

有限要素法による不飽和土の圧密解析

FINITE ELEMENT ANALYSIS OF CONSOLIDATION
OF UNSATURATED SOIL

伊藤 洋*・赤木 知之**・色部 誠***

By Hiroshi ITO, Tomoyuki AKAGI and Makoto IROBE

1. 緒 言

圧密問題は、Terzaghiにより一次元圧密理論が発表されて以来、数多くの人びとにより研究されてきたが、現在でも実地盤の圧密現象を解析的に予測することは至難とされている。その主要な原因として、明確に把握することの困難な地盤土質の材料特性、地盤の初期条件ならびに境界条件をあげることができよう。また、盛土の沈下とか最近重大な海洋汚染事故の原因となった重油タンク基礎の沈下などの地盤上層部の圧密に関しては、不飽和土の存在も考慮して究明されねばならないが、不飽和土の圧密理論に完成されたものがないことも主要な原因の一つと考えられよう。

不飽和土の圧密理論には、大別して、有効応力と間隙率との関係および連続の条件にのみ注目して導かれた Barden¹⁾、Bishop²⁾らの理論と土粒子骨格の変形に間隙水圧の影響を考慮してつり合い条件と連続の条件とを満足するよう導かれた Biot^{3)~6)}、Florin⁷⁾らの理論とがある。飽和土の圧密理論を同様の理論構成から同じく二つに類別し、前者を Terzaghi-Rendulic 系列、後者を Biot 系列として、これらを吉国⁸⁾が論評し、Terzaghi-Rendulic 系列の理論に欠陥のあること、Biot 系列の理論のほうが正しいことを指摘しているが、吉国の論評はそのまま、上のように二つに類別した不飽和土の圧密理論にもあてはまる。

Biot および Florin の不飽和土の圧密理論を比較した場合、Biot は単純に土中の気体液体の混合物を一つの非圧縮性流体として扱っているのに対し、Florin は間隙水圧の変化による土中の溶解ガス量の変化を考慮して

* 学生会員 秋田大学大学院 鉱山学研究所土木工学専攻
現在 電力中央研究所土木技術研究所地盤基礎研究室

** 正会員 工修 秋田大学助手 鉱山学部土木工学科

*** 正会員 工博 日本大学教授 理工学部交通工学科

連続の条件を導いている点において、後者のほうに厳密性が認められる。

有限要素法による圧密問題の解析例は比較的少なく、Sandhu, Wilson⁹⁾、横尾・山縣・長岡^{10)・11)}、原・川本¹²⁾、Valliappan, Lee, Boonluahor¹³⁾らによるものに過ぎない。これらはいずれも飽和多孔質材料を対象とするものであり、Gurtin の変分原理を使って有限要素法の解法が導かれている。これに対し、本論文は、空隙内の気液混合流体に対し非圧縮性を仮定した Biot の理論に基礎をおく不飽和多孔質材料の弾性圧密に有限要素法の適用をこころみたものである*。この問題には汎関数が存在しないが、連成熱弾性との対応から熱力学的不可逆過程に対して Biot が求めた準変分原理¹⁴⁾を用い得る。

本文 2. において、Biot の圧密基礎方程式を一般化し、変形ならびに透水に関する材料の異方性を考慮した不飽和圧密の一般式を与えてある。3. では、Biot が用いたエントロピー変位に該当する総流量なる概念を導入して不飽和多孔質材料の弾性圧密方程式を満足する変分方程式を示している。4. において、この変分方程式より有限要素法による解法を導き、5. において二、三の圧密問題を解き、解に対する考察を行っている。

2. 圧密基礎方程式

非圧縮性流体を含む均質多孔質材料を考える。流体は気液混合系をなすものとする。通常の粘土で、気液混合流体が非圧縮性を示すのは飽和度が 0.9 ないし 0.95 以上といわれている。このような限定を前提として以下に議論を進める。この材料において、化学反応による効果および慣性力による影響を無視する。この場合、次のつり合い方程式がなりたつ。

$$\sigma_{ij,j} + \rho_1 F_i = 0 \dots\dots\dots (1)$$

* 本論文は文献 14), 15) に手を加え、数値計算例を追加したものである。

ここに、 σ_{ij} はこの多孔質材料に作用する全応力テンソル、 ρ_1, F_i はおのおのこの材料の密度と単位質量当りの物体力のベクトル成分である。

多孔質材料の粒子骨格部分の変位を u_i で表わし、変位が微小であるものとすれば、その骨格部分のひずみ成分は

$$e_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \dots\dots\dots(2)$$

と与えられる。

この多孔質材料の応力-ひずみ関係式は次のように表わされる。

$$\sigma_{ij} + \alpha_{ij} p = C_{ijkl} e_{kl} \dots\dots\dots(3)$$

$$\zeta = p/Q + \alpha_{ij} e_{ij} \text{ あるいは } p = -Q\alpha_{ij} e_{ij} + Q\zeta \dots\dots\dots(4)$$

ここで、 C_{ijkl} は粒子骨格の弾性定数テンソル、 p は間隙流体圧、 ζ は多孔質材料単位体積に生ずる流体の体積変化、さらに、 $1/Q$ は材料の単位体積を一定に保ったままの状態、そのなかに圧入し得る流体体積を表わし、 α_{ij} は二次の対称テンソルであって、物理的には単位体積材料の表面で流体の出入りを自由にした状態 ($p=0$) のもとで材料骨格に加えられたひずみとその結果生ずる流体の体積変化との比を表わす。この二つの物理定数 α_{ij} と Q は多孔質材料の間隙を占める液体量、すなわち飽和度に依存する。式 (3)、(4) より、それぞれ σ_{ij} と p を成分するベクトルおよび e_{ij} と ζ を成分とするベクトルによって応力ベクトルおよびひずみベクトルを定義すれば、 $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ なることから、これら二つのベクトルを結ぶ係数マトリックスは対称となることがわかる。

なお、Biot は、最初、圧密理論のすべての方程式を間隙率と無関係に展開していたが、1955 年以後、間隙率を用いて全応力の配分をなし、仮定の応力テンソルを用いて理論展開を行っている。ここでは、表示の簡略化のため、間隙率をおもてに出さずに基礎方程式を表わしている。

粒子のあいだを流れる流体に関してなりたつ Darcy の法則を一般化すれば

$$v_i = \dot{U}_i - \dot{u}_i = -k_{ij}(p_{,j} + \rho_2 F_j) \dots\dots\dots(5)$$

となる。ここに、 v_i は流体流速成分、 \dot{U}_i, \dot{u}_i はおのおの流体と材料骨格の平均速度で、 $\dot{}$ は時間に関する微分を表わす。また、 k_{ij} は二次の対称透水係数テンソル、 ρ_2 は材料の単位体積に含まれる流体の質量である。

材料中の流体の単位時間当りの体積変化は相対速度の発散で与えられ、次式によって表わされる。

$$\left. \begin{aligned} \dot{\zeta} &= -v_{i,i} = -(\dot{\varepsilon} - \dot{e}_{\mu\mu}) \\ \text{ただし,} \\ \varepsilon &= U_{i,i} \\ e_{\mu\mu} &= u_{i,i} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(6)$$

流体に関して非圧縮性を仮定しているから、連続の条件式は、式 (4)、(6) より

$$-v_{i,i} = \frac{\dot{p}}{Q} + \alpha_{ij} \dot{e}_{ij} \dots\dots\dots(7)$$

と与えられる。

以上の諸方程式において、式 (3)、(5)、(7) は完全等方性体の場合

$$\sigma_{ij} + \alpha p \delta_{ij} = \lambda e_{\mu\mu} \delta_{ij} + 2 G e_{ij} \dots\dots\dots(8)$$

$$v_i = -k(p_{,i} + \rho_2 F_i) \dots\dots\dots(9)$$

$$-v_{i,i} = \frac{\dot{p}}{Q} + \alpha \dot{e}_{\mu\mu} \dots\dots\dots(10)$$

となる。ここで、 λ, G は粒子骨格を一つの弾性体としたときの Lamé の定数にほかならない。

等方性体にあつては、式 (4) において、せん断成分の影響は 0 であるから、

$$\zeta = \frac{p}{Q} + \alpha e_{\mu\mu} \dots\dots\dots(11)$$

となり、これより、完全飽和の場合 $\zeta = e_{\mu\mu}$ ゆえ、 $\alpha = 1, Q = \infty$ なることがわかる。逆に、粒子骨格のみの完全乾燥状態では、 $\alpha = 0$ となる。よって、 α は飽和度によって 0 から 1 のあいだの値をとり得る物理定数である。

3. 弾性圧密の変分方程式

前章の圧密基礎方程式は、 α_{ij} を熱弾性係数に、 k_{ij} を熱伝導率に、間隙中に含まれる流体の体積変化 ζ をエントロピーに、間隙圧 p を温度変化に、 $1/Q$ を定容比熱に置き換えれば、微小な温度変化に対する熱弾性基礎方程式となる。したがって、流体の流れが Darcy の法則に従うようなゆっくりした流れであれば、不飽和多孔質弾性材料の圧密に対する変分方程式は、Biot により与えられた温度変化の小さい場合の連成熱弾性の変分方程式¹⁷⁾と同一形式をなすことが理解される。

弾性圧密という仮定から、単位体積当りの材料のポテンシャルエネルギーは

$$\frac{1}{2}(\sigma_{ij} e_{ij} + p \zeta)$$

によって定義される。これに式 (3)、(4) を用い、体積積分をほどこせば、体積 V の材料全体がもつ弾性圧密ポテンシャル

$$z = \int_V \left(W + \frac{1}{2} \frac{p^2}{Q} \right) dv \dots\dots\dots(12)$$

を得る。

ただし、 W は

$$W = \frac{1}{2} C_{ijkl} e_{ij} e_{kl} \dots\dots\dots(13)$$

であつて、これは材料が粒子骨格のみからなる場合の材

料単位体積当りのポテンシャルエネルギーである。一方、 $\frac{1}{2} \frac{p^2}{Q}$ は粒子骨格のない材料、あたかも流体のみが分散している状態の材料単位体積当りの流体体積仕事である。

本章のはじめに示した圧密現象と連成熱弾性との類似から、圧密現象は熱力学的不可逆過程であることがわかる。いま、次式で成分 V_i が定義される総流量なるベクトルを導入すれば、

$$\dot{V}_i = v_i = \dot{U}_i - \dot{u}_i, \quad t=0 \text{ で } V_i=0 \quad \dots\dots\dots(14)$$

圧密現象における散逸エネルギーは透水抵抗力に流速をかけたものの 1/2 であり、これは総流量を用いると次式のように表わせる。

$$\vartheta = \frac{1}{2} \int_V \lambda_{ij} \dot{V}_j \dot{V}_i dv \quad \dots\dots\dots(15)$$

ただし、 $[\lambda_{ij}] = [k_{ij}]^{-1}$ であって、 λ_{ij} は透水抵抗係数テンソルであり、対称である。総流量 V_i は Biot により与えられたエントロピー変位 $\phi_i^{(e)}$ に相当する。熱力学との対応から、 ε は Helmholtz の自由エネルギーであり、 ϑ はエントロピー生成速度に比例する量にあたる。

緩慢に進行する圧密現象を考えているから、運動エネルギーの項は無視されている。この場合、境界の一部で変位ならびに流体総流量が拘束をうける不飽和多孔質体に対する弾性圧密方程式 (3), (5), (7) は次の変分方程式が成立するための条件となる。

$$\begin{aligned} \delta z + \delta \vartheta = & \int_V \rho_1 F_i \delta u_i dv - \int_V \rho_2 F_i \delta V_i dv \\ & + \int_S (\dot{T}_i \delta u_i - p_0 \delta V_i \nu_i) ds \quad \dots\dots\dots(16) \end{aligned}$$

ここで、 \dot{T}_i , p_0 は境界表面に働く表面力および外部流体圧であり、 ν_i は境界表面にたてた外向き法線の方向余弦、 s は境界表面力および流体圧の働く面積である。なお、散逸関数 ϑ の変分は

$$\delta \vartheta = \delta \left(\frac{1}{2} \int_V \lambda_{ij} \dot{V}_j \dot{V}_i dv \right) = \int_V \lambda_{ij} \dot{V}_j \delta V_i dv \quad \dots\dots\dots(17)$$

のように変形できる。この証明は、一般化座標を導入すれば、容易に行える。

式 (7) に総流量を用いれば、間隙圧は二つのベクトル場により、

$$\begin{aligned} p &= -Q(V_{i,i} + a_{ij} e_{ij}) \\ &= -Q \left\{ V_{i,i} + \frac{a_{ij}}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) \right\} \quad \dots\dots\dots(18) \end{aligned}$$

のように表示される。

完全等方性体の場合には、式 (17), (18) は

$$\delta \vartheta = \int_V \frac{1}{k} \dot{V}_i \delta V_i dv \quad \dots\dots\dots(19)$$

$$p = -Q(V_{i,i} + \alpha e_{pp}) = -Q(V_{i,i} + \alpha u_{i,i}) \quad \dots\dots\dots(20)$$

となる。

4. 有限要素法への定式化

本章では、前章までに述べた理論をもとに、有限要素法により不飽和土の圧密解を求めるための解式の展開を行ってみる。

有限の大きさをもつ物体要素内の土粒子骨格の変位と流体総流量とは、要素節点におけるおのおのの値により次のように表わせる。

$$\{u\} = [N] \{u\}^e \quad \dots\dots\dots(21)$$

$$\{V\} = [N] \{V\}^e \quad \dots\dots\dots(22)$$

ここで、 $\{u\}$ は要素内の変位列ベクトル、 $[N]$ は形状関数、 $\{u\}^e$ は節点変位列ベクトルであり、 $\{V\}$ および $\{V\}^e$ も同様に要素内の総流量列ベクトル、節点総流量列ベクトルである。要素内で間隙流体圧が空間座標の一次関数であらわし得る場合、式 (18) より土粒子骨格変位および流体総流量は空間座標の二次関数となり、したがって、この場合 $[N]$ は二次の内挿関数によってつくられる。

式 (2) のひずみ-変位の関係は要素内において

$$\{e\} = [B] \{u\}^e \quad \dots\dots\dots(23)$$

のように表わせる。ここに、 $[B]$ は式 (2) および式 (21) から導かれる変換マトリックスである。式 (21), (23), (23) を式 (20) に代入すると要素内の間隙流体圧のマトリックス表示

$$p = -Q(\underline{L}A_J [B_i] \{V\}^e + \underline{L}A_J [B] \{u\}^e) \quad \dots\dots\dots(24)$$

を得る。上式において、行ベクトル $\underline{L}A_J$ および $\underline{L}A_J$ は

$$\begin{aligned} \underline{L}A_J &= [1 \ 1 \ 1], \quad \underline{L}A_J = [\alpha_{11} \ \alpha_{22} \ \alpha_{33} \ \alpha_{12} \ \alpha_{23} \ \alpha_{31}] \\ &\quad \dots\dots\dots(25) \end{aligned}$$

であり、 $[B_i]$ は変換マトリックス $[B]$ からせん断ひずみ成分の行を取り除いてつくられる変換マトリックスである。式 (24) より、 p^2 は次式のように与えられる。

$$\begin{aligned} p^2 &= Q^2 (\underline{L}A_J [B_i] \{V\}^e + \underline{L}A_J [B] \{u\}^e)^T \\ &\quad \cdot (\underline{L}A_J [B_i] \{V\}^e + \underline{L}A_J [B] \{u\}^e) \quad \dots\dots\dots(26) \end{aligned}$$

式 (16) の変分方程式を要素に対して適用すれば、左辺の各項は次式のようなになる。

$$\begin{aligned} \delta z = & \int_V (\{\delta u\}^e)^T [B]^T [D] [B] \{u\}^e dv \\ & + Q \int_V (\{\delta u\}^e)^T \{[B]^T \{A\} \underline{L}A_J [B] \{u\}^e \\ & + [B]^T \{A\} \underline{L}A_J [B_i] \{V\}^e\} dv \\ & + Q \int_V (\{\delta V\}^e)^T \{[B_i]^T \{A\} \underline{L}A_J [B] \{u\}^e \\ & + [B_i]^T \{A\} \underline{L}A_J [B_i] \{V\}^e\} dv \quad \dots\dots\dots(27) \end{aligned}$$

$$\delta \vartheta = \int_V (\{\delta V\}^e)^T [N]^T [D_r] [N] \{V\}^e dv \quad \dots\dots\dots(28)$$

ここで、 $[D]$ および $[D_r]$ はおのおの要素における土粒子骨格の弾性定数マトリックスと流体の流れ抵抗マト

リックスであり、 $\{A\}$ および $\{A\}$ は $[A]$ および $[A]$ の転置ベクトルである。

また、式 (16) 右辺の物体力ならびに表面力による仮想仕事の項は次のようにかかれる。

$$\int_V \rho_1 F_i \delta u_i dv = \int_V (\{\delta u\}^e)^T [N]^T \{P_1\}^e dv \dots\dots (29)$$

$$\int_V \rho_2 F_i \delta V_i dv = \int_V (\{\delta V\}^e)^T [N]^T \{P_2\}^e dv \dots (30)$$

$$\int_s T_i \delta u_i ds = (\{\delta u\}^e)^T \{F\}^e \dots\dots\dots (31)$$

$$\int_s p_o \nu_i \delta V_i ds = (\{\delta V\}^e)^T [H] \{P_o\} = (\{\delta V\}^e)^T \{G\}^e \dots\dots\dots (32)$$

ここに、 $\{P_m\}$ は物体力 $\rho_m F_i$ の列ベクトル (添字 $m=1, 2$ である)、 $\{F\}^e$ は等価節点荷重列ベクトル、 $[H]$ は境界上の総流量の内挿関数と流体圧の内挿関数との積の表面積分によって得られるマトリックス、 $\{P_o\}$ は等価節点流体圧ベクトルである。

式 (27) ないし式 (32) を式 (16) に代入し、変分 $\{\delta u\}^e$ および $\{\delta V\}^e$ が任意であることを考慮すれば、次の連立方程式を得る。

$$\left. \begin{aligned} \{F\}^e &= ([K] + [L_o]) \{u\}^e + [L_1] \{V\}^e - \{F_1\}^e \\ -\{G\}^e &= [L_2] \{u\}^e + [L_3] \{V\}^e + [M] \{\dot{V}\}^e + \{F_2\}^e \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (33)$$

上式右辺に表われる各マトリックスおよび $\{F_1\}^e, \{F_2\}^e$ は

$$\left. \begin{aligned} [K] &= \int_V [B]^T [D] [B] dv \\ [L_o] &= Q \int_V [B]^T \{A\} [A] [B] dv \\ [L_1] &= Q \int_V [B]^T \{A\} [A] [B_1] dv \\ [L_2] &= Q \int_V [B_1]^T \{A\} [A] [B] dv \\ [L_3] &= Q \int_V [B_1]^T \{A\} [A] [B_1] dv \\ [M] &= \int_V [N]^T [D_r] [N] dv \\ \{F_1\}^e &= \int_V [N]^T \{P_1\} dv \\ \{F_2\}^e &= \int_V [N]^T \{P_2\} dv \end{aligned} \right\} \dots\dots (34)$$

である。連立方程式 (33) の第 1 式はつり合い方程式を第 2 式は流れの現象方程式を表わしている。

材料が等方性の場合には、式 (24) ないし式 (28) および式 (33), (34) は次のようになる。

$$p = -Q [A] [B_1] (\{V\}^e + \alpha \{u\}^e) \dots\dots\dots (35)$$

$$p^2 = Q^2 (\{V\}^e + \alpha \{u\}^e)^T [B_1]^T \cdot \{A\} [A] [B_1] (\{V\}^e + \alpha \{u\}^e) \dots\dots\dots (36)$$

$$\delta z = \int_V (\{\delta u\}^e)^T [B]^T [D] [B] \{u\}^e dv$$

$$\begin{aligned} &+ Q \int_V \alpha (\{\delta u\}^e)^T [B_1]^T \{A\} [A] [B_1] \\ &\cdot (\{V\}^e + \alpha \{u\}^e) dv \\ &+ Q \int_V \alpha (\{\delta V\}^e)^T [B_1]^T \{A\} [A] [B_1] \\ &\cdot (\{V\}^e + \alpha \{u\}^e) dv \dots\dots\dots (37) \end{aligned}$$

$$\delta \theta = \int_V \frac{1}{k} (\{\delta V\}^e)^T [N]^T [N] \{\dot{V}\}^e dv \dots\dots (38)$$

$$\left. \begin{aligned} \{F\}^e &= ([K] + \alpha^2 [L]) \{u\}^e + \alpha [L] \{V\}^e - \{F_1\}^e \\ -\{G\}^e &= \alpha [L] \{u\}^e + [L] \{V\}^e + [M] \{\dot{V}\}^e + \{F_2\}^e \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (39)$$

上式右辺のマトリックス $[K]$ およびベクトル $\{F_1\}^e, \{F_2\}^e$ は式 (34) に示すものと同じであり、 $[L], [M]$ は

$$\left. \begin{aligned} [L] &= Q \int_V [B_1]^T \{A\} [A] [B_1] dv \\ [M] &= \frac{1}{k} \int_V [N]^T [N] dv \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (40)$$

である。

式 (33) ならびに式 (39) の第 2 式に表われる $\{\dot{V}\}^e$ に対し、任意の時間増分 dt のあいだでその値が時間に比例して変化するとする扱いをなせば、時刻 t における $\{\dot{V}\}^e$ は次のように表わすことができる。

$$\begin{aligned} \{\dot{V}\}_{t-t}^e &= \frac{2}{dt} \{V\}_{t-t}^e - \left(\frac{2}{dt} \{V\}_{t-t-dt}^e + \{\dot{V}\}_{t-t-dt}^e \right) \\ &= \frac{2}{dt} \{V\}_{t-t}^e - \{G_V\}_{t-t-dt}^e \dots\dots\dots (41) \end{aligned}$$

これを式 (35) あるいは式 (39) に使い、これらの諸式を一括表示すれば

$$\left. \begin{aligned} \left\{ \begin{array}{l} F \\ -G \end{array} \right\}_{t-t}^e + \left\{ \begin{array}{l} F_1 \\ -F_2 \end{array} \right\}_{t-t}^e + \left\{ \begin{array}{l} 0 \\ G_V \end{array} \right\}_{t-t-dt}^e \\ = \left[\begin{array}{ll} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{l} u \\ V \end{array} \right\}_{t-t}^e \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (42)$$

ただし、左辺のベクトル $\{G_V\}^e$ は

$$\begin{aligned} \{G_V\}_{t-t-dt}^e &= [M] \{G_V\}_{t-t-dt}^e \\ &= [M] \left(\frac{2}{dt} \{V\}_{t-t-dt}^e + \{\dot{V}\}_{t-t-dt}^e \right) \dots (43) \end{aligned}$$

であり、右辺の小マトリックス $[K_{ij}]$ は、異方性体の場合には

$$\left. \begin{aligned} [K_{11}] &= [K] + [L_o], \quad [K_{12}] = [L_1] \\ [K_{21}] &= [L_2], \quad [K_{22}] = [L_3] + \frac{2}{dt} [M] \end{aligned} \right\} \dots\dots (44)$$

等方性体の場合には

$$\left. \begin{aligned} [K_{11}] &= [K] + \alpha^2 [L], \quad [K_{12}] = [K_{21}] = \alpha [L] \\ [K_{22}] &= [L] + \frac{2}{dt} [M] \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (45)$$

である。

解析の対象とする全領域にわたって式 (42) を重ね合わせると、不飽和土の弾性圧密に対するいわゆる剛性方程式を得る。このようにして得られた連立剛性方程式は

漸化式をなすので、逐次計算により解を求めることができる。

5. 数値解析例と考察

上に述べた不飽和土の圧密問題の解法にしたがい、二、三の数値計算を行った。以下にその結果を示す。はじめに、一次元問題としての扱いが可能な、剛地盤上一様厚さの粘土層に無限の広がりをもつ一様強さの荷重が作用し、載荷面のみから排水がゆるされる圧密問題の解について述べる。これはちょうど側方ならびに底面の変位と排水が拘束された一軸の圧密試験の状態に相当する。

Fig. 1 は厚さ 40 cm の粘土層の時間対沈下量を示す。計算にとり入れられた材料定数は次のとおりである。土粒子骨格のヤング率 $E=50 \text{ kg/cm}^2$ 、ポアソン比 $\nu=0.3$ 、また透水係数 $k=0.01 \text{ cm}^2/\text{kg}\cdot\text{sec}$ とし、 α には 0.83, 0.88, 0.93, 0.98 を採用した。なお、材料定数 Q を定めるため、瞬間圧縮率 a_i と最終圧縮率 a の比を 1:100 と仮定した。ここで、瞬間圧縮率とは載荷直後の排水量 0 の状態つまり式 (8) および式 (11) より $\zeta=0$ として得られる圧縮率を意味し、最終圧縮率とは式 (8) において $p=0$ として得られる圧縮率を意味する。この図より、載荷後 100 秒前後までの沈下速度は α の影響を著しく受け、 α の値が小さいほど大きい。そして、この間の沈下速度が以後の沈下量に大きく影響し、 α の値が小さいほど同時刻に対する沈下量が大きく、最終沈下量にはやく収束することがわかる。この有限要素法の解は等寸法の 8 要素によって求められた。その際、変位ならびに総流量に一次と二次の内挿関数を用い、解の比較を行ったが、結果にはほとんど相違は認められなかった。なお、比較検討のため、図には同じ条件の不飽和土および飽和土に対する Biot の理論解から求められ

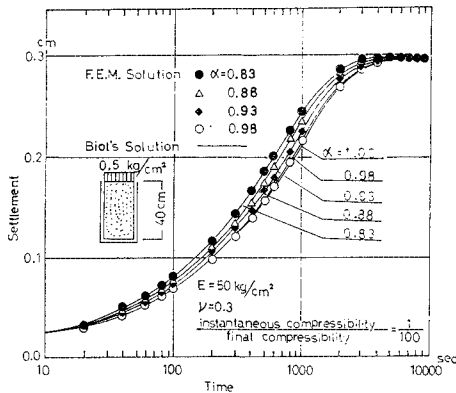


Fig. 1 Comparison of F.E.M. Solution to Biot's Solution for Consolidation of Soil Column of Various α Values.

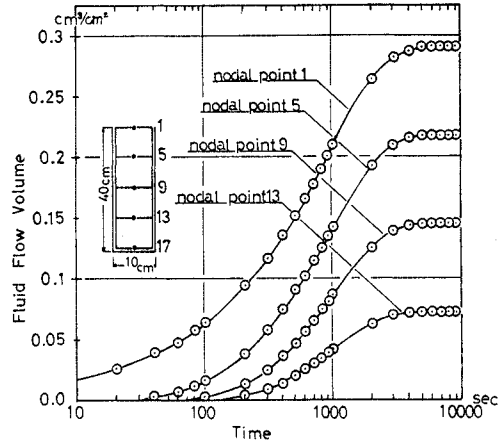


Fig. 2 Flow Volume Curve in Soil Column caused by Consolidation.

た時間沈下曲線もかかっている。これより、有限要素法による解が理論解と完全なまでに一致すること、および $\alpha=0.98$ の不飽和土の変形挙動が飽和土のそれとほとんどかわらないことがわかる。このことは、本解法による場合飽和土に対しては $Q=\infty$ となるため数値計算を実行できないが、 $0.98 < \alpha < 1.0$ なる α の値を用いて飽和土の挙動を評価し得ることを示すものである。

Fig. 2 に $\alpha=0.98$ の場合の土層内部各点における総流量 V の経過を示す。総流量は式 (16) あるいは式 (18) より明らかなように長さの次元を有し、ある時刻までに通過した単位面積当りの流量の累計である。図における節点 1 の総流量は Fig. 1 の $\alpha=0.98$ の沈下量よりやや小さく、不飽和の影響が見られる。図では明らかではないが、土層深部の点では載荷直後は総量の符号が負であり、ある時間を経過してから正になる。

次に、 α を 0.95 とし、その他の材料定数を前例と同一にした類似の一次元問題を解き、間隙水圧の動向を調べ、その結果を Fig. 3 に示す。図には求められた間隙水圧 p の変化を荷重強度 q との比 p/q によってあらわしてある。載荷の瞬間では、式 (11) において $\zeta=0$ であり、また土は一軸圧縮状態にあるから土粒子骨格の瞬間ひずみはいたるところ一定となり、土層内部に一律な間隙水圧が発生する。数値解においても明瞭にこのことが認められる。そしてその時の間隙水圧は荷重強度 q よりも大きく、飽和土の場合のように瞬間間隙水圧と荷重強度とが等しくはならない。排水面を除く土層内部に発生する間隙水圧はある時間まで瞬間間隙水圧よりも大きな値を示す。このように、不飽和土においても、いわゆる Mandel-Cryer 効果¹⁸⁾ の出現が予見される。土層内各位置における最大間隙水圧の発生する時間にはずれがあり、間隙水圧の鉛直分布をつくれれば、圧密の初期に排水面近くにあった圧力最大点が時間経過とともに下降

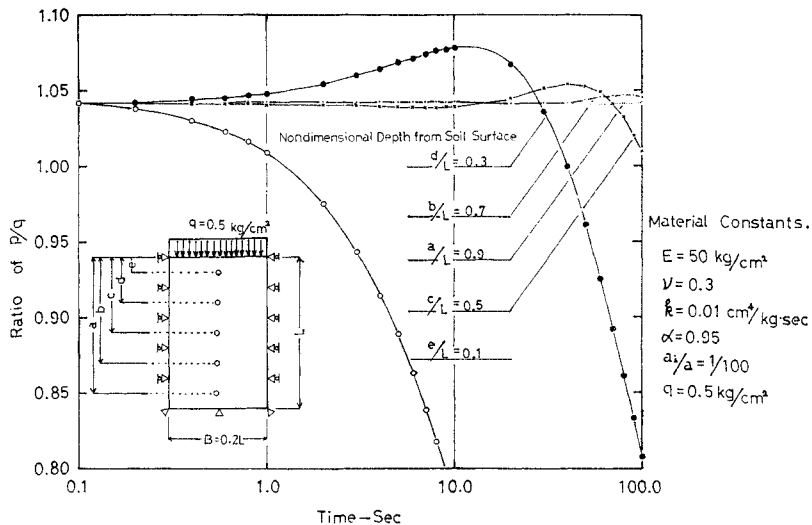


Fig. 3 Change of Pore Water Pressure in Soil Column caused by Consolidation.

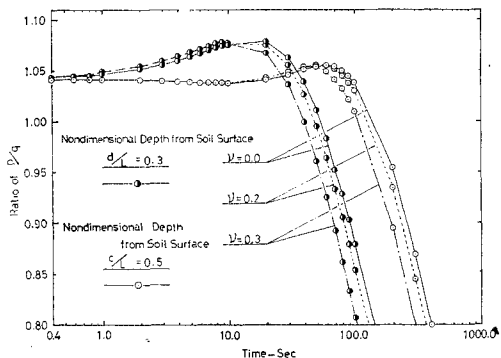


Fig. 4 Change of Pore Water Pressure in Soil Column with various Poisson's Ratios caused by Consolidation.

すること、すなわち圧力の伝播を認めることができる。間隙水圧最大点が底面に達したとき総流量はいたるところ正となるのである。さらに、土層内最大間隙水圧は、載荷後約 10 秒を経過したのち土層中心より上側、深さにして、層厚さの約 1/3.3 付近に生じている。

Fig. 3 において見られた土層内最大間隙水圧を生ずる 1/3.3 深さの点および間隙水圧の変化傾向が土層内の他の点と異なる 1/2 深さの点での間隙水圧の変化とポアソン比の関係を Fig. 4 に示す。この図から、いずれの位置においてもポアソン比が大きくなるほどすなわち最終圧縮率が大きくなるほど、最大間隙水圧の発生する時間がはやく、またわずかではあるが最大間隙水圧が小さくなることわかる。

数値計算例の最後に、剛地盤上一様厚さの粘土層に帯状の一樣荷重が作用する二次元圧密問題を取り上げた。Fig. 5 に粘土層の寸法および要素分割の様様を示す。本題においては、数値解を飽和土に対する Biot の解析

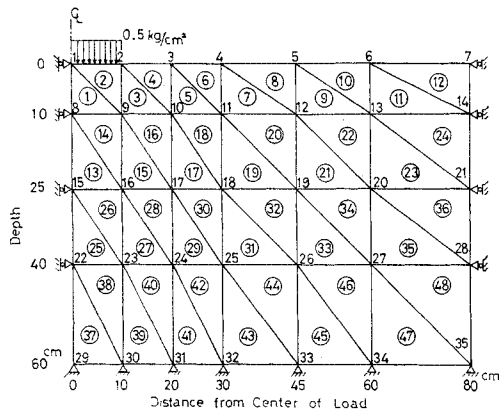


Fig. 5 Finite Element Model of Two Dimensional Consolidation Analysis.

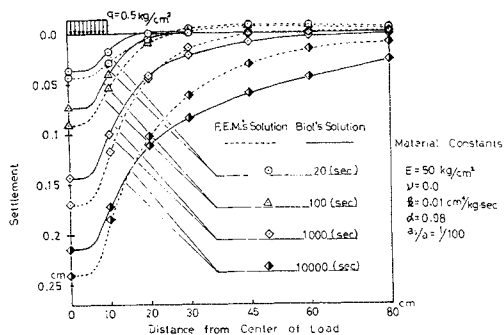


Fig. 6 Settlement Curve of Two Dimensional Consolidation Analysis.

解と比較し得るよう α を 0.98 とし、ポアソン比を 0.0 とした。その他の諸定数は Fig. 1 の計算例と同様である。Fig. 6 に二つの解を比較して示す。この図によると、載荷部およびその近くの地表面に生ずる沈下は有限

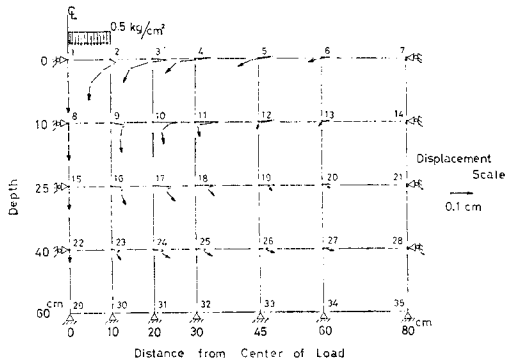


Fig. 7 Time-Displacement Process at Nodal Points.

要素法による解の方が Biot の解よりも大きく、その外側での沈下は逆に Biot の解の方が大きい。この原因は、Biot の解の対象が半無限の地盤であるのに対し、有限要素法の解析モデルは深さおよび広がりにおいて有限な地盤であるという違いにあると考えられる。すなわち、有限要素法モデルでは間隙水の移動範囲が限られているため、半無限地盤の場合に比べ、荷重下側で荷重直後の発生間隙水圧が大きく、そのためその部分での間隙水総流量が大となり、結果として荷重面下の地盤沈下が大きく、その外側の地盤面の沈下が小さくなるものと推察される。

Fig. 7 は同じ例題における各節点での変位と時間との関係を示すものである。経過時間 t に 0, 20, 100, 1000, 10000 秒を選び、そのときの変位をプロットして結んである。図において注目すべきことは、対称面を除く各節点で $t=0$ では正の水平変位を生じているが、 $t=20$ 秒の時点でその向きが逆転し、地表面では終局時には負の水平変位を示しているのに対し、地層内では $t=1000$ ないし 10000 秒のあいだで再度向きが正に戻り、終局時には正の水平変位を示している点である。この図からも理解できることであるが、要素番号 3, 4 の終局時のせん断応力は大きいことを指摘しておきたい。

なお、二次元問題を三角形要素により解くと幾何学的な項、いわゆる幾何剛性の項を伴うので注意を要する。本題の解は、Fig. 5 の解析モデルのほかこれと三角形要素の斜辺が逆傾斜をなすモデルを用い、両者の結果を整理して求められている。なお、二次元問題では一次元問題と異なり、二次の内挿関数を用いるよりも一次の内挿関数を用いるほうが解は安定し、収束がはやい。一次の内挿関数では要素内で間隙流体圧一定となり、一見物理的には矛盾するようであるが、それにもかかわらず一次の内挿関数によるほうが解の安定することの理由は、上述の幾何剛性によるものかと思われる。

6. 結 語

以上、Biot の初期の不飽和弾性多孔質材料に対する圧密理論を一般化して異方性の場合の基礎方程式を展開し、圧密理論と連成熱弾性理論との類似からエントロピー変位に対応する総流量なる概念を導入し、圧密基礎方程式を満足する変分方程式を示した。これより有限要素法による不飽和土の圧密に対する解式を誘導して、二、三の例題について数値計算を行った。異方性への一般化には、土粒子骨格の異方性および透水性の異方性がとり入れられているので、導いた解式を現実土質地盤に適用し、実際の圧密現象の解明に手掛りを与え得るものと期待できる。

以下に、計算の結果得られた二、三の知見を列挙する。

(1) 一次元圧密問題の有限要素法解と、同じ条件を有する不飽和土に対する Biot の理論解とを比較し、ほぼ完全な一致を得た。

(2) 一次元問題では要素内の変位ならびに総流量に一次の内挿関数を用いようが、二次の内挿関数を用いようが結果にはほとんど差が認められない。

(3) しかし、二次元問題では、二次の内挿関数によるよりも一次の内挿関数によるほうが解は安定し、収束ははやい。

(4) 不飽和の度合の違いによる初期の圧密沈下速度の相違は著しく、これがのちの全沈下量ならびに沈下の収束時間に大きく影響を与えている。

(5) 表面排水の一軸圧縮において、荷重後、表層部を除く土層内の間隙水圧は荷重直後の瞬間間隙水圧よりも上昇することがあり、不飽和土の場合にも Mandel-Cryer 効果の発生が予想される。

(6) 前項と同じ圧密条件のもとで土層内の位置により生ずる間隙水圧の最大値およびその発生時間は一定しないが、層厚さの $1/3.3$ の深さの点でもっとも大きく、かつもっとも短い。

(7) 一様帯状荷重をうける二次元圧密層において、荷重と同時に対称面上を除くすべての点で正の水平変位を生ずるが、圧密の進行にしたがい複雑な変位経過をたどり、終局時において、地表面の各点は負の水平変位を、土層内部の各点では正の水平変位を生ずる。

ここに示した解式を実際の問題に適用するにあたっては、土粒子骨格の材料定数、不飽和の度合をあらわす物理定数 α_{ij} および Q 、その他透水係数の測定など基本的な問題を解決しておかねばならない。また、2. のはじめに記したように、飽和度 0.9 ないし 0.95 以上の土に本解法の適用が限定されることを再記したい。

飽和度 0.9 以下の不飽和土に対しては、気液が分離した状態となり、気体の圧縮性の影響があらわれてくるため、連続の条件式は質量のバランスによって展開されねばならず、当然、非線形項が伴う。このような非線形圧密問題は大変形圧密問題とともに土質工学の分野におけるこれからの重要課題の一つであろう。

最後に、本論文の数値計算には、東北大学大型計算機センターの NEAC-2200 モデル 700 を使用したことを付記する。

参 考 文 献

- 1) Barden L. : Consolidation of Compacted and Unsaturated Clays, *Géotechnique*, Vol. 14, No. 3, 1964.
- 2) Bishop A.W. and Blight G.E. : Some Aspects of Effective Stress in Saturated and Partly Saturated Soils, *Géotechnique*, Vol. 13, No. 3, 1963.
- 3) Biot M.A. : General Theory of Three-Dimensional Consolidation, *Jour. Appl. Phys.*, Vol. 12, Feb. 1941.
- 4) Biot M.A. : Consolidation Settlement under a Rectangular Load Distribution, *Jour. Appl. Phys.*, Vol. 12, May, 1941.
- 5) Biot M.A. : General Solutions of the Equations of Elasticity and Consolidation for a Porous Material, *Jour. Appl. Mech.*, Vol. 23, March, 1956.
- 6) Biot M.A. : Theory of Elasticity and Consolidation for a Porous Anisotropic Solid, *Jour. Appl. Phys.*, Vol. 26, No. 2, 1956.
- 7) Florin V.A., 赤井浩一監修, 大草重康訳 : フォーリンの土質力学, 第二巻, 森北出版, 1968.
- 8) 吉国 洋 : 間隙水圧を中心にした圧密理論の再構成, 土木学会論文報告集, No. 212, 1973-4.
- 9) Sandhu R.S. and Wilson E.L. : Finite-Element Analysis of Seepage in Elastic Media, *Proc. ASCE, Jour. EM Div.*, Vol. 95, No. EM 3, June 1969.
- 10) Yokoo Y., Yamagata K. and Nagaoka H. : Finite Element Method Applied to Biot's Consolidation Theory, *Soils and Foundation*, Vol. 11, No. 1, 1971.
- 11) Yokoo Y., Yamagata K. and Nagaoka H. : Finite Element Analysis of Consolidation following Undrained Deformation, *Soils and Foundations*, Vol. 11, No. 4, 1971.
- 12) 原 一良・川本眺万 : 粘弾性圧密に対する有限要素法解析, 土木学会第 27 回年次学術講演概要集, 第 III 部, No. 13, 1972.
- 13) Valliappan S., Lee I.K. and Boonluahor P. : Finite Element Analysis of Consolidation Problem, *Proc. Intn Symp. F.E.M. in Flow Problems*, 1974.
- 14) 色部 誠・赤木知之・伊藤 洋 : 有限要素法による不飽和土の圧密変形解析, 日本鋼構造協会第 7 回大会研究集会マトリックス構造解析法研究発表論文集, 昭 48.6.
- 15) Irobe M., Akagi T. and Itoh H. : Finite Element Analysis of Consolidation of Unsaturated Soil, *Proc. Intn Symp. F.E.M. in Flow Problems*, 1974.
- 16) Biot M.A. : Thermoelasticity and Irreversible Thermodynamics, *Jour. Appl. Phys.*, Vol. 27, No. 3, 1956.
- 17) Fung Y.C., 大橋義夫・村上澄男・神谷紀生共訳 : 固体の力学/理論, 14 章, 培風館, 1970.
- 18) 最上武雄 : 土質力学, 4 章, 技報堂, 1967.

(1975.3.19・受付)