

非線形動的空気力を考慮した吊橋の耐風応答 解析に関する一考察

AN INVESTIGATION ON AEROELASTIC RESPONSES OF SUSPENSION
BRIDGES DUE TO THE NON-LINEAR AERODYNAMIC FORCES

白石 成人*・小川 一志**
By Naruhito SHIRAIISHI and Kazushi OGAWA

1. ま え が き

吊橋などの長大構造物において、耐風性の良否は重要な問題であり、吊橋の設計および架設計画に際して、耐風安定性の確認に細心の注意を払う必要があろう。

一般に、吊橋断面は、空力的に複雑な形状をしており、風速および振幅によって、空力特性が変化するという複雑な挙動を示すため、最近では、吊橋に作用する動的空気力係数を、風速だけでなく振幅を考慮した関数（すなわち非線形動的空気力係数）として整理する試みがいくつかなされている^{1)~6)}。非線形動的空気力を導入することにより、吊橋の風による発振性状を振幅と発振時間との関係で、より適確に把握しようとするものである。特に吊橋は、橋軸方向に振動モードに従って、振幅が変化するため、動的空気力係数を、振幅の関数として評価して、実橋の耐風安定性を検討することが、重要視されてきている⁷⁾。

その際、問題となってくるのは、動的空気力をいかに精度よく、また容易に求めるかということである。現在、動的空気力の測定には、強制振動法と自由振動法が用いられている。強制振動法は^{1)~3)}、模型を風洞気流中で強制的に加振し、模型に作用する外力から、模型の慣性力を引き去り、残りを模型の動的空気力として、直接的に検出するもので、原理的には非常にすぐれた面をもっている。しかしながら、換算風速が低いとか、加振振幅が小さいといった低風速小振幅の場合には、模型の慣性力に比べて、空気力が微小であるため、空気力の検出に技術を要し、また測定精度も落ちてくる。実験に際しては、空気力が振幅に関して非線形であることを考慮して、模型加振は、幾種類かの振幅にわたって行う必要がある。

一方、自由振動法は^{9)~12)}、風洞気流中に、ばねで支持した模型の振動を観測し、模型の振動数と対数減衰率から、動的空気力を間接的に求めるもので、強制振動法に比べて、ばね支持実験装置以外の特別な装置を必要とせず、実験が簡便である。空気力の測定に際しては、検出された空気力より誘導される構造物の振動現象が実際の耐風応答と一致するか、どうか確認することが望ましいが、自由振動法の場合、空気力を振動実験による検出しているのでその確認が容易である。しかも、動的空気力を、模型の自由振動から算出する関係上、測定精度が実験風速あるいは振幅に制約されることが少ない。また、強制振動法は、定常振動時の空気力を検出している関係上、強制振動法から求められる動的空気力は、厳密には、その適用が、構造物の限界風速時の調和振動解析に制約される。それに対して、自由振動法では、減衰振動を含めて、振動現象に即した空気力を求めることができる利点がある。

しかしながら、従来の自由振動法においては、検出される動的空気力にばらつきが多く、その値を実用に供するには問題が多い。その主な原因として、たわみ振動とねじれ振動の位相差を、減衰率が零の定常振動時だけから求めようとしていることと、対数減衰率の振幅に対する変化を系統的に表示していないための影響などが関係しているものと推定される。

そこで、本論文では、対数減衰率(δ)を、風速(V)と振幅(A)の関数として図示した $V-A-\delta$ 曲線から、動的空気力係数を風速と振幅の関数として、合理的に算出する方法を提示する。たわみ振動と、ねじれ振動の位相差の問題についても、定常振動に限らず、減衰振動時における位相差を用いて、動的空気力を算出する方法を導き、さらに、測定誤差の入り易い位相差によらないで、空気力を求める簡便法を提案する。

これらの方法で求められる動的空気力は、主に、吊橋の空力減衰と構造減衰の和がちょうど零となる限界風速

* 正会員 工博 京都大学教授 工学部土木工学教室

** 正会員 工修 川崎重工業(株)

の調和振動を対象に、吊橋の共振条件および共振状態を決定するのに用いられてきた。しかし、吊橋の耐風安定性を検討する際、その限界風速を推定することは、もちろん重要であるが、それ以外に、設計風速の範囲内における吊橋の挙動も興味ある問題であろう。すなわち、風速と振幅と対数減衰率の関係である。

本論文では、設計風速の全範囲における対数減衰率（空力減衰と構造減衰の和）を、風速と振幅との関係で、自由振動法から検出した非線形動的空気力（風速と振幅の関数としての動的空気力）を用いて、算定する方法を提示する⁷⁾。

また、吊橋は、架設地点の地形によって、橋軸方向に、風の吹き上げ角が変化することがよくあり、その場合、吊橋の3次元性を考慮して、空力特性が、どう影響を受けるか調べる必要がある。本論文では、この問題に対し、動的空気力係数を、風速と振幅および風の吹き上げ角の関数として表示し、吊橋の3次元的な空力特性を調べる方法について述べている。

なお、本論文の解析において、次の仮定を用いるものとする。

(1) 動的空気力係数を、換算風速と振幅さらに風の吹き上げ角の関数として、多項近似できるものとする。

(2) 非線形動的空気力を受ける吊橋の応答は、非線形振動となるが、解析の対象とする振幅の前後 $N/2$ 波 ($N=1, 2, \dots$) の範囲内では、振動系の散逸エネルギーが、実際の現象と等価な線形振動として、耐風性を検討するものとする。このとき、振動は、前後 $N/2$ 波目で振幅が実際の現象と一致し、解析の対象となる領域では、一定の減衰率で線形振動することになる。

なお、 N の数値については、対数減衰率の定義と密接な関係にあり、そのことについては、補遺に述べる。

(3) 吊橋の橋軸方向各断面の動的空気力係数は、断面位置における換算風速と振幅および風の吹き上げ角の値により算定されるものとする（剥片理論）。

また、斜風の影響は、考えないものとする。

2. 記号の説明

- h : たわみ変位
- α : ねじれ変位
- \bar{h} : 換算たわみ変位 (h/b)
- b : 構造物の断面の代表長 (たとえば吊橋の主構間隔)
- ω_h : たわみ固有円振動数
- ω_α : ねじれ固有円振動数
- ζ_h : たわみ減衰定数
- ζ_α : ねじれ減衰定数

- μ : 質量パラメーター ($m/\pi\rho b^2$)
- ν : 極慣性モーメントパラメーター ($I_\alpha/\pi\rho b^4$)
- m : 単位長当りの質量
- I_α : 単位長当りの極慣性モーメント
- ρ : 空気密度
- ω : 連成円振動数
- δ : 対数減衰率
- k : 換算振動数 ($b\omega/2V$)
- \bar{V} : 換算風速 ($2\pi V/b\omega$)
- V : 風速
- L_h, L_α : 動的揚力係数
- M_h, M_α : 動的モーメント係数
- β : 風の吹き上げ角
- θ : たわみ振動とねじれ振動の位相差
- ω_{h0} : 無風時のたわみ円振動数 ($=\omega_h\sqrt{1-\zeta_h^2}$)
- $\omega_{\alpha 0}$: 無風時のねじれ円振動数 ($=\omega_\alpha\sqrt{1-\zeta_\alpha^2}$)

3. 非線形動的空気力の表示法

気流中における2次元剛体の、たわみ、ねじれ2自由度の連成振動方程式は、次式で表示される。

$$\ddot{h} + 2\zeta_h\omega_h\dot{h} + \omega_h^2 h = \frac{\omega^2}{\mu} [L_h\bar{h} + L_\alpha\alpha] \dots\dots (1)$$

$$\ddot{\alpha} + 2\zeta_\alpha\omega_\alpha\dot{\alpha} + \omega_\alpha^2 \alpha = \frac{\omega^2}{\nu} [M_h\bar{h} + M_\alpha\alpha] \dots\dots (2)$$

動的空気力係数 $L_h, L_\alpha, M_h, M_\alpha$ は、一般に、換算振動数 k の関数と考えられている。たとえば、Theodorsen によると、単位長の平板断面に作用する動的空気力係数は、次式のようなのである。

$$\left. \begin{aligned} L_h &= -\frac{2i}{k} c(k) \\ L_\alpha &= -\frac{2}{k^2} c(k) - \frac{i}{k} [1+c(k)] \\ M_h &= \frac{i}{k} c(k) \\ M_\alpha &= \frac{1}{k^2} c(k) - \frac{i}{2k} [1-c(k)] \end{aligned} \right\} \dots\dots (3)$$

しかしながら、動的空気力係数は、振幅 \bar{h}_0, α_0 および風の吹き上げ角 β の非線形な影響を受けており、その効果は、けして無視できない。

動的空気力係数の吹き上げ角 β , 換算風速 \bar{V} ($=\pi/k$) および、振幅 \bar{h}_0 または α_0 に関する非線形性を考慮するため、動的空気力係数を、次式のように多項近似で表示する。

$$L_h = L_{hR} + iL_{hI} = \sum_j a_{Rj}\bar{h}_0^{j-1} + i \sum_j a_{Ij}\bar{h}_0^{j-1} \dots\dots\dots (4)$$

$$L_\alpha = L_{\alpha R} + iL_{\alpha I} = \sum_j b_{Rj}\alpha_0^{j-1} + i \sum_j b_{Ij}\alpha_0^{j-1} \dots\dots\dots (5)$$

$$M_h = M_{hR} + iM_{hI} = \sum_j c_{Rj} \bar{h}_0^{j-1} + i \sum_j c_{Ij} \bar{h}_0^{j-1} \dots \dots \dots (6)$$

$$M_a = M_{aR} + iM_{aI} = \sum_j d_{Rj} \alpha_0^{j-1} + i \sum_j d_{Ij} \alpha_0^{j-1} \dots \dots \dots (7)$$

ここで

$$a_{Rj} = \sum_l \left\{ \sum_m a_{Rjlm} \beta^{m-1} \bar{V}^{l-1} \right\} \dots \dots \dots (8)$$

$$a_{Ij} = \sum_l \left\{ \sum_m a_{Ijlm} \beta^{m-1} \bar{V}^{l-1} \right\} \dots \dots \dots (9)$$

$$b_{Rj} = \sum_l \left\{ \sum_m b_{Rjlm} \beta^{m-1} \bar{V}^{l-1} \right\} \dots \dots \dots (10)$$

$$b_{Ij} = \sum_l \left\{ \sum_m b_{Ijlm} \beta^{m-1} \bar{V}^{l-1} \right\} \dots \dots \dots (11)$$

4. 2次元運動方程式

(1) ねじれ1自由度

ねじれ1自由度の場合、式(2)は次式のようになる。

$$\ddot{\alpha} + 2\zeta_a \omega_a \dot{\alpha} + \omega_a^2 \alpha = \frac{\omega^2}{\nu} M_a \alpha \dots \dots \dots (12)$$

式(7)より

$$\ddot{\alpha} + 2\zeta_a \omega_a \dot{\alpha} + \omega_a^2 \alpha = \frac{\omega^2}{\nu} (M_{aR} - iM_{aI}) \alpha \dots \dots \dots (13)$$

ここで、ねじれ振動の形を次式のように仮定する。

$$\alpha = \alpha_0 e^{(-\delta/2\pi + i)\omega t} \dots \dots \dots (14)$$

式(14)を(13)に代入して、実数部と虚数部に分離し、整理すると、

$$M_{aR} = \nu \left[\left(\frac{\omega_a}{\omega} \right)^2 - \frac{\zeta_a \delta}{\pi} \left(\frac{\omega_a}{\omega} \right) - 1 + \frac{\delta^2}{4\pi^2} \right] = \sum_j d_{Rj} \alpha_0^{j-1} \dots \dots \dots (15)$$

$$M_{aI} = \nu \left[2\zeta_a \left(\frac{\omega_a}{\omega} \right) - \frac{\delta}{\pi} \right] = \sum_j d_{Ij} \alpha_0^{j-1} \dots \dots \dots (16)$$

式(15),(16)において、振幅 α_0 と対数減衰率 δ および、ねじれ振動数比 (ω_a/ω) の関係から、係数 d_{Rj} , d_{Ij} を、最小自乗法により決定することができる。すなわち、非線形な動的空気力の係数 d_{Rj} , d_{Ij} は、ある設定した換算風速 \bar{V} と吹き上げ角 β において決定される。その後、 \bar{V} あるいは β の異なる実験条件について、係数 d_{Rj} , d_{Ij} を逐次求めていき、実験条件と係数 d_{Rj} , d_{Ij} の組み合わせが十分な数に達したとき、関係式(11)から最小自乗法により、係数 d_{Rjlm} , d_{Ijlm} を決定する。

一方、動的空気力係数 M_{aR} , M_{aI} が既知のとき、気流中にはね支持された2次元剛体の対数減衰率を、風速と振幅との関係において求めることができる。すなわち、式(15),(16)より

$$\delta = 2\pi\zeta_a \left(\frac{\omega_a}{\omega} \right) - \frac{\pi}{\nu} M_{aI} \dots \dots \dots (17)$$

$$\left(\frac{\omega_a}{\omega} \right) = \sqrt{\left(\frac{1}{\nu} M_{aR} - \frac{1}{4\nu^2} M_{aI}^2 + 1 \right)} / (1 - \zeta_a^2) \dots \dots \dots (18)$$

上式において、 M_{aR} , M_{aI} は、風速と振幅の関数であり、任意の風速と振幅の組み合わせに対して、対数減衰率 δ を算定することができる。

次に、振動が成長して、ある振幅に達するまでの時間は、最小自乗法を使えば、次のように容易に求めることができる。すなわち、対数減衰率 δ と振幅 α_0 の関係を次式のように仮定し、係数 A_j を最小自乗法により決定する。

$$\delta(\alpha_0) = \sum_j A_j \alpha_0^{j-1} \dots \dots \dots (19)$$

また、対数減衰率は定義式より次のように表示される。

$$\delta(\alpha_0) = \frac{1}{2} \log_e \frac{\alpha_{0-1}}{\alpha_{0+1}} \dots \dots \dots (20)$$

ただし、

α_{0-1} : 振幅 α_0 の1サイクル前の振幅

α_{0+1} : 振幅 α_0 の1サイクル後の振幅

ここで

$$p(\alpha_0) = \alpha_{0-1} / \alpha_{0+1} \dots \dots \dots (21)$$

とおけば、

$$p(\alpha_0) = e^{2\delta(\alpha_0)} \dots \dots \dots (22)$$

このとき

$$\left. \begin{aligned} \alpha_{0+2} &= \alpha_0 / p(\alpha_{0+1}) \\ \alpha_{0+3} &= \alpha_{0+1} / p(\alpha_{0+2}) \\ &\dots \dots \dots \\ \alpha_{0+2N} &= \alpha_0 / \{ p(\alpha_{0+1}) p(\alpha_{0+3}) \dots p(\alpha_{0+2N-1}) \} \\ \alpha_{0+2N+1} &= \alpha_{0+1} / \{ p(\alpha_{0+2}) p(\alpha_{0+4}) \dots p(\alpha_{0+2N}) \} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (23)$$

ただし

α_{0+j} : 振幅 α_0 の j サイクル後の振幅

$$p(\alpha_{0+j}) = \exp[2\delta(\alpha_{0+j})] \dots \dots \dots (24)$$

$\delta(\alpha_{0+j})$: 振幅 α_{0+j} のときの対数減衰率

関係式(19)より、振幅 α_{0+j} のときの対数減衰率 $\delta(\alpha_{0+j})$ を算定し、式(23)を用いて、波数 N と振幅 α_{0+N} の組み合わせを、十分な数だけ計算する。その結果を次式に代入して、係数 B_j を最小自乗法により決定する。

$$N = \sum_j B_j \{ \log_e(\alpha_{0+N}) \}^j \dots \dots \dots (25)$$

一方、振動周期は、式(18)より次のようになる。

$$t_j = 2\pi/\omega_j$$

$$= \frac{2\pi}{\omega_\alpha} \sqrt{\left(\frac{1}{\nu} M_{\alpha R} - \frac{1}{4\nu^2} M_{\alpha I}^2 + 1\right) / (1 - \zeta_\alpha^2)}$$

.....(26)

ただし

t_j : 振幅 α_{0+j} のときの振動周期

ω_i : 振幅 α_{0+j} のときの円振動数

このとき、振動が成長して、振幅が α_{0+N_1} から α_{0+N_2} に達するまでに要する時間は、

$$T = \sum_{j=N_1}^{N_2-1} t_j \dots\dots\dots(27)$$

上式における波数 N_1, N_2 と周期 t_j は、式 (25) と (26) から決定される。

以上の手続は、対象とする α_{0+j} の範囲内で、 $\delta(\alpha_{0+j})$ が同符号の場合を対象としている。 $\delta(\alpha_{0+j})$ の符号が α_{0+j} により正負移り変わるときは、 $\delta(\alpha_{0+j})$ が同符号となる α_{0+j} の領域ごとに式 (27) を求める必要がある。

(2) たわみ 1 自由度

たわみ 1 自由度の場合は、前節のねじれ 1 自由度のときと同様に考えることができる。すなわち、式 (1) は次のようになる。

$$\ddot{h} + 2\zeta_h \omega_h \dot{h} + \omega_h^2 h = \frac{\omega^2}{\mu} [L_{hR} + iL_{hI}] \bar{h}$$

.....(28)

式 (15), (16) に対応する式として、

$$\begin{bmatrix} (-\delta/2\pi + i)^2 \omega^2 + 2\zeta_h \omega_h (-\delta/2\pi + i)\omega + \omega_h^2 - \frac{\omega^2}{\mu} (L_{hR} + iL_{hI}) & -\frac{\omega^2}{\mu} (L_{\alpha R} + iL_{\alpha I}) \\ -\frac{\omega^2}{\nu} (M_{hR} + iM_{hI}) & (-\delta/2\pi + i)^2 \omega^2 + 2\zeta_\alpha \omega_\alpha (-\delta/2\pi + i)\omega + \omega_\alpha^2 - \frac{\omega^2}{\nu} (M_{\alpha R} + iM_{\alpha I}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{h} \\ \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \dots\dots(35)$$

このとき、

$$L_{\alpha R} = \mu \left(\frac{\bar{h}_0}{\alpha_0}\right) (SL_{hR} \cos \theta - SL_{hI} \sin \theta) \dots\dots(36)$$

$$L_{\alpha I} = \mu \left(\frac{\bar{h}_0}{\alpha_0}\right) (SL_{hR} \sin \theta + SL_{hI} \cos \theta) \dots\dots(37)$$

$$M_{hR} = \nu \left(\frac{\alpha_0}{\bar{h}_0}\right) (SM_{\alpha R} \cos \theta + SM_{\alpha I} \sin \theta) \dots\dots(38)$$

$$M_{hI} = \nu \left(\frac{\alpha_0}{\bar{h}_0}\right) (-SM_{\alpha R} \sin \theta + SM_{\alpha I} \cos \theta) \dots\dots(39)$$

ただし

$$SL_{hR} = \left(\frac{\omega_h}{\omega}\right)^2 - \frac{\zeta_h \delta}{\pi} \left(\frac{\omega_h}{\omega}\right) - 1 + \frac{\delta^2}{4\pi^2} - \frac{L_{hR}}{\mu} \dots\dots(40)$$

$$SL_{hI} = 2\zeta_h \left(\frac{\omega_h}{\omega}\right) - \frac{\delta}{\pi} - \frac{L_{hI}}{\mu} \dots\dots(41)$$

$$SM_{\alpha R} = \left(\frac{\omega_\alpha}{\omega}\right)^2 - \frac{\zeta_\alpha \delta}{\pi} \left(\frac{\omega_\alpha}{\omega}\right)$$

$$L_{hR} = \mu \left[\left(\frac{\omega_h}{\omega}\right)^2 - \frac{\zeta_h \delta}{\pi} \left(\frac{\omega_h}{\omega}\right) - 1 + \frac{\delta^2}{4\pi^2} \right]$$

$$= \sum_j a_{Rj} \bar{h}_0^{j-1} \dots\dots\dots(29)$$

$$L_{hI} = \mu \left[2\zeta_h \left(\frac{\omega_h}{\omega}\right) - \frac{\delta}{\pi} \right] = \sum_j a_{Ij} \bar{h}_0^{j-1} \dots\dots(30)$$

式 (29), (30) において、振幅 \bar{h}_0 と対数減衰率 δ および、たわみ振動数比 (ω_h/ω) の関係から、係数 a_{Rj}, a_{Ij} を最小自乗法により決定することができる。

一方、動的空気力係数 L_{hR}, L_{hI} が既知のとき、対数減衰率を、風速と振幅との関係において求めることができる。

$$\delta = 2\pi\zeta_h \left(\frac{\omega_h}{\omega}\right) - \frac{\pi}{\mu} L_{hI} \dots\dots\dots(31)$$

$$\left(\frac{\omega_h}{\omega}\right) = \sqrt{\left(\frac{1}{\mu} L_{hR} - \frac{1}{4\mu^2} L_{hI}^2 + 1\right) / (1 - \zeta_h^2)}$$

.....(32)

上式において、 L_{hR}, L_{hI} は、風速と振幅の関数であり、任意の風速と振幅の組み合わせに対して、対数減衰率 δ を算定することができる。

(3) たわみ、ねじれ 2 自由度

2 次元剛体が、たわみ、ねじれ 2 自由度で、減衰振動をするとき

$$\bar{h} = \bar{h}_0 e^{(-\delta/2\pi + i)\omega t} \dots\dots\dots(33)$$

$$\alpha = \alpha_0 e^{(-\delta/2\pi + i)\omega t - i\theta} \dots\dots\dots(34)$$

これを式 (1), (2) に代入する。

$$-1 + \frac{\delta^2}{4\pi^2} - \frac{M_{\alpha R}}{\nu} \dots\dots\dots(42)$$

$$SM_{\alpha I} = 2\zeta_\alpha \left(\frac{\omega_\alpha}{\omega}\right) - \frac{\delta}{\pi} - \frac{M_{\alpha I}}{\nu} \dots\dots\dots(43)$$

また、連成空気力係数 $L_{\alpha R}, L_{\alpha I}, M_{hR}, M_{hI}$ は、式 (5), (6) より次式で表示される。

$$L_{\alpha R} = \sum_j b_{Rj} \alpha_0^{j-1} \dots\dots\dots(44)$$

$$L_{\alpha I} = \sum_j b_{Ij} \alpha_0^{j-1} \dots\dots\dots(45)$$

$$M_{hR} = \sum_j c_{Rj} \bar{h}_0^{j-1} \dots\dots\dots(46)$$

$$M_{hI} = \sum_j c_{Ij} \bar{h}_0^{j-1} \dots\dots\dots(47)$$

したがって、式 (36)~(47) の関係より $\bar{h}_0, \alpha_0, \theta, \delta, (\frac{\omega_h}{\omega}), (\frac{\omega_\alpha}{\omega})$ および $L_{hR}, L_{hI}, M_{\alpha R}, M_{\alpha I}$ の実測値を用いて、最小自乗法により、式 (44)~(47) の係数 $b_{Rj}, b_{Ij}, c_{Rj}, c_{Ij}$ ($j=1, 2, \dots$) を決定することができる。すなわち、連成空気力係数 $L_{\alpha R}, L_{\alpha I}, M_{hR}, M_{hI}$ を求めることができる。

次に、2次元剛体の振動特性と動的空気力係数が与えられているとき、任意の風速における系の対数減衰率と連成振動数を、次のように求めることができる。

$$\begin{bmatrix} z^2 + 2\zeta_h \omega_h z + \omega_h^2 - \frac{\omega^2}{\mu} (L_{hR} + iL_{hI}) & -\frac{\omega^2}{\mu} (L_{aR} + iL_{aI}) \\ -\frac{\omega^2}{\nu} (M_{hR} + iM_{hI}) & z^2 + 2\zeta_a \omega_a z + \omega_a^2 - \frac{\omega^2}{\nu} (M_{aR} + iM_{aI}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{h} \\ \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \dots\dots\dots (49)$$

\bar{h} と α が有意な解を有するための条件は

$$\begin{vmatrix} z^2 + 2\zeta_h \omega_h z + \omega_h^2 - \frac{\omega^2}{\mu} (L_{hR} + iL_{hI}) & -\frac{\omega^2}{\mu} (L_{aR} + iL_{aI}) \\ -\frac{\omega^2}{\nu} (M_{hR} + iM_{hI}) & z^2 + 2\zeta_a \omega_a z + \omega_a^2 - \frac{\omega^2}{\nu} (M_{aR} + iM_{aI}) \end{vmatrix} = 0 \dots\dots\dots (50)$$

式(50)は z に関する複素係数の4次代数方程式であり、4個の複素根をもっている。複素根の実数部は、式(48)の定義より、減衰率($\delta\omega/2\pi$)に相当し、虚数部は、連成振動数 ω に対応している。したがって式(50)の複素根 z のうち、正の虚数部を有する2根が物理的に有意な根であり、それぞれ、ねじれ分岐とたわみ分岐に対応する¹³⁾。

5. 3次元運動方程式

(1) 運動方程式の誘導

たわみ、および、ねじれの振動形を次のように表示する。

$$\bar{h}(x, t) = \sum_j q_j(t) \eta_j(x) \dots\dots\dots (51)$$

$$\alpha(x, t) = \sum_j p_j(t) \varphi_j(x) \dots\dots\dots (52)$$

たわみ、ねじれ2自由度の振動をしている3次元構造物の運動エネルギーは、次のようになる。

$$T = \frac{1}{2} \sum_j [M_j \dot{q}_j^2 + I_j \dot{p}_j^2] \dots\dots\dots (53)$$

ただし

$$M_j = \int_l m \eta_j^2 dx, I_j = \int_l I_a \varphi_j^2 dx \dots\dots\dots (54)$$

構造物の重心軸と弾性軸が一致しているとき、ポテンシャルエネルギーは、次のようになる。

$$U = \frac{1}{2} \sum_j [M_j \omega_h^2 q_j^2 + I_j \omega_a^2 p_j^2] \dots\dots\dots (55)$$

散逸エネルギーは

$$D = \frac{1}{2} \sum_j [2M_j \zeta_{hj} \omega_{hj} \dot{q}_j^2 + 2I_j \zeta_{aj} \omega_{aj} \dot{p}_j^2] \dots\dots\dots (56)$$

q_j, p_j の仮想変位 $\delta q_j, \delta p_j$ を考えると、仮想仕事は、 $\delta W_j = Q_{hj} \delta q_j + Q_{aj} \delta p_j \dots\dots\dots (57)$

一方、一般力として、構造物に作用する揚力 L と空力モーメント M を考えると

$$\delta W_j = \int_l (L \eta_j \delta q_j + M \varphi_j \delta p_j) dx \dots\dots\dots (58)$$

式(35)において

$$z = (-\delta/2\pi + i)\omega \dots\dots\dots (48)$$

とおくとき

式(53)~(58)の関係より、ラグランジュの式を使うと、

$$M_j \ddot{q}_j + 2M_j \zeta_{hj} \omega_{hj} \dot{q}_j + M_j \omega_{hj}^2 q_j = \int_l L \eta_j dx \dots\dots\dots (59)$$

$$I_j \ddot{p}_j + 2I_j \zeta_{aj} \omega_{aj} \dot{p}_j + I_j \omega_{aj}^2 p_j = \int_l M \varphi_j dx \dots\dots\dots (60)$$

ここで

$$\int_l L \eta_j dx = \pi \rho b^2 \omega^2 \int_l [(L_{hR} + iL_{hI}) \sum_k q_k \eta_k \eta_j + (L_{aR} + iL_{aI}) \sum_k p_k \varphi_k \eta_j] dx \dots\dots\dots (61)$$

$$\int_l M \varphi_j dx = \pi \rho b^4 \omega^2 \int_l [(M_{hR} + iM_{hI}) \sum_k q_k \eta_k \varphi_j + (M_{aR} + iM_{aI}) \sum_k p_k \varphi_k \varphi_j] dx \dots\dots\dots (62)$$

このとき、3次元構造物の、たわみ、ねじれ運動方程式は次式で表示される。

$$\ddot{q}_j + 2\zeta_{hj} \omega_{hj} \dot{q}_j + \omega_{hj}^2 q_j = \frac{\omega^2}{\mu_j} \int_0^1 [(L_{hR} + iL_{hI}) \sum_k q_k \eta_k \eta_j + (L_{aR} + iL_{aI}) \sum_k p_k \varphi_k \eta_j] d\bar{x} \dots\dots\dots (63)$$

$$\ddot{p}_j + 2\zeta_{aj} \omega_{aj} \dot{p}_j + \omega_{aj}^2 p_j = \frac{\omega^2}{\nu_j} \int_0^1 [(M_{hR} + iM_{hI}) \sum_k q_k \eta_k \varphi_j + (M_{aR} + iM_{aI}) \sum_k p_k \varphi_k \varphi_j] d\bar{x} \dots\dots\dots (64)$$

ただし

$$\left. \begin{aligned} \mu_j &= M_j / (\pi \rho b^2 l), \\ \nu_j &= I_j / (\pi \rho b^4 l) \quad (j=1, 2, \dots) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (65)$$

$$\bar{x} = x/l \dots\dots\dots (66)$$

(2) ねじれ1自由度

トラス補剛桁吊橋などに卓越して発生するねじれ1自由度振動を考えると、構造物の運動方程式は次式のよ

うになる。

$$\ddot{p}_j + 2\zeta_{\alpha j}\omega_{\alpha j}\dot{p}_j + \omega_{\alpha j}^2 p_j = \frac{\omega^2}{\nu_j} \sum_k (M_{\alpha Rjk} + iM_{\alpha Ijk}) p_k \quad \dots\dots (67)$$

ただし

$$\left. \begin{aligned} M_{\alpha Rjk} &= \int_0^1 M_{\alpha R} \varphi_j \varphi_k d\bar{x} \\ M_{\alpha Ijk} &= \int_0^1 M_{\alpha I} \varphi_j \varphi_k d\bar{x} \end{aligned} \right\} \dots\dots (68)$$

ここで

$$p_j = \bar{p}_j e^{zt}, \quad z = (-\delta/2\pi + i)\omega \quad \dots\dots (69)$$

とすると、式 (67) より次式が成立する。

$$\begin{vmatrix} z^2 + 2\zeta_{\alpha 1}\omega_{\alpha 1}z + \omega_{\alpha 1}^2 - \frac{\omega^2}{\nu_1}(M_{\alpha R11} + iM_{\alpha I11}) & -\frac{\omega^2}{\nu_1}(M_{\alpha R12} + iM_{\alpha I12}) \\ -\frac{\omega^2}{\nu_2}(M_{\alpha R21} + iM_{\alpha I21}) & z^2 + 2\zeta_{\alpha 2}\omega_{\alpha 2}z + \omega_{\alpha 2}^2 - \frac{\omega^2}{\nu_2}(M_{\alpha R22} + iM_{\alpha I22}) \end{vmatrix} = 0 \quad \dots\dots (74)$$

式 (74) は z に関する複素係数の 4 次代数方程式であり、4 個の複素根 z をもっているが、正の虚数部を有する 2 根が物理的に有意な根である。その 2 根は最低 2 次の振動モードに対応して、根の実数部と虚数部から、気流中における 3 次元構造物の対数減衰率 δ と連成振動数 ω をそれぞれ計算することができる。

すでに 3. で述べているように、動的空気力係数 $M_{\alpha R}$, $M_{\alpha I}$ は換算風速 \bar{V} の関数であると同時に、振幅 α_0 と風の吹き上げ角 β の関数である。したがって、式 (74) から計算される ω および δ は、ある想定した風速 \bar{V} , 振幅 α_0 , 吹き上げ角 β の組み合わせについて成立することになる。たとえば、対象とする 3 次元構造物のねじれ振動に関して風速と振幅と対数減衰率の関係 (V - A - δ 曲線) を誘導することができる。また、動的空気力係数 $M_{\alpha R}$, $M_{\alpha I}$ は風の吹き上げ角 β の関数でもあるから、地形などの影響により、スパン方向に風の吹き上げ角が変化するときの耐風性への影響も調べることができる。

(3) たわみ 1 自由度

角柱などに卓越して発生するたわみ 1 自由度振動を検討するとき、構造物の運動方程式は、次式のようになる。

$$\ddot{q}_j + 2\zeta_{hj}\omega_{hj}\dot{q}_j + \omega_{hj}^2 q_j = \frac{\omega^2}{\mu_j} \sum_k (L_{hRjk} + iL_{hIjk}) q_k \quad \dots\dots (75)$$

ただし

$$\left. \begin{aligned} L_{hRjk} &= \int_0^1 L_{hR} \eta_j \eta_k d\bar{x} \\ L_{hIjk} &= \int_0^1 L_{hI} \eta_j \eta_k d\bar{x} \end{aligned} \right\} \dots\dots (76)$$

ここで

$$q_j = \bar{q}_j e^{zt}, \quad z = (-\delta/2\pi + i)\omega \quad \dots\dots (77)$$

とおくとき

$$[D_{jk}] \{\bar{p}_j\} = \{0\} \quad \dots\dots (70)$$

ただし

$$D_{jk} = (z^2 + 2\zeta_{\alpha j}\omega_{\alpha j}z + \omega_{\alpha j}^2) \delta_{jk} - \frac{\omega^2}{\nu_j} (M_{\alpha Rjk} + iM_{\alpha Ijk}) \quad \dots\dots (71)$$

$$\delta_{jk} = \begin{cases} 1 & (j = k) \\ 0 & (j \neq k) \end{cases} \quad \dots\dots (72)$$

式 (70) において $\{\bar{p}_j\}$ が有意な解をもつための条件は

$$|D_{jk}| = 0 \quad \dots\dots (73)$$

たとえば、最低の 2 次モードまで考慮するとき、式 (73) は次のようになる。

$$[E_{jk}] \{\bar{q}_j\} = \{0\} \quad \dots\dots (78)$$

ただし

$$E_{jk} = (z^2 + 2\zeta_{hj}\omega_{hj}z + \omega_{hj}^2) \delta_{jk} - \frac{\omega^2}{\mu_j} (L_{hRjk} + iL_{hIjk}) \quad \dots\dots (79)$$

式 (78) において $\{\bar{q}_j\}$ が有意な解をもつための条件は、

$$|E_{jk}| = 0 \quad \dots\dots (80)$$

式 (80) から、ねじれ 1 自由度振動の場合と同様に、3 次元構造物の、たわみ 1 自由度振動に関する風速と振幅と対数減衰率の関係を導くことができる。

(4) たわみ、ねじれ 2 自由度

吊橋などの 3 次元構造物が、たわみ、ねじれ 2 自由度の振動をする場合を考えると、運動方程式は次のようになる。

$$\begin{aligned} \ddot{q}_j + 2\zeta_{hj}\omega_{hj}\dot{q}_j + \omega_{hj}^2 q_j &= \frac{\omega^2}{\mu_j} \left\{ \sum_k (L_{hRjk} + iL_{hIjk}) q_k \right. \\ &\quad \left. + \sum_k (L_{\alpha Rjk} + L_{\alpha Ijk}) p_k \right\} \quad \dots\dots (81) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \ddot{p}_j + 2\zeta_{\alpha j}\omega_{\alpha j}\dot{p}_j + \omega_{\alpha j}^2 p_j &= \frac{\omega^2}{\nu_j} \left\{ \sum_k (M_{hRjk} + iM_{hIjk}) q_k \right. \\ &\quad \left. + \sum_k (M_{\alpha Rjk} + M_{\alpha Ijk}) p_k \right\} \quad \dots\dots (82) \end{aligned}$$

ただし

$$\left. \begin{aligned} L_{\alpha Rjk} &= \int_0^1 L_{\alpha R} \eta_j \varphi_k d\bar{x} \\ L_{\alpha Ijk} &= \int_0^1 L_{\alpha I} \eta_j \varphi_k d\bar{x} \\ M_{hRjk} &= \int_0^1 M_{hR} \varphi_j \eta_k d\bar{x} \\ M_{hIjk} &= \int_0^1 M_{hI} \varphi_j \eta_k d\bar{x} \end{aligned} \right\} \dots\dots (83)$$

ここで

$$q_j = \bar{q}_j e^{zt}, \quad p_j = \bar{p}_j e^{zt}, \quad z = (-\delta/2 \pi + i)\omega \quad \dots\dots\dots(84)$$

とすると

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} & B_{11} & B_{12} & \dots & B_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} & B_{21} & B_{22} & \dots & B_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} & B_{n1} & B_{n2} & \dots & B_{nn} \\ C_{11} & C_{12} & \dots & C_{1n} & D_{11} & D_{12} & \dots & D_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{n1} & C_{n2} & \dots & C_{nn} & D_{n1} & D_{n2} & \dots & D_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{q}_1 \\ \bar{q}_2 \\ \vdots \\ \bar{q}_n \\ \bar{p}_1 \\ \bar{p}_2 \\ \vdots \\ \bar{p}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots(85)$$

ただし

$$A_{jk} = (z^2 + 2\zeta_{hj}\omega_{hj}z + \omega_{hj}^2)\delta_{jk} - \frac{\omega^2}{\mu_j} (L_{hRjk} + iL_{hIjk}) \quad \dots\dots\dots(86)$$

$$B_{jk} = -\frac{\omega^2}{\mu_j} (L_{aRjk} + iL_{aIjk}) \quad \dots\dots\dots(87)$$

$$C_{jk} = -\frac{\omega^2}{\nu_j} (M_{hRjk} + iM_{hIjk}) \quad \dots\dots\dots(88)$$

$$D_{jk} = (z^2 + 2\zeta_{aj}\omega_{aj}z + \omega_{aj}^2)\delta_{jk} - \frac{\omega^2}{\nu_j} (M_{aRjk} + iM_{aIjk}) \quad \dots\dots\dots(89)$$

式 (85) において $\bar{q}_j, \bar{p}_j (j=1, 2, \dots, n)$ が有意な解をもつための条件は

$$\begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & B_{11} & B_{12} & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots \\ C_{11} & C_{12} & \dots & D_{11} & D_{12} & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots \end{vmatrix} = 0 \quad \dots\dots\dots(90)$$

式 (90) は z に関する $4n$ 次の複素代数方程式で、 $4n$ 組の ω および δ が決定される。そのうち正值の ω が物理的に有意であることを考慮すると、 $2n$ 組の ω と δ が計算されるが、それらは、 $\omega_{hj}, \omega_{aj} (j=1, 2, \dots, n)$ にそれぞれ対応した値になっている。

また、振動モードは、固有ベクトル $\{\bar{q}_1, \bar{q}_2, \dots, \bar{q}_n, \bar{p}_1, \dots, \bar{p}_n\}^T$ を用いて次のように表示される。

$$\bar{h}_r(x) = \sum_j \bar{q}_j^{(r)} \eta_j(x) \quad \dots\dots\dots(91)$$

$$\bar{a}_r(x) = \sum_j \bar{p}_j^{(r)} \varphi_j(x) \quad (r=1, 2, \dots, 2n) \quad \dots\dots\dots(92)$$

ここで

- $\bar{q}_j^{(r)}, \bar{p}_j^{(r)}$: r 次振動の固有ベクトルの成分 \bar{q}_j, \bar{p}_j
- $\bar{h}_r(x)$: r 次振動のたわみ振動形
- $\bar{a}_r(x)$: r 次振動のねじれ振動形

6. 振動条件が構造物の耐風安定性におよぼす影響について

(1) たわみ、ねじれ 2 自由度振動における対数減衰率の誘導

気流中に、たわみ、ねじれ 2 自由度でばね支持された

2 次元剛体の耐風安定性を検討する目安として、対数減衰率の誘導を試みる。2 次元剛体の運動方程式は、式 (35) より

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{h} \\ \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots(93)$$

ただし

$$A = (-\delta/2 \pi + i)^2 \omega^2 + 2\zeta_h \omega_h (-\delta/2 \pi + i)\omega + \omega_h^2 - \frac{\omega^2}{\mu} (L_{hR} + iL_{hI}) \quad \dots\dots\dots(94)$$

$$B = -\frac{\omega^2}{\mu} (L_{aR} + iL_{aI}) \quad \dots\dots\dots(95)$$

$$C = -\frac{\omega^2}{\nu} (M_{hR} + iM_{hI}) \quad \dots\dots\dots(96)$$

$$D = (-\delta/2 \pi + i)^2 \omega^2 + 2\zeta_a \omega_a (-\delta/2 \pi + i)\omega + \omega_a^2 - \frac{\omega^2}{\nu} (M_{aR} + iM_{aI}) \quad \dots\dots\dots(97)$$

このとき、 \bar{h}, α が有意な解を有するための条件は $AD - BC = 0$ $\dots\dots\dots(98)$

式 (98) は複素方程式であるから、実数部と虚数部に分離し、整理すると次のようになる。

$$C_3 C_4 - C_5 - (-\delta/\pi + C_1)(-\delta/\pi + C_2) = 0 \quad \dots\dots(99)$$

$$C_3(-\delta/\pi + C_2) + C_4(-\delta/\pi + C_1) - C_6 = 0 \quad \dots\dots(100)$$

ただし

$$C_1 = 2\zeta_h(\omega_h/\omega) - L_{hI}/\mu \quad \dots\dots\dots(101)$$

$$C_2 = 2\zeta_a(\omega_a/\omega) - M_{aI}/\nu \quad \dots\dots\dots(102)$$

$$C_3 = -1 + (\omega_h/\omega)^2 - L_{hR}/\mu + \delta^2/4\pi^2 - \zeta_h \omega_h \delta / (\pi\omega) = SL_{hR} \quad \dots\dots\dots(103)$$

$$C_4 = -1 + (\omega_a/\omega)^2 - M_{aR}/\nu + \delta^2/4\pi^2 - \zeta_a \omega_a \delta / (\pi\omega) = SM_{aR} \quad \dots\dots\dots(104)$$

$$C_5 = (L_{aR}M_{hR} - L_{aI}M_{hI}) / (\mu\nu) \quad \dots\dots\dots(105)$$

$$C_6 = (L_{aR}M_{hI} + L_{aI}M_{hR}) / (\mu\nu) \quad \dots\dots\dots(106)$$

式 (100) より

$$\delta = \pi(C_2 C_3 + C_1 C_4 - C_6) / (C_3 + C_4) \quad \dots\dots\dots(107)$$

式 (107) より対数減衰率 δ は計算できるが、その場合の未知数 ω は、式 (99) より決定される。すなわち、式 (99) と (100) の連立方程式より、 ω と δ が算出されることになる。いま、無風時のねじれと、たわみの対数減衰率を、それぞれ δ_h, δ_a とするとき、式 (17), (31) より、

$$\delta_h = 2\pi\zeta_h(\omega_h/\omega_{h0}), \quad \delta_a = 2\pi\zeta_a(\omega_a/\omega_{a0}) \quad \dots\dots(108)$$

となることを考慮して、式 (107) を書き直すと、

$$\delta = \frac{\left(\frac{\omega_{a0}}{\omega}\right)\delta_a - \frac{\pi}{\nu} M_{aI}}{1 + SM_{aR}/SL_{hR}} + \frac{\left(\frac{\omega_{h0}}{\omega}\right)\delta_h - \frac{\pi}{\mu} L_{hI}}{1 + SL_{hR}/SM_{aR}} - \frac{\pi(L_{aR}M_{hI} + L_{aI}M_{hR})}{\mu\nu(SL_{hR} + SM_{aR})} \quad \dots\dots\dots(109)$$

ただし

$$\omega_{h0} : \text{無風時のたわみ円振動数 } (= \omega_h \sqrt{1 - \zeta_h^2})$$

$$\omega_{a0} : \text{無風時のねじれ円振動数 } (= \omega_a \sqrt{1 - \zeta_a^2})$$

式 (109) の右辺第 1 項の分子は、ねじれ 1 自由度のときの対数減衰率と一致し、右辺第 2 項の分子は、たわみ 1 自由度のときの対数減衰率と等しくなっている。また、右辺第 3 項は、たわみ、ねじれ 2 自由度の連成項 $L_{aR}, L_{aI}, M_{hR}, M_{hI}$ を含んでいる。

(2) 構造減衰が構造物の空力特性におよぼす影響¹⁴⁾

対数減衰率を、振動自由度との関係でまとめると次のようになる。

ねじれ 1 自由度のとき

$$\delta = \left(\frac{\omega_{a0}}{\omega} \right) \delta_a - \frac{\pi}{\nu} M_{aI} \dots\dots\dots(110)$$

たわみ 1 自由度のとき

$$\delta = \left(\frac{\omega_{h0}}{\omega} \right) \delta_h - \frac{\pi}{\mu} L_{hI} \dots\dots\dots(111)$$

たわみ、ねじれ 2 自由度のときは、式 (109) となる。無風時の対数減衰率 δ_a, δ_h は、構造減衰 δ_{as}, δ_{hs} と無風時の空力減衰 δ_{aa}, δ_{ha} の和と考えることができる。すなわち、

$$\delta_a = \delta_{as} + \delta_{aa} \dots\dots\dots(112)$$

$$\delta_h = \delta_{hs} + \delta_{ha} \dots\dots\dots(113)$$

いま、構造減衰が $\Delta\delta_{as}, \Delta\delta_{hs}$ だけ変化したとすると、有風時の対数減衰率の変化 $\Delta\delta$ は次のようになる。

ねじれ 1 自由度のとき

$$\Delta\delta = \frac{\omega_{a0} + \Delta\omega_{a0}}{\omega} \cdot \Delta\delta_{as} + \frac{\Delta\omega_{a0}}{\omega} \delta_{as} \dots\dots\dots(114)$$

たわみ 1 自由度のとき

$$\Delta\delta = \frac{\omega_{h0} + \Delta\omega_{h0}}{\omega} \cdot \Delta\delta_{hs} + \frac{\Delta\omega_{h0}}{\omega} \delta_{hs} \dots\dots\dots(115)$$

たわみ、ねじれ 2 自由度のとき、

$$\Delta\delta = \frac{\frac{\omega_{a0} + \Delta\omega_{a0}}{\omega} \cdot \Delta\delta_{as} + \frac{\Delta\omega_{a0}}{\omega} \delta_{as}}{1 + SM_{aR}/SL_{hR}} + \frac{\frac{\omega_{h0} + \Delta\omega_{h0}}{\omega} \cdot \Delta\delta_{hs} + \frac{\Delta\omega_{h0}}{\omega} \delta_{hs}}{1 + SL_{hR}/SM_{aR}} \dots\dots(116)$$

ただし

$\Delta\omega_{h0}$: たわみ構造減衰が $\Delta\delta_{hs}$ だけ変化したことによる無風時のたわみ円振動数の変化量

$\Delta\omega_{a0}$: ねじれ構造減衰が $\Delta\delta_{as}$ だけ変化したことによる無風時のねじれ円振動数の変化量

ここで、構造減衰の変化および風速の変化によって振動数が受ける影響が微小で、実用上、無視できるとき、式 (114), (115) は次式のようになる。

ねじれ 1 自由度振動のとき

$$\Delta\delta = \Delta\delta_{as} \dots\dots\dots(117)$$

たわみ 1 自由度振動のとき

$$\Delta\delta = \Delta\delta_{hs} \dots\dots\dots(118)$$

すなわち、上記の振動数に関する条件が満たされると

きに限り、ねじれ 1 自由度または、たわみ 1 自由度振動の場合、構造減衰の変化量を、そのまま風の影響を受ける構造物の対数減衰率に重ね合わせることができる。

それに対して、たわみ、ねじれ 2 自由度の場合、式 (116) に示すように、有風時の構造物の対数減衰率は、構造減衰の変化に対して、動的空気力の影響を無視することができず、特に、動的空気力の実数部 M_{aR} と L_{hR} の影響に留意する必要がある。

(3) 質量、慣性モーメントが構造物の空力特性におよぼす影響

質量と慣性モーメントは、2 次元剛体の運動方程式の中で、次の無次元項として考慮されている。

$$\left. \begin{aligned} \mu &= m/(\pi\rho b^2) \\ \nu &= I_a/(\pi\rho b^4) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(119)$$

動的空気力が既知のとき、 μ と ν が対数減衰率 δ におよぼす影響は、式 (109)~(111) により算定することができる。特に、振動が 1 自由度のときは、次式の関係が成立する。

ねじれ 1 自由度の場合

$$I_a \left[\delta - \left(\frac{\omega_{a0}}{\omega} \right) \delta_a \right] / (\pi\rho b^4) = -\pi M_{aI} \dots\dots(120)$$

たわみ 1 自由度の場合

$$m \left[\delta - \left(\frac{\omega_{h0}}{\omega} \right) \delta_h \right] / (\pi\rho b^2) = -\pi L_{hI} \dots\dots(121)$$

ここで、風速の変化による振動数の変化を無視できるとすると、次式に示すように、振動 1 自由度の場合に慣用されている相似則を導くことができる。すなわち、ねじれ 1 自由度の場合

$$I_a(\delta - \delta_a) / (\pi\rho b^4) = -\pi M_{aI} \dots\dots\dots(122)$$

たわみ 1 自由度の場合

$$m(\delta - \delta_h) / (\pi\rho b^2) = -\pi L_{hI} \dots\dots\dots(123)$$

(4) たわみ、ねじれ 2 自由度振動をねじれ 1 自由度振動として扱うときの問題点

トラス補剛桁吊橋では、ねじれ振動の卓越したねじれフラッターがよく発現する。この場合、ねじれ振動だけに着目して振動現象を解析することがよく行われている。ここでは、その手法の適用範囲および有用性について検討する。

いま、空気力を振幅に関し多項近似すると、式 (4)~(7) が成立するが、ねじれ振動が卓越して、たわみ振動が微小なとき

$$\left. \begin{aligned} L_{hR} &= a_{R1}, L_{hI} = a_{I1} \\ M_{hR} &= c_{R1}, M_{hI} = c_{I1} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(124)$$

また、振幅による振動数の変化は微小であるとするとき、

$$M_{aR} = d_{R1} \dots\dots\dots(125)$$

このとき、式 (109) は次のようになる。

$$\delta = \left(\frac{\omega_{\alpha 0}}{\omega} \right) \delta_{\alpha} - \frac{\pi}{\nu} \bar{M}_{\alpha I} \dots\dots\dots(126)$$

ただし

$$\bar{M}_{\alpha I} = \sum_j D_j \alpha_0^{j-1} \dots\dots\dots(127)$$

$$D_1 = \frac{\left[-\frac{\nu}{\pi} \left(\frac{\omega_{\alpha 0}}{\omega} \right) \delta_{\alpha} \left\{ -1 + \left(\frac{\omega_{\alpha}}{\omega} \right)^2 - \frac{d_{R1}}{\nu} \right\} / \right.}{1 + SM_{\alpha R} / SL_{hR}} \cdot \left. \left\{ -1 + \left(\frac{\omega_h}{\omega} \right)^2 - \frac{a_{R1}}{\mu} \right\} - d_{I1} \right]}{1 + SM_{\alpha R} / SL_{hR}} + \frac{\frac{\nu}{\pi} \left(\frac{\omega_{h0}}{\omega} \right) \delta_h - \frac{\nu}{\mu} a_{I1}}{1 + SL_{hR} / SM_{\alpha R}} - \frac{c_{I1} b_{R1} + c_{R1} b_{I1}}{\mu (SL_{hR} + SM_{\alpha R})} \dots\dots\dots(128)$$

$$D_k = \frac{-d_{Ik}}{1 + SM_{\alpha R} / SL_{hR}} - \frac{c_{I1} b_{Rk} + c_{R1} b_{Ik}}{\mu (SL_{hR} + SM_{\alpha R})} \quad (k=2, 3, \dots) \dots\dots\dots(129)$$

式 (126) は、ねじれ1自由度の場合の対数減衰率を与える式 (17) と形の上で一致していて、空気力の係数は、 d_{Ij} の代りに D_j ($j=1, 2, \dots$) となっている。たわみ、ねじれ2自由度振動を、ねじれ1自由度として扱うことができる条件は、動的空気力係数が、たわみ振幅 \bar{h}_0 に影響されないことである。そのとき、係数 $\bar{M}_{\alpha I}$ は式 (127) に示すように、ねじれ振幅 α_0 の多項式として整理され、ねじれ1自由度振動の場合と、形式上同様に、ねじれ対数減衰率を扱うことができる。ここで注意を要することは、係数 D_j は、質量パラメーター μ と ν 、振動数比 (ω_{α}/ω) と (ω_h/ω) さらに初期減衰 δ_{α} と δ_h の関数となっていて、係数 $\bar{M}_{\alpha I}$ は、本質的に動的空気力係数 $M_{\alpha I}$ と異なる点である。したがって、本方法の適用にあたっては、振動条件の変化による減衰率の受ける影響について、十分注意を払う必要がある。ところで、 D_j の定義式 (128), (129) において、連成空気力係数が $(c_{I1} b_{Rj} + c_{R1} b_{Ij})$ の項としてまとまっておき、他の空気力係数 a_{Rj} , a_{Ij} , d_{Rj} , d_{Ij} を、別途、たわみ、または、ねじれ1自由度実験から求めていけば、実験値 D_j から、容易に連成空気力の項 $(c_{I1} b_{Rj} + c_{R1} b_{Ij})$ を算定することができる。係数 D_j を動的空気力係数 a_{Rj} , a_{Ij} , d_{Rj} , d_{Ij} および $(c_{I1} b_{Rj} + c_{R1} b_{Ij})$ から算出するようにすれば、 $\bar{M}_{\alpha I}$ は振動条件 (質量パラメーター、振動数比、初期減衰) の影響を適確に評価することができ、本方法の有用性が発揮されるものと思われる。

7. 実験誤差の評価

動的空気力係数は、風洞実験で得られる対数減衰率と

振動数および、たわみ振動とねじれ振動の位相差から算出されるが、それらの計測に際しては、測定誤差がかならず発生する。この測定誤差が、動的空気力係数にどの程度影響するか検討しておくことは、実験から得られる動的空気力係数の信頼性の評価に有益なことと思われる。

(1) 対数減衰率の測定誤差

対数減衰率は、動的空気力係数と非常に密接な関係にあり、特に、構造物の耐風安定性を左右する空気力係数の虚数部の値を決定している。たとえば、式 (110), (111) より

$$M_{\alpha I} = \frac{\nu}{\pi} \left[\left(\frac{\omega_{\alpha 0}}{\omega} \right) \delta_{\alpha} - \delta \right] \doteq \frac{\nu}{\pi} [\delta_{\alpha} - \delta] \dots\dots(130)$$

$$L_{hI} = \frac{\mu}{\pi} \left[\left(\frac{\omega_{h0}}{\omega} \right) \delta_h - \delta \right] \doteq \frac{\mu}{\pi} [\delta_h - \delta] \dots\dots(131)$$

このとき、対数減衰率の測定誤差が $\epsilon\%$ あるとすれば、動的空気力係数の誤差も $\epsilon\%$ となる。

(2) 振動数の測定誤差

振動数は、動的空気力係数の実数部と密接な関係にある。たとえば、式 (15), (29) より

$$M_{\alpha R} = \nu \left[\left(\frac{\omega_{\alpha}}{\omega} \right)^2 - \frac{\zeta_{\alpha} \delta}{\pi} \left(\frac{\omega_{\alpha}}{\omega} \right) - 1 + \frac{\delta}{4\pi^2} \right] \dots\dots\dots(132)$$

$$L_{hR} = \mu \left[\left(\frac{\omega_h}{\omega} \right)^2 - \frac{\zeta_h \delta}{\pi} \left(\frac{\omega_h}{\omega} \right) - 1 + \frac{\delta^2}{4\pi^2} \right] \dots\dots\dots(133)$$

いま、振動数比の測定に、誤差 ΔX_{α} または ΔX_h があるとき、空気力係数の誤差は次のようになる。

$$\Delta M_{\alpha R} = \nu \cdot \Delta X_{\alpha} \left[2 \left(\frac{\omega_{\alpha}}{\omega} \right) - \frac{\zeta_{\alpha} \delta}{\pi} \right] \dots\dots\dots(134)$$

$$\Delta L_{hR} = \mu \cdot \Delta X_h \left[2 \left(\frac{\omega_h}{\omega} \right) - \frac{\zeta_h \delta}{\pi} \right] \dots\dots\dots(135)$$

したがって、振動数比の測定誤差に比例して、空気力係数の誤差は大きくなるが、振動数の測定精度が3桁程度であるところを考えると、振動数比の測定誤差は数%以下となり、動的空気力係数への影響は、比較的小さいものと思われる。

(3) 位相差の測定精度

たわみ振動とねじれ振動の位相差 θ が、連成空気力係数の計測に際して重要な役割を持っていることは、式 (36)~(39) に示すように明らかである。いま、位相差に測定誤差 $\Delta \theta$ があったとすると、空気力の誤差は次式のようにになる。

$$\Delta L_{\alpha R} = \Delta \theta \cdot \mu \left(\frac{\bar{h}_0}{\alpha_0} \right) (-SL_{hR} \sin \theta - SL_{hI} \cos \theta) = -\Delta \theta \cdot L_{\alpha I} \dots\dots\dots(136)$$

$$\begin{aligned} \Delta L_{\alpha I} &= \Delta\theta \cdot \mu \left(\frac{\bar{h}_0}{\alpha_0} \right) (SL_{hR} \cos \theta - SL_{hI} \sin \theta) \\ &= \Delta\theta \cdot L_{\alpha R} \dots\dots\dots(137) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta M_{hR} &= \Delta\theta \cdot \nu \left(\frac{\alpha_0}{\bar{h}_0} \right) (-SM_{\alpha R} \sin \theta + SM_{\alpha I} \cos \theta) \\ &= \Delta\theta \cdot M_{hI} \dots\dots\dots(138) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta M_{hI} &= \Delta\theta \cdot \nu \left(\frac{\alpha_0}{\bar{h}_0} \right) (-SM_{\alpha R} \cos \theta - SM_{\alpha I} \sin \theta) \\ &= -\Delta\theta \cdot M_{hR} \dots\dots\dots(139) \end{aligned}$$

式 (136)~(139) から明らかなように、位相差の測定誤差は、直接に連成空気力係数の測定精度に影響をおよぼし、その程度は、連成空気力係数の大きさにより変化する。

(4) 連成空気力係数の簡易測定法

一般に、たわみ振動とねじれ振動の位相差を、精度よく求めることは難しく、実験値のばらつきが大きいといわれている。そこで以下に、位相差を用いしないで、連成空気力係数を実験的に検出する簡易測定法について述べる。さて、対数減衰率が微小なとき、空気力係数と対数減衰率と振動数比の間には、式 (99),(100) の関係が成立する。すなわち、

$$\begin{aligned} P &= L_{\alpha R} M_{hR} - L_{\alpha I} M_{hI} \\ &= \mu\nu C_3 C_4 - \mu\nu (\delta/\pi - C_1) (\delta/\pi - C_2) \dots\dots(140) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Q &= L_{\alpha R} M_{hI} + L_{\alpha I} M_{hR} \\ &= \mu\nu C_3 (-\delta/\pi + C_2) + \mu\nu C_4 (-\delta/\pi + C_1) \\ &\dots\dots\dots(141) \end{aligned}$$

ここで、 C_1, C_3 はたわみ1自由度実験より、 C_2, C_4

はねじれ1自由度実験から算出される。したがって、たわみ、ねじれ2自由度実験の δ と ω を測定すれば、上式より連成空気力係数の項 P, Q が決定される。また、1自由度の空気力係数 L_h, M_α と連成空気力係数の項 P, Q が既知のとき、式 (140),(141) を用いて、任意の風速と振幅における対数減衰率 δ と円振動数 ω を算定することができる。

8. 数値計算例

たわみ、または、ねじれ1自由度振動の場合、非線形動的空気力係数は、すでに4. で述べているように、風速と振幅と対数減衰率および振動数比の関係から算出される。そのうち、振動数比を除いて、風速と振幅と対数減衰率の関係は、一般に $V-A-\delta$ 曲線として表示されている。ところで、 $V-A-\delta$ 曲線は、吊橋の耐風安定性を検討する上で重要な情報であり、特に本州四国連絡橋・風洞試験基準¹⁶⁾では、風洞実験結果を $V-A-\delta$ 曲線上に整理することを義務づけている。このような状況のもとで、本論文の手法を $V-A-\delta$ 曲線と結びつけるとき、現在の風洞実験の手順の延長として、非線形動的空気力係数を比較的容易に算定することができよう。次に、数値計算例として、因島大橋の $V-A-\delta$ 曲線から、非線形動的空気力係数を算出する場合を紹介する¹⁷⁾。因島大橋風洞実験の実験条件を表-1に、また、 $V-A-\delta$ 曲線を図-1に示す。この実験では、模型を、たわみ、ねじれ2自由度で支持しているが、実験結果は、ねじれ振動に

表-1 実験条件¹⁷⁾

模型支持状態	たわみ・ねじれ2自由度
模型主構間隔	0.4094m
重量	4280 g/m
極慣性モーメント	928 g-cm-sec ² /m
振動数	たわみ振動 2.05 Hz
	ねじれ振動 4.31 Hz
構造減衰	たわみ振動 0.036
	ねじれ振動 0.025

表-2 V-A-δ 数表

ねじれ振動(度)	換算風速 (2πV/bωα)									
	0.0	1.0	2.0	3.0	4.0	5.0	6.0	7.0	8.0	9.0
1.0	0.024	0.041	0.036	0.025	0.017	0.016	0.019	0.024	0.028	0.031
2.0	0.023	0.043	0.031	0.016	0.010	0.014	0.022	0.028	0.029	0.033
3.0	0.023	0.041	0.029	0.014	0.008	0.012	0.023	0.031	0.031	0.022
4.0	0.024	0.041	0.030	0.016	0.010	0.014	0.022	0.029	0.030	0.024
5.0	0.023	0.041	0.030	0.015	0.010	0.015	0.023	0.030	0.029	0.025
6.0	0.024	0.040	0.032	0.020	0.015	0.018	0.026	0.033	0.035	0.035
7.0	0.024	0.042	0.034	0.022	0.017	0.020	0.029	0.037	0.035	0.021
8.0	0.024	0.042	0.035	0.025	0.020	0.022	0.028	0.032	0.036	0.045
9.0	0.024	0.041	0.037	0.027	0.019	0.019	0.026	0.033	0.032	0.011

表-3 非線形動的空気力係数

		1	\bar{V}	\bar{V}^2	\bar{V}^3	\bar{V}^4	\bar{V}^5
実数部 $\bar{M}_{\alpha R}$	1	-0.2790 E-05	0.2191 E-04	-0.1707 E-04	0.4703 E-05	-0.5481 E-06	0.2311 E-07
	α_0	0.2851 E-05	-0.8741 E-05	0.6647 E-05	-0.1679 E-05	0.1735 E-06	-0.6401 E-08
	α_0^2	-0.5995 E-06	0.1610 E-05	-0.1215 E-05	0.2952 E-06	-0.2855 E-07	0.9631 E-09
	α_0^3	0.3463 E-07	-0.8446 E-07	0.6461 E-07	-0.1555 E-07	0.1464 E-08	-0.4730 E-10
虚数部 $\bar{M}_{\alpha I}$	1	0.3593 E-04	-0.8431 E-02	0.4626 E-02	-0.9569 E-03	0.9301 E-04	-0.3700 E-05
	α_0	0.2488 E-04	-0.2740 E-02	0.3371 E-02	-0.9524 E-03	0.9573 E-04	-0.2988 E-05
	α_0^2	-0.4320 E-05	0.5378 E-03	-0.6221 E-03	0.1645 E-03	-0.1507 E-04	0.3907 E-06
	α_0^3	0.2540 E-06	-0.2770 E-04	0.2967 E-04	-0.6994 E-05	0.5066 E-06	-0.4807 E-08

ただし $\bar{V} = 2\pi V/b\omega\alpha$ $\nu = I_{\alpha I}/\pi e b^4 = 0.8413$

関してだけ整理されている。そこで、6.(4) に述べているように、ねじれ1自由度振動として空気力係数を計算する。ここで算出される空気力係数は \overline{M}_{aI} で、本来の空気力係数とは異なる点に注意を要する。まず、 $V-A-\delta$ 曲線から、多項近似により $V-A-\delta$ 数表を表-2 のように作成する。次に、振動数比が不明のため、 $\omega_a/\omega = 1.0$ と仮定する。このとき、非線形動的空気力係数を、

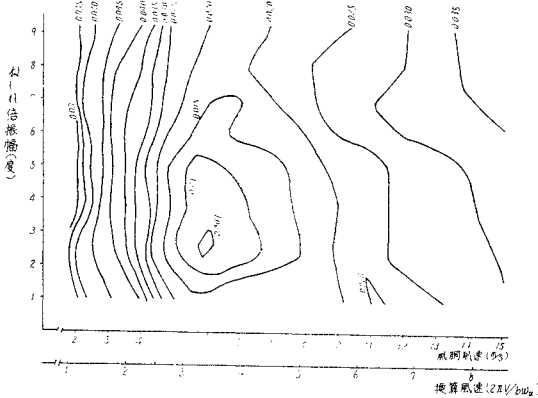


図-1 $V-A-\delta$ 曲線¹⁷⁾

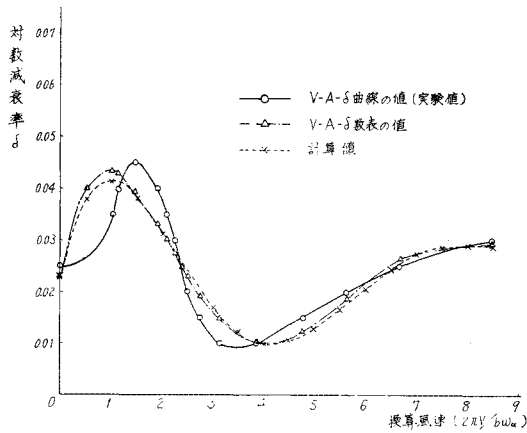


図-2 $V-\delta$ 曲線 (ねじれ倍振幅 2°)

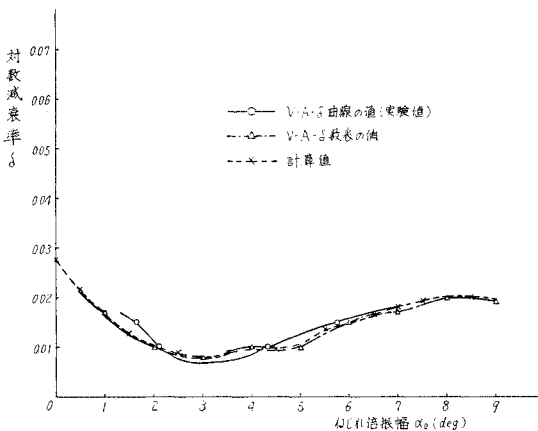


図-3 $A-\delta$ 曲線 (換算風速 4.0)

$V-A-\delta$ 数表から計算することができる。その結果を表-3 に示す。逆に非線形動的空気力係数が既知のとき、風速と振幅と対数減衰率の関係を導くことができる。たとえば、表-1の実験条件のもとで、ねじれ倍振幅 2°のときの風速と対数減衰率の関係を $V-\delta$ 曲線として図-2 に示す。また、換算風速 $\overline{V}=4.0$ のときの振幅と対数減衰率の関係を $A-\delta$ 曲線として図-3 に示す。図-2, 3 から明らかなように、動的空気力係数(表-3)からの計算値と実験値の誤差は $V-A-\delta$ 数表の作成時に発生しており、 $V-A-\delta$ 数表と計算値とは非常によく一致している。今後、非線形動的空気力係数の精度を高めるためには、次のような項目を $V-A-\delta$ 曲線に追加して、整理することが望ましい。すなわち、

- 1) 無風時の $V-\delta$ 関係
- 2) 低風時の $V-A-\delta$ 関係
- 3) $V-A-\omega_a/\omega$ 関係

9. まとめ

本論文では、自由振動法の立場から、非線形動的空気力係数を定常振動だけでなく、減衰振動も考慮して算出する方法を提案し、また、非線形動的空気力が作用する吊橋の非線形応答をエネルギー散逸が等価な線形振動系に置換して、吊橋の耐風応答を $V-A-\delta$ 関係として整理できることを、数値計算例とともに示した。次に、 $V-A-\delta$ 曲線から構造物の耐風安定性を評価する際の資料として、振動条件が構造物の耐風応答におよぼす影響について検討し、さらに非線形動的空気力係数の計測にもなる測定誤差が、空気力係数に与える影響について考察を加えた。以上の結果、次のことが明らかとなった。

(1) 従来、3次元構造物の耐風性の検討に際して、3次元模型実験または強制振動法による動的空気力が用いられており、2次元剛体模型のばね支持実験の結果が検証実験のわくを越えて、有効に利用されることは少なかったように見られる。それが、本論文の手法によれば、ばね支持実験からも非線形動的空気力を実用上精度良く検出することができ、その結果、振動モードを考慮して、3次元構造物の耐風安定性を調べることが可能となる。

(2) 本論文の手法を、 $V-A-\delta$ 曲線と結びつけるとき、本州四国連絡橋・風洞試験基準に規定されている実験手順の範囲で、非線形動的空気力係数を比較的容易に算定することができる。

(3) 本論文では、動的空気力係数を換算風速と振幅と風の吹き上げ角の関数として、最小自乗法により、多項近似で表示しているが、この手法を拡張して、動的空気力係数を、減衰率¹⁸⁾さらに構造物の断面形状の関数と

して、整理することも考えられる。

(4) 風速と振幅と対数減衰率の関係を表す $V-A-\delta$ 曲線は、ばね支持実験から得られるが、曲線の特性は、模型の実験条件の影響のもとで決定される。ところが実験では、振動条件の設定誤差がかならず発生するため、 $V-A-\delta$ 曲線から構造物の耐風安定性を検討するにあたっては、振動条件の影響に関して、本論文 6. で述べている点に十分配慮する必要がある。

(5) 動的空気力係数の算出に際しては、対数減衰率の測定精度が、空気力係数の精度を左右し、さらに、連成空気力係数においては、たわみ振動とねじれ振動の位相差が、定常振動時だけでなく減衰振動時にも、重要な因子となる。一方、本論文の簡便法を用いるとき、測定誤差の入り易い位相差によらないで、連成空気力係数を、近似的に求めることが可能となる。

最後に、本論文をまとめるにあたり、終始変らぬご指導、ご激励を賜った京都大学 小西教授ならびに、有益なアドバイスをいただいた京都大学 松本講師に深甚の謝意を表す次第である。

【補遺】 対数減衰率の定義

粘性減衰のある自由振動の式は、一般に次式で表わされる。

$$\ddot{\alpha} + 2\zeta_a \omega_a \dot{\alpha} + \omega_a^2 \alpha = 0 \quad \dots\dots\dots(142)$$

上式の解は

$$\alpha = Ae^{-\lambda t} \cos(\omega t - \theta) \quad \dots\dots\dots(143)$$

ただし

$$\left. \begin{aligned} A &= \sqrt{\alpha_s^2 + (\dot{\alpha}_s + \zeta_a \omega_a \alpha_s)^2 / \omega^2}, \lambda = \omega \delta / (2\pi) \\ \omega &= \omega_a \sqrt{1 - \zeta_a^2}, \tan \theta = (\dot{\alpha}_s + \zeta_a \omega_a \alpha_s) / (\omega \alpha_s) \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots(144)$$

$\alpha_s, \dot{\alpha}_s$: $t=0$ のときの変位および速度

式 (143) より明らかなように、変位の極大値 (振幅) α_0 は、曲線 $Ae^{-\lambda t}$ 上に位置して

$$\Phi(t) = Ae^{-\lambda t} \quad \dots\dots\dots(145)$$

とおくとき、 $\Phi(t)$ は振幅 α_0 の包絡線とみなすことができる。一方、変位が極大値 α_0 をもつときの振動系のエネルギーは、系のポテンシャルエネルギーに等しいとみなすことができる。すなわち

$$W = \frac{1}{2} k \alpha_0^2 \quad \dots\dots\dots(146)$$

ただし

W : 1 サイクル中の最大ポテンシャルエネルギー
 k : 振動系のばね定数

時刻 t_1 において、変位が極大値 α_{01} となり、1 サイクル後の時刻 t_2 に極大値 α_{02} となるとき、振動系が 1 サイクル中に散逸するエネルギーは

$$\Delta W = \frac{1}{2} k (\alpha_{01}^2 - \alpha_{02}^2) \quad \dots\dots\dots(147)$$

ところで、変位が極大となる振幅の値は式 (144) に示すように、初期条件 $\alpha_s, \dot{\alpha}_s$ のいかんにより、曲線式 (145) 上の任意の点にとることができる。そこで、式 (147) において、振幅 α_0 の代りに、包絡線 $\Phi(t)$ を考慮すると、

$$\Delta W = \frac{1}{2} k \{\Phi^2(t_1) - \Phi^2(t_2)\} \quad \dots\dots\dots(148)$$

ここで、振動系のエネルギー散逸の割合を示すパラメーターとして、次式で定義される減衰容量 ψ を導入する。

$$\psi = \Delta W / W = 1 - \{\Phi(t_2) / \Phi(t_1)\}^2 \quad \dots\dots\dots(149)$$

また、対数減衰率の定義を $\Phi(t)$ を用いて表示すると次のようになる。

$$\delta_\Phi = \log_e \{\alpha_{01} / \alpha_{02}\} = \log_e \{\Phi(t_1) / \Phi(t_2)\} \quad \dots\dots(150)$$

式 (149), (150) より

$$\psi = 1 - e^{-2\delta_\Phi} \quad \dots\dots\dots(151)$$

上式は、対数減衰率 δ_Φ と減衰容量 ψ の関係式である。

さて、対数減衰率の示標を新たに次式で定義する。

$$r = -\frac{2\pi}{\omega} \frac{\partial}{\partial t} \{\log_e \Phi(t)\} \quad \dots\dots\dots(152)$$

式 (152) で定義される減衰容量の示標 r と減衰容量 ψ の間には、時刻 t_0 の前後 1/2 サイクルを考えると、従来の対数減衰率の場合と同様の関係が成立する。すなわち式 (152) を $(t_0 - \pi/\omega)$ から $(t_0 + \pi/\omega)$ まで積分すると、

$$r = \log_e \left\{ \Phi \left(t_0 - \frac{\pi}{\omega} \right) / \Phi \left(t_0 + \frac{\pi}{\omega} \right) \right\} \quad \dots\dots\dots(153)$$

一方、減衰容量は式 (149) と同様にして、

$$\psi = 1 - \left\{ \Phi \left(t_0 + \frac{\pi}{\omega} \right) / \Phi \left(t_0 - \frac{\pi}{\omega} \right) \right\}^2 \quad \dots\dots(154)$$

式 (153), (154) より

$$\psi = 1 - e^{-2r} \quad \dots\dots\dots(155)$$

ただし、上式の計算において、対数減衰率の示標 r と円振動数 ω は、時間 t に関して一定であるとしている。したがって、対数減衰率の示標 r は、式 (151) と (155) より明らかなように、その定義される時刻 t_0 の前後 1/2 サイクルの間で、振動が線形であるとするとき、その区間で定義される対数減衰率 δ_Φ と一致する。

次に、 N サイクル中の全散逸エネルギーに着目して、 ψ_N を N サイクル中の全散逸エネルギーと N サイクル中の最大ポテンシャルエネルギーの比と定義すると、次式が成立する (ただし、 $N=1, 2, \dots$)。

CASE 1. r が時間 t に関して一定値 \bar{r} である場合

$$\psi_N = 1 - \{\Phi(t + N\pi/\omega) / \Phi(t - N\pi/\omega)\}^2 = 1 - e^{-2N\bar{r}} \quad \dots\dots\dots(156)$$

CASE 2 r の時間的変化を考慮する場合

$$\psi_N = 1 - \{\Phi(t + N\pi/\omega) / \Phi(t - N\pi/\omega)\}^2$$

$$= 1 - e^{-\frac{\omega}{\pi} \int_{t_0 - N\pi/\omega}^{t_0 + N\pi/\omega} r dt} \dots\dots\dots (157)$$

式 (156) と (157) の関係より

$$\tilde{r} = \frac{\omega}{2N\pi} \int_{t_0 - N\pi/\omega}^{t_0 + N\pi/\omega} r dt \dots\dots\dots (158)$$

すなわち、対数減衰率の指標 r が時間に関して一定値 \tilde{r} であるとする場合、その値を r の N サイクル当りの時間平均値にとれば、対象とする N サイクル中の全散逸エネルギーに関して等価となる。なお、 r の時間平均値は、対象とする時間の初期振幅 $\Phi(t - N\pi/\omega)$ と最終振幅 $\Phi(t + N\pi/\omega)$ の比により決定される。

参 考 文 献

- 1) 森光・伊藤・宮田：空気力の非線形性を考慮した構造物の空力弾性振動，土木学会論文報告集，No. 219, 1973-11.
- 2) 溝田・中村：矩形断面柱の非定常揚力と後流の速度変動について，構造物の耐風性に関する第3回シンポジウム論文集，1974-12.
- 3) 大築・鷲津・富沢・大屋：箱型建物模型の風洞実験—強制振動法による空気力の測定—，構造物の耐風性に関する第2回シンポジウム論文集，1972-12.
- 4) 田中・伊藤：充腹構造物の自励振動における空気力の特性，土木学会論文報告集，No. 168, 1969-8.
- 5) 成田・横山・伊藤：斜張橋断面の空力特性（その1），構造物の耐風性に関する第3回シンポジウム論文集，1974-12.
- 6) Ukeguchi, N., Sakata, H. and Nishitani, H. : An Investigation of Aeroelastic Instability of Suspension Bridges, Symposium on Suspension Bridges, Lisbon,

- Nov., 1966.
- 7) 久保・宮田・伊藤：吊橋系の空力弾性振動の部分，全体模型による風洞実験について，構造物の耐風性に関する第3回シンポジウム論文集，1974-12.
- 8) 山口・白木・福沢・伊藤・田中：長大つり橋の架設時の耐風安定性について，構造物の耐風性に関する第1回シンポジウム論文集，1970-5.
- 9) Scanlan, R.H. and Sabzevari, A. : Suspension Bridge Flutter Revisited, ASCE Structural Engineering Conference/Seattle, Washington, May, 1967.
- 10) Sabzevari, A. and Scanlan, R.H. : Aerodynamic Instability of Suspension Bridges, Proc. of ASCE, EM 2, April, 1968.
- 11) 白石成人：平板状構造物の曲げねじれフラッター特性に関する基礎的考察，土木学会論文報告集，No. 186, 1971-2.
- 12) 中村・溝田：ある箱型構造物の空力弾性的特性について，構造物の耐風性に関する第2回シンポジウム論文集，1972-12.
- 13) 中村・吉村：吊橋断面の2自由度フラッターにおける振動数比の影響および Serberg の式の検討，構造物の耐風性に関する第3回論文集，1974-12.
- 14) 有江・大久保・榎波：荒川大橋の耐風性について，土木学会，第23回年次学術講演会講演概要，第I部門，1968.
- 15) 土木学会・本州四国連絡橋技術調査委員会編：耐風設計指針および同解説，昭和42年.
- 16) 土木学会・本州四国連絡橋耐風研究小委員会編：本州四国連絡橋耐風に関する調査研究報告書，昭和47年.
- 17) 土木学会・本州四国連絡橋耐風研究小委員会編：本州四国連絡橋の耐風に関する調査研究報告書，昭和48年.
- 18) Golland, M. and Luke, Y.L. : A Study of the Bending-Torsion Aeroelastic Modes for Aircraft Wings, Journal of the Aeronautical Sciences, Vol. 16, 1949. (1975.3.28・受付)