_i) & \cdots {}^tp_{NN}{}^{k-1}(V_i) \end{bmatrix} \quad \cdots\cdots(17)
$$

式 (14) において k の値は十分に大きくないので（$k\leqq 7$），月内では貯水量の定常確率は得られない．

式 (14) は V_i のすべての値，$V_1, V_2, \cdots, V_N$ について成立するから，t 月第 k 半旬初期貯水量の確率 ${}^t\boldsymbol{P}^k$ は次式で与えられる．

$$
{}^t\boldsymbol{P}^k=\begin{bmatrix} {}^tP_1{}^k \\ {}^tP_2{}^k \\ \vdots \\ {}^tP_N{}^k \end{bmatrix}=\sum_{i=1}^{N}{}^t\boldsymbol{P}^k(V_i)
$$

$$
=\begin{bmatrix} {}^tp_{11}{}^{k-1}(V_1) & {}^tp_{12}{}^{k-1}(V_1) & \cdots {}^tp_{1N}{}^{k-1}(V_1) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ {}^tp_{N1}{}^{k-1}(V_1) & {}^tp_{N2}{}^{k-1}(V_1) & \cdots {}^tp_{NN}{}^{k-1}(V_1) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} {}^tP_1{}^1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}
$$

$$
+\begin{bmatrix} {}^tp_{11}{}^{k-1}(V_2) & {}^tp_{12}{}^{k-1}(V_2) & \cdots {}^tp_{1N}{}^{k-1}(V_2) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ {}^tp_{N1}{}^{k-1}(V_2) & {}^tp_{N2}{}^{k-1}(V_2) & \cdots {}^tp_{NN}{}^{k-1}(V_2) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ {}^tP_2{}^1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}+\cdots\cdots\cdots
$$

$$
+\begin{bmatrix} {}^tp_{11}{}^{k-1}(V_N) & {}^tp_{12}{}^{k-1}(V_N) & \cdots {}^tp_{1N}{}^{k-1}(V_N) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ {}^tp_{N1}{}^{k-1}(V_N) & {}^tp_{N2}{}^{k-1}(V_N) & \cdots {}^tp_{NN}{}^{k-1}(V_N) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ {}^tP_N{}^1 \end{bmatrix}
$$

$$
=\begin{bmatrix} {}^tp_{11}{}^{k-1}(V_1) & {}^tp_{12}{}^{k-1}(V_2) & \cdots {}^tp_{1N}{}^{k-1}(V_N) \\ {}^tp_{21}{}^{k-1}(V_1) & {}^tp_{22}{}^{k-1}(V_2) & \cdots {}^tP_{2N}{}^{k-1}(V_N) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ {}^tp_{N1}{}^{k-1}(V_1) & {}^tp_{N2}{}^{k-1}(V_2) & \cdots {}^tp_{NN}{}^{k-1}(V_N) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} {}^tP_1{}^1 \\ {}^tP_2{}^1 \\ \vdots \\ {}^tP_N{}^1 \end{bmatrix}
$$

$$
\equiv[{}^t\boldsymbol{p}(V)]^{k-1}\cdot{}^t\boldsymbol{P}^1 \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(18)
$$

ここに，${}^tP_i{}^k$ は ${}^tz^k=V_i$ である確率．

上式は $k=2, 3, \cdots, 7$ に対して成立し，第7半旬初期は第 $(t+1)$ 月初期状態であるから，$(t+1)$ 月の初期貯水量の確率は次式で与えられる．

$$
\begin{aligned}
{}^{t+1}\boldsymbol{P}^1&={}^t\boldsymbol{P}^7 \\
&=[{}^t\boldsymbol{p}(V)]^6\cdot{}^t\boldsymbol{P}^1 \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(19)
\end{aligned}
$$

$[{}^t\boldsymbol{p}(V)]^6$ は t 月の初期貯水量から $(t+1)$ 月初期貯水量への推移確率行列であるから，これを

$$
\boldsymbol{p}(t,\ t+1)=[{}^t\boldsymbol{p}(V)]^6 \cdots\cdots\cdots\cdots(20)
$$

と表わせば，式 (19) は

$$
{}^{t+1}\boldsymbol{P}^1=\boldsymbol{p}(t,\ t+1)\cdot{}^t\boldsymbol{P}^1 \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(21)
$$

と書ける．したがって，第1月の初期貯水量の確率，${}^1\boldsymbol{P}^1$ を与えれば，式 (21) から，逐次任意の t 月初期貯水量の確率が求められる．

一般に，月によって流入量および放流量が異なり，推移確率行列 $\boldsymbol{p}(t,\ t+1)$ は定常でないので，貯水量の定常確率は得られない．

5. ダイナミック・プログラミングによる貯水池最適操作問題の定式化

(1) 確率的多段決定過程の関数方程式

貯水池最適操作方式の決定にダイナミック・プログラミングを応用するので，まずこの手法の要点を述べておく[20]．

確率的多段決定過程において，状態変数を x_k，決定変数を C_k，評価関数（出力）を r_k，$(k=1, 2, \cdots, T)$ で表わすとき，初期状態 x_1 が与えられても次の段階以降の x_k および x_k に依存する C_k，$(k=2, 3, \cdots, T)$ はいずれも確率量となり，したがって最適化すべき評価汎関数；

$$
\left.\begin{aligned}
J&=f(r_1, r_2, \cdots, r_T) \\
&=f(x_1, x_2, \cdots, x_T; C_1, C_2, \cdots, C_T)
\end{aligned}\right\}\cdots(22)
$$

も当然，一種の確率量となる．そこで，この汎関数として前述のごとく期待値を採用すれば，

$$
\left.\begin{aligned}
J&=E\{f(r_1, r_2, \cdots, r_T)\} \\
&=\int f(r_1, r_2, \cdots, r_T)\,dG \\
&\quad\cdot(x_2, x_3 \cdots, x_{T+1};\ r_1, r_2, \cdots, r_T)
\end{aligned}\right\}
\cdots\cdots\cdots\cdots(23)
$$

となる．ここに，G は確率分布関数である．

上式の評価汎関数を最適化する決定変数；

$$
C_k{}^*=C_k{}^*(x_k),\ (k=1, 2, \cdots, T) \cdots\cdots\cdots(24)
$$

を求めるのが，確率的多段決定過程の問題である．

評価汎関数がマルコフ性を有する場合，すなわち左分離性または右分離性が仮定できる場合には，確率的多段決定過程に対しても決定論的過程と同様に“最適性の原理”が成立する．ゆえに，最適性の原理と評価汎関数の左分離性から次のように定式化することができる．

F-関数群を次式で定義する．

$$
\left.\begin{aligned}
F_k(x_k)&=\underset{C_k}{\mathrm{Max}}\,E\{f_k(r_k,\ \underset{C_{k+1}}{\mathrm{Max}}(f_{k+1}(\cdots)))\} \\
F_T(x_T)&=\underset{C_T}{\mathrm{Max}}\,E\{f_T(r_T)\}
\end{aligned}\right\}
\cdots\cdots\cdots\cdots(25)
$$

ここに，極値演算子は最大化を採用している．

この $F_k(x_k)$ および推移確率 $p_{ij}(C)$ を用いると関数方程式は次式で与えられる．

$$\left.\begin{aligned}F_k(x_k=x_j)&=\underset{C_k}{\mathrm{Max}}\,E\{f_k(r_k,\sum_{i=1}^{N}p_{ij}(C_k)\\&\quad\cdot F_{k+1}(x_{k+1}=x_i))\}\\F_T(x_T=x_j)&=\underset{C_T}{\mathrm{Max}}\,E\{f_T(r_T)\}\end{aligned}\right\}\quad\cdots\cdots(26)$$

ここに，

$$p_{ij}(C_k)=P(x_{k+1}=x_i|x_k=x_j,\ C_k),$$

$$\sum_{i=1}^{N}p_{ij}(C_k)=1,\ (j=1,2,\cdots,N),$$

$$E\{f_k(\cdots)\}=\int f_k(\cdots)dG(r_k|x_k,C_k)$$

式 (26) の型の解法は後進型で，終端条件から順次最適化を進めていき，$C^*(x_1)$，$F_1(x_1)$ が得られると計算は完了する．

(2) 貯水池最適操作の関数方程式

本研究では1年間の最適操作問題を取扱うが，既述の通り1年を 12 段階に分けて1か月ごとに操作ルールを決定する．ゆえに最適化の問題は，t 月初期貯水量 ${}^tz^1$ に対する放流量 C_t をその月から最終月までの利益の和，$f(r_t+r_{t+1}+\cdots+r_T)$ が最大になるように決定することである．

評価関数が和の関数であるからマルコフ性を有し，半旬流入量時系列は独立であるから，この問題の関数方程式は式 (26) の形式で表わされる．

t 月の評価関数を式 (8) に従って次式で表わす．

$$f_t(C_t,\ M_t)=C_t{}^a\cdot M_t{}^b\quad\cdots\cdots(27)$$

ここに，f_t は第 t 月の評価関数，$C_t=C_t({}^tz^1)$ は t 月の目標放流量で，t 月初期貯水量 ${}^tz^1$ の関数として定めるべき決定変数，$M_t=M_t(C_t)$ は目標放流量 C_t の供給信頼度である．

t 月初期貯水量を ${}^tz^1=V_j$ と指定したときの $(t+1)$ 月初期貯水量の条件付確率は，式 (16) で ${}^tP_j{}^1=1$ とおいて式 (14) から得られる．すなわち，

$$ {}^{t+1}\boldsymbol{P}^1(V_j)={}^t\boldsymbol{P}^7(V_j)=\begin{bmatrix}{}^tp_{1j}{}^6(V_j)\\{}^tp_{2j}{}^6(V_j)\\\vdots\\{}^tp_{ij}{}^6(V_j)\\\vdots\\{}^tp_{Nj}{}^6(V_j)\end{bmatrix}\cdots(28)$$

ここに，${}^tp_{ij}{}^6(V_j)$ は ${}^tz^1=V_j$ から ${}^{t+1}z^1=V_i$ への推移確率．

式 (27)，(28) を用いると，貯水池最適操作に対する関数方程式が次式のごとく得られる．

$$\left.\begin{aligned}F_t({}^tz^1=V_j)&=\underset{C_t}{\mathrm{Max}}\{C_t{}^a\cdot M_t{}^b+\sum_{i=1}^{N}{}^tp_{ij}{}^6(V_j)\\&\quad\cdot F_{t+1}({}^{t+1}z^1=V_i)\},\ (t=1,2,\cdots,11)\\F_T({}^Tz^1=V_j)&=\underset{C_T}{\mathrm{Max}}\{C_T{}^a\cdot M_T{}^b\},(T=12)\end{aligned}\right\}\quad\cdots\cdots(29)$$

ここに，C_t を仮定すれば式 (14) から月内の各半旬初期貯水量の確率が求まり，式 (6)，(7) の関係から M の値が定まる．ゆえに t 月の平均利益として $C_t{}^a\cdot M_t{}^b$ が計算できる．$F_t({}^tz^1=V_j)$ は t 月初期貯水量が ${}^tz^1=V_j$ であるときの，t 月から終端月，T 月までの最適総利益である．貯水量の範囲は $V_1\leqq{}^tz^1\leqq V_N$ とする．

各種の水需要に対応して a, b の値を選び，T 月末の条件（終端条件）を与えて式 (29) を後進型計算法で解けば，まず第2式から T 月（12 月）の最適目標放流量 $C_{12}{}^*$ および最大利益 F_{12} が T 月初期貯水量 ${}^{12}z^1$ に対して定められ，次に第1式から $(T-1)$ 月の最適値 $C_{11}{}^*$, F_{11} が定まる．同様に第1月まで最適化を進めていけば，1水年間の最適放流量系列および最大利益が決定される．すなわち，

最適放流量：

$$\{C_1{}^*({}^1z^1),\ C_2{}^*({}^2z^1),\ \cdots,\ C_{12}{}^*({}^{12}z^1)\}\cdots\cdots(30)$$

最大利益：

$$\{F_1({}^1z^1),\ F_2({}^2z^1),\ \cdots,\ F_{12}({}^{12}z^1)\}\cdots\cdots(31)$$

月初期貯水量の関数として最適放流量がこのように定まれば，任意の月の初期貯水量および任意の半旬の初期貯水量がそれぞれ，式 (21)，式 (18) から計算できる．さらに，式 (30) の関係から各月の目標放流量の確率分布が定まる．

6. 最適放流ルール

上述の関数方程式を解けば貯水池操作の最適解，すなわち最適目標放流量（あるいは最適放流ルール）が数値的に得られるわけであるが，ここではこのルールの基本構造を明らかにし，数値解を分析するための基礎とする．

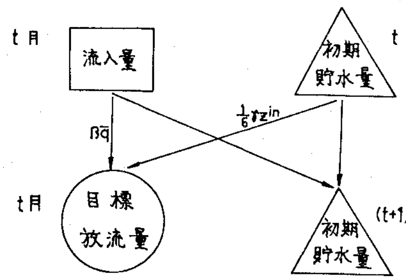
最適目標放流量は月初期貯水量に依存するが，さらにこのルールにはその月以降の流入量が関与することは容易に推測できる．また，貯水池規模や評価関数形も影響をおよぼすはずである．したがって最適放流ルールは一般に次のような要素からなる関数である．

$$C_t{}^*=C_t{}^*(z_t{}^{\mathrm{in}};\ q_t,q_{t+1},\cdots,q_T;\ V;\ \cdot f_t(C_t,\ M_t),\mathrm{etc.})\quad\cdots\cdots(32)$$

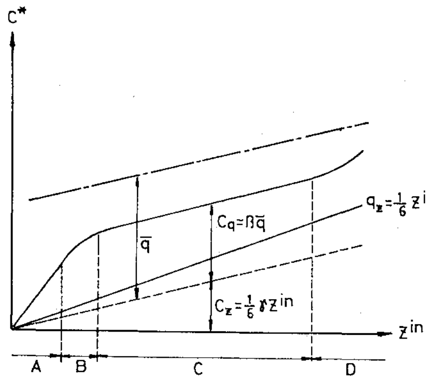
ここに，z^{in} は月初期貯水量，q は流入量，V は貯水池容量，$f(C,M)$ は評価関数を表わし，添字 t は月を示す．

この C^* の関数形を求めるために，放流ルールの構造を次のように考える．最適放流ルールは，評価基準を最適化するように，その月の流入量と月初期貯水量をその月の目標放流量と翌月の貯水量へ配分するものである（図—5）．よって最適目標放流量は初期貯水量に依存する水量と流入量に依存する水量とで構成される．

このような構造から，式 (32) における基本要素を初期貯水量 $z_t{}^{\mathrm{in}}$ と t 月流入量（平均流入量）$\bar{q}_t$ とする



図—5 放流ルールの構造



図—6 最適放流ルールの模式図

ことができ，他の要素の寄与をパラメーター，λ に含ませれば，式 (32) は

$$C_t{}^*=C_t{}^*(z_t{}^{\text{in}},\ \bar{q}_t,\ \lambda)\ \cdots\cdots\cdots\cdots(33)$$

となる．ここに，

$$\lambda=\lambda(\mu(q_t)\ ;\ q_{t+1},\ q_{t+2},\ \cdots,\ q_T\ ;\ \cdot V\ ;\ f_t(C_t,\ M_t),\ \text{etc.})\ \cdots\cdots\cdots\cdots(34)$$

ここに，$\mu(q_t)$ は q_t の平均値以外の統計的特性値である．

本研究では流入量の長期変動を一応固定するので，この場合には $(t+1)$ 月以降の流入量，$q_{t+1}, q_{t+2}, \cdots, q_T$ の影響は除外する．したがって，パラメーター，λ は次のようになる．

$$\lambda=\lambda(\mu(q_t),\ V,\ f_t\ (C_t,\ M_t))\ \cdots\cdots\cdots\cdots(35)$$

一方，数値解として得られた最適放流ルールを模式的に示せば図—6 のごとくであり[21]，ルールは A, B, C, D の4つの領域に区分できる．初期貯水量の小さい A, B-領域と満杯近傍の D-領域を除いた貯水量の主要領域-C では，初期貯水量 z^{in} と目標放流量 C^* との間には常に線形関係がある．この C-領域に対しては，式 (33) の関数形は次式のように表わすことができる．

$$\left.\begin{aligned}C_t{}^*&=C_z(z_t{}^{\text{in}},\ \lambda)+C_q(\bar{q}_t,\ \lambda)\\&=\alpha z_t{}^{\text{in}}+\beta\bar{q}_t\\&=\frac{1}{6}\gamma z_t{}^{\text{in}}+\beta\bar{q}_t\end{aligned}\right\}\ \cdots\cdots\cdots\cdots(36)$$

ここに，$C_z(z_t{}^{\text{in}},\ \lambda)$ は月初期貯水量に依存する放流量，$C_q(\bar{q}_t,\ \lambda)$ は流入量に依存する放流量である．また，$\gamma(=(1/6)\alpha)$ は初期貯水量に，β は流入量に依存する度合を示す係数であるから，これらをそれぞれ，貯水量依存係数，流入量依存係数とよぶ．

式 (35) から，

$$\gamma=\gamma(\mu(q_t),\ V,\ f_t(C_t,\ M_t))\ \cdots\cdots\cdots\cdots(37)$$

$$\beta=\beta(\mu(q_t),\ V,\ f_t(C_t,\ M_t))\ \cdots\cdots\cdots\cdots(38)$$

であるから，γ, β は流入量の分布特性値，貯水池規模，評価関数形によって異なった特性をもつ量である．

図—6 において，上記の C-領域以外の領域では，

(i) A-領域：$C_t{}^*=z_t{}^{\text{in}}$

(ii) B-領域：放流ルールの構成が異なる A, C-領域の遷移領域である．この領域は流入量の変動(ばらつき)の影響をうけ，ばらつきが大きいほど，その範囲が拡がる．また月平均半旬流入量 $\bar{q}_t$ がほぼ B-領域内にあることから，最適放流ルールは初期貯水量が $\bar{q}_t$ 以上になってはじめて流入量に依存するといえる．

(iii) D-領域：貯水池が満杯に近い状態における特徴である．特に評価関数が $f=C^{1.0}\cdot M^3$ の場合の放流ルールに顕著であり，無効放流量を減少させるために放流量として大きな値を選ぶものと考えられる．

7. 結　　論

利水を対象とした単一貯水池の最適操作に関して，その決定手法および最適放流ルールの構造を論じたが，本研究で得られた結果を要約すれば次の通りである．

(1) ここに設定された評価関数は，利水上の効用に関する基本要素を含み，かつその関数形は種々の利水目的を表現しうる自由度をもつ．

(2) 流量の長期変動および短期変動特性を導入して貯水池流入量を定めた．この流入量の時系列構造から，貯水量の推移確率行列を，簡単な形で表わすことができた．

(3) 1年間の貯水池最適操作問題が，これらの評価関数，推移確率を用いて定式化された．

(4) 最適放流ルールは月初期貯水量に依存する成分と月平均流入量に依存する成分の和として表現できる．

(5) 各々の成分に含まれる貯水量依存係数および流入量依存係数は，流入量の分布特性値，貯水池規模，評価関数形の関数である．したがって，放流ルールはこれらの係数の値によって特性づけられる．

以上の通り，本文では最適化問題に対する方法論の構成を重点的に論じた．冒頭に述べたように貯水池最適操作に関してはこのような手法の問題と同時に，決定された最適解から貯水池による流量調整機構を解明していく側面も重要である．問題のモデル化にあたって本研究で

は各種の需要水，流量時系列特性等への一般的な適用性を目指して，少数の変数および定数による簡単な関数表現を用い，一方定数の値に自由度を与えた．したがって，最適解から貯水池操作の諸特性を検討する場合にも本研究の方法は有効であろう．

参考文献

1) Thomas, H.A. Jr. and P. Watermeyer : Mathematical Model; A Stochastic Sequential Approach, chap. 14, in Design of Water-Resource Systems by A. Maass et al., 1962.

2) Hall, W.A. : Optimum Design of a Multiple-Purpose Reservoir, Proc. ASCE, Vol. 90, HY 4, 1964.

3) Fiering, M.B. : Queuing Theory and Simulation in Reservoir Design, Proc. ASCE, Vol. 87, HY 6, 1961.

4) Heidari, M., V.T. Chow, P.V. Kokotovic and D.D. Meredith : Discrete Differential Dynamic Programming Approach to Water Resources Systems Optimization, Water Resources Research, Vol. 7, No. 2, 1971.

5) 竹内邦良：貯水量の累加損失係数を用いた貯水池群の最適操作手法，土木学会論文報告集，No. 222, 1974.

6) 室田明・神田徹：利水用貯水池群の最適操作ルールについて，第 19 回水理講演会論文集，昭和 50 年.

7) 室田明・神田徹：利水を対象とした流量時系列の解析について，第 13 回水理講演会講演集，昭和 44 年.

8) Murota, A. and T. Kanda : Stochastic Properties and Simulation of Monthly and 5-Days River Flow Sequences, Tech. Rep. of Osaka Univ., Vol. 21, 1971.

9) 室田明・江藤剛治・吉岡正道：水文資料に起因する水資源計画の信頼度について，土木学会論文報告集，No. 222, 1974.

10) Murota, A. and T. Kanda : A Stochastic Analysis of River Flow Characteristics in the Kizu River Basin, Tech. Rep. of Osaka Univ., Vol. 18, 1968.

11) 吉川秀夫・竹内邦良：渇水持続曲線の性質とその応用，土木学会論文報告集，No. 234, 昭和 50 年.

12) Maass, A. et al. : Design of Water-Resource Systems, Harvard Univ. Press, 1962.

13) Close, E.R., L.R. Beard and D.R. Dawdy : Objective Determination of Safety Factor in Reservoir Design, Proc. ASCE, Vol. 96, HY 5, 1970.

14) Hufschmidt, M.M. and M.B. Fiering : Simulation Techniques for Design of Water-Resource Systems, Harvard Univ. Press, 1966.

15) Loucks, D.P., et al. : Stochastic Method for Analyzing River Basin Systems, Research Project Technical Completion Report, Cornell Univ., 1969.

16) Moran, P.A.P. : A Probability Theory of Dams and Storage Systems., Australian Jour. of Applied Science, Vol. 5, 1954.

17) Langbein, W.B.: Queuing Theory and Water Storage, Proc. ASCE, Vol. 84, HY 5, 1958.

18) Lloyd, E.H. : A Probability Theory of Reservoirs with Serially Correlated Inputs, Jour. Hydrology, Vol. 1, 1963.

19) Klemes, V. : A Two-Step Probabilistic Model of Storage Reservoir with Correlated Inputs, Water Resources Research, Vol. 6, No. 3, 1970.

20) たとえば，Bellman, R. : Dynamic Programming, Princeton Univ. Press, 1957.

21) 室田明・神田徹・福岡成悟：貯水池による水供給の信頼性（第3報），第 27 回土木学会年次学術講演会講演集，昭和 47 年.

（1975.6.25・受付）