

アーチの面内非弾性座屈および終局耐荷力の解析

ANALYSIS OF IN-PLANE ELASTO-PLASTIC BUCKLING AND LOAD
CARRYING CAPACITY OF ARCHES新家 徹*・頭 井 洋**・波 田 凱 夫**
By Tohru SHINKE, Hiroshi ZUI and Yoshio NAMITA

1. 結 言

本文は、アーチ軸線の変形および非弾性域のひろがり
を考慮したアーチの面内座屈および終局耐荷力の汎用解
析を伝達マトリックス法を用いて行い、種々の計算例に
よりアーチの面内座屈および終局耐荷力の特性について
論じたものである。

アーチの面内弾性座屈の問題については、古くから数
多くの研究が行われてきているが¹⁾、非弾性域のひろが
りを考慮したアーチの面内座屈解析(分岐座屈)につい
ては、ほとんどその研究例をみない。わずかに、Harries²⁾
が鉛直等分布荷重を受ける2ヒンジアーチについて、
Klöppel と Lie³⁾ の弾性分岐座屈荷重の算定法を拡張
して、非弾性座屈解析を行っているのが、現在のところ
唯一の研究例のようである。

一方、アーチの塑性崩壊の解析については、比較的
古くから数多くの研究が行われてきているが、それらの
ほとんどは、単純塑性理論に基づくもので、変形の影響
や非弾性域のひろがりを考慮しておらず、また崩壊に
至るまで、不安定現象は生じないものとしている。

近年のこの方面の研究例として、非弾性域のひろが
りを考慮した円弧アーチの弾塑性解析を ϕ 法を用いて行
っている山崎・石川⁴⁾の研究や単純塑性理論を用いて変
形の影響を考慮し任意形状、任意荷重条件における2
ヒンジアーチの崩壊荷重の算定法を示した前田・藤本⁵⁾
の研究例などがみられる。また Harries²⁾ は、アーチ軸
線のつり合いに関する微分方程式を数値積分により繰
り返し収斂させて解く方法を用いて変形の影響および非
弾性域のひろがりを考慮したアーチの耐荷力の解析を
行っており、またその中では先にも述べたように満
載等分布荷重による非弾性分岐座屈の問題も取り扱
っている。倉戸・

Le-Wu Lu⁶⁾ は、Harries と同様の繰返し手法を用
いて、変形の影響や非弾性域のひろがりのほかサ
ンドイッチ断面に対し残留応力やひずみ硬化の影響
をも考慮して耐荷力を求めており、アーチの設計
基準の提案⁷⁾も行っている。しかし、これら2つの
解析では、対象を2ヒンジアーチに限っている。

著者らは、先に伝達マトリックス法を用いた
アーチの面内弾性座屈および2次の応力問題の汎
用解析法を報告した¹⁾。本文は、この手法を
発展させ変形の影響および非弾性域のひろが
りを考慮したアーチの面内座屈および終局耐
荷力の解析を行ったものである。

本文の手法によれば、任意の境界条件および
荷重条件のもとで、任意の断面と軸線形状を
有するアーチの面内非弾性座屈および終局耐
荷力の解析を行うことができる。本文では、
これまで明らかにされたことのない種々の
部分分布荷重を受ける2ヒンジアーチおよび
固定アーチの非弾性座屈の計算を行い、非
弾性域のひろがりを考慮した場合のアーチ
の面内座屈特性を論ずるとともに、鉛直満
載等分布荷重に加え等分布荷重がスパンの
片側半分に載荷した場合の2ヒンジアーチ
および固定アーチの耐荷力曲線(偏心圧縮
柱の Column curve に相当)を、ライズ・
スパン比、荷重比および材料の弾性係数と
降伏点応力度の比をパラメーターとして
求め、アーチの耐荷力特性を論じた。

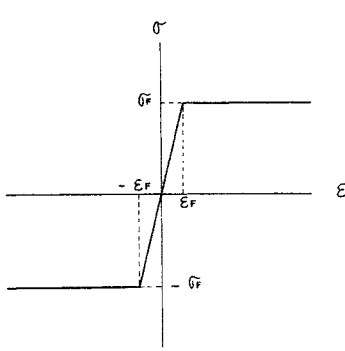
2. 理論解析

(1) 仮定と記号

本解析は2次解析理論に基づくもので用いた
主な仮定は次のとおりである。

a) 材料の応力とひずみの関係は、図-1に示
すような完全弾塑性体モデルとし、ひずみ
硬化および履歴効果は考えない。

* 正会員 (株)神戶製鋼所 構造研究所 主任研究員
** 正会員 (株)神戶製鋼所 構造研究所
*** 正会員 工博 (株)神戶製鋼所 構造研究所 主任研究員



図一 材料の応力ひずみ曲線

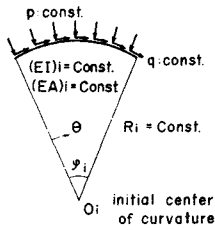
b) 断面の応力状態が、非弾性域に入った後も、平面保持の法則が成立する。

c) 断面の図心を連ねた線をもってアーチの軸線を代表させる。

d) アーチの

軸線は連続な曲線をなす。ただし、軸線を適当な長さの要素に分割するとき、二つの軸線要素の隣接点で接線の傾斜角の不連続があっても差し支えない(後出の図一6参照)。

e) 適当に分割された棒要素内では、変形前の曲率 K_0 、伸び剛性 EA および曲げ剛性 EI は一定である。またこの要素に変形前のアーチ軸に関して法線方向および接線方向に作用する荷重 p および q は要素内軸線上で等分布する(図二参照)。



Finite element of arch axis
図二 アーチ軸線要素

f) アーチ軸線に作用する荷重は、変形後あるいは座屈後もその作用方向を変えない。

g) 曲げモーメントおよび軸力は、適当に分割された要素内では一定である。

h) せん断変形の影響を無視する。

図二は、分割された軸線の第 i 要素(曲率半径 R_i の円弧)と、これに作用する荷重を表わしている。また解析に用いた主な記号は、次のとおりである。

q_n, q_t : 変形後の軸線に関してそれぞれ法線方向および接線方向に作用する分布荷重
 M, Q, N : 任意断面の曲げモーメント, せん断力および軸力

R, ρ : 変形前および変形後の曲率半径
 $K_0=1/R, K_\xi=1/\rho$: 変形前および変形後の曲率
 v, w : 変形前のアーチ軸に関し法線方向および接線方向の変位成分
 σ_F, ε_F : 降伏点応力度および降伏ひずみ
 $M_F=\sigma_F W$: 純曲げによる降伏曲げモーメント (W は断面係数)
 $N_F=\sigma_F A$: 軸力のみによる全断面降伏力 (A は断

面積)

$\phi=K_\xi-K_0$: アーチ軸線の曲率変化

ε : アーチ軸線の軸方向ひずみ

EI, EA : 断面の応力状態が完全弾性範囲内にある場合の曲げ剛性および伸び剛性

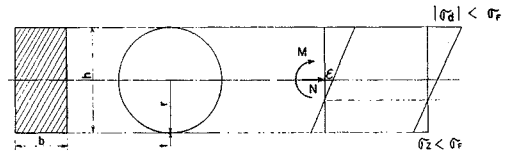
$\phi_F=M_F/EI$: 純曲げにより降伏に達した時の曲率変化

$m=|M|/M_F$: 無次元化した曲げモーメント

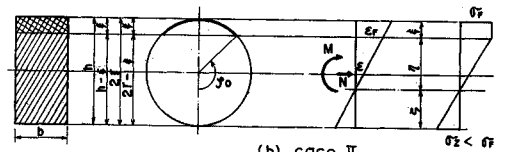
$s=|N|/N_F$: 無次元化した軸力

(2) 曲げモーメントと軸力に対する曲率の変化と軸線のひずみの関係 ($M-N-\phi-\varepsilon$ の関係)

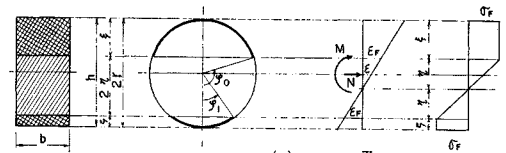
アーチの面内非弾性座屈および終局耐力の解析を行うには、まず断面が非弾性域に入った後の曲げモーメントと軸力に対するアーチ軸線の曲率の変化とひずみの関係(いわゆる $M-N-\phi-\varepsilon$ の関係)を導く必要がある。この関係は、周知のように断面の応力分布と曲げモーメントおよび軸力との平衡関係から導かれる。平面保持の法則が成立するとし、残留応力およびひずみ硬化の影響を無視すると、簡単な断面に対しては比較的容易にこの関係を導びくことができる。本文では、応力とひずみの関係を図一のように完全弾塑性体とし、図三に示す



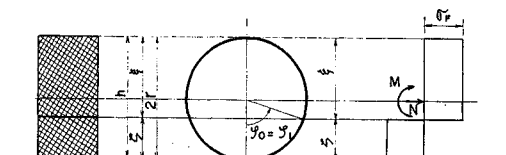
(a) case I



(b) case II



(c) case III



(d) case IV

図三 断面の応力状態

表-1 各断面の $M-N-\phi-\varepsilon$ の関係

(a) 矩形断面の $M-N-\phi-\varepsilon$ の関係

ケース	条 件	ϕ と ε の計算式	α と β の計算式
I	$0 < m \leq 1-s$	$ \phi = \frac{2\varepsilon F}{h} m$ $ \varepsilon = \varepsilon_F \cdot s$	$\alpha = 1$ $\beta = 1$
II	$1-s < m \leq (1+2s)(1-s)$	$ \phi = 8 \frac{\varepsilon F}{h} \frac{(1-s)}{\left(3 - \frac{m}{1-s}\right)^2}$ $ \varepsilon = \varepsilon_F \left[1 - 4 \frac{2(1-s) - m}{\left(3 - \frac{m}{1-s}\right)^2} \right]$	$\alpha = \frac{m \left(3 - \frac{m}{1-s}\right)^2}{4(1-s)}$ $\beta = \frac{s}{\left[1 - 4 \frac{2(1-s) - m}{\left(3 - \frac{m}{1-s}\right)^2} \right]}$
III	$(1+2s)(1-s) < m < \frac{3}{2}(1-s^2)$	$ \phi = \frac{2\varepsilon F}{h\sqrt{3(1-s^2)-2m}}$ $ \varepsilon = \frac{s\varepsilon F}{\sqrt{3(1-s^2)-2m}}$	$\alpha = m\sqrt{3(1-s^2)-2m}$ $\beta = \sqrt{3(1-s^2)-2m}$

(b) パイプ断面の $M-N-\phi-\varepsilon$ の関係

ケース	条 件	ϕ と ε の計算式	α と β の計算式
I	$0 < m \leq 1-s$	$ \phi = \frac{\varepsilon F}{r} m$ $ \varepsilon = \varepsilon_F \cdot s$	$\alpha = 1$ $\beta = 1$
II*	$1-s < m \leq \frac{2}{\pi} \frac{\varphi_0 - \frac{1}{2} \sin 2\varphi_0}{1 - \cos \varphi_0}$	$ \phi = \frac{\varepsilon F}{r} \frac{\pi(1-s)}{(\sin \varphi_0 - \varphi_0 \cos \varphi_0)}$ $ \varepsilon = \varepsilon_F \left\{ 1 + \frac{\pi(1-s) \cos \varphi_0}{(\sin \varphi_0 - \varphi_0 \cos \varphi_0)} \right\}$	$\alpha = \frac{m(\sin \varphi_0 - \varphi_0 \cos \varphi_0)}{\pi(1-s)}$ $\beta = \frac{s}{\left\{ 1 + \frac{\pi(1-s) \cos \varphi_0}{(\sin \varphi_0 - \varphi_0 \cos \varphi_0)} \right\}}$
III**	$\frac{2}{\pi} \frac{\varphi_0 - \frac{1}{2} \sin 2\varphi_0}{1 - \cos \varphi_0} < m < \frac{4}{\pi} \cos\left(\frac{\pi}{2}s\right)$	$ \phi = \frac{\varepsilon F}{r} \frac{2}{\cos \varphi_1 - \cos \varphi_0}$ $ \varepsilon = \varepsilon_F \frac{\cos \varphi_1 + \cos \varphi_0}{\cos \varphi_1 - \cos \varphi_0}$	$\alpha = \frac{m}{2} (\cos \varphi_1 - \cos \varphi_0)$ $\beta = -\frac{s(\cos \varphi_1 - \cos \varphi_0)}{\cos \varphi_1 + \cos \varphi_0}$

* $\frac{\varphi_0 - \frac{1}{2} \sin 2\varphi_0}{\sin \varphi_0 - \varphi_0 \cos \varphi_0} = \frac{m}{1-s}$

** $\frac{(\varphi_0 - \varphi_1) - \frac{1}{2} (\sin 2\varphi_0 - \sin 2\varphi_1)}{(\sin \varphi_0 - \sin \varphi_1) - (\varphi_0 \cos \varphi_0 - \varphi_1 \cos \varphi_1)} = \frac{m}{1-s}$
 $(\sin \varphi_0 - \sin \varphi_1) - (\varphi_0 \cos \varphi_0 - \varphi_1 \cos \varphi_1) + (\pi/2)(1-s)(\cos \varphi_0 - \cos \varphi_1) = 0$

(c) 箱型断面の $M-N-\phi-\varepsilon$ の関係

ケース	条 件	ϕ と ε の計算式	α と β の計算式
I	$0 < m \leq 1-s$	$ \phi = \frac{2\varepsilon F}{h} m$ $ \varepsilon = \varepsilon_F \cdot s$	$\alpha = 1$ $\beta = 1$
II*	$1-s < m \leq 1 + \frac{1+\rho}{1+3\rho} s - 2 \frac{(1+\rho)^2 s^2}{1+3\rho}$	$ \phi = \frac{2\varepsilon F}{h} \phi_2$ $ \varepsilon = \varepsilon_F (1 - \phi_2(W_4 - 1))$ $ \phi_2 = \frac{W_1}{W_2 + \sqrt{W_2^2 + 4W_1W_3\rho^2}}$	$\alpha = \frac{m}{\phi_2}$ $\beta = \frac{s}{1 - \phi_2(W_4 - 1)}$
III	$1 + \frac{1+\rho}{1+3\rho} s - 2 \frac{(1+\rho)^2 s^2}{1+3\rho} < m$ $< \frac{3}{2} \left\{ \frac{1+2\rho}{1+3\rho} - \frac{(1+\rho)^2}{1+3\rho} s^2 \right\} s < \frac{1}{1+\rho}$ のとき $< 3 \frac{1+\rho}{1+3\rho} (1-s) \quad s > \frac{1}{1+\rho}$ のとき	$ \phi = \frac{2\varepsilon F}{h} \phi_3$ $ \varepsilon = \varepsilon_F (1+\rho) s \phi_3$ $\phi_3 = \frac{1}{\sqrt{3-3s^2(1+\rho)^2 - 2(1+3\rho)m + 6\rho}}$	$\alpha = \frac{m}{\phi_3}$ $\beta = \frac{1}{(1+\rho)\phi_3}$

* $W_1 = 8(1-s)^2(1+\rho)^3$
 $W_2 = \{3(1+\rho)^2(1-s) - (1+3\rho)m\}^2 - \{3(1+\rho)(1-s)\rho\}^2$
 $W_3 = 3(1+\rho)(1-s) - (1+3\rho)m$
 $W_4 = \sqrt{\rho^2 + 4(1+\rho)(1-s)\rho} / \phi_2 - \rho$
 $\rho = A_F/A_W \quad A_F$: フランジ断面積 A_W : ウェブ断面積 h : 断面高さ

ように、残留応力の影響を無視した長方形断面、パイプ断面およびフランジ厚さを断面の高さに比し無視できるとした箱型断面（H型断面でも同様）を解析の対象としている。

既往の研究においては、ひずみ硬化や残留応力を考慮したサンドイッチ断面の $M-N-\phi-\varepsilon$ の関係⁶⁾、あるいは、長方形、H型、箱型などの断面につき、これらを簡単なモデルに置換し、また bi-linear の形に仮定された応力-ひずみ関係を用いてひずみ硬化の影響を考慮した $M-N-\phi-\varepsilon$ の関係¹¹⁾ が求められている。いずれも曲率の変化および軸線のひずみが、それぞれ曲げモーメントと軸力の関数として表わされているものである。さらに、最近では、残留応力およびひずみ硬化の影響を考慮した任意断面の $M-N-\phi-\varepsilon$ の関係を、部材断面を微小な要素に分割し、それぞれの微小要素が、ある仮定した応力-ひずみ関係を有するものとして数値的に求める方法が提案されている^{12),13)}。

このように、何らかの方法で $M-N-\phi-\varepsilon$ の関係が得られれば、以下に述べる本文の手法を用いて、残留応力やひずみ硬化の影響をも考慮したアーチの非弾性座屈や終局耐荷力の解析が原理的には可能である。

さて、残留応力およびひずみ硬化の影響を無視すると、断面の応力状態は、完全に弾性範囲にある場合（図-3(a), case I）、圧縮側縁のみ降伏した第1次弾塑性状態（図-3(b), case II）、圧縮側縁引張側縁ともに降伏した第2次弾塑性状態（図-3(c), case III）、および断面のすべてが降伏した完全塑性状態（図-3(d), case IV）の4段階にわけられる。これらの応力状態におけるそれぞれの $M-N-\phi-\varepsilon$ の関係を表-1(a)（長方形断面）^{5),6)}、表-1(b)（パイプ断面）⁵⁾ および表-1(c)（箱型断面）^{5),10)} に示す。表-1(c)において、 $\phi_2 = \phi_2/\phi_F$ 、 $\phi_3 = \phi_3/\phi_F$ であり、ここで ϕ_2 および ϕ_3 は、それぞれ case II および case III における軸線の曲率変化である。また表-1における α, β は、それぞれ曲げ剛性および伸び剛性の減少率を表わしており、文献6)における μ および ν と同等である。 α および β は、それぞれ次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= \frac{M}{\phi} \cdot \frac{\phi_F}{M_F} = \frac{M}{M_F} \cdot \frac{\phi_F}{\phi} = m \left| \frac{\phi_F}{\phi} \right| \\ \beta &= \frac{N}{\varepsilon} \cdot \frac{\varepsilon_F}{N_F} = \frac{N}{N_F} \cdot \frac{\varepsilon_F}{\varepsilon} = s \left| \frac{\varepsilon_F}{\varepsilon} \right| \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(1 \cdot a, b)$$

(3) 非弾性座屈および終局耐荷力の解析

図-4 のように、アーチ部材の微小要素をとり出し、変形後の状態で断面力と荷重のつり合いを考えると、 η

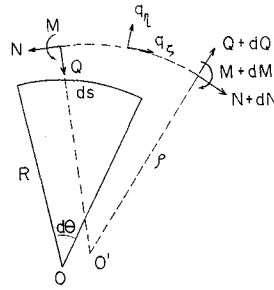


図-4 アーチ微小要素に作用する荷重と断面力

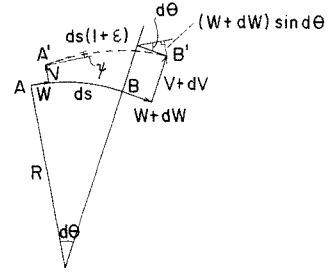


図-5 アーチ微小要素の変位

方向、 ζ 方向およびモーメントのつり合いより次の3式が得られる。

$$\frac{dQ}{dS} - K_\xi N + q_\eta = 0 \dots\dots\dots(2)$$

$$\frac{dN}{dS} + K_\xi Q + q_\zeta = 0 \dots\dots\dots(3)$$

$$\frac{dM}{dS} - Q = 0 \dots\dots\dots(4)$$

式(2),(3)および(4)より Q を消去すると次式を得る。

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2M}{dS^2} - K_\xi N + q_\eta = 0 \\ \frac{dN}{dS} + K_\xi \left(\frac{dM}{dS} \right) + q_\zeta = 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(5 \cdot a, b)$$

断面力 M と N は直線ばりの場合と同様、非弾性域も含めて前節の $M-N-\phi-\varepsilon$ 関係より次のように表わされる。

$$\left. \begin{aligned} M &= \alpha EI (K_\xi - K_0) \\ N &= \beta EA \varepsilon \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(6 \cdot a, b)$$

また図-5より、軸線の伸びひずみ ε とたわみ角 ψ は

$$\varepsilon = \frac{dw}{dS} + K_0 v \dots\dots\dots(7)$$

$$\psi = \frac{dv}{dS} - K_0 w \dots\dots\dots(8)$$

で与えられる。

曲率の変化は

$$K_\xi - K_0 = \frac{d}{dS} (-\psi) = K_0 \frac{dw}{dS} - \frac{d^2v}{dS^2}$$

したがって変形後の曲率 K_ξ は

$$K_\xi = K_0 - \frac{d^2v}{dS^2} + K_0 \frac{dw}{dS} \dots\dots\dots(9)$$

で与えられる。式(7),(9)を式(6)に代入すると M および N は変位 v, w の関数として次のように表わされる。

$$\left. \begin{aligned} M &= \alpha EI \left(K_0 \frac{dw}{dS} - \frac{d^2v}{dS^2} \right) \\ N &= \beta EA \left(K_0 v + \frac{dw}{dS} \right) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(10 \cdot a, b)$$

式 (9) および式 (10・a, b) を式 (5・a, b) に代入すると

$$\left. \begin{aligned} & \frac{1}{\beta EA K_0 (1+\tau)} [\alpha EI (K_0 w' - v'')]'' - w' - K_0 v \\ & = -\frac{q_v}{\beta EA K_0} \left(1 + \frac{v''}{K_0} - w'\right) \\ & \frac{1}{K_0 (1+\tau)} [\beta EA (w' + K_0 v)]' \\ & \quad + [\alpha EI (K_0 w' - v'')] ' \\ & = -\frac{q_c}{K_0} \left(1 + \frac{v''}{K_0} - w'\right) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (11 \cdot a, b)$$

が得られる。ここに ()' は、軸線に沿う座標 S に関する微分を表わす。また、 τ は無次元化された曲げモーメントを表わし、次式で与えられる。

$$\tau = \frac{MR}{\alpha EI} = \frac{dw}{dS} - \frac{1}{K_0} \frac{d^2v}{dS^2} \dots\dots\dots (12)$$

仮定 f) より、変形後のアーチ軸線に関して法線方向の荷重 q_v および接線方向の荷重 q_c は、それぞれ次のように与えられる¹⁾。

$$\left. \begin{aligned} q_v &= -p - q\psi = -p - q(v' - w/R) \\ q_c &= -p\psi + q = -p(v' - w/R) + q \end{aligned} \right\} \dots\dots (13 \cdot a, b)$$

式 (13) を式 (11) に代入して整理すると、仮定 e) より棒要素に関する基礎方程式が、次のように得られる。

$$\left. \begin{aligned} & \frac{1}{1+\tau} \frac{d^3w}{d\theta^3} + (\lambda - \bar{a}^2) \frac{dw}{d\theta} + \mu w - \frac{1}{1+\tau} \frac{d^4v}{d\theta^4} \\ & \quad - \lambda \frac{d^2v}{d\theta^2} - \mu \frac{dv}{d\theta} - \bar{a}^2 v = \lambda R \\ & \left\{ \frac{\bar{a}^2}{1+\tau} + 1 \right\} \frac{d^2w}{d\theta^2} - \mu \frac{dw}{d\theta} + \lambda w - \frac{d^3v}{d\theta^3} \\ & \quad + \mu \frac{d^2v}{d\theta^2} + \left\{ \frac{\bar{a}^2}{1+\tau} - \lambda \right\} \frac{dv}{d\theta} = -\mu R \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (14 \cdot a, b)$$

ここに

$$\lambda = \frac{pR^3}{\alpha EI}, \quad \mu = \frac{qR^3}{\alpha EI}, \quad \bar{a} = \sqrt{\frac{\beta R^2 A}{\alpha I}} \dots\dots\dots (15 \cdot a, b, c)$$

で、 λ と μ は無次元化された荷重を、 \bar{a} はアーチ棒要素の細長比を表わす量となる。

式 (14) が、本文の基礎方程式であるが、ここには、式 (12) で与えられる無次元化した曲げモーメント τ および、曲げモーメントと軸力の関数である曲げ剛性の減少率 α 、伸び剛性の減少率 β が含まれている。 τ は、座屈前の変形の影響を表わすパラメーターの役割を果たしている。仮定 g) より、 τ および α, β は、要素内でそれぞれ一定とすることができるが、未知数であるので、荷重の漸増過程の各段階で、 τ および α, β が収束するまで計算を繰り返す必要がある。式 (14) を、そのまま解

析的に解くのは困難であるので、文献 1) で用いたものと同じ手法、すなわち式 (3), (4), (6・a), (8), (9) および (14・a, b) を 1 階の常微分方程式群に変換し、それらを行列表示したうえで、その係数をべき級数展開するという手法を用いて格間伝達マトリックスを導いた。

伝達マトリックス法の手法により、状態量ベクトルを $Z(\theta) = \{w, v, \psi, M, Q, N, 1\}^T \dots\dots\dots (16)$ (t は転置を示す)

と定義する時、第 i 要素の格間伝達マトリックスは

$$\left. \begin{aligned} U_i &= \begin{bmatrix} S_i & S_i \int_0^\theta S_i^{-1}(\theta) \cdot L_i d\theta \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ S_i &= I + A_i \varphi + \frac{1}{2!} (A_i \varphi)^2 + \dots + \frac{1}{n!} (A_i \varphi)^n \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (17)$$

で与えられる^{1), 15)}。

ここに

$$\begin{aligned} A_i &= \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & R/\beta EA \\ 1 & 0 & R & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -R/\alpha EI & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & R & 0 \\ 0 & 0 & qR(1+\tau) - pR^2(1+\tau)/\alpha EI & 0 & 0 & (1+\tau) \\ 0 & 0 & pR(1+\tau) & qR^2(1+\tau)/\alpha EI & -(1+\tau) & 0 \end{bmatrix} \\ L_i &= \{0, 0, 0, 0, pR(1+\tau), -qR(1+\tau)\}^T \end{aligned}$$

である (I は A と同次の単位マトリックスである)。

また、図-6 のように 2 つの要素が隣接する接点 j で軸線の接線傾斜角が不連続になる場合にはここで格点伝達マトリックス

$$P_j = (U_i)_{R=0} \dots\dots\dots (18)$$

を導入する¹⁾。

これらの伝達マトリックスを用いることにより、文献 1) と同様の所論により、アーチ左端の状態量ベクトルの未知要素を決定するための連立方程式が

$$B X = Y \dots\dots\dots (19)$$

の形で得られる。境界条件によりマトリックス B およびベクトル X, Y の要素は様々な値をとるが、たとえば 2 ヒンジアーチの場合には、

$$X = \{\psi_0, Q_0, N_0\}^T, \quad Y = -\{t_{17}, t_{27}, t_{47}\}^T$$

$$B = \begin{bmatrix} t_{13}, t_{15}, t_{16} \\ t_{23}, t_{25}, t_{26} \\ t_{43}, t_{45}, t_{46} \end{bmatrix}$$

となる。ただし t_{ij} は、マトリックス

$$T = U_n P_{n-1} U_{n-1} \dots U_i P_{i-1} U_{i-1} \dots P_1 U_1 \dots\dots (20)$$

の i 行 j 列要素である (n は軸線の分割数である)。

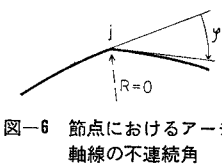


図-6 節点におけるアーチ軸線の不連続角

座屈条件式は、式 (19) の同次式

$$BX=0 \dots\dots\dots(21)$$

において

$$\text{determ.}|B|=0 \dots\dots\dots(22)$$

とすることによって得られる。

(4) 計算の手順

計算プログラムの概略の流れを 図-7 に示した。図-7 において (a) は全体の流れを、(b) は (a) の斜線部分の流れを示している。具体的な計算の手順は以下のとおりである。

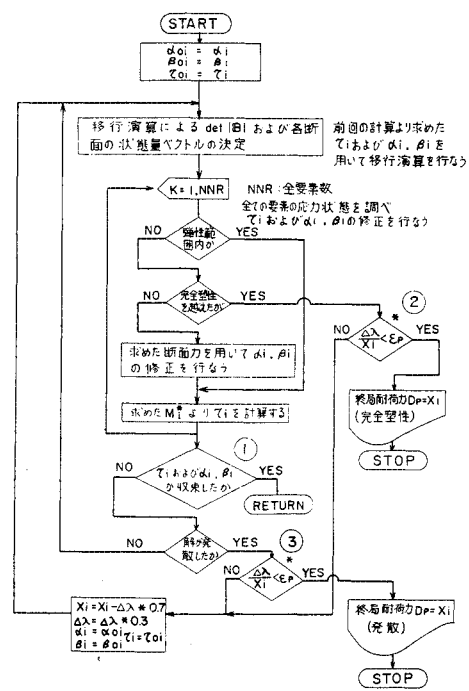
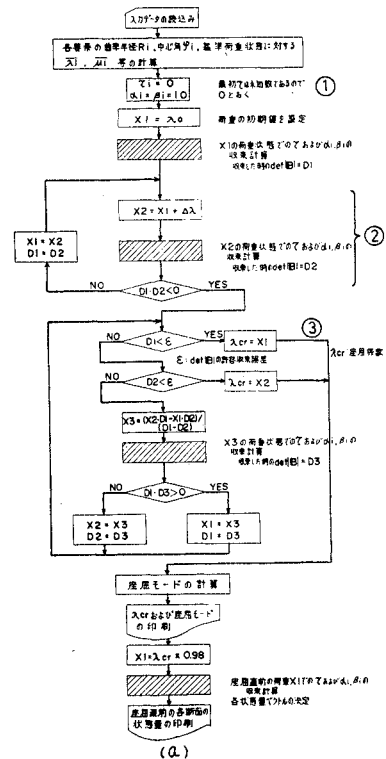
1. 最初はすべての断面が弾性範囲内にあるとする。このとき、すべての要素内で $\alpha_i = \beta_i = 1.0$ である。また τ_i は 0 とする (図-7(a) の ①)。

2. 弾性解析と同様の手順で荷重を漸増させ、その都度 τ の収束計算を行う (図-7(a) の ②)。その都度、各断面での応力状態が、図-3 に示したいずれの状態にあるかの判定を行う。応力状態が、非弾性域 (図-3(b) あるいは (c)) に達している断面では、表-1 に示した計算式により、 α_i, β_i の修正を行う。荷重を一定に保ったまま、あらたに修正された α_i, β_i を用いて各断面での変位および断面力を計算する。こうして求めた断面力 M_i, N_i の組合せに対し、 α_i, β_i を求めなおし、 α_i, β_i が収束するまで計算を繰り返す (図-7(b) の ①)。

3. 各要素内における τ_i および α_i, β_i が収束すれば荷重を漸増させ 2. の計算を繰り返す (図-7(a) の ②)。

4. 限界荷重の決定は 2 通りの判定をもって行われる。ひとつは、分岐座屈荷重の判定であり、これは各荷重における座屈条件式 (式 (22)) の Determinant を計算し、これが 0 となる荷重をもって決定できる (図-7(a) の ③)。いまひとつは、終局耐荷力の判定であり、これは断面の応力状態が完全塑性状態に達する荷重 (図-7(b) の ②)、あるいは変位が発散する荷重 (図-7(b) の ③) をもって終局耐荷力とするものである。本文では、分割された要素内では曲げモーメントおよび軸力は一定としているので、実際の計算では要素両端の曲げモーメントおよび軸力の平均値をもって、その要素の曲げモーメントおよび軸力としている。この平均化した曲げモーメントおよび軸力を用いて応力状態の判定を行っている。この判定はひとつ以上の要素内においてすべて完全塑性状態に達した時に完全塑性による終局状態に達したとみなしていることになる。

なお、固定アーチの場合には、荷重が限界荷重に達する前に、一般にアーチの両端もしくはどちらかの端部断面において全断面が降伏し、塑性ヒンジが形成される。したがって、アーチ左端の未知量を決定するための連立方程式 (19) および座屈条件式 (22) の修正が必要であ



* 限界荷重が先分収束したかどうかの判定を行っている。
εp は限界荷重の許容相対誤差

(b) 図-7 計算プログラムのフローチャート

る。一例として左側端部のみに塑性ヒンジが形成された場合について、式 (19) における B, X, Y の内容を具体的に示すと次のとおりである。

$$X = \{\psi_0, Q_0, N_0\}^T$$

$$B = \begin{bmatrix} l_{13} & l_{15} & l_{16} \\ l_{23} & l_{25} & l_{26} \\ l_{33} & l_{35} & l_{36} \end{bmatrix}, Y = - \begin{bmatrix} l_{17} \\ l_{27} \\ l_{37} \end{bmatrix} + M_{p0} \begin{bmatrix} l_{14} \\ l_{24} \\ l_{34} \end{bmatrix}$$

ここで M_{p0} は、完全塑性に達した時の左側支点の曲げモーメントで、軸力 N_0 の関数であり、前回計算した左側支点における軸力を用いて計算できる。

3. 数値計算

(1) 限界状態の種類

アーチが漸増する面内荷重を受けるとき、その限界状態は、次の3種類に分類される。ただし、ここでは面外への座屈は考えない。

- I V_H : 弾性座屈
- II V_P : 非弾性座屈
- III D_P : 非弾性不安定による崩壊 (終局耐荷力)

ここで V_H および V_P は、いわゆるつり合い分岐とよばれる状態である。非対称荷重を受ける場合は、つり合い分岐を生じることなく荷重の増大とともに変形も一意的に増大し、最大荷重に至って、非弾性不安定現象を生じて崩壊する。対称なアーチが対称荷重を受ける場合には、一般に非弾性不安定現象を生じる前につり合い分岐点が存在し、弾性座屈もしくは非弾性座屈現象により崩壊に至る。

(2) 解の精度の照査

a) 軸線の分割数による影響

本文の解析法では、2.(1)の仮定 e) および g) を前提としている。したがって一般のアーチについて、解を

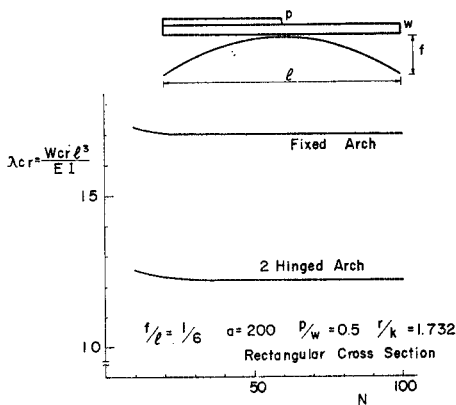


図-8 限界係数と分割数の関係

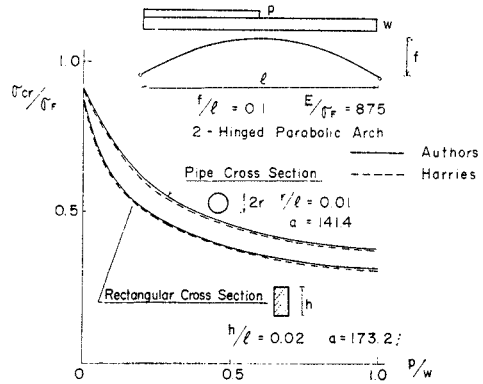


図-9 Harries の解との比較

求めるには、これらの前提条件を満足するよう十分な数に軸線を分割する必要がある。図-8 は、分割数が解の精度におよぼす影響を調べるための計算の一例である。図において、 $a = l\sqrt{A/I}$ でこれをアーチの細長比とよぶ。また $r = \sqrt{I/A}$ および $k = W/A$ は、それぞれアーチ断面の回転半径および核半径である。図の縦軸には、満載等分布荷重に対する限界係数 $\lambda_{cr} = w_{cr} l^3 / EI$ 、横軸には、軸線の分割数 N をとっている。この場合の崩壊形式は、いずれも D_P である。図-8 より2ヒンジャーチおよび固定アーチともに分割数 30 以上で十分な精度の解が得られるといえよう。したがって以下の計算例では、すべて分割数 40 で計算を行った。

b) Harries⁵⁾ の解との比較

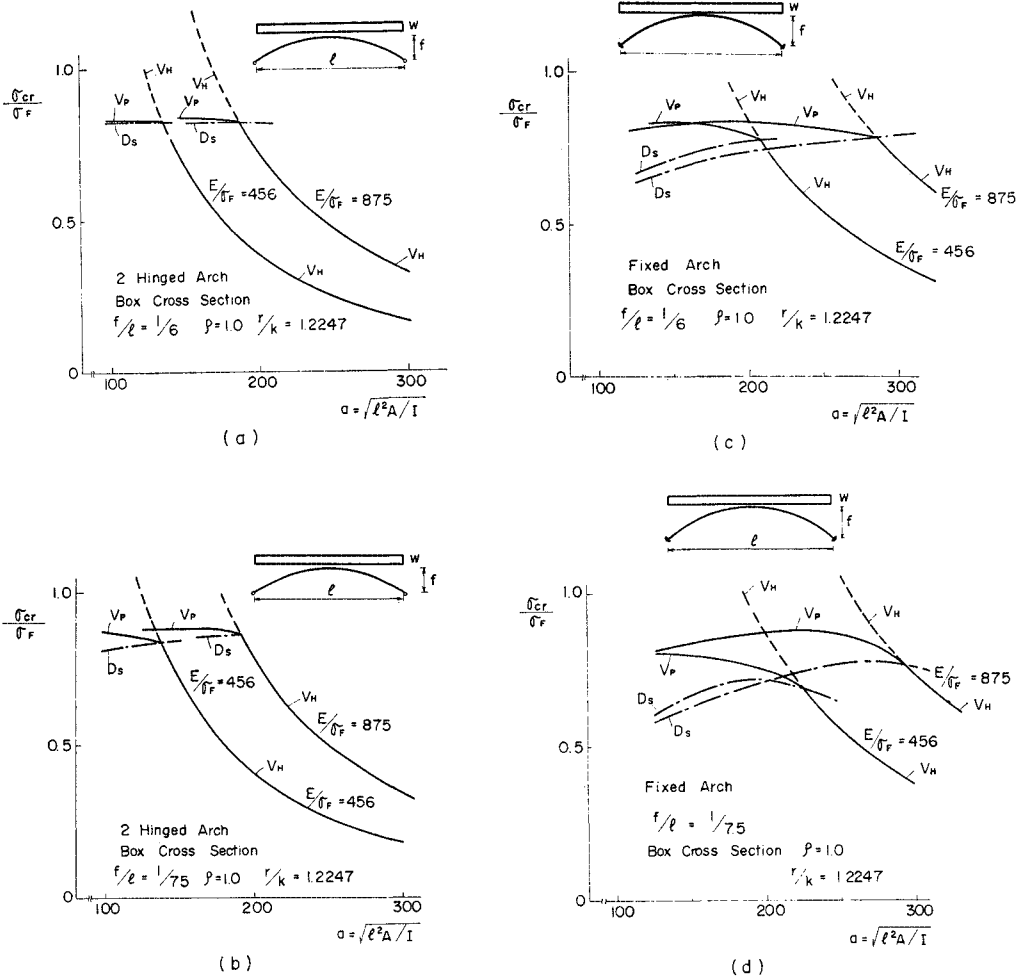
Harries は、アーチ軸線の変形および断面の非弾性域のひろがりやを考慮した2ヒンジャーチの耐荷力の計算を行っている⁵⁾。図-9 に本文の手法による解と Harries の解との比較を示した。図において σ_{cr} は、限界荷重における水平反力をアーチの平均断面積で除したもので、縦軸はこの σ_{cr} と降伏点応力度 σ_F との比 σ_{cr} / σ_F を示している。ただし、限界荷重と水平反力との関係式は、弾性1次理論による式を用いている。このとき σ_{cr} / σ_F は次式により与えられる。

$$\frac{\sigma_{cr}}{\sigma_F} = \frac{E}{\sigma_F} \lambda_{cr} \frac{(1+0.5 p/w)}{8 \cdot a^2 \cdot f/l} \dots\dots\dots (23)$$

ただし $\lambda_{cr} = w_{cr} l^3 / EI$ で、 w_{cr} は限界荷重時の満載等分布荷重強度である。図-9 より明らかなように、長方形断面およびパイプ断面の場合ともに、本文の手法による計算値と Harries による解とは良く一致しているといえる。

(3) 鉛直等分布荷重をうける放物線アーチの面内座屈

アーチの細長比と座屈応力との関係、あるいは弾性座屈と非弾性座屈の境界となる限界細長比の値といったア



図—10 鉛直等分布荷重を受けるアーチの座屈曲線

一ちの面内座屈特性を論ずるための基礎資料を得ることを目的として、若干の数値計算を行い、結果を 図—10 に示した。これらの計算においては、ライズ・スパン比 f/l を $1/6$ と $1/7.5$ 、弾性係数と降伏点応力度との比 E/σ_F を 875 (SS 41 相当) と 456 (SM 58 相当) のそれぞれ 2 通りとし、またアーチの細長比 $a = l\sqrt{\Delta}/I$ は $100 \sim 300$ の間で変化させて座屈荷重を求めている。断面は箱型とし、フランジ断面積とウェブ断面積の比 $\rho = A_F/A_w$ は 1.0 (正方箱型断面) とした。また 図において、 D_s は応力問題としての限界応力、すなわち断面に生じる最大縁応力度が降伏点応力度に達する時の限界応力を示している。図—10 は中心圧縮柱の座屈曲線 (Column curve) に相当するものと考えられる。図—10 より、弾性・非弾性の境界となる細長比は、2 ヒンジアーチの場合、 $E/\sigma_F = 875$ および 456 のときそれぞれ $a = 185 \sim 190$, $a = 135 \sim 140$ 、固定アーチの場合、 $E/\sigma_F = 875$ および 456 のときそれぞれ $a = 280 \sim 290$, $a = 210$

~ 220 となっている。実際のアーチ橋の細長比は 200 前後であるから、実橋の座屈形式は、2 ヒンジアーチでは V_H もしくは V_H と V_P の境界付近となり、固定アーチでは V_P もしくは V_P と V_H の境界付近となることとわかる。また 2 ヒンジアーチでは V_P と D_s の間に差はあまりみられず、アーチ断面の一部に初めて非弾性域が生じてから終局状態に至るまでの残余耐力はあまり期待できないこと、固定アーチでは V_P と D_s の間にはかなりの差があり残余耐力はかなり期待できることとわかる。本文の計算結果では V_P と D_P の間に差はほとんどみられなかった。 V_P と D_P の値の比較の一例を 表—2 に示す。このように、 V_P と D_P との差が小さい原因は、断面が降伏しはじめると急激に剛度が低下すること、および荷重が V_P に達すると構造系全体が不安定となり急激に降伏が進行することによるものと考えられる。また 図—10 で細長比 a が小さくなって非弾性座屈領域にあるとき、柱の座屈曲線に比べて

表-2 鉛直等分布荷重を受ける放物線アーチの V_P と D_P の比較

$f/l=1/6$ $E/\sigma_F=875$ Box Cross Section $\rho=1.0$ $r/k=1.224$

$\sqrt{FA/I}$	2 Hinged Arch			Fixed Arch			
	125	150	175	225	250	275	
$\lambda_{cr} \frac{w_{cr} l^3}{EI}$	V_P	19.4	28.4	38.8	62.0	76.5	91.9
	D_P	19.8	28.6	38.9	63.7	77.6	92.1
D_P/V_P	1.021	1.007	1.003	1.027	1.014	1.002	

σ_{cr}/σ_F の増加が小さい。これは、アーチ軸線の伸縮を考慮すると、 a が小さくなるほど座屈前に生じる曲げモーメントが大きくなり、このため断面が早期に非弾性域に達するためと考えられる。

(4) 種々の分布荷重を受ける放物線アーチの座屈

アーチの座屈あるいは終局耐荷力は、載荷状態によりどのように影響されるかということは、実用的にもまたアーチの座屈特性を知る上でも重要な問題と考えられる。ここでは、満載等分布荷重 w に加え、部分分布荷重 p がスパン中央部分に作用した時の座屈荷重の計算を行い、結果を図-11 に示した。断面は前節と同じ正方箱型断面とし、 $f/l=1/6$, $E/\sigma_F=875$, $a=200$ とした。図-11 で縦軸は、荷重 p が部分載荷した時 ($l_1 < l$) の座屈係数 $(\lambda_{cr})_p$ と p が満載した時 ($l_1=l$) の座屈係数 $(\lambda_{cr})_f$ との比 $(\lambda_{cr})_p/(\lambda_{cr})_f$ を表わしている。いずれも荷重 w に対する値である。また、横軸は部分分布荷重の載荷長 l_1 とスパン l との比 l_1/l をとっている。ここで $(\lambda_{cr})_f$ は、 w のみが載荷した場合の座屈係数 $\lambda_{cr} = w_{cr} l^3 / EI$ を $(1+p/w)$ で除して求めた値である。図-11 より、 l_1 が $0.2l$ を越えると p が満載した場合より部分載荷した場合の方が座屈耐荷力は小さくなること、 $l_1=0.5l$ 程度の時最も耐荷力が小さくなること、 l_1 が $0.3 \sim 0.7l$ の範囲では載荷長の差による影響はそ

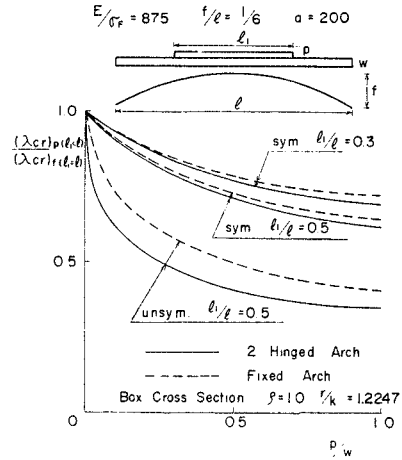


図-12 部分分布荷重をうけるアーチの座屈係数と荷重比との関係

れほど顕著でないこと、 $(\lambda_{cr})_p/(\lambda_{cr})_f$ の値は2ヒンジアーチ、固定アーチともにほぼ等しくなっていることなどがわかる。図-12 には、同じ関係を、横軸に p/w をとって示した。図-11, 12 より p/w が大きくなるにつれ耐荷力は減少することがわかる。図-12 に、満載等分布荷重 w に加え、荷重 p がスパンの片側半分に載荷した場合の値を併記した。図で unsym. として示したものがそれである。図-12 より、荷重 p がスパンの片側半分に載荷した場合に、最も著しく耐荷力が減少し、アーチの耐荷力は、この場合の限界荷重により決定されることがわかる。なお、崩壊形式は、荷重が対称の場合 V_P 、非対称の場合は D_P である。非弾性域の分布状態はアーチの構造諸元などにもよるが載荷条件に大きく影

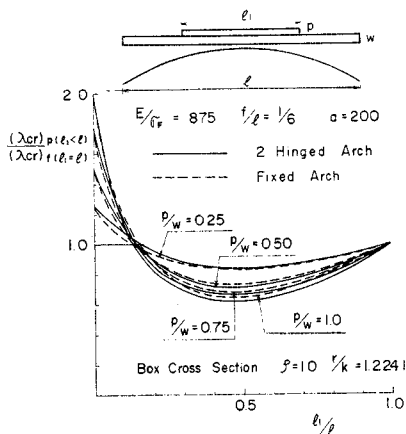


図-11 部分分布荷重をうけるアーチの座屈係数と載荷長との関係

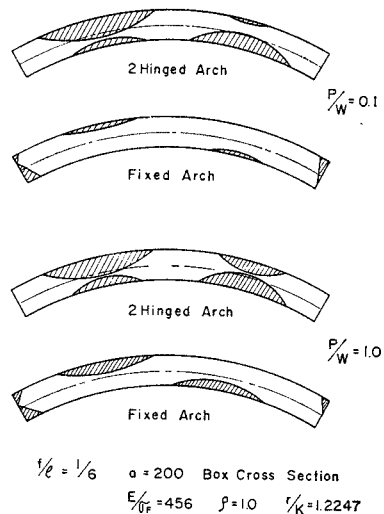


図-13 部分分布荷重半載時の非弾性域の分布状態(終局状態)

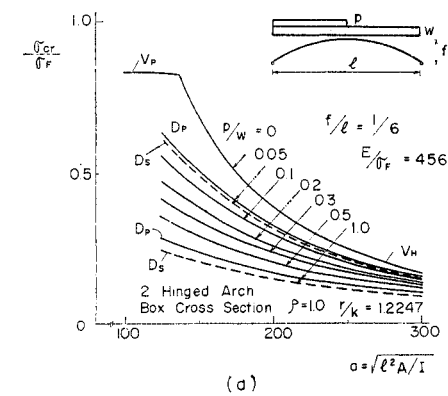
響される。図-13は、満載等分布荷重 w に加え、部分分布荷重 p がスパンの片側半分に載荷した場合の終局状態において、非弾性域がどのように分布しているかを示したものである。2ヒンジアーチでは、スパン 1/4 付近のかなりの領域に非弾性域がひろがっており、この部分から次々と塑性化が進行していくことを示している。一方、固定アーチでは、端部近傍に非弾性域が集中しており、端断面が最初に完全塑性化し、塑性ヒンジが形成された後、次々と隣接する断面に塑性化が進展し、アーチは構造的機能を失うものと考えられる。

(5) 非対称荷重をうけるアーチの耐荷力

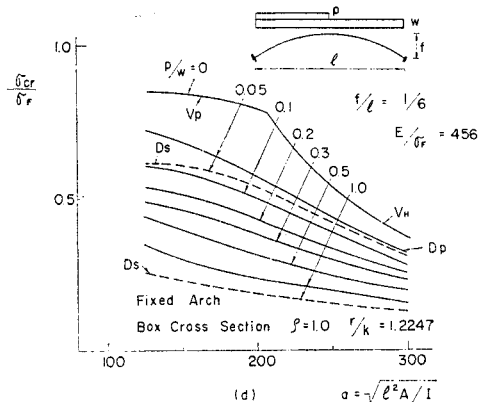
a) 耐荷力曲線

前節にも述べたように、アーチの耐荷力は、部分分布荷重 p がスパンの片側半分に載荷した場合の限界荷重により決定されると考えてよい。そこで、アーチの耐荷力に大きく影響をおよぼすと考えられる、弾性係数と降伏点応力度の比 E/σ_F 、アーチの細長比 $a=l\sqrt{A/I}$ 、ライズスパン比 f/l 、荷重比 p/w の各パラメーターを種々変化させて計算を行い、結果を図-14~17に示した。断

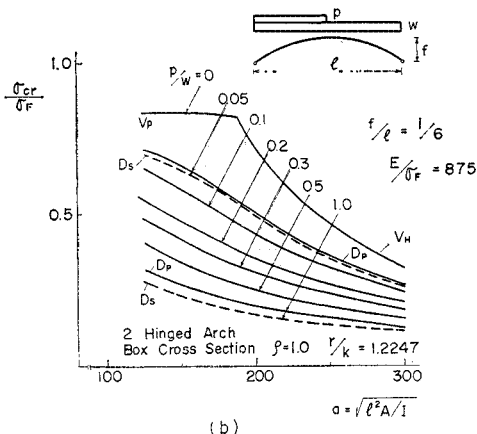
面は前節までと同じ正方箱型断面 ($\rho=1$) とした。図-14~17の縦軸は、式(23)より求めた σ_{cr}/σ_F を示している。図-14の横軸は、アーチの細長比を示している。したがって 図-14は、偏心圧縮柱の座屈曲線と類似の表示とみることができる。このとき、 p/w が偏心圧縮柱の偏心比に相当すると考えられる。また参考のため、図-14には応力問題としての限界応力¹⁾ (D_s) を p/w



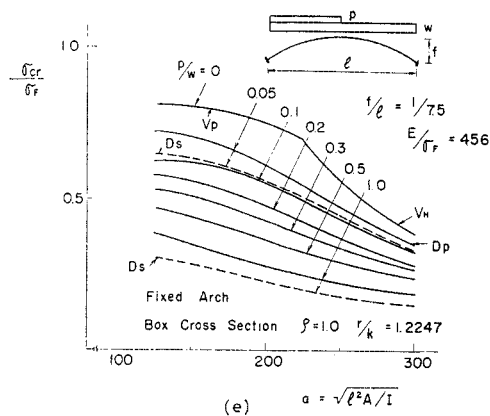
(d)



(d)



(b)



(e)

図-14 部分分布荷重半載時の耐荷力曲線

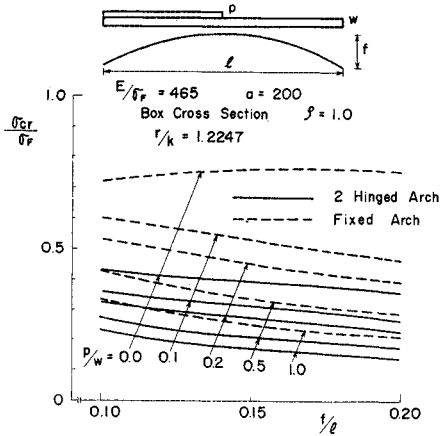


図-15 限界応力とライズ・スパン比との関係

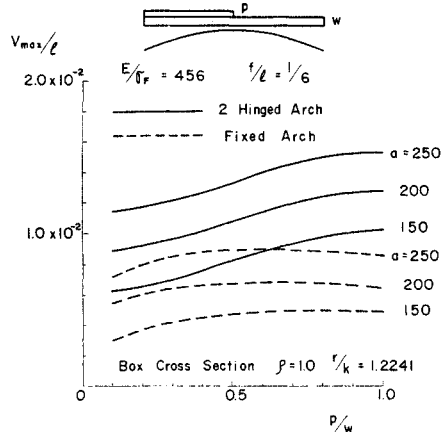


図-18 終局時の法線方向最大変位 v_{max} とスパン l との比 v_{max}/l

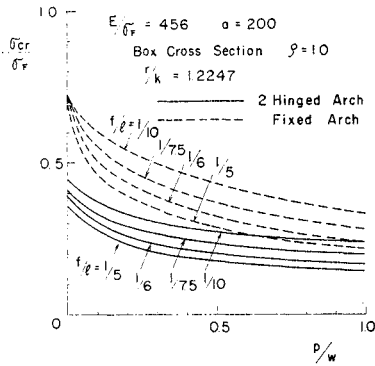


図-16 限界応力と荷重比との関係 ($\alpha=200$ 一定)

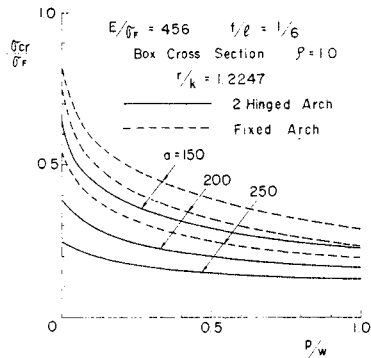


図-17 限界応力と荷重比との関係 ($f/l=1/6$ 一定)

$=0.05, 1.0$ につき破線で示した。図-14 より、2ヒンジアーチの場合には、 D_P と D_S の間にそれほど大きな差はみられず、鉛直等分布荷重をうけるアーチの座屈の場合と同様、剰余耐荷力はそれほど期待できないことがわかる。これに対し、固定アーチの場合には、 D_P と D_S の間には、かなりの差がみられ剰余耐荷力はかなり

期待できると考えられる。図-15 には、細長比 a を一定 ($a=200$) とした場合の σ_{cr}/σ_F と f/l との関係を示した。同じく 図-16 には、 a を一定 ($a=200$) とした時の、 σ_{cr}/σ_F と p/w との関係を示した。図-15,16 から、 f/l が大きくなるにつれ限界応力は減少すること、またその傾向は p/w が大となるほど著しくなることがわかる。図-17 には、 $f/l=1/6$ 一定とし、細長比 a を変化させた時の、 σ_{cr}/σ_F と p/w との関係を示した。図-14 および 図-17 から、限界応力は、 a が大になるほどすなわちアーチがスレンダーになるほど、また p/w が大になるほど減少すること、またその傾向は a および p/w が小のときに著しいことなどがわかる。図-18 に、終局時の法線方向最大変位 v_{max} とスパン l との比 v_{max}/l と p/w との関係を示した。図-18 より、固定アーチは2ヒンジアーチに比べ、小さい変位の時に、終局状態に達することがわかる。また、表-3 に、終局状態 D_P の内容を示した。表-3 において、Div. は変位の発散によること、F.P. は完全塑性化によることを示している。

表-3 終局状態 D_P の内容

a) 2 Hinged Arch					
a	P/W	0.1	0.2	0.5	1.0
150		Div.	Div.	Div.	Div.
200		Div.	Div.	Div.	Div.
250		Div.	Div.	Div.	Div.

b) Fixes Arch					
a	P/W	0.1	0.2	0.5	1.0
150		Div.	F.P.	F.P.	F.P.
200		Div.	Div.	F.P.	F.P.
250		Div.	Div.	Div.	F.P.

b) 変断面固定アーチの耐荷力

本章 (4) のところで述べたように、固定アーチでは

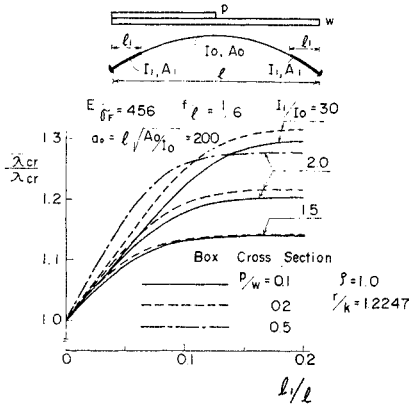


図-19 変断面固定アーチの限界係数と l_1/l との関係

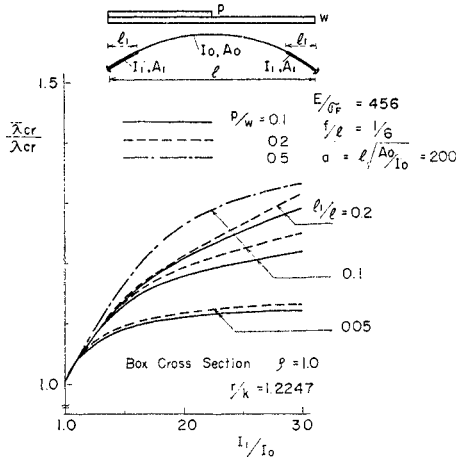


図-20 変断面固定アーチの限界係数と I_1/I_0 との関係

終局状態においても非弾性域は端部近傍のみに集中している。また実際に固定アーチを設計する際も、アーチ全長にわたって等断面とすることはまずなく、基本設計の時点から端部近傍の断面剛度を中央部分より大きく仮定して設計を進めるのが普通である。

そこで、本節では固定アーチの端部の剛度をどの程度増せば最も有効か、また終局耐荷力の増大をどの程度期待できるかということをも明らかにするため、図-19 に示したような変断面固定アーチにつき、 l_1/l および I_1/I_0 を種々変化させて終局耐荷力の計算を行い、結果を図-19~22 に示した。断面 2 次モーメント I 、断面積 A 、断面係数 W の組合せは、次のとおりとした。

I_1/I_0	1.5	2.0	3.0
A_1/A_0	1.3	1.8	2.6
W_1/W_0	1.5	2.0	3.0

これらの図で、縦軸はすべて端部断面剛度を増大させた変断面アーチの座屈係数を $\bar{\lambda}_{cr}$ と

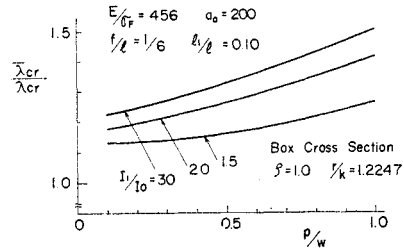


図-21 変断面固定アーチの限界係数と p/w との関係

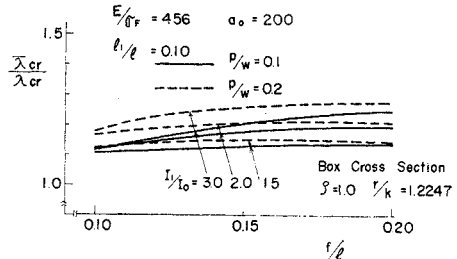


図-22 変断面固定アーチの限界係数と f/l との関係

して、これと等断面 (I_0, A_0, W_0) アーチの座屈係数 λ_{cr} との比 $\bar{\lambda}_{cr}/\lambda_{cr}$ を表わしている。図-19 は、 $\bar{\lambda}_{cr}/\lambda_{cr}$ と l_1/l との関係を示したものであるが、この図より、 $l_1/l < 0.1$ の間は、 $\bar{\lambda}_{cr}/\lambda_{cr}$ の値はほぼ一様に増大するが $l_1/l > 0.1$ では、それほど増大は望めないことがわかる。したがって l_1 は $0.1l$ 程度とするのが最も有効であると考えられる。図-20 は $\bar{\lambda}_{cr}/\lambda_{cr}$ と I_1/I_0 との関係を示したものである。図-19 と同様の考察より、 $I_1 = 2I_0$ 程度とするのが最も有効と考えられる。図-21 は、 $l_1 = 0.1l$ とした時の $\bar{\lambda}_{cr}/\lambda_{cr}$ と p/w との関係を示したもので、 p/w が大となるほど端部断面剛度の増大による効果がより期待できることがわかる。図-19~21 は、 $f/l = 1/6$ に対する値を示したものであるが、図-22 には、 $l_1 = 0.1l$ として、 $\bar{\lambda}_{cr}/\lambda_{cr}$ と f/l との関係を示した。図-22 より、 I_1/I_0 の値が大きい場合は、 f/l の違いによる影響がでてくるが、その影響はそれほど大きくないといえよう。

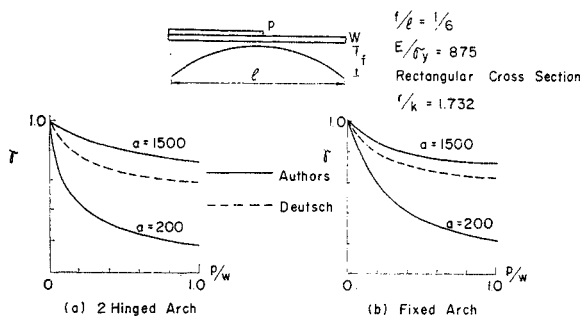


図-23 Deutsch の実験結果との比較

e) Deutsch¹⁶⁾ の実験結果との比較

Deutsch は、部分分布荷重がスパン片側に載荷した場合のアーチの耐荷力の実験を行っている。この種の実験としては数少ない貴重なものであるが、この実験では耐荷力に大きい影響をおよぼすと考えられる弾性係数と降伏点応力度との比 E/σ_F およびアーチの細長比 $a=l\sqrt{A/I}$ とは無関係に実験結果がまとめられており、この意味で Deutsch の実験結果よりアーチの耐荷力特性を論ずるには、問題が多いと考えられる。Deutsch の実験は、スパン 180 cm, 幅 30 mm, 厚さ 4 mm の長方形断面を有する供試体を使用している。この供試体の細長比 $a=l\sqrt{A/I}$ は 1560 となり、かなりスレンダーなアーチとなっている。図-23 に本文の手法により求めた結果 ($E/\sigma_F=875$ として計算) と Deutsch による実験結果との比較を示した。図の縦軸 r は、部分分布荷重半載時の限界水平反力 H_{cr} と等分布荷重満載時の限界水平反力 H_K との比を表わしており、次式で与えられる。

$$r = \frac{H_{cr}}{H_K} = \frac{\lambda_{cr}}{(\lambda_{cr})_{p/w=0}} (1 + 0.5 p/w) \dots \dots (24)$$

式 (24) で λ_{cr} は、満載等分布荷重 w に対する限界係数で $\lambda_{cr} = w_{cr} l^3 / EI$ である。図-23 より、 $a=1500$ の場合は、本文の手法による計算結果と Deutsch の実験結果とは比較的良く一致しているが、 $a=200$ の場合 Deutsch の実験結果よりかなり小さい値が得られている。実際のアーチ橋では、 $a=200$ 前後であるから、Deutsch の実験結果をそのまま実橋の設計に適用するには、かなりの問題があると考えられる。

4. 結 語

本文では、伝達マトリックス法を用いて、アーチ軸線の変形と非弾性域のひろがり考慮したアーチの面内座屈および終局耐荷力の解析を行った。ライズ・スパン比、弾性係数と降伏点応力度の比、部分分布荷重・満載等分布荷重比およびアーチの細長比をパラメーターにとり、種々の載荷状態における 2 ヒンジアーチおよび固定アーチの非弾性分岐座屈および終局耐荷力の計算を行い、非弾性域のひろがり考慮した場合のアーチの耐荷力特性について論じた。また鉛直等分布荷重を満載する場合および非対称荷重をうける場合について直線圧縮柱の座屈曲線に相当する耐荷力曲線を示した。さらに、固定アーチについては端部近傍の剛度を増大させた変断面アーチについて耐荷力の計算を行い、若干の資料を示し

た。

本文では、残留応力やひずみ硬化、またアーチ軸線の初期不整等の影響は考慮していないが、これらの影響を本文の手法にとりこむことは原理的には可能であると考えられる。

また、実験による本理論の検証、さらには実用的な設計公式の確立等が今後の問題として残されているが、これらについても機会をあらためて報告したい。

数値計算は、(株) 神戸製鋼所、コンピューターセンターの IBM S/370-158 によった。

参 考 文 献

- 1) 波田凱夫・新家 徹・頭井 洋：伝達マトリックス法によるアーチの面内弾性座屈および 2 次の応力問題の解析，土木学会論文報告集，No. 224，pp. 1-11，1974-4.
- 2) Namita, Y. : Die Theorie II. Ordnung von krummen Stäben und ihre Anwendung auf das Kipp-Problem des Bogenträgers, Proc. of JSCE, No. 155, pp. 32-41, 1968.
- 3) 山崎徳也・石川信隆：円弧アーチの弾塑性解析，土木学会論文報告集，No. 158，pp. 1-16，1968-10.
- 4) 前田幸雄・藤本一男：2 ヒンジアーチの塑性崩壊荷重の算定について，土木学会論文報告集，No. 174，pp. 25-40，1970-2.
- 5) Harries : Traglasten stählerner Zweigelenkbögen mit ausgebreiteten Fließenzonen, Der Stahlbau, H. 6 und H. 8, 1970.
- 6) Kuranishi, S. and Le-Wu Lu : Load carrying capacity of two-hinged steel arches, Proc. of JSCE, No. 204, 1972.
- 7) Kuranishi, S : Allowable stress for two-hinged arch, Proc. of JSCE, No. 213, pp. 71-75, 1973.
- 8) Handbook of Structural Stability, edited by Column Research Committee of Japan, Corona Publishing Co. Tokyo, pp. 2-72-2-124, 1971.
- 9) Hauuk, G.F. and S.L. Lee : Stability of elasto-plastic wide-flange columns, Jour. of St. Div., Proc. ASCE, Vol. 89 ST 12, 1963-12.
- 10) 牧野 稔：弾塑性域における軸方向力を受ける H 型断面部材の研究，建築学会論文報告集，No. 97, 1964-4.
- 11) 山田 稔・坂恵一他：軸圧をうける H 型鋼柱の弾塑性曲げ変形性状に関する研究，建築学会論文報告集，No. 127, 1966.9.
- 12) 吉田 博・西田 進：変断面 H 型鋼柱の強度と変形，土木学会論文報告集，No. 220, pp. 17-27, 1973-12.
- 13) 五十嵐定義・松井千秋他：繰返し組合せ応力を受ける鋼構造部材断面の弾塑性性状について，建築学会大会学術講演梗概集，pp. 1057-1060, 1969-8.
- 14) Klöppel, K. and K. Lie : Das hinreichende Kriterium für den Verzweigungspunkt des elastischen Gleichgewichts, Der Stahlbau 16 (1943), H. 6/7, S. 17.
- 15) Pestel and Leckie : Matrix Methods in Elasto-mechanics, McGraw-Hill, 1963.
- 16) Deutsch, E. : Das Knicken von Bogenträgern bei unsymmetrischer Belastung, Bauingenieur, 1940-12.

(1975.6.18・受付)