

# 水流による砂れきの移動機構に関する基礎的研究

## STUDY ON MECHANISM OF MOTION OF INDIVIDUAL SEDIMENT PARTICLES

中川博次\*・辻本哲郎\*\*

By Hiroji NAKAGAWA and Tetsuro TSUJIMOTO

### 1. 序 論

河床波の発生・発達，河床の洗掘・堆積など移動床現象に関する研究は従来から数多く行われているが，現象自体が多様であり，また支配要素が膨大でしかもそれら相互の関係が複雑であることから，これらの現象を統一かつ合理的に説明しうる十分な成果が得られているとはいえないようである。

移動床現象では，流れ，流砂および河床形状が複雑に関係しあっており，特に実際の河川では流れの非一様性に基づいて流砂の非平衡が生じ，河床形状が複雑に変化し，再び流れの変化を産み出すという閉じた系を形成しているといえる。こうした移動床現象に対し，平衡平坦河床について得られた流砂量公式を流砂の運動方程式に代用した現象記述がよく試みられているが，こうした解析方法はすでに指摘されているようにある断面の流砂量が単にその位置での底面せん断応力だけに対応していないことから考えても，流砂の非平衡が生じている状態では合理性を欠く恐れがある。このことは，Einstein<sup>1)</sup>によって始められた砂れきの河床からの離脱率 (pickup rate)，いったん河床から動き出して停止するまでの距離 (step length) によって流砂を表現するモデルを考えるとよくわかる。すなわち，おもに水理量に対応する pickup rate は各断面につき固有のものであるが，流砂量となると step length によって明らかに上流の影響を受ける。もともと Einstein のモデルでは，図-1 に示すように砂れきの移動を Lagrange 的に追跡した形であるが，この形では水理条件，床面条件の場所的变化を十分取り入れることが困難であるから，ここではこれらの量を Euler 的に扱って河床変動などを容易に記述しうることを期待する。

本研究は，さまざま移動床現象は個々の砂粒の移動特性に基づいて合理的にしかも統一的に表現されるべきであるとの立場から，砂れきの pickup rate,

step length を個々の砂粒の運動特性の代表量として選び，その力学機構を明らかにし，定量的に把握しうるものである。Einstein<sup>2),3)</sup>, Paintal<sup>4)</sup>らはむしろ直観的にこれらの量を水理量と結びつけているが，たとえば pickup rate の基礎となる砂れきの移動確率は図-2 に示すように互いに大きく相違し，pickup rate 推定するとき曖昧さが残る。すなわち pickup rate, step length をひくくめて初めて流砂量といった実際量を表わすだけで，各量のままでは実験値との対応はついておらず，本研究では砂れきの運動機構に基づいてこれらの量の推定を試み，実験的に検討している。

このようにして，pickup rate および step length が推定されれば，砂れきの拡散を確率過程として扱った stochastic model<sup>5),6)</sup> の確率定数を合理的に与え得たことになり，流砂の連続式と組み合わせることで河床変形過程の記述も可能である。

なお，本研究では，河床砂れきが運動状態にはいるまでを離脱過程，いったん運動を開始した砂れきが再び河

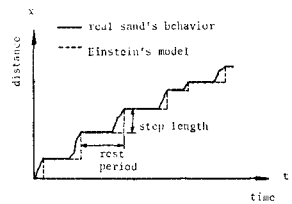


図-1 砂移動のモデル

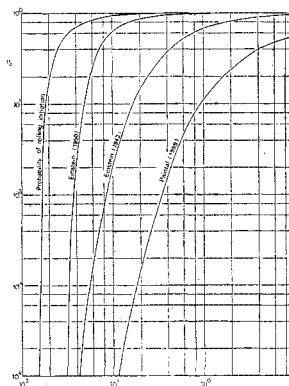


図-2 砂の移動確率の評価の比較

\* 正会員 工博 京都大学教授 工学部土木工学教室

\*\* 学生会員 工修 京都大学大学院博士課程

床に落ち着き停止するまでを流送過程とよび、それぞれ 2. および 3. において扱った。

2. 砂れきの河床からの離脱過程

(1) 砂れきの初期移動

砂れきの河床からの初期移動形式は、転動、滑動および転動と滑動と多様であるが、いずれにせよ、従来の研究では静的な力のつり合いによって移動限界を求めるという立場がとられてきた。しかし実験による観察では、移動開始前に小刻みな揺動が見られるなど、Chen ら<sup>7)</sup>が指摘するように移動開始は明確な限界値で規定されず、初期段階と最終段階の間に遷移領域が存在することを考慮すると、むしろ離脱過程として運動方程式で表現するのが好ましいと考えられる。実験によると、流体力があまり大きくないときには、砂粒は下流側の隣接砂粒に沿って転動離脱することが観察され、流体力が大きくなると、転動の途中で滑動に移行する。本研究では、この転動離脱に着目して、転動過程を運動方程式によって表現することにする。

(2) 砂粒の転動離脱モデル

図-3 のように配置された剛体球Aが、下流側隣接球Bに沿って転動して離脱するものとする。球Aには水中

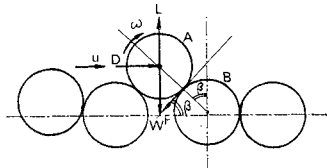


図-3 記号図

重量  $W$ 、抗力  $D$ 、揚力  $L$  が作用し、その作用線はすべて重心を通るものとする。また、球A、球Bの接線と平均河床面とのなす角を  $\theta$  とし、AB間の摩擦力を  $F$  とする。河床勾配を0とすると、球Aの重心まわりの回転に対する運動方程式は次式で与えられる。

$$Md\ddot{\theta} = (L - W)\sin\theta + D\cos\theta - F \dots\dots(1)$$

ここに、 $d$ ：砂粒径、 $M$ ：球の仮想質量である。

また、球Aの重心まわりの回転に関するモーメント式は、

$$Mk\dot{\omega} = Fd/2 \dots\dots(2)$$

であり、 $k$ は球Aの重心に関する回転半径、 $\omega$ は転動の回転角速度である。完全転動を仮定すると、

$$\dot{\theta} = \omega/2 \dots\dots(3)$$

である。式(2)および(3)より、

$$F = 4Mk^2\dot{\theta}/d$$

となり、これを式(1)に代入し、 $\ddot{\theta}$ について解くと、

$$\ddot{\theta} = \{(L - W)\sin\theta + D\cos\theta\} / \left\{ Md \left( 1 + \frac{4k^2}{d^2} \right) \right\} \dots\dots(4)$$

となる。ところで、

$$\left. \begin{aligned} M &= \rho(\sigma/\rho + C_M)A_3d^3 \\ W &= (\sigma - \rho)A_3gd^3 \end{aligned} \right\} \dots\dots(5)$$

であり、ここに、 $\sigma, \rho$ ：それぞれ砂粒および流体の密度、 $A_3$ ：体積に関する形状係数、 $C_M$ ：付加質量係数である。また、

$$\left. \begin{aligned} D &= \frac{1}{2}C_D\rho u^2 A_2d^2 \\ L &= \frac{1}{2}C_L\rho u^2 A_2d^2 \end{aligned} \right\} \dots\dots(6)$$

と表わされる。ここに、 $C_D$ ：抗力係数、 $C_L$ ：揚力係数、 $A_2$ ：面積に関する形状係数、 $u$ ：球A近傍の局所代表流速である。なお、

$$L/D = k_1 \dots\dots(7)$$

$$u/u_* = A_* \dots\dots(8)$$

とおき、初期角加速度  $\ddot{\theta}_0$  を求めると、 $\theta = \beta$  ( $\beta$ は河床に停止しているときの河床側隣接砂粒との接線と、平均河床面とのなす角)とおいて、

$$\ddot{\theta}_0 d/g = B_* C_* (k_1 \sin\beta + \cos\beta) (\tau_* - \tau_{*c}) \dots\dots(9)$$

となる。ただし、 $\tau_*$ は無次元底面せん断応力であり、

$$\tau_* = u_*^2 / \{ (\sigma/\rho - 1)gd \}$$

である。また、

$$B_* = (\sigma/\rho - 1) / \left\{ (\sigma/\rho + C_M) \left( 1 + \frac{4k^2}{d^2} \right) \right\} \dots\dots(10)$$

$$C_* = \frac{1}{2} \frac{A_2}{A_3} A_*^2 C_D \dots\dots(11)$$

であり、明らかに  $B_*$  は相対密度  $\sigma/\rho$  の効果および形状効果を示し、 $C_*$  は形状効果と砂粒レイノルズ数 ( $Re_* = u_* d/\nu$ ,  $\nu$ ：流体の動粘性係数)の関数である。

なお、 $\tau_{*c}$ は転動限界に対応する無次元せん断応力であり、球A、Bの接点まわりのモーメントのつり合いから、

$$\tau_{*c} = 2 \frac{A_3}{A_2} \sin\beta / \{ A_*^2 C_D (k_1 \sin\beta + \cos\beta) \} \dots\dots(12)$$

である。なお上式は砂粒相互間の拘束および砂面の凹凸による干渉作用を無視しているため、これらの効果を表わす係数  $\epsilon$  を導入して  $\epsilon\tau_{*c}$  を新しく  $\tau_{*c}$  と置き換える。ここに  $\epsilon$  はいわゆる遮蔽係数である。

(3) 砂れきの河床からの pickup rate

砂粒は式(9)で表わされる初期角加速度で河床から離脱するが、流体力は乱れによって変動している。いま、砂れきの初期移動に関与する底面せん断応力の変動周期を  $\hat{t}_0$ 、このうち  $\tau_* \geq \tau_{*c}$  である応力が作用する平

均時間を  $\langle t_0 \rangle$  とし、 $\langle t_0 \rangle$  時間だけ  $\tau_{*c}$  をこえる分の平均の底面せん断応力が作用するものと仮定する。

$\tau_* \geq \tau_{*c}$  となる確率を  $p_0$  とすると、

$$\langle t_0 \rangle = p_0 \bar{t}_0 \dots\dots\dots (13)$$

の関係が成立する。ここで  $\bar{t}_0$  は砂粒の流体力に対する応答性に関する量であるから、たとえば砂粒の固有振動数を考慮し、さらに水中重量の効果をあわせ考えると、

$$\bar{t}_0 = F_* \sqrt{d/(\sigma/\rho - 1)g} \dots\dots\dots (14)$$

と仮定することができる。ここに  $F_*$  は実験定数としたが、 $F_*$  は砂れきの水中での追従性に関連する重要な量で、今後基礎的な実験を通して詳細な検討が望まれる。なおこの式の妥当性は後述の実験結果からも確認される。

このとき、一つの砂粒が離脱してしまうのに要する時間  $\langle T \rangle$  は、

$$\langle T \rangle = \beta / (k_2 E[\dot{\theta}] p_0 \bar{t}_0) \dots\dots\dots (15)$$

となる。ここに  $k_2 E[\dot{\theta}] p_0 \bar{t}_0$  は砂粒の離脱の際の平均角速度で、 $k_2$  は離脱時の  $\theta$  の変化に伴う角加速度の変化のしかたなどによる補正係数である。また  $E[\dot{\theta}]$  はせん断応力の変動に対する期待値を表わす。

$p_0 \bar{t}_0$  時間に離脱する砂粒個数は  $p_0 \bar{t}_0 \langle T \rangle$  で与えられ、したがって単位時間当りの離脱砂粒数を全体の時間にわたって考えると、結局 pickup rate  $p_s$  は

$$p_s = (p_0 \bar{t}_0 \langle T \rangle) \cdot (1/\bar{t}_0) \dots\dots\dots (16)$$

となる。

式 (9), (13), (14), (15) および (16) より、

$$p_s \sqrt{d/(\sigma/\rho - 1)g} = F_* k_2 B_* C_* \{ (k_1 \sin \beta + \cos \beta) / \beta \} \cdot p_0^2 \{ E[\tau_* | \tau_* \geq \tau_{*c}] - \tau_{*c} \} \dots\dots\dots (17)$$

の関係が得られる。

さて、底面せん断応力については、Einstein ら<sup>8)</sup>の実験結果に基づいて正規分布するものと仮定し、無次元せん断応力  $\tau_*$  の確率密度関数を  $f(\tau_*)$  とすると、

$$f(\tau_*) d\tau_* = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_*} \exp\left[-\frac{(\tau_* - \tau_{*c})^2}{2\sigma_*^2}\right] d\tau_* \dots\dots\dots (18)$$

である。ここに  $\tau_{*c}$ ,  $\sigma_*^2$  はそれぞれ無次元せん断応力  $\tau_*$  の平均値および分散である。なお、

$$r = (\tau_* - \tau_{*c}) / \sigma_* = (\tau_* / \tau_{*c} - 1) / \eta_0 \dots\dots\dots (19)$$

とおくと、 $\eta_0$  は変動係数 ( $\eta_0 = \sigma_* / \tau_{*c}$ ) で、式 (18) は、

$$\phi(r) dr = (1/\sqrt{2\pi}) \exp(-r^2/2) dr \dots\dots\dots (20)$$

となる。このとき、

$$p_0 = \int_{r_c}^{\infty} \phi(r) dr / \int_{-1/\eta_0}^{\infty} \phi(r) dr \dots\dots\dots (21)$$

で与えられる。ここに、

$$r_c = (\tau_{*c} / \tau_{*0} - 1) / \eta_0 \dots\dots\dots (22)$$

である。また、

$$E[\tau_* | \tau_* \geq \tau_{*c}] = \tau_{*0} (1 + \eta_0 r_s) \dots\dots\dots (23)$$

$$r_s = \int_{r_c}^{\infty} r \phi(r) dr / \int_{r_c}^{\infty} \phi(r) dr = \phi(r_c) / p_0 \dots\dots\dots (24)$$

である。したがって、式 (17) は次のようになる。

$$p_s \sqrt{d/(\sigma/\rho - 1)g} = F_* k_2 B_* C_* \cdot \{ (k_1 \sin \beta + \cos \beta) / \beta \} f_p(\tau_{*c}) \dots\dots\dots (25)$$

$$f_p(\tau_{*c}) = p_0^2 \tau_{*0} \left\{ 1 + \eta_0 \frac{\phi(r_c)}{p_0} - \frac{\tau_{*c}}{\tau_{*0}} \right\} \dots\dots\dots (26)$$

である。

いま、球を対象とすると、 $A_3 = \pi/6$ ,  $k^2 = d^2/10$  であり、また簡単のため  $A_2 = \pi/4$ ,  $C_M = 0.5$  と仮定すると、 $B_*$  は相対密度  $\sigma/\rho$  関数として 図-4 のように示される。

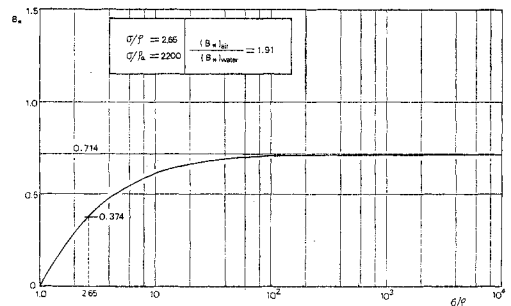


図-4  $B_*$  の  $\sigma/\rho$  に対する変化

また、Chepil<sup>9)</sup> ら

の実験結果によると、河床砂れきに作用する揚力と抗力の大きさはほぼ同程度と考えられるから、 $k_1 = 1.0$  とおき、基準面の高さを粗度を構成している砂粒の頂部から  $0.25d$  だけ下にとって対数流速分布を用いることにする。なお、Einstein & El-Samni<sup>8)</sup>, Chepil<sup>9)</sup> を始め多くの実験結果<sup>10)~13)</sup> から

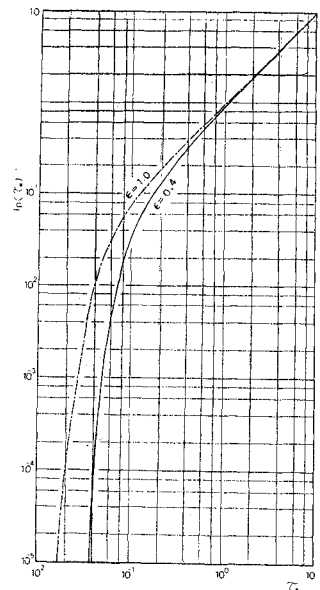


図-5  $f_p(\tau_*)$

から壁面近傍の乱れによる圧力変動係数はレイノルズ数に対しほぼ一定で約 0.5 であり、これを  $\eta_0$  として用い、 $\beta = \pi/4$  として式 (26) を、 $\epsilon = 1.0$  および  $\epsilon = 0.4$  の場合について計算した結果を 図-5 に示した。

(4) 砂れきの初期移動に関する実験的検討

砂れきの pickup rate はある領域から動き出す砂れき個数の測定,あるいはトレーサーの原点残留確率(原位置にとどまっている確率)の時間的変化の測定によって知ることができる。

いま時刻0におけるトレーサー数を  $N$  とすると,時刻  $kdt$  での原点残留個数は  $N(1-p_s dt)^k$  となり,原点残留確率  $P_0$  の時間的変化は,  $k \rightarrow \infty, dt \rightarrow 0$  とすると,

$$P_0(t) = \exp(-p_s t) \dots\dots\dots (27)$$

となり,いわゆる stochastic model で飛び出し時間間隔を指数分布と仮定したときの結果と一致する。stochastic model の立場でのトレーサーを用いた原点残留確率の時間的変化が篠原・椿<sup>14)</sup>,高橋<sup>15)</sup>,矢野・土屋・道上<sup>6)</sup>および著者ら<sup>16)</sup>によって測定されており,この実験値をもとに実験定数  $F_*k_2$  を  $3.2 \times 10^{-2}$  と決めた。図-6にはこれらの実験値および  $\sigma/\rho = 2.65, 1.24$  に対する  $B_*$  を用いた計算曲線が描かれている。なお抗力係数として球の静水沈降時の値を代用し  $C_D = 0.4$ , また  $A_* = 6.55, \epsilon = 0.4$  とした。この図によると,実験値と理論曲線は良い対応を示し,式(25)によって砂れきの pickup rate が十分推定できることがわかる。

次に,遮蔽係数  $\epsilon$  の値の妥当性の検討のため,ガラスビーズ ( $d = 0.5, 0.3$  cm;  $\sigma/\rho = 2.38$ ) を用いて,移動床での初期移動の実験と固定床上の非拘束砂粒の初期移動

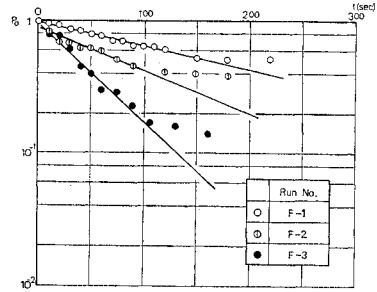


図-7 固定床でのトレーサーの原点残留確率の時間的変化の例

の実験とを行って比較した。

実験は,長さ 9 m,幅 33 cm,深さ 33 cm のアクリル製側壁をする鋼製勾配可変水路で行った。

固定床実験では所定のガラスビーズを1層,密に敷きつめニス付けて作成された粗面上におかれた着色非拘束ビーズをトレーサーとし,写真撮影によって原点残留確率を測定した。なお,この場合の原点とは原位置という意味でトレーサーごとに位置は異なる。また1つの実験に用いたトレーサーは 60~150 個である。図-7は固定床でのトレーサーの原点残留確率の時間的変化の例であり,これより式(27)を用いて  $p_s$  を求めた。図-7によると時間がある程度経過した後は,式(28)よりはずれてくるがこれは,時間が経過するにつれて動きやすい状態のものがなくなりしかも補充されないことから  $p_s$  が時間的に変化することによる。

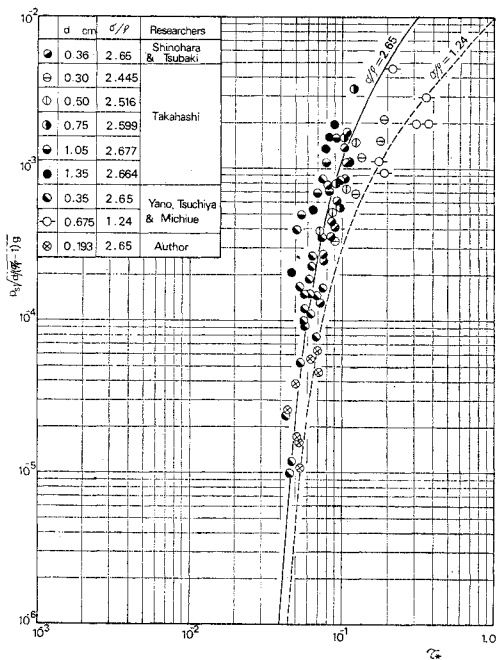


図-6 砂れきの pickup rate

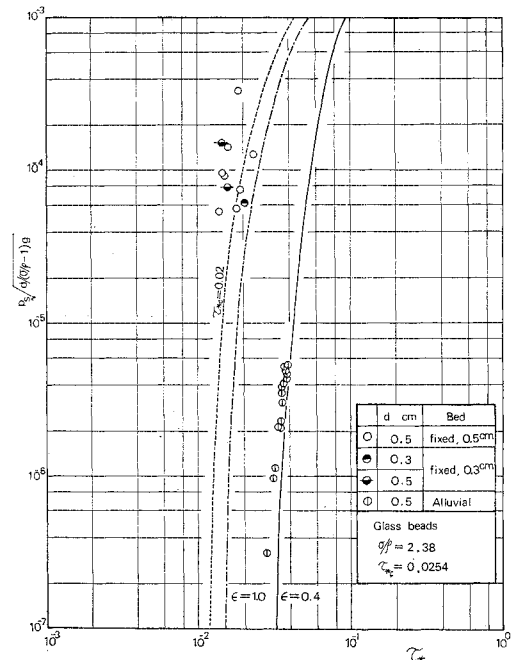


図-8 遮蔽係数の検討

一方、移動床実験は水路中央部の幅 22 cm, 長さ 7.5 cm の部分を移動床にし、ここからの移動開始個数を測定した。

なお、実験はほぼ等流状態で実施し、摩擦速度は  $\sqrt{ghi}$  ( $h$ :水深,  $i$ :路床勾配) で求め、流速分布に対数則を仮定して得られた  $u_*$  でチェックした。

こうして得られた実験結果を 図-8 に示した。図-8 によると、移動床の実験値はほぼ一定の傾向を示すが、固定床の実験値は散乱が大きくこれはすでに述べたような  $p_s$  の時間的変化、トレーサの配置、通水後等流状態が得られるまでのトレーサの保存など実験技術の困難さによるものと考えられる。

なお、図中の曲線は、 $\epsilon\tau_{*c} = 0.0254$  とし、 $\epsilon = 0.4$  および 1.0 の場合について式 (25) を計算したものであり、実験定数  $F_*k_s$  は前と同じ値を用いている。なお、 $\epsilon\tau_{*c} = 0.0254$  は、ガラスビーズを並べた斜面の勾配を徐々に変化させてトレーサの斜面落下の累積確率を測定した結果 (図-9) から  $\beta$  が  $\pi/10$  から  $(3/10)\pi$  の範囲で一様に分布するものとして式 (12) より決めたものである。

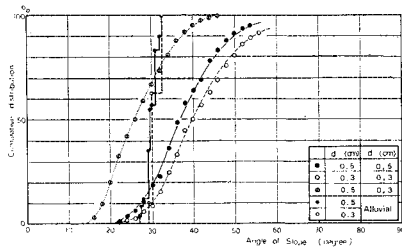


図-9 ガラスビーズ路床のぬけ出し角の分布

図-8 を見れば、固定床実験で  $p_s$  を測定することの困難さによるデータの散乱が認められるが、 $\epsilon$  の推定はほぼ妥当といえる。

以上の考察から、(2)、(3) で展開した初期移動モデルでは、多くの仮定を用いているもののここに示したように異なった実験材料に対してもよくその特性を示し、このモデルで初期移動現象を十分記述し得るものと考えられる。

### 3. 砂れきの流送過程

砂れきがいったん移動を開始し再び河床に停止するまでの流送過程を代表する量は step length である。pickup rate と結びつけて流砂量式を導くために Einstein<sup>23)3)</sup>, Paintal<sup>4)</sup>, Christensen & Chiu<sup>17)</sup> らによって step length の推定式が与えられているが、従来の実験値との対応も満足すべきものではない。

ここでは、砂れきの step length が特に床面特性の大きな影響を受けることから、ランダムな突起を有する床面での衝突を考えることで step length の特性表示を試みる。

#### (1) 固定床での流送機構

実験観察によれば、砂れきは粗面の突起に妨げられて停止することが多く、また動き出した直後の移動速度の小さいものは停止しやすく、かなり速度が大きくなったものは停止しにくいことがわかった。こうした事実から、いったん動き出した砂れきが停止するときには突起との衝突が力学的に卓越した現象であると考えられ、これに基づいてモデル化を行った。

##### a) 球の突起への衝突モデル

まず、転動中の砂れきが床面上の突起に衝突する場合を考える。

図-10 のように角速度  $\omega_1$ , 速度  $v_1$  の球が高さ  $d_b$  の突起に衝突後、角速度  $\omega_2$ , 速度  $v_2$  になるものとする。衝突の前後に運動量保存則を適用すると、

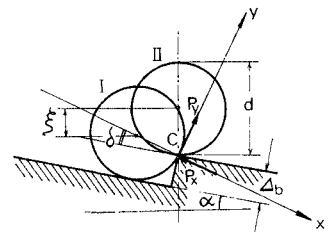


図-10 記号図

$$-\int_0^{t_c} P_x(\tau) d\tau = M(0 - v_1 \cos \delta) \dots\dots\dots (28)$$

$$\int_0^{t_c} P_y(\tau) d\tau = M(v_2 - v_1 \sin \delta) \dots\dots\dots (29)$$

であり、また球の中心に対する回転の角運動量変化について次式が得られる。

$$-\frac{d}{2} \int_0^{t_c} P_y(\tau) d\tau = Mk^2(\omega_2 - \omega_1) \dots\dots\dots (30)$$

ここに、 $t_c$  は衝突時間であり、他の量は 図-10 に準拠する。なお、球の運動を完全転動と仮定すると、

$$v = \omega d / 2 \dots\dots\dots (31)$$

であり、また 図-10 より明らかなように、

$$\sin \delta = 1 - 2(d_b / d) \dots\dots\dots (32)$$

であるから、式 (29)~(32) から衝突前後の速度および角速度の関係式、

$$\frac{v_2}{v_1} = \frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{1 + 4(k^2/d^2) - 2(d_b/d)}{1 + 4(k^2/d^2)} \dots\dots (33)$$

が得られる。

次に、図-10 の I, II の状態に対してエネルギー保存則を適用すると、

$$-Mg\xi = (1/2)I'(\omega_3^2 - \omega_2^2) \dots\dots\dots (34)$$

である。ここに、 $\xi$  は I, II における球の高さの変位、 $\omega_3$  は II の状態での球の角速度である。また  $I'$  は 図-10 の C 点まわりの回転に対する慣性モーメントである

から、平行軸の定理より、

$$I = M\{k^2 + (d^2/4)\} \dots\dots\dots(35)$$

と表わされる。

ところで、球が突起を乗り越える条件は  $\omega_3 \geq 0$  であり、したがって  $\omega_1$  の限界値  $\omega_c$  は式 (33), (34) および (35) から次のようになる。

$$\omega_c = \frac{\sqrt{2g\xi\{1+4(k^2/d^2)\}}}{1+4(k^2/d^2)-2(D_b/d)} \cdot \frac{2}{d} \dots\dots\dots(36)$$

なお、図-10 より、

$$\xi = \frac{d}{2} \left\{ 1 - \sqrt{1 - \left(1 - \frac{2D_b}{d}\right)^2} \sin \alpha - \left(1 - \frac{2D_b}{d}\right) \cos \alpha \right\} \dots\dots\dots(37)$$

である。

$\alpha=0$  とおき、 $\omega_c$  を無次元表示すると、

$$\omega_c \sqrt{\frac{d}{g}} = \frac{2\sqrt{2D_*\{1+4(k^2/d^2)\}}}{1+4(k^2/d^2)-2D_*} \dots\dots\dots(38)$$

となる。ただし、

$$D_* = D_b/d \dots\dots\dots(39)$$

である。

**b) 転動距離と転動速度**

実際の流送過程には滑動、転動、跳躍あるいは反発現象が混在してそれらの機構が単独で一つの step を形成しているわけではない。

ここでは現象記述のため、卓越現象による表現というよりもむしろ包括的な表現として優れていると考えられる転動形式を採用した。

転動過程に対する運動方程式は、揚力が無視されると考えて、

$$M\dot{u}_g = -F + (1/2)C_{D0}A_2d^2(\bar{u}-u_g)^2 \dots\dots\dots(40)$$

$$Mk^2\dot{\omega} = Fd/2 \dots\dots\dots(41)$$

で表わされる(図-11参照)。ここに、 $u_g$  は砂れきの移動速度、 $\bar{u}$  は転動砂れきの中心の高さの局所流速である。また、転動状態に対し、上に述べたような

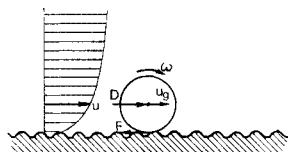


図-11 記号図

な包括的表現のために生ずる運動様式に関するパラメーター  $k_3$  を用いて、次式が成立するものとする。

$$\omega = k_3 \cdot u_g d/2 \dots\dots\dots(42)$$

式 (41) および (42) から、

$$F = M \cdot (4k^2/d^2)k_3\dot{u}_g \dots\dots\dots(43)$$

が得られ、これを式 (40) に代入して  $\dot{u}_g$  について解くと、

$$\dot{u}_g = P_* (\bar{u} - u_g)^2/d \dots\dots\dots(44)$$

となる。ここに、

$$P_* = (1/2) \cdot (A_2/A_3) \cdot C_{D0}$$

$$[ \{1+4k_3(k^2/d^2)\} (\sigma/\rho + C_M) ] \dots\dots\dots(45)$$

である。

式 (44) を積分し、初期条件  $t=0$  で  $u_g=0$  を考慮すると、

$$\frac{u_g}{u_*} = \frac{P_* \bar{A}_*^2 (u_* t/d)}{1 + P_* \bar{A}_* (u_* t/d)} \dots\dots\dots(46)$$

ただし、

$$\bar{A}_* = \bar{a}/u_* \dots\dots\dots(47)$$

となる。

$u_g = dx/dt$  であるから、式 (46) をさらに積分して初期条件  $t=0$  で  $x=0$  を考慮すると結局、

$$x/d = \{Kt_* - \ln |Kt_* + 1|\} / P_* \dots\dots\dots(48)$$

となる。ここに、

$$K = P_* \bar{A}_* \dots\dots\dots(49)$$

$$t_* = u_* t/d \dots\dots\dots(50)$$

である。なお、計算の都合上式 (48) を次式で近似する。

$$Kt_* = (3/2) \sqrt{P_* x/d} \dots\dots\dots(51)$$

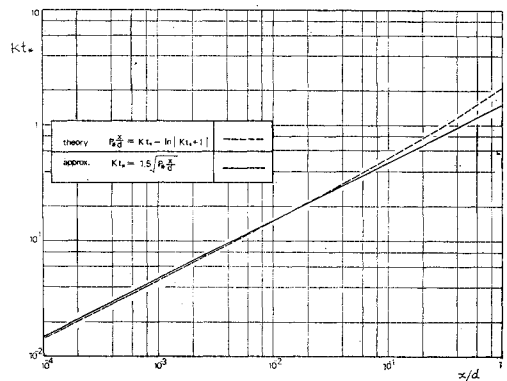


図-12 式(48)と式(51)との比較

この式による近似程度は図-12に示すように  $Kt_*$  の大きくない範囲で十分良好であり、後述する突起間距離に対しては十分な精度が期待される。

式 (46) および (51) より  $t_*$  を消去すると、

$$u_g/u_* = \bar{A}_* \cdot 3\sqrt{P_* \zeta} / (2 + 3\sqrt{P_* \zeta}) \dots\dots\dots(52)$$

ただし、

$$\zeta = x/d \dots\dots\dots(53)$$

となり、転動距離と転動速度の関係が得られる。

**c) 突起の乗越確率**

球の突起乗越確率は  $\omega_1$  が  $\omega_c$  をこえる確率として与えられる。式 (52) および (42) から得られる  $\omega$  を式 (38) で与えられる  $\omega_c$  と等値し、これを  $\zeta$  について解きその根を  $\zeta_c$  とすると、

$$\zeta_c = \frac{8\{1+4(k^2/d^2)\}D_*}{9P_*[T\{1+4(k^2/d^2)\}-2D_*] - \sqrt{1+4(k^2/d^2)}\sqrt{2D_*}^2} \dots\dots\dots(54)$$

となる。ただし、

$$T = k_3 \bar{A}_* u_* / \sqrt{gd} \dots\dots\dots (55)$$

である。

ところで、粗面の状態は突起強度  $d_*$ 、無次元突起間隔  $\zeta$  で表われ、ともに確率変数と考えられるが、ここでは  $d_* = d_{*0}$  で  $\zeta$  が平均値  $\zeta_0$  の指数分布に従うとした河床面モデルを考えることにする。すなわち、 $\zeta$  の確率密度関数  $\psi(\zeta)$  は次式で与えられる。

$$\psi(\zeta) = (1/\zeta_0) \cdot \exp(-\zeta/\zeta_0) \dots\dots\dots (56)$$

このとき、球の突起乗越確率  $p_{r0}$  は、

$$p_{r0} = \int_{\zeta_c}^{\infty} \psi(\zeta) d\zeta = \zeta_0 \cdot \psi(\zeta_c) \dots\dots\dots (57)$$

で計算される。

d) 固定床での step length

砂れきが突起の存在する粗面を転動し、突起に衝突後あるものは停止し、残りは再び次の突起に向かって転動を開始するものとする。このとき、砂れきが動き始めてから  $m$  個目の突起で停止する確率  $p_{stm}$ 、およびそのときの砂れきの無次元移動距離  $\zeta_m$  はそれぞれ、

$$p_{stm} = p_{r0}^{m-1} (1 - p_{r0}) \dots\dots\dots (58)$$

$$\zeta_m = m \zeta_0 \dots\dots\dots (59)$$

で与えられる。したがって、砂れきが移動開始してから停止するまでの無次元移動距離の平均値、すなわち無次元平均 step length  $\lambda$  は次式で与えられる。

$$\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n p_{r0}^{j-1} (1 - p_{r0}) j \zeta_0$$

この式の右側の無限級数は収束して結局、

$$\lambda = \zeta_0 / (1 - p_{r0}) \dots\dots\dots (60)$$

となる。式 (60) は、Einstein<sup>(2), (3)</sup> が流体力による非停止確率について展開した考え方にならったもので、ここでもその効果を考慮して、

$$\lambda = \zeta_0 / \{ (1 - p_{r0}) \cdot (1 - p_0) \} \dots\dots\dots (61)$$

とする。なお  $p_0$  は式 (21) で与えられる流体力が転動限界をこえる確率で代用できるものとする。

e) 実験的検討

式 (54), (57) および (61) を検証するため実験を行った。実験は初期移動の実験に用いた水路にまず所定のガラスビーズを1層に敷きニス付けし、着色ビーズをトレーサーとして移動距離の分布を測定した。得られたデータは粒径で無次元化した後、超過確率として整理し、便宜的に step length の分布を指数型に仮定して平均無次元 step length  $\lambda$  を求めた。すなわち  $f_X(\xi)$  を無次元 step length の確率密度関数とすると、

$$f_X(\xi) = (1/\lambda) \exp(-\xi/\lambda) \dots\dots\dots (62)$$

であり、超過確率  $G(\xi)$  は、

$$G(\xi) = \int_{\xi}^{\infty} f_X(\xi) d\xi = \exp(-\xi/\lambda) \dots\dots\dots (63)$$

となる。

また同様の実験を自然砂 ( $d=0.193 \text{ cm}$ ,  $\sigma/\rho=2.65$ ) についても行った。これらの実験で得られた超過確率  $G(\xi)$  の例を図-13 および 14 に示した。これによると、平坦粗面上での step length はほぼ指数型である

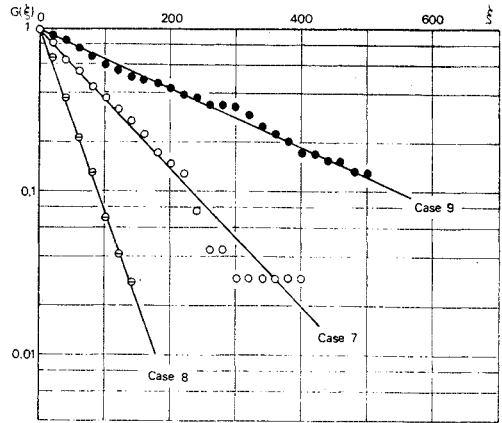


図-13 固定床での step length の超過確率の例 (ガラスビーズ)

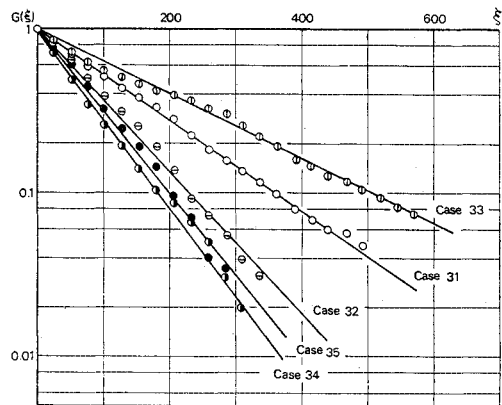


図-14 固定床での step length の超過確率の例 (砂)

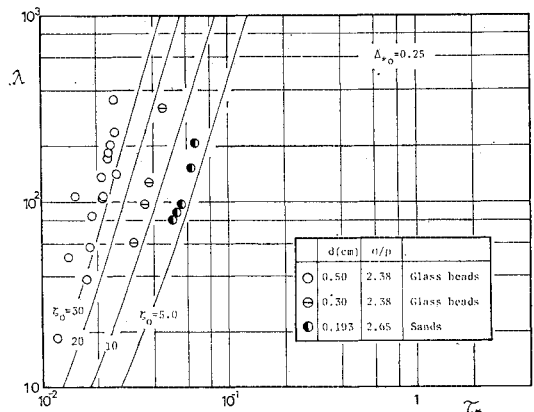


図-15 固定粗面上での step length

といえ、この傾きから無次元平均 step length  $\lambda$  が求められる。このようにして得られた  $\lambda$  の無次元せん断応力  $\tau_*$  に対する変化を 図-15 示した。

なお、図-15 には、 $A_{*0}=0.25$ ,  $\zeta_0=5, 10, 20, 30$  の場合について式 (54), (57) および (61) で与えられる理論曲線を計算して併示してある。この計算においては、 $A_2=\pi/4$ ,  $A_3=\pi/6$ ,  $C_M=0.5$ ,  $k_3=1.0$ ,  $k^2=(1/10)d^2$ ,  $\sigma/\rho=2.65$ ,  $C_D=0.4$  とし、また流速分布に対数則を仮定し  $z=0.7d$  の高さの局所流速を用い  $\bar{A}_*=7.62$  とした。この計算曲線を実験値と比較すると実験での粗面状態、したがって床面構成材料によって  $\zeta_0$  を適当に選ばれば、良く合致することがわかる。

今回の実験ではほぼ完全に均一球の  $d=0.5\text{ cm}$  のガラスビーズでは床面の均一度が高く  $\zeta_0 \approx 30$ , 若干形状にむらがあり床面の均一度が少し失われた  $d=0.3\text{ cm}$  のガラスビーズでは  $\zeta_0 \approx 10$  となっている。さらに形状、粒径ともガラスビーズに比べ広い分布を持っている自然砂では粗面均一度は低く  $\zeta_0 \approx 5$  である。これらの実験結果より、実際の砂面ではおおむね一様といえる状態で  $\zeta_0$  は 5~10 程度と予想される。

なお、 $A_{*0}$  の選び方は  $A_b$  が転動面からの高さであり、転動面をどこにとるかが難しく曖昧ともいえるが、Cheril<sup>(6)</sup> の packing coefficient, 間隔  $3d$  の六角形パターン配置モデルとほぼ一致しており、実際の砂面状態に近いものと考えられる。

(2) 移動床での step length

a) 移動床での step length のモデル

前節では固定床での砂れきの流送機構を、転動、衝突の力学モデルを介在させて説明を試みた。しかし移動床では、たとえば step length に関する実験データを見てもわかるように固定床とは異なった機構に基づいていることが予想される。特に突起への衝突機構がまったく異なる。すなわち、固定床では転動してきた砂れきの運動量保存を考えたが、移動床では突起を形成している砂粒およびそれに隣接した数個の砂粒がずれ動く場合があり、そのため転動してきた砂粒のもつ運動量が減少し停止しやすくなる。しかし衝突の際、突起砂粒およびその隣接砂粒が何個、どの方向へ、どの程度移動するか、すなわちもともと転動してきた砂粒の運動量がどれくらい減少するのかが判然としない。

そこで、ここでは砂れきの挙動をとくに step length としてとらえその特性を表現することが主目的であることから、簡単に次のようなモデルによって取り扱う。loose な境界での衝突の機構を詳細に記述することおよびその厳密な実験的検証が必要なのはいうまでもないがこれは今後の課題とする。

さて転動してきた砂粒が突起に衝突した際、突起および隣接砂粒を含めて  $n$  個の砂粒が動けば転動してきた砂粒自身の持っている運動量が運動を停止せざるを得ないまでに減じるものとし、またこのときずれ動く砂粒は、流体力による可動状態にあるものと仮定する。

なお、このモデルの適用範囲は固定床上の衝突では平均的に突起乗越条件をみたすもの、すなわち 図-15 の理論曲線の右下の領域である。このような突起の平均間隔を  $\zeta_0'd$  とし、また 1 つの砂粒が可動状態にある確率が  $p_0$  で各砂粒について独立であるとする、結局転動砂れきが停止する突起の平均間隔は  $\zeta_0'd/p_0^n$  となり、無次元の平均 step length は、転動砂れきの流体力による非停止確率を考慮して次式で与えられる。

$$\lambda = \zeta_0' / \{p_0^n (1 - p_0)\} \dots\dots\dots (64)$$

ここに、 $n, \zeta_0'$  は本来ならば力学機構の面から議論されるべき量であるが、ここでは実験定数とする。

図-16 には、 $1/\{p_0^n(1-p_0)\}$  の  $\tau_*$  に対する変化を示したが、これによると  $\lambda$  は  $\tau_*$  に対し極小値を有し、極小値に対応する  $\tau_*$  は  $n$  によって決定される。

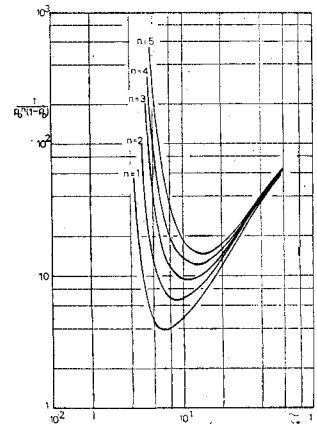


図-16  $1/p_0^n(1-p_0) \sim \tau_*$

b) 実験的検討

固定床実験を行ったのと同じ水路に、所定の砂を厚さ 7 cm に敷き、着色砂をトレーサーとして step length を測定した。実験に用いた砂は  $d=0.14\text{ cm}$ ,  $\sigma/\rho=2.62$  および  $d=0.102\text{ cm}$ ,  $\sigma/\rho=2.61$  の 2 種類である。

step length のデータは各ケースにつき 100~150 個を収録し、超過確率として整理、指数型分布を仮定して平均 step length  $\lambda d$  を求めた。図-17 は移動床での step length の超過確率の例で、ほぼ指数型に適合している。なお、実験は顕著な河床波の形成されないほぼ平坦河床で行った。

こうして求めた  $\lambda$  の  $\tau_*$  に対する変化を 図-18 に示した。図-18 には篠原・椿<sup>(14)</sup>, 高橋<sup>(15)</sup> および矢野・土屋・道上<sup>(1)</sup> のデータも併示し、また  $A_{*0}=0.25$ ;  $\zeta_0=5, 10$  に対する 2 本の固定床での理論曲線、 $\zeta_0'=10$ ;  $n=2, 3, 4$  に対する 3 本の移動床のモデルの計算曲線をも示した。

これより無次元せん断応力の増加とともに、固定床では step length が増加するが、移動限界をこえると、



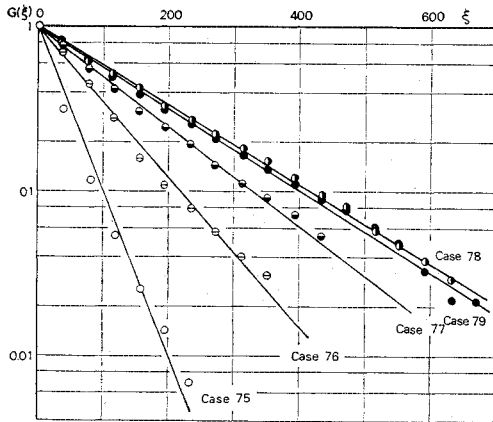


図-17 移動床での step length の超過確率の例

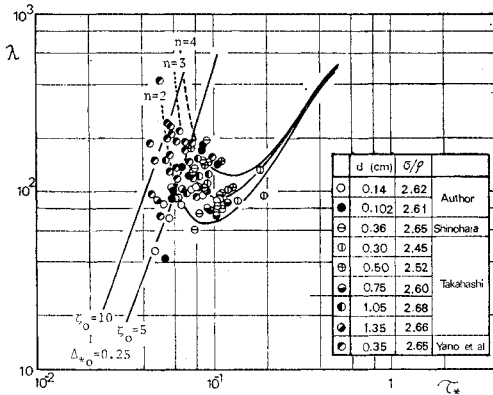


図-18 移動床での step length

移動砂粒の運動量が突起およびその周辺の砂粒に奪われてしまうことから step length が減少し、さらに  $\tau_*$  が大きくなると流体力の効果が運動量減少効果を上まわり、再び step length が増加するという特性が示され、実験的にも検証された。なお、河床の整形のしかたが、特に  $\tau_*$  の小さいとき（いわゆる 限界掃流力付近）、きわめて大きな影響を step length におよぼし、従来の実験値においてばらつきが大きいことの原因となっていることができる。

#### 4. 結 論

本研究は、さまざまな移動床現象を砂れきの運動機構に基づいて統一的に、しかも合理的に説明するための基礎として、水流による砂れきの移動特性の代表量である pickup rate および step length について力学モデルを介らせてその推定について考察し実験的に検討したものである。

まず pickup rate については、初期移動を運動方程式に基づいて離脱過程として扱い実験的に検討した。すなわち転動離脱モデルを考え、剛体球に対する運動方程式、正規分布に従う流体力の変動、初期移動に支配的な乱れの周期に基づく流体力の作用持続時間の概念を用いて、砂れきの離脱に要する時間の逆数として pickup rate を求め、従来の実験値および今回行った実験を通してその適合性を検証した。その結果、ここに展開したモデルで、広い条件に対して初期移動の特性が記述できることが示された。

また、step length については、砂れきの停止機構を床面の突起との衝突によるものとし、まず衝突前後に運動量保存則、また衝突後の突起乗越条件にエネルギー保存則を適用した。一方、砂れきの流送過程を転動機構で包括的に扱えるものとし、転動に対する運動方程式をもとに転動距離と転動速度の関係を求め、突起乗越のための転動距離の限界値を得た。さらに、粗面構成を突起強度と突起間隔の確率モデルで扱い、突起乗越 確率 を求め、流体力の効果を含めて step length の平均値を推定し、実験によって検討した。その結果、床面の均一性の step length への大きな影響がある程度定量的に示された。

なお、移動床についてはこのモデルのままでは突起に衝突の際の運動量の河床砂粒への伝達が説明できず、ここでは突起を含め  $n$  個の砂粒のずれ動きで転動の運動量を失わない停止するものと仮定してモデル化し、移動床での step length の特性の表現を試みた。従来の実験データおよび著者らの実験値によって検討した結果、こうしたモデルで移動床の step length の特性が十分表わされることがわかった。

なお、こうした loose な境界での砂粒の相互干渉的な力学機構、河床近傍の流れ特性、流体力とその変動の評価など、残されたしかも本質的な問題は多く、今後詳細な実験と検討が必要であり著者らもこうした問題に取り組むつもりであるが、本研究では、砂移動の基本量でありまた stochastic model のパラメーターとしての pickup rate と step length を、一面であるかもしれないがその力学機構を踏まえて推定する方法を示した。今後、これらの量を用いて実際の流砂現象に伴う河床変形の記述、予測などへの適用性についても、先に述べた基礎研究と併行して進めたいと考える。

#### 参 考 文 献

- 1) Einstein H.A. : Der Geschiebetrieb als Wahrscheinlichkeitsproblem, Verlag Rascher, Zurich, 1937.
- 2) Einstein H.A. : Formulas for the Transportation of Bed Load, Trans. ASCE, Paper No. 2140, pp. 561-597, 1942.
- 3) Einstein H.A. : The Bed Load Function for Sedi-

- ment Transportation in Open Channel Flows, Technical Bulletin, No. 1026, U.S. Department of Agriculture, Soil Conservation Service, p. 78, 1950.
- 4) Paintal A.S. : Stochastic Model of Bed Load Transport, Journal of Hydraulic Research, IAHR, 9, No. 4, pp. 527-554, 1971.
  - 5) Hubbell D.W. and W.W. Sayre : Sand Transport Studies with Radioactive Tracers, Proc. ASCE, HY 3, pp. 39-68, 1964.
  - 6) 矢野勝正・土屋義人・道上正規：砂れきの流送機構の確率過程としての特性について，京大防災研究所年報第11号 B, pp. 61-73, 1968.
  - 7) Chen Charng-Ning and M.R. Carstens : Mechanic of Removal of a Spherical Particle from a Flat Bed, Proc. 15th Congr. IAHR, Turkey, Vol. 1, pp. 225-233, 1973.
  - 8) Einstein H.A. and E.A. El-Samni : Hydrodynamic Forces on a Rough Wall, Review of Modern Physics, 21, pp. 520-524, 1949.
  - 9) Chepil W.S. : The Use of Evenly Spaced Hemispheres to Evaluate Aerodynamic Forces on a Soil Surface, Trans. A.G.U., Vol. 39, No. 3, pp. 397-404, 1958.
  - 10) White C.M. : The Equilibrium of Grains on the Bed of a Stream, Proc. Royal Society of London, Vol. 174 A, pp. 322-334, 1940.
  - 11) Kalinske A.A. : Movement of Sediment as Bed Load in Rivers, Trans. A.G.U., Vol. 28, No. 4, pp. 615-620, 1947.
  - 12) Grass A.J. : Initial Instability of Fine Bed Sand, Proc. ASCE, HY 3, pp. 619-632, 1970.
  - 13) Cheng E.D.H. : Incipient Motion of Large Roughness Elements in Turbulent Open Channel Flow, Ph.D. thesis, Utah State University, 1969.
  - 14) 篠原謙爾・樫東一郎：河床砂礫の移動機構に関する一考察，九大応用力学研究所報，第10号，pp. 85-94, 1957.
  - 15) 高橋正佑：河床破砕の流送に関する実験的研究第一報，新砂防，第18巻第4号，pp. 5-14, 1966.
  - 16) 鈴木幸一・辻本哲郎：砂れきの移動確率に関する考察，昭和48年度土木学会関西支部年次学術講演会講演概要，II-34, 1973.
  - 17) Christensen B.A. and T.Y. Chiu : Water and Air Transport of Cohesionless Materials, Proc. 15th Congr. IAHR, Turkey, Vol. 1, pp. 245-252, 1973.
  - 18) Chepil W.S. : Equilibrium of Soil Grains at Threshold of Movement by Wind, Soil Science Society Proceedings, 23(6), pp. 422-428, 1959.

(1975.4.19・受付)