

薄肉曲線桁の伝達行列とその変断面連続 曲線桁橋解析への応用*

TRANSFER MATRIX OF THIN-WALLED CURVED GIRGERS
AND THEIR APPLICATION TO ANALYSIS OF CONTINUOUS
CURVED GIRDER BRIDGES WITH VARIABLE CROSS SECTIONS

深 沢 泰 晴*・小 林 潔**

By Yasuharu FUKASAWA and Kiyoshi KOBAYASHI

要 旨 曲率面に垂直な荷重を受ける一平面内で曲がった薄肉曲線桁の曲げねじれ問題の解析に、Transfer Matrix 法を適用する際、その基礎となる諸方程式を与えた。また、応用例として3径間連続の変断面曲線桁橋を解析し、その変断面特性等についても二、三の検討を試みたものである。

1. はじめに

曲げとねじりを受ける薄肉曲線桁は、鋼構造物の構造要素として、今日随所に使用されているが、最も力学的に単純な両端単純支持の円弧曲線桁の場合でさえ、その計算式は相当複雑であり、設計計算を誤りなく完遂するには、周到な注意力が要求される。まして、任意形状の曲線桁、連続曲線桁、変断面曲線桁、さらには曲線桁を含む立体骨組構造と複雑化するにつれて、設計計算の煩雑さはますます増大するばかりである。

幸い今日では、電子計算機が構造設計にまで普及し、それとともなって、行列演算を基調とした構造解析の手法も、近年目ざましい進歩を遂げた。骨組構造解析の分野でいえば、有限要素法的手法を加味した変位法、および本解析に適用される Transfer Matrix 法などはその好例である。Transfer Matrix 法は扱う行列の次数が小さいので、小型計算機で充分にまかなえるという利点があり、桁落ちによる計算精度の劣化さえ避け得れば、単一桁構造の解析に関する限りでは、最も有力な解析手法といえる。

薄肉曲線桁の曲げねじれ問題の解析に、Transfer Matrix 法を適用した研究は、すでに幾つか発表されている^{1)~8)}。著者の一人である深沢は、曲率面に垂直な荷重を受ける単径間の円弧曲線桁の曲げねじれ問題に対し

て、任意の境界条件の解を求めるのに便利な表式という観点から、まずその Field Matrix を与えた¹⁾。後に、Transfer Matrix 法の適用によっても若干の解析を試みている^{4)~6)}。

G. Becker²⁾ は任意な荷重と支持状態に対する薄肉開断面曲線桁の静的挙動を、曲率面内と面外との連続現象として解析し得る Transfer Matrix を求めた。さらに、断面急変部における連続条件、各種の支点条件等の解析について優れた成果を報告している。ただし、その適用範囲には、桁の断面は曲率面に垂直な軸に関して対称であること、桁を構成する各母線ごとの曲率の差異を無視しているので曲率が厳しい場合には問題があり、またそれに関連して曲率の急変・反転に伴うせん断中心軸の不連続の影響を考慮し得ないなどの制限がある。

筆者らのこの報告は、前記の深沢の研究を総括・発展させることにより、理論的には G. Becker の論文における上述のような適用制限を取り除くとともに、他面では実用性を高める意味あいから、曲率面外への曲げねじれ問題のみを分離して、計算の簡易化をはかろうとするものである。すなわち、円弧曲がりばりの一般的基礎理論^{9)~13)}に基づき、曲率面に垂直な荷重を受ける任意形状断面の円弧曲線桁の面外変形問題を解析し、桁を構成する母線ごとの曲率の変化を考慮した形での Transfer Matrix を与える。

また、応用計算例として、3径間連続の薄肉曲線桁橋の変断面問題を解析し、その特性についても若干の検討を行おうとするものである。

2. 記号および解析上の仮定

桁の断面形の一列を図-1 に示す。また、微小中心角 $d\theta$ に狭まれた桁の微小要素を図-2 に示す。この桁に対して、桁の曲率中心線上の任意点 O' を原点とし、 $\rho-\theta$ 面が桁の曲率面と一致する右手系円柱座標系 ($O'-$

* 第24回および第27回土木学会年次学術講演会にて発表、I-132 (昭和44-9) および I-243 (昭和47-10)。

** 正会員 工博 山梨大学助教授 工学部土木工学科

*** 正会員 工修 三井造船鉄構海洋機器事業部設計部

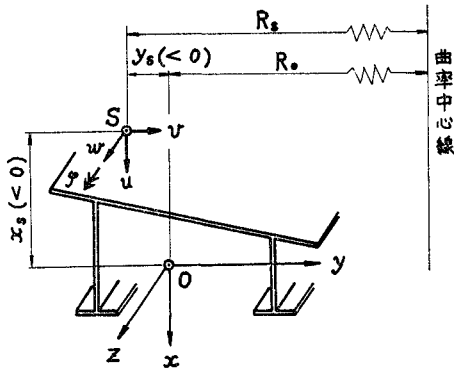


図-1 断面形の一例と座標系および変位

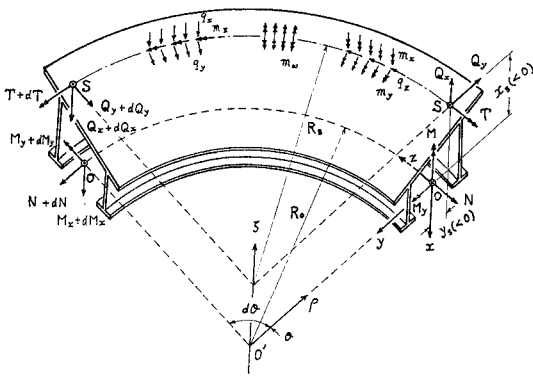


図-2 桁の微小要素に作用する断面力と荷重および座標系

ρ, θ, κ), ならびに桁の断面の中立点¹⁾ O を原点とし, x および y 軸がそれぞれ, κ および ρ 軸の負の方向に一致する直角座標系 ($O-x, y, z$) を設ける。

桁の変位は断面のせん断中心軸の変位で表わす。すなわち, せん断中心 S の x, y, z 方向の変位成分をそれぞれ u, v, w とし, 断面の z 軸まわりの回転角 (ねじれ角) を ϕ とする。これらの正の値の方向を図-1 にベクトルで示す。また, 断面力および荷重についても, その作用点と正の値の方向を同じくベクトルで図-2 に示す。

なお, 図-1 および 2 に示されるように, R_0 は断面の中立点を連ねた軸線の曲率半径であり, R_s はせん断中心軸の曲率半径を表わしている。また, x_s, y_s はせん断中心 S の x, y 座標である。

次に, 以下の解析における仮定および適用制限について列記する。すなわち,

- 1) 変形前の桁は一平面内で曲がっている。
- 2) 桁の断面および曲率はある区間ごとに一定であり, 境界断面では両側の桁の軸線の接線方向は一致する。
- 3) 応力とひずみの間には Hooke の法則が成立する。
- 4) 微小変形理論である。

- 5) 断面形は桁の変形に際して常に保持される。
- 6) 曲げおよび反り拘束に伴なうせん断変形は無視する。
- 7) 桁はその曲率面に垂直な荷重の作用に対して, $N = M_x = 0$ が成り立つように支持されている。

3. 支配方程式

図-2 のような曲線桁の微小要素に作用する力のつり合い方程式は, エネルギー原理に基づいて得られた文献 13) の式 (63), (62) および (40・c) より

$$\left. \begin{aligned} N' - (M_x - y_s N)' / R_s + q_z R_s + m_x &= 0 \\ (M_x - y_s N)'' + N R_s' + q_y R_s^2 - m_x' R_s &= 0 \\ (M_y - x_s N)'' - T_{st}' - M_\omega'' / R_s \\ &\quad + q_x R_s^2 - m_y' R_s + m_\omega' = 0 \\ T_{st}' + M_\omega'' / R_s + M_y - x_s N + m_z R_s - m_\omega' &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (1 \cdot a \sim d)$$

ならびに

$$\left. \begin{aligned} Q_x &= \{(M_y - x_s N)' - T\} / R_s - m_y \\ Q_y &= (M_x - y_s N)' - m_x \\ T &= T_{st} + M_\omega' / R_s - m_\omega \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2 \cdot a \sim c)$$

ここに, N, Q_x, Q_y, M_x, M_y および T は図-2 にベクトルで示された断面力であり, さらに T_{st} および M_ω はそれぞれせん断中心に関する St. Venant のねじりモーメントおよび曲げねじりモーメントである。なお, ()' は θ に関する () の微係数を表わす。

断面力と変形との関係は, 文献 13) の式 (60) および式 (58・d, e) より

$$\left. \begin{aligned} N &= (R_s / R_0) E F (\epsilon_s + y_s \kappa_x + x_s \kappa_y) \\ M_x &= -(R_s / R_0) (E J_x \kappa_x + E J_{xy} \kappa_y) \\ M_y &= -(R_s / R_0) (E J_{xy} \kappa_x + E J_y \kappa_y) \\ M_\omega &= -E C_\omega \theta \\ T_{st} &= G J_{st} \phi \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (3 \cdot a \sim e)$$

ここに, F は断面積, J_x, J_{xy} および J_y は断面の中立点 O を原点とする x, y 軸に関する断面二次モーメント, C_ω および J_{st} はそれぞれせん断中心に関する曲げねじれ定数および St. Venant のねじれ定数である。曲線桁を構成する各母線ごとの曲率の差異を考慮したこれらの計算式については, 文献 11) および 13) を参照されたい。また, 式 (3) の右辺の変形量は次式で表わされる。

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_s &= (w' - v) / R_s \\ \kappa_x &= (v' + w) / R_s^2 \\ \kappa_y &= (u'' + R_s \phi) / R_s^2 \\ \phi &= (\phi - u / R_s)' / R_s \\ \theta &= (\phi - u / R_s)'' / R_s^2 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (4 \cdot a \sim e)$$

ここに, u, v, w はせん断中心 S の x, y, z 軸方向の変位成分, ϕ は断面のねじれ回転角である (図-1 参

照)。

式 (1) に式 (3), (4) を代入して得られる変位表示の微分方程式は、すでに文献 11) および 13) に示されているように相当煩雑である。しかしながら、さいわい次の 2 つの場合には、曲率面外への変形 (u, φ) を曲率面内の変形 (v, w) から分離して解析することができる。すなわち、式 (1), (3) および (4) より明らかなように、

1) 断面の主軸の一つ (y 軸) が曲率面に平行であり、かつその軸が対称軸の場合。すなわち

$$J_{xy}=0, x_s=0 \dots \dots \dots (5 \cdot a, b)$$

2) 式 (5) が満たされない場合でも、荷重 q_x, m_y, m_z および m_w のいずれに対しても

$$N=0, M_x=0 \dots \dots \dots (6 \cdot a, b)$$

が成り立つような支持条件の場合。

さて、1) または 2) の条件が成り立つ場合には、式 (1) および式 (3)~(6) より、両者の場合とも、曲率面外への変形問題の微分方程式は次のように書ける。

$$\left. \begin{aligned} (E\tilde{J}_y R_s^2 + EC_w) u'''' - GJ_{st} R_s^2 u'' \\ - EC_w R_s \varphi'''' + (E\tilde{J}_y + GJ_{st}) R_s^3 \varphi'' \\ - q_x R_s^4 + m_y' R_s^5 - m_w' R_s^4 = 0 \\ - EC_w u'''' + (E\tilde{J}_y + GJ_{st}) R_s^2 u'' \\ + EC_w R_s \varphi'''' - GJ_{st} R_s^3 \varphi'' \\ + E\tilde{J}_y R_s^3 \varphi - m_z R_s^5 + m_w' R_s^4 = 0 \end{aligned} \right\} \dots (7 \cdot a, b)$$

ここに、

$$\tilde{J}_y = \frac{R_s}{R_0} \left(J_y - \frac{J_{xy}^2}{J_x} \right) \dots \dots \dots (8)$$

式 (7) を用いて曲線桁を解析する場合、曲率面内に作用する荷重 (q_y, q_z および m_x) がなくても、桁の支持条件のいかんによっては、前記の 2) の条件が必ずしも成り立たず、したがって理論的には式 (7) を適用できない場合もあることに注意しなければならない²⁴⁾。図-3 は曲線橋の主桁としての曲線桁の代表的な支持条件を示す。一例をあげれば、同図の Type (b) と (c) で支持されたいわゆる単純支持の曲線桁とよばれているもの、あるいは連続桁でも 2 支点が Type (b) と (c) で他の支点はすべて (a) で支持されている場合には、外力のつり合い条件から明らかなように、曲率面内の反力が生じないので、ともに 2) の条件が成り立つ。一方、1 支点が Type (c) で他の支点はすべて Type (b) で支持される連続桁は、2) の条件が成り立たない例である。これについてはさらに 6. で述べる。

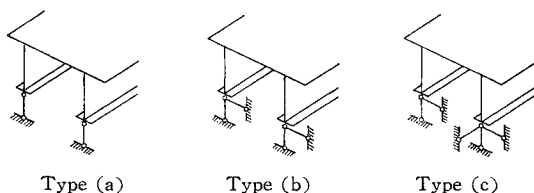


図-3 代表的な支持条件

4. 曲線桁の Field Matrix

一般に Field Matrix は桁の 2 断面間の基本状態量の関係を表わすものであるから、桁のつり合いの微分方程式を知れば、その一般解の積分定数を桁の基本状態量の境界値で表わすことによって求めることができる。それには、微分方程式をラプラス変換で解くのが最も適している。

ラプラス変換のパラメーターを p とし、 $u(\theta)$ および $\varphi(\theta)$ のラプラス変換をそれぞれ $a(p)$ および $\bar{\varphi}(p)$ と書くことにすると、式 (7) から次式が得られる。

$$\left. \begin{aligned} \{ (1+\beta)p^2 - \alpha \} p^2 a(p) - \{ \beta p^2 - (1+\alpha) \} p^2 R_s \bar{\varphi}(p) \\ = \{ (1+\beta)p^2 - \alpha \} p u(0) - (\beta p^2 - \alpha) p R_s \varphi(0) \\ + p^2 R_s \phi_y(0) - \beta p^2 R_s^2 \psi(0) + [p \{ M_w(0) \\ + R_s \bar{m}_w(p) \} - p R_s \{ M_y(0) + R_s \bar{m}_y(p) \} \\ - R_s^2 \{ Q_x(0) - R_s \bar{q}_x(p) \}] \frac{R_s}{E\tilde{J}_y} \\ - \{ \beta p^2 - (1+\alpha) \} p^2 a(p) + (\beta p^4 - \alpha p^2 + 1) R_s \bar{\varphi}(p) \\ = - \{ \beta p^2 - (1+\alpha) \} p u(0) + (\beta p^2 - \alpha) p R_s \varphi(0) \\ + R_s \phi_y(0) + \beta p^2 R_s^2 \psi(0) - [p \{ M_w(0) \\ + R_s \bar{m}_w(p) \} + R_s \{ T(0) - R_s \bar{m}_z(p) \}] \frac{R_s}{E\tilde{J}_y} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (9 \cdot a, b)$$

ここに、 α, β は次式で定義される無次元量である。

$$\alpha = \frac{GJ_{st}}{E\tilde{J}_y}, \quad \beta = \frac{C_w}{R_s^2 \tilde{J}_y} \dots \dots \dots (10 \cdot a, b)$$

また、 ϕ_y はせん断中心軸の y 軸まわりのたわみ角であり

$$\phi_y = u' / R_s \dots \dots \dots (11)$$

さらに、 $\bar{q}_x(p), \bar{m}_y(p), \bar{m}_z(p)$ および $\bar{m}_w(p)$ はそれぞれ荷重 $q_x(\theta), m_y(\theta), m_z(\theta)$ および $m_w(\theta)$ のラプラス変換を表わす。

式 (9) を $a(p), \bar{\varphi}(p)$ について解き、ラプラスの逆変換を施すと、次式が得られる。

$$\left. \begin{aligned} u(\theta) = K_{uu}(\theta) u(0) + K_{u\varphi}(\theta) R_s \varphi(0) + K_{u\phi}(\theta) R_s \phi_y(0) \\ + K_{u\psi}(\theta) R_s^2 \psi(0) + \{ K_{uM}(\theta) M_w(0) \\ + K_{uM}(\theta) R_s M_y(0) + K_{uT}(\theta) R_s T(0) \\ + K_{uQ}(\theta) R_s^2 Q_x(0) + K_{uo}(\theta) R_s^2 \} \frac{R_s}{E\tilde{J}_y} \\ R_s \varphi(\theta) = K_{\varphi u}(\theta) u(0) + K_{\varphi\varphi}(\theta) R_s \varphi(0) \\ + K_{\varphi\phi}(\theta) R_s \phi_y(0) + K_{\varphi\psi}(\theta) R_s^2 \psi(0) \\ + \{ K_{\varphi M}(\theta) M_w(0) + K_{\varphi M}(\theta) R_s M_y(0) \\ + K_{\varphi T}(\theta) R_s T(0) + K_{\varphi Q}(\theta) R_s^2 Q_x(0) \\ + K_{\varphi o}(\theta) R_s^2 \} \frac{R_s}{E\tilde{J}_y} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (12 \cdot a, b)$$

ここに、

$$\begin{aligned}
 &K_{uu}(\theta)=1, K_{u\varphi}(\theta)=\cos\theta-1, K_{u\phi}(\theta)=\sin\theta \\
 &K_{u\psi}(\theta)=\frac{1}{1+\mu^2}\left(\sin\theta-\frac{1}{\mu}\sin\mu\theta\right) \\
 &K_{u\omega}(\theta)=-\frac{1}{\beta}\cdot\frac{1}{\mu^2(1+\mu^2)} \\
 &\quad\cdot(1+\mu^2-\mu^2\cos\theta-\cosh\mu\theta) \\
 &K_{uM}(\theta)=-\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{\beta}\cdot\frac{1}{1+\mu^2}\right)\theta\sin\theta \\
 &\quad+\frac{1}{\beta}\cdot\frac{1}{\mu^2(1+\mu^2)^2} \\
 &\quad\cdot\{(1+\mu^2)^2-\mu^2(2+\mu^2)\cos\theta-\cosh\mu\theta\} \\
 &K_{uT}(\theta)=-\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{\beta}\cdot\frac{1}{1+\mu^2}\right)(\sin\theta-\theta\cos\theta) \\
 &\quad-\frac{1}{\beta}\cdot\frac{1}{(1+\mu^2)^2}\left(\sin\theta-\frac{1}{\mu}\sinh\mu\theta\right) \\
 &K_{uQ}(\theta)=-\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{\beta}\cdot\frac{1}{1+\mu^2}\right)(\sin\theta-\theta\cos\theta) \\
 &\quad+\frac{1}{\beta}\cdot\frac{1}{\mu^2(1+\mu^2)^2}\left\{(1+\mu^2)^2\theta\right. \\
 &\quad\left.-\mu^2(2+\mu^2)\sin\theta-\frac{1}{\mu}\sinh\mu\theta\right\} \\
 &K_{\varphi u}(\theta)=0, K_{\varphi\varphi}(\theta)=\cos\theta, K_{\varphi\phi}(\theta)=\sin\theta \\
 &K_{\varphi\psi}(\theta)=\frac{1}{1+\mu^2}(\sin\theta+\mu\sinh\mu\theta) \\
 &K_{\varphi\omega}(\theta)=\frac{1}{\beta}\cdot\frac{1}{1+\mu^2}(\cos\theta-\cosh\mu\theta) \\
 &K_{\varphi M}(\theta)=-\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{\beta}\cdot\frac{1}{1+\mu^2}\right)\theta\sin\theta \\
 &\quad-\frac{1}{\beta}\cdot\frac{1}{(1+\mu^2)^2}(\cos\theta-\cosh\mu\theta) \\
 &K_{\varphi T}(\theta)=-\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{\beta}\cdot\frac{1}{1+\mu^2}\right)(\sin\theta-\theta\cos\theta) \\
 &\quad+\frac{1}{\beta}\cdot\frac{\mu^2}{(1+\mu^2)^2}\left(\sin\theta-\frac{1}{\mu}\sinh\mu\theta\right) \\
 &K_{\varphi Q}(\theta)=K_{uT}(\theta) \\
 &\dots\dots\dots(13\cdot a\sim p)
 \end{aligned}$$

さらに,

$$\begin{aligned}
 K_{u0}(\theta) &= -\int_0^\theta K_{uQ}(\theta-\xi)q_x(\xi)d\xi \\
 &\quad + \frac{1}{R_s}\int_0^\theta K_{uM}(\theta-\xi)m_y(\xi)d\xi \\
 &\quad - \frac{1}{R_s}\int_0^\theta K_{uT}(\theta-\xi)m_z(\xi)d\xi \\
 &\quad + \frac{1}{R_s^2}\int_0^\theta K_{u\omega}(\theta-\xi)m_\omega(\xi)d\xi \\
 K_{\varphi 0} &= -\int_0^\theta K_{\varphi Q}(\theta-\xi)q_x(\xi)d\xi \\
 &\quad + \frac{1}{R_s^2}\int_0^\theta K_{\varphi M}(\theta-\xi)m_y(\xi)d\xi \\
 &\quad - \frac{1}{R_s}\int_0^\theta K_{\varphi T}(\theta-\xi)m_z(\xi)d\xi \\
 &\quad + \frac{1}{R_s^2}\int_0^\theta K_{\varphi\omega}(\theta-\xi)m_\omega(\xi)d\xi \\
 &\dots\dots\dots(14\cdot a, b)
 \end{aligned}$$

また、式(13)において導入されている μ は、次式で表わされる無次元量である。

$$\mu^2 = \frac{\alpha}{\beta} = \frac{GJ_{st}R_s^2}{EC_\omega} \dots\dots\dots(15)$$

さて、式(12)を知れば、 $\theta=0$ と $\theta=\text{const.}$ における桁の基本状態量の関係を、次のようにマトリックスの形で表わすことができる。

$$\mathbf{y}(\theta) = \mathbf{F}(\theta)\mathbf{y}(0) \dots\dots\dots(16)$$

ここに、 \mathbf{y} は基本状態量の列マトリックス (ベクトル) を表わし、

$$\mathbf{y}(\theta) = \{u(\theta), \varphi(\theta), \phi_y(\theta), \phi(\theta), M_\omega(\theta), M_y(\theta), T(\theta), Q_x(\theta), 1\}^T \dots\dots\dots(17)$$

$$\text{また } \mathbf{F}(\theta) = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{K}(\theta)\mathbf{C} \dots\dots\dots(18)$$

ただし

$$\mathbf{C} = \text{Diag.}[1, R_s, R_s, R_s^2, R_s/E\tilde{J}_y, R_s^2/E\tilde{J}_y, R_s^2/E\tilde{J}_y, R_s^3/E\tilde{J}_y, R_s^4/E\tilde{J}_y] \dots\dots\dots(19)$$

$$\mathbf{K}(\theta) = \begin{bmatrix}
 K_{uu}(\theta) & K_{u\varphi}(\theta) & K_{u\psi}(\theta) & K_{u\phi}(\theta) & K_{u\omega}(\theta) & K_{uM}(\theta) & K_{uT}(\theta) & K_{uQ}(\theta) & K_{u0}(\theta) \\
 0 & K_{\varphi\varphi}(\theta) & K_{\varphi\psi}(\theta) & K_{\varphi\phi}(\theta) & K_{\varphi\omega}(\theta) & K_{\varphi M}(\theta) & K_{\varphi T}(\theta) & & K_{\varphi 0}(\theta) \\
 0 & K_{\psi\psi}(\theta) & K_{\psi\phi}(\theta) & K_{\psi\omega}(\theta) & & & & & K_{\psi 0}(\theta) \\
 0 & 0 & 0 & K_{\phi\phi}(\theta) & K_{\phi\omega}(\theta) & & & & K_{\phi 0}(\theta) \\
 0 & 0 & 0 & K_{\omega\omega}(\theta) & & & & & K_{\omega 0}(\theta) \\
 0 & 0 & 0 & & & & & & K_{M0}(\theta) \\
 0 & 0 & 0 & & & & & & K_{T0}(\theta) \\
 0 & 0 & 0 & & & & & & K_{Q0}(\theta) \\
 0 & 0 & 0 & & & & & & 1
 \end{bmatrix} \dots\dots\dots(20)$$

Symmetry

さらに式(20)において

$$\left. \begin{aligned}
 &K_{\varphi\psi}(\theta) = -\sin\theta, K_{\psi\psi}(\theta) = \cos\theta, K_{\psi\phi}(\theta) = \frac{1}{1+\mu^2}(\cos\theta - \cosh\mu\theta) \\
 &K_{\phi\omega}(\theta) = -\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{\beta}\cdot\frac{1}{1+\mu^2}\right)(\sin\theta + \theta\cos\theta) + \frac{1}{\beta}\cdot\frac{1}{(1+\mu^2)^2}\left\{(2+\mu^2)\sin\theta - \frac{1}{\mu}\sin\mu\theta\right\} \\
 &K_{\psi\phi}(\theta) = \cosh\theta, K_{\phi\omega}(\theta) = -\frac{1}{\beta}\cdot\frac{1}{\mu}\sinh\mu\theta, K_{\omega\omega}(\theta) = -\beta\mu\sinh\mu\theta
 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(21\cdot a\sim h)$$

また、 $K_{j_0}(\theta)$ (ただし、 $j=\phi, \psi, \omega, M, T, Q$) は式 (14・a) あるいは式 (14・b) と同様に次式で表わされる。

$$K_{j_0}(\theta) = -\int_0^\theta K_{j_Q}(\theta-\xi)q_x(\xi)d\xi + \frac{1}{R_s}\int_0^\theta K_{j_M}(\theta-\xi)m_y(\xi)d\xi - \frac{1}{R_s}\int_0^\theta K_{j_T}(\theta-\xi)m_z(\xi)d\xi + \frac{1}{R_s^2}\int_0^\theta K_{j_\omega}(\theta-\xi)m_\omega(\xi)d\xi \dots (22)$$

なお、桁の曲率が図-2 のと逆の場合には、以上の諸式における R_s と θ の符号を変えればよい。

5. 曲線桁の Point Matrix

曲線桁について、断面の急変部、中間支承部、あるいはヒンジ結合部等の境界断面における基本状態量の連続の条件式を求める。いま注目する境界断面を格点 k とし、格点 k の両側の格間をそれぞれ格間 k および格間 $k+1$ とする。格間 k の桁の中心角を Φ_k とし、格点 k における格間 k 側の桁の基本状態量を $u_k(\Phi_k), \phi_k(\Phi_k), \phi_{y,k}(\Phi_k), \dots$ 、格間 $k+1$ 側の桁のそれらを $u_{k+1}(0), \phi_{k+1}(0), \phi_{y,k+1}(0), \dots$ と表わすことにする (図-4 参照)。

まず、断面の急変に伴う基本状態量の連続の条件式を求める。境界断面上に、任意に定めた定点 D を原点とし、 x, y 軸に平行な \bar{x}, \bar{y} 軸をもつ座標系 ($D-\bar{x}, \bar{y}$) を設け (図-4)、境界断面上の任意点 P の \bar{y} 軸座標を \bar{y}_P とし、また格点 k の両側の桁の断面のせん断中心 S_k および S_{k+1} の \bar{y} 座標をそれぞれ $\bar{y}_{s,k}$ および $\bar{y}_{s,k+1}$ とすると、任意点 P が格点 k の両側の桁に属していることから次式が書ける。

$$u_k(\Phi_k) - (\bar{y}_P - \bar{y}_{s,k}) \cdot \phi_k(\Phi_k) = u_{k+1}(0) - (\bar{y}_P - \bar{y}_{s,k+1}) \cdot \phi_{k+1}(0) \dots (23)$$

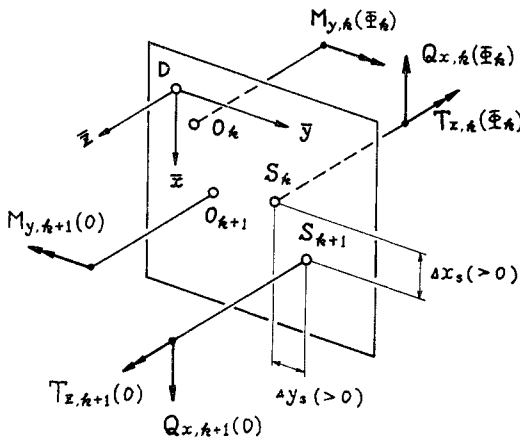


図-4 不連続断面の境界面と両側断面の断面力

一方、断面のねじれ回転角は境界断面においては両側の桁に共通であるから

$$\phi_{k+1}(0) = \phi_k(\Phi_k) \dots (24)$$

したがって、式 (23), (24) より

$$u_{k+1}(0) = u_k(\Phi_k) - \Delta y_s \phi_k(\Phi_k) \dots (25)$$

ここに、

$$\Delta y_s = \bar{y}_{s,k+1} - \bar{y}_{s,k} = R_{s,k} - R_{s,k+1} \dots (26)$$

ただし、 $R_{s,k}$ および $R_{s,k+1}$ はそれぞれ格間 k および $k+1$ の桁のせん断中心軸の曲率半径を表わす。

式 (24), (25) ならびに式 (26) を用いれば、 ϕ および ψ に関する次式を得る。

$$\begin{aligned} \phi_{y,k+1}(0) &= (1/R_{s,k+1})u_{k+1}'(0) \\ &= (1/R_{s,k+1})\{u_k(\Phi_k) - \Delta y_s \phi_k(\Phi_k)\}' \\ &= \frac{R_{s,k+1} + \Delta y_s}{R_{s,k+1}} \cdot \frac{u_k'(\Phi_k)}{R_{s,k}} - \frac{\Delta y_s}{R_{s,k+1}} \phi_k'(\Phi_k) \\ &= \frac{u_k'(\Phi_k)}{R_{s,k}} - \frac{\Delta y_s}{R_{s,k+1}} \left\{ \phi_k'(\Phi_k) - \frac{u_k'(\Phi_k)}{R_{s,k}} \right\} \\ &= \phi_{y,k}(\Phi_k) - \frac{R_{s,k}}{R_{s,k+1}} \Delta y_s \phi_k(\Phi_k) \dots (27) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \phi_{k+1}(0) &= (1/R_{s,k+1})\{\phi_{k+1}'(0) - (1/R_{s,k+1})u_{k+1}'(0)\} \\ &= \frac{\phi_k'(\Phi_k)}{R_{s,k+1}} - \frac{1}{R_{s,k+1}^2}\{u_k(\Phi_k) - \Delta y_s \phi_k(\Phi_k)\}' \\ &= \frac{1}{R_{s,k+1}} \left(1 + \frac{\Delta y_s}{R_{s,k+1}} \right) \phi_k'(\Phi_k) - \frac{u_k'(\Phi_k)}{R_{s,k+1}^2} \\ &= \frac{R_{s,k}}{R_{s,k+1}^2} \left\{ \phi_k'(\Phi_k) - \frac{1}{R_{s,k}} u_k'(\Phi_k) \right\} \\ &= \left(\frac{R_{s,k}}{R_{s,k+1}} \right)^2 \phi_k(\Phi_k) \dots (28) \end{aligned}$$

曲げモーメント、ねじりモーメントおよびせん断力の境界断面における連続の条件式は、図-4 における力のつり合い条件として、次のように得られる。

$$\left. \begin{aligned} M_{y,k+1}(0) &= M_{y,k}(\Phi_k) \\ T_{k+1}(0) &= T_k(\Phi_k) + \Delta y_s Q_{x,k}(\Phi_k) \\ Q_{x,k+1}(0) &= Q_{x,k}(\Phi_k) \end{aligned} \right\} \dots (29 \cdot a \sim c)$$

また、曲げねじれモーメントに関する連続の条件式は、仮想仕事の原理によって求めることができる。いま仮想変位の系として、

$$u_k(\Phi_k) = \phi_k(\Phi_k) = \phi_{y,k}(\Phi_k) = 0 \\ \phi_{k+1}(0) = 1$$

を選ぶと、式 (24), (25), (27), (28) より

$$u_{k+1}(0) = \phi_{k+1}(0) = 0 \\ \phi_{y,k+1}(0) = -(R_{s,k}/R_{s,k+1}) \Delta y_s \\ \phi_{k+1}(0) = (R_{s,k}/R_{s,k+1})^2$$

したがって、

$$1 \times M_{\omega,k}(\Phi_k) - (R_{s,k}/R_{s,k+1})^2 \times M_{\omega,k+1}(0) - (-R_{s,k}/R_{s,k+1}) \Delta y_s \times M_{y,k+1}(0) = 0$$

すなわち、

載荷状態Ⅰ：死荷重に加えて、活荷重として中央径間に満載面荷重 p とその中央に線荷重 P を載荷し、幅員方向には両者を外側載荷（曲率中心とは反対側から 5.5 m 幅まで p および P を、残りの 2.5 m には $p/2$ および $P/2$ を載荷した場合）した状態。

載荷状態Ⅱ：死荷重に加えて、活荷重としては橋軸方向にはⅠの場合と同じで、幅員方向には内側載荷（曲率中心側から 5.5 m 幅まで p および P を、残りの 2.5 m には $p/2$ および $P/2$ を載荷した場合）した状態。

載荷状態Ⅲ：Ⅰの荷重に加えて、片側側径間にも面荷重を外側載荷した状態。

載荷状態Ⅳ：Ⅱの荷重に加えて、片側側径間にも面荷重を内側載荷した状態。

このような 4 種の固定した活荷重と死荷重の合計載荷に対して、共通な最適断面変化の具合を、反復演算によってさぐった。

(3) 基本量の無次元化と計算手順

まず、数値計算の精度を高めるために、基本量を次式によって無次元化する。

$$\left. \begin{aligned} u &= \frac{P_c R_c^3}{E J_c} u^*, & \varphi &= \frac{P_c R_c^2}{E J_c} \varphi^* \\ \phi_y &= \frac{P_c R_c^2}{E J_c} \phi_y^*, & \phi_z &= \frac{P_c R_c}{E J_c} \phi_z^* \\ M_w &= P_c R_c^2 M_w^*, & M_y &= P_c R_c M_y^* \\ T_z &= P_c R_c T_z^*, & Q_x &= P_c Q_x^* \end{aligned} \right\} \dots\dots (33)$$

ここに、 P_c 、 R_c および J_c は無次元化のための基準量であり、この計算では

$$P_c = 5.0 \times 10^4 \text{ kg}, \quad R_c = 8.5 \times 10^3 \text{ cm} \\ J_c = 1.0 \times 10^7 \text{ cm}^4$$

とした。

この設計モデルのように、中間条件を有する桁を Transfer Matrix 法によって解析する場合、伝達演算を電子計算機で行うためには、未知量（この例では中間支点の反力、すなわち $4T_z$ および $4Q_x$ ）を Point Matrix から分離する必要がある。それには種々の手法があるが、その詳細については Transfer Matrix 法の専門書^{(26)~(28)}を参照されたい。

また、電子計算機による演算の Flow chart については、ここでは紙数の都合上割愛する。

(4) 計算結果と 2, 3 の考察

前記の 4 種の載荷に対して、内外両箱桁の縁応力の平均化は勿論のこと、橋軸方向の縁応力分布の平均化を目指して、断面の設定と解析演算とを繰り返し行い、最適断面変化として表-1 のような一応妥当と思われる結果を得た（記号の意味については図-6 参照）。なお、電子計算機 (FACOM 270-30, 1ワードあたり 16ビット)

表-1 等断面桁および変断面桁の断面寸法
($d=1500$, $t=10$ は共通)

等断面の場合	内側桁			外側桁			
	h_1	t_{u1}	t_{l1}	h_2	t_{u2}	t_{l2}	
	2200	21	23	2400	24	26	
変断面の場合	1	1200	10	10	1400	10	10
	2	1200	10	10	1400	10	10
	3	1300	10	10	1500	10	10
	4	1400	10	10	1600	11	13
	5	1600	11	12	1800	15	17
	6	1900	13	15	2100	17	19
	7	2200	17	19	2400	19	21
	8	2500	22	24	2700	22	24
	9	2500	22	24	2700	22	24
	10	2200	14	16	2400	18	18
	11	1900	14	16	2100	18	18
	12	1600	14	16	1800	18	18
	13	1400	16	18	1600	19	19
	14	1400	18	16	1600	19	19
	15	1400	22	24	1600	23	22
	16	1400	24	26	1600	26	24

以下対称

による数値計算は倍精度で行った。

2本の箱桁を合せて1本の主桁としたいいわゆる合断面としての断面定数のうち、 \tilde{J}_y と C_w の橋軸方向の変化を図-7 に、また合断面としてのせん断中心軸の曲率半径 R_s と曲げねじれに関する無次元パラメーター μ (式(15)) の同じく橋軸方向の変化を図-8 に示した。

図-9 および図-10 には、合断面の基本状態量のうち断面力 M_y 、 M_w 、 T および Q_x の橋軸方向分布を、載荷状態Ⅰの場合について示した。図-11 および図-12 は内外両箱桁のそれぞれについて、上下フランジの縁応力の橋軸方向の変化を、載荷状態ⅠおよびⅡについてそれぞれ示したものである。

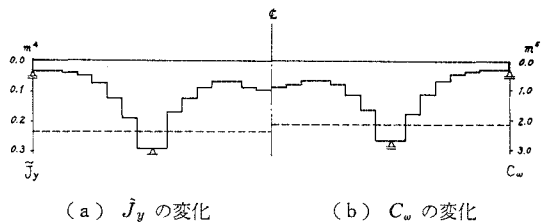


図-7 合断面の \tilde{J}_y および C_w の橋軸方向の変化 (破線は等断面の値)

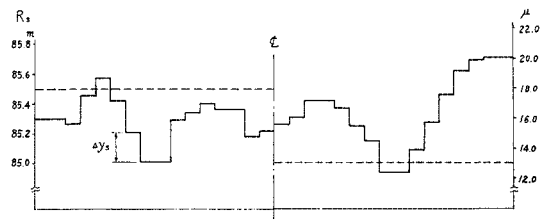


図-8 合断面のせん断中心軸の曲率半径 R_s と無次元パラメーター μ の橋軸方向の変化 (破線は等断面の値)

図-7~12 中の書き込まれている破線は、最大縁応力が変断面桁の場合と同一レベルになるように（図-11 および図-12 参照）、断面を決定した等断面桁の諸量を

示している（等断面桁の断面寸法については表-1 参照）。

計算結果を総合して、大略次のようなことがいえる。すなわち、

1) 一般に Transfer Matrix 法では、計算精度の劣化が問題とされているが、対称載荷である載荷状態 I および II に対する解の対称性によって、計算誤差の検討を行った結果、本解析例の場合 $\mu\phi$ が大きい ($\mu\phi_2=9.3 \sim 15.1$) にもかかわらず、実用上十分な精度であることが判明した。ちなみに、倍精度の計算では式 (33) による基本状態量の無次元化を行わなくても、実用上十分な精度の計算結果が得られることもわかった。

2) 前述のように、桁の最大縁応力が変断面桁の場合と同一レベルになるように定めた等断面桁の断面は、図-7 に見られるように、変断面桁の最大断面である中間支点断面に近い断面となり、断面変化の効果が大きいことが知られる。また、各断面の最大縁応力の橋軸方向の変化を示した図-11 からわかるように、変断面とした効果は、本計算例の場合側径間においてより顕著に現われた。

3) 2本の箱桁断面からなる本計算例のような断面の場合には、前述のように、 $\mu\phi$ の値が比較的大きく、そのためせん断中心線のくい違い ($4y_s$) の効果を加味しても、曲げねじれの影響は小さい。すなわち、曲げによる縁応力に比べて曲げねじれによるものは数%以下であった。一般に、 $\mu\phi > 20$ ならば、曲げねじれの項を無視して、St. Venant のねじり問題として扱っても実用上さしつかえないといえる。なお、図-9 (b) の M_w -図の階段状の変化は、式 (30) の右辺第 2 項の $4y_s$ によるものであるが、図-11 の縁応力の階段状の変化は主として \tilde{J}_y の変化に起因するものであることを付記する。

7. 結 言

電子計算機によって骨組構造を解析する場合、最も有力な手段の一つとなり得る Transfer Matrix 法の薄肉曲線桁への適用に関して行った本研究の内容を要約すると次のとおりである。

(1) 一平面内で一定曲率で曲った曲線桁のつり合いの微分方程式の一般式から出発して、曲率面外への変形すなわち曲げねじれ変形のみを分離し得る場合の基礎方程式を示した。また、その際問題となる同方程式の適用範囲についても検討を加えた。

(2) (1) で誘導した変位表示のつり合いの微分方程式に基づき、等断面円弧曲線桁の曲率面外への変形に関する Field Matrix を求めた。その過程において、この

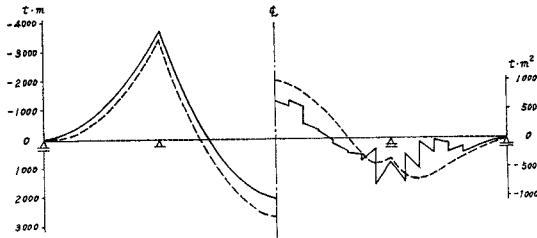


図-9 載荷状態 I に対する合断面の M_y および M_w の橋軸方向分布 (破線は等断面の場合)

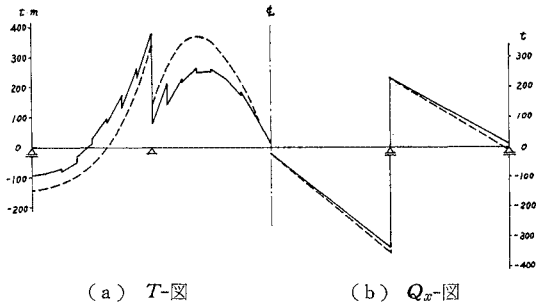


図-10 載荷状態 I に対する合断面の T および Q_x の橋軸方向分布 (破線は等断面の場合)

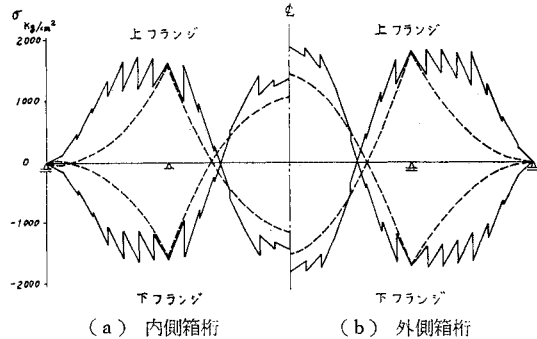


図-11 載荷状態 I に対する縁応力の橋軸方向の変化 (破線は等断面の場合)

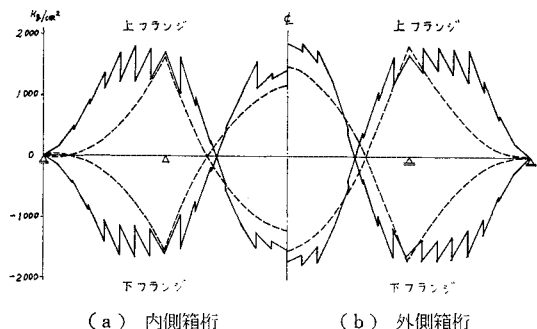


図-12 載荷状態 II に対する縁応力の橋軸方向変化 (破線は等断面の場合)

種の Field Matrix の計算には、ラプラス変換を用いた手法が非常に効果的であることを示した。

(3) 断面の急変、曲線の変化等を考慮した形で、等断面円弧曲線桁の曲率面外への変形に関する Point Matrix を求めた。

(4) 上に得た Field Matrix と Point Matrix, すなわち Transfer Matrix を用いることによって、一平面内で任意に曲がり、また軸方向に任意に変化する断面をもった曲線桁の曲率面外への曲げねじれ問題を解析することができる。

(5) 解析例として、3 径間連続の変断面曲線桁橋を対象とし、代表的な 4 種の載荷状態に対して最も有効と思われる変断面の構成を、桁の全長を 32 分割し、数度にわたる繰り返し演算によって調べた。

(6) Transfer Matrix 法の欠点とされているけた落ちによる精度の悪化は、倍精度の計算を行えば、十分に避けられることがわかった。

(7) 最大縁応力が変断面桁の場合と同一レベルになるよう定めた等断面桁との比較において、変断面の効果が如実に示された。

(8) 同じ問題を変位法で計算した場合には、行列の次数が膨大となるのに対し、本解法例では常に 8 次ですむなど、この種の問題の解析には、Transfer Matrix 法が最適であることが確認された。

謝辞：本論文の 6. の解析は主として小林が、山梨大学学部ならびに大阪大学大学院に在学中に行ったものである。その大学院時代、数々の便宜とご支援を賜った大阪大学 小松定夫教授 に対し心から感謝の意を表したい。

参 考 文 献

- 1) 深沢泰晴：並列主桁曲線桁の解析 (I),(II), 土木技術, 第 19 卷 12 号, 昭 39-12, および第 20 卷 1 号, 昭 40-1.
- 2) Becker G.: Ein Beitrag zur statischen Berechnung beliebig gelagerter ebener gekrümmter Stäbe mit einbach symmetrischen dünnwandigen offenen Profilen von in Stabachse veränderlichen Querschnitt unter Berücksichtigung der Wörbkrafttorsion, Der Stahlbau 34, Heft 11 und 12, Nov. und Dez. 1965.
- 3) Petersen C.: Das Verfahren der Übertragungsmatrizen für gekrümmte Träger, Der Bauingenieur 41, Heft 3, März 1966.
- 4) Fukasawa Y.: Analysis of Thin-Walled Curved Beams with Variable Cross Section Taking into Account Discontinuity of Shear Center Line, Reports of the Faculty of Engineering, Yamanashi University, No. 19, Dec. 1968. ならびに第 14 回橋梁構造研究発表会, 昭 42-12.
- 5) 深沢泰晴：斜角支持曲線桁橋の解析, 第 22 回土木学会年

- 次学術講演会概要集, I-137, 昭 44-5.
- 6) 小松・中井・中西：斜支持曲線桁橋の静的特性の解析, 土木学会論文報告集, 第 193 号, 昭 46-9.
- 7) 遠田良喜：伝達マトリックス法による薄肉開断面曲線ばりの有限変位理論の解析, 土木学会論文報告集, 第 199 号, 昭 47-3.
- 8) Schrüter H.-J.: Anwendung einer Theorie räumlich stark gekrümmter Stäbe auf beliebig geformte, gestützte und belastete freitragende Wendelschalen, Der Stahlbau 42, Heft 11, Nov. 1973.
- 9) 小西一郎・小松定夫：薄肉曲線桁の基礎理論, 土木学会論文集, 第 87 号, 昭 37-11.
- 10) 倉西 茂：一般薄肉曲りばりの解析, 土木学会論文集, 第 108 号, 昭 39-8.
- 11) 深沢泰晴：薄肉曲線材の静力学的解析に関する基礎的理論, 土木学会論文集, 第 110 号, 昭 39-10.
- 12) Nishino F., K.M.A. Alam and S.L. Lee: On Elementary Theory of Thin-Walled Curved Girders, Proc. of ASCE, Structural Division 投稿中.
- 13) 深沢泰晴：薄肉多角開断面曲りばりの曲げねじれ問題, 土木学会論文報告集, 第 234 号, 昭 50-2.
- 14) 小西一郎・小松定夫：薄肉連続曲線桁橋の立体的解析, 土木学会論文集, 第 91 号, 昭 38-3.
- 15) 島田静雄・倉西 茂：曲り梁の計算式, 技報堂, 1966.
- 16) 渡辺 昇：曲線けたの理論と計算, 技報堂, 1967.
- 17) Dabrowski R.: Gekrummte dünnwandige Träger, Springer-Verlag, Berlin, 1968.
- 18) Meyer C. and A.C. Scordelis: Analysis of Curved Folded Plate Structures, Proc. of ASCE, ST 10, Oct. 1971.
- 19) Chu K.H. and S.G. Pinjarkar: Analysis of Horizontally Curved Box Girder Bridges, Proc. of ASCE, ST 10, Oct. 1971.
- 20) Cheung M.S. and Y.K. Cheung: Analysis of Curved Box Girder Bridges by Finite Strip Method, Pub. of IABSE, Vol. 31-II, 1971.
- 21) Nitzsche R.N. and R.E. Miller: Torsion and Flexure of Curved Thin-Walled Beams or Tubes, Proc. of ASCE, EM 4, Aug. 1972.
- 22) Buragohain D.N. and B.L. Agrawal: Analysis of Curved Box Girder Bridges, Proc. of ASCE, ST 5, May 1973.
- 23) 渡辺・稼農・藤井：曲げねじれをもった曲線桁橋の剛性マトリックス法による解析, 土木学会論文報告集, 第 218 号, 昭 48-10.
- 24) 西野文雄・倉方慶夫(文献 23)への討議, 土木学会論文報告集, 第 218 号, 昭 49-9.
- 25) 薄木征三・稼農知徳：薄肉断面曲線材の変形法による解析, 土木学会論文報告集, 第 235 号, 昭 50-3.
- 26) 坂井藤一・中村秀治：薄肉曲線ばりの板殻構造としての一解析法, 土木学会論文集, 第 235 号, 昭 50-3.
- 27) Kersten R.: Das Reduktion Verfahren in Baustatik, Springer-Verlag, Berlin, 1962.
- 28) Pestel E.C. and F.A. Lekie: Matrix Method in Elastomechanics, McGraw-Hill, New York, 1963.
- 29) 成岡昌夫・遠田良喜：伝達マトリックス法 (コンピュータによる構造工学講座 I-2-B), 培風館, 1970.

(1975.4.16・受付)