

残留応力および初期たわみを有する圧縮板の弾塑性解析

ELASTIC-PLASTIC ANALYSIS OF COMPRESSED PLATE
WITH RESIDUAL STRESS AND INITIAL DEFLECTION小松定夫*・北田俊行**・宮崎清司***
By Sadao KOMATSU, Toshiyuki KITADA and Seiji MIYAZAKI

1. ま え が き

鋼橋構造物の薄肉軽量化，長大化が推進されるにつれ，圧縮応力を受ける薄板部材の強度設計の重要性が認識されつつある。ことに，ドナウ箱桁橋の崩壊事故以来，従来の線形座屈理論に立脚した強度設計概念に対して厳粛な警鐘が打ち鳴らされるに至った。この事故は，ÖNORM³⁰⁾ の設計規定において，圧縮板の線形座屈応力度に対する安全率を架設時 1.25 という低い値にとっていたことに基因するものであると考える。これは，線形座屈理論を過信したためにほかならない。すでに，Timoshenko は，圧縮板の線形座屈応力度に対して安全率 1.8 を提唱していた。AASHO³¹⁾ においては，この提案を尊重し生かしている。道路橋示方書²⁴⁾においても，圧縮板の線形座屈応力度（残留応力を考慮した値）に対して 1.7 を採用している。ドナウ橋梁の崩壊事故についての報告書ならびに圧縮板に関する最近の研究成果を総合的に判断すると，もし，安全率を 1.7 以上にとり，かつ，道路橋示方書 1・8・12 に述べられたように，架設時荷重について慎重な検討を行っておれば，このような大事故を未然に防止できたものと思われる。1973年に DIN 4114³²⁾ の暫定修正規定が発表されたが，線形座屈応力度に対して従来の安全率 1.35 を改めて，1.71 に増加している。これは，同じような配慮によるものである。しかし将来，さらに設計の合理化を推進し，安全性に対する信頼度を増大するためには，圧縮板の座屈前後における非線形挙動を明確にすることが最も重要な基本的問題であると考えられる。

一方，鋼橋における溶接集成部材の全面的採用に伴い，薄板部材には溶接による残留応力および初期たわみ

が必ず併存することになる。これらの初期不整は，圧縮板の座屈強度に重大な影響をおよぼすものであるから，従来のように単に安全率でカバーするのみにとどまらず，これらの不完全因子を考慮に入れた非線形解析法を確立し，圧縮板の真の耐荷力を評価すること，ならびにそれを基準にした設計法を採用することが，鋼橋の将来の発展にとって不可欠の重要事項であると考えられる。建造物設計標準（鋼鉄道橋編）³³⁾ およびそれに準拠して定められた道路橋示方書 II（鋼橋編）の圧縮板に関する幅厚比の規定は，固有値問題として求められた板の座屈応力度を基準にして決定されたものである。一般に，面内応力を受ける平板の耐荷力を論ずるのに，固有値問題として取扱う場合，残留応力は考慮に入れることができるけれども，初期たわみの重大な影響については，あくまで不明のままにとどまる。ところが実際の構造部材においては，必ず初期たわみを伴うものであり，現に道路橋示方書 15・3・4 では，板の平面度として幅の 1/150 の初期たわみを公認している。最近制定されたイギリスの Interim Design and Workmanship Rules にも類似の製作基準が示され，一定の初期たわみを許容している。したがって残留応力のみならず不可避の初期たわみが圧縮部材の耐荷力におよぼす影響を明白にし，両不完全因子を同時に考慮した，より合理的な設計法の確立が急務であると考えられる。ちなみに，鋼鉄道橋設計標準解説図 8・1・4 ならびに道路橋示方書図解 3・2・2 にも掲載されているように，残留応力のみを考慮した固有値より下回る実験値が相当個数見受けられることを率直に認めざるをえない。

従来，安全率でカバーされていた初期たわみおよび残留応力が圧縮板の耐荷力におよぼす影響を明確にすることを目的として，本研究においては，これらの初期不整を含む圧縮板に関する弾塑性有限変位理論について論じ，かつ適切な数値計算法を提示するものである。鋼橋構造物を構成する平板部材に面内圧縮力が作用した場合に，荷重の増加とともに平板部材は，弾塑性有限変位の

* 正会員 工博 大阪大学教授 工学部土木工学教室

** 正会員 工修 大阪大学助手 工学部土木工学教室

*** 学生会員 大阪大学大学院工学研究科

性状を呈して極限状態に至る。そこで本文においては、平板部材の各部が弾性から塑性に移行する状態ならびに横たわみが漸増する状態を忠実に再現しようとする解析手法を採用する。このような手法によれば、真の極限状態、したがって真の耐荷力を追跡するのに好都合である。古典的解析法（たとえば Ritz 法、級数解を用いる方法）では、このような追跡的計算過程を綿密に実行することは、数学的に、ほとんど不可能であると思われる。たとえ可能だとしても、解析解が極めて繁雑となり、計算機に不適合であり、かつ、単純な幾何学的形状、境界条件の場合に限られるという欠点がある。そこで、本研究においては、有限要素法を適用し、平板を有限要素の集合体として理想化することにより、計算機に適した解析法を追求し、さらに、面内応力を受け、初期不整を含む平板の極限状態付近における非線形挙動について、修正増分法と反復法を併用した数値解析方法を適用するものである。

最近では、有限要素法の開発と大型計算機の発達とがあいまって有限変位問題、弾塑性問題のような構造工学における各種の非線形問題の解析が可能となってきた。その結果、有限要素法による非線形解析に関する研究が多数発表されている。幾何学的非線形問題については、1960年に Turner-Dill-Martin-Melosh¹⁾ が、初めて面外荷重を受ける板の大たわみ問題を三角形の有限要素を用いて解析した。それ以来、今日まで、非常に多くの研究者が、この問題を取扱っている。その代表的なものとして、1968年、川井・吉村²⁾は、長方形要素を用い、高次項まで考慮した変位成分から出発して基礎式を誘導し、面外荷重を受ける板の大たわみ挙動を反復法を適用して解析している。同年、Mallet-Marcac³⁾ は、はり要素に関して一般的な定式化を行い系統的な解析方法を示した。すなわち、ある荷重段階 P における非線形弾性基礎方程式

$$\left([K] + \frac{1}{2} \cdot [N_1] + \frac{1}{3} [N_2] \right) \cdot \{q\} = \{P\}$$

ならびに、荷重増分 ΔP に対する弾性基礎方程式

$$([K] + [N_1] + [N_2]) \cdot \{\Delta q\} = \{\Delta P\}$$

を誘導している。さらに同年、Schmit-Bogner-Fox⁴⁾ は、長方形要素および円塔曲面要素を採用し、ポテンシャルエネルギーの最小条件を用いてつり合い状態を求めることにより、面内および面外荷重を受ける板の解析を行っている。1968年、Murray-Wilson⁵⁾ は、要素座標系を平行移動、回転させるという巧妙な手法で、初期たわみを含まない平板が面内荷重を受ける場合について解析し、後座屈挙動について論じている。その際、攪乱として微小な面外荷重を作用させている。さらに、1971年、Yang⁶⁾ は、長方形要素を用いて変位の2次の項まで

を考慮した接線剛性マトリックスを誘導し、荷重増分の取り方に改良を加えた増分法により、主に面外荷重を受ける板の大たわみ解析を行っている。同年、Gallagher-Lieh-Man⁷⁾ は、四角形の殻要素を用いて、面内荷重を受ける曲面を振動法により解析し、その後座屈挙動について論じている。さらに最近では、1973年に Colville-Becker-Furlong⁸⁾ が、変位の3次の項までを考慮した基礎式を誘導し、増分法と反復法を混用して、面内および面外荷重を受ける板の挙動を解析している。ここでは、要素内に副節点を有する高精度の三角形要素を用いている。同年、Bergan-Clough⁹⁾ も同様の解析法に従い、同じく要素内に副節点を有する高精度の四角形要素を用いて板の後座屈挙動の解析を行っている。一方、弾塑性解析の分野においても、1959年に Mendelson-Manson¹⁰⁾ によって提案された“Thermal Strain Approach”の概念に基づき、ひずみ硬化材料の場合についての弾塑性平面応力問題を有限要素法により解析した1962年の Gallagher¹¹⁾ の研究がまずあげられる。ついで1965年、Misesの降伏条件に基づいて同様な解法を提示した Argyris¹²⁾ の研究がある。これは、“Initial Strain Method”とよばれているものである。しかし、これらの手法は、ひずみ硬化のないいわゆる完全弾塑性材料には適用できないという欠点がある。1966年、Pope¹³⁾ は、“Tangent Modulus Method”を用い、数値計算に際しては非常に微小な荷重増分を採用している。さらに、1967年に Marcal-King¹⁴⁾ は、“Mean Partial Stiffness”の概念により“Partial Stiffness Method”を提案した。また、Zienkiewicz-Valliappan-King¹⁵⁾ は、非線形問題の解析に用いる修正ニュートン・ラプソン法の概念を用いた“Initial Stress Method”を提唱した。その後、この初期応力法については、Argyris-Scharpf¹²⁾ の勾配行列 (Gradient Matrix) を用いる方法や、Zienkiewicz-Nayak¹⁶⁾ は、 α -一定剛性法 (ALPHA-Constant Stiffness Method) を用いて収束を早める方法を考案している。また、接線剛性法について山田^{17), 18)} が種々有用な改良を行っている。さらに、小松・北田¹⁹⁾ は接線剛性法と初期応力法をうまく併用した独特の“Hybrid 法”を考案して収束性を向上している。以上は、幾何学的非線形性と材料非線形性をそれぞれ別個に取り扱ったものであるが、筆者らの知る限りにおいては、両方の非線形性を同時に考慮した解析法の研究はあまりなされていない。この種の問題については、1969年、Murray-Wilson²⁰⁾ が既発表の弾性大たわみ理論を弾塑性まで拡張して平板の曲げ解析を行っているが、ここでは、塑性変形理論が用いられている。一方、1971年、大坪²¹⁾ は、面内挙動に対しては有限要素法を用い、面外挙動に対しては横たわみ分布の単調性を考慮して、

級数展開したたわみ波形を仮定している。そして、塑性変形理論に立脚して初期たわみを有する平板の後座屈領域の弾塑性たわみ挙動を解析している。また、1973年、上田・山川・藤原²²⁾、福田²³⁾は、荷重増分法に基づいて、熱ひずみの影響をも考慮した構造物の熱弾塑性たわみ挙動の基礎式を誘導した。そして、この基礎式を構成する個々の剛性マトリックスの性質を明らかにし、初期たわみを有する平板に面内圧縮力が作用した場合の極限強度解析を塑性流れ理論によって行っている。しかし、溶接による残留応力と初期たわみを同時に有する圧縮板の解析例は、まだ取り扱われていないように思われる。そこで、本研究では、鋼構造物にしばしば見受けられるような両初期不整を同時に有する圧縮板の極限強度を有限要素法により解析する。そして、この解析法の精度および収束性などについて検討を行うものである。引続き、圧縮板の強度設計に関する考察を行い設計資料を提供する予定である。

2. 平板の弾塑性有限変位理論

本研究では、面内圧縮応力を受ける平板が座屈して極限状態に至るまでの後座屈挙動を明確にすることを目的とするため、幾何学的な非線形性と材料学的な非線形性が同時に現われるような場合について取扱う。材料学的な非線形性を伴う弾塑性挙動に関連して材料は、(1) Von Mises の降伏条件に従い、(2) 等方で、(3) 完全弾塑性体であり、(4) 塑性流れ理論 (Prandtl-Reuss の式) に従うものと仮定する。材料の応力増分とひずみ増分を関係づけるマトリックスは、Zienkiewicz¹⁵⁾、山田¹⁸⁾らが誘導したものを採用した。さらに、弾塑性の計算法には、以前著者らが開発した Hybrid法¹⁹⁾ の考え方を踏襲した。また、Murray-Wilson⁵⁾ の移動座標法を初期たわみを有する平板にも適用できるように拡張して、幾何学的な非線形性を取扱うことにした。これにより、両非線形性を同時に解析に含めることができた。

(1) 解析法

本理論においては、以下に示す仮定に基づき解析を行った。

a) 変形前、板の中立面に垂直であった任意の横断面は、変形後も変形した中立面に垂直である (Kirchhoff の仮定)。

b) 初期たわみのみを有する板を、平面の三角形要素の集合体で近似する (図-1)。この平面三角形有限要素の集合体としての構造モデルを無応力状態と考える。

c) 残留応力および初期たわみを同時に有する板の場合には、b) の状態に所定の残留応力を導入する。その

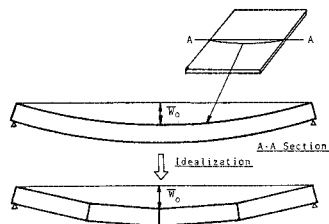


図-1 有限要素による理想化

際、図-7 に示すように仮想外力を節点に加えることによって初期たわみに変化を与えないようにしながら有限要素分割に基因する折板構造の節点に生ずる不釣り合い力を消去する。この状態を初期状態として面内圧縮荷重を載荷する。

d) 板厚方向への塑性化の広がりを考慮できるように、板厚方向に層割りし、各層内では応力分布および応力-ひずみマトリックス (式 (2.2.7)) は、直線分布とみなす (図-2)。

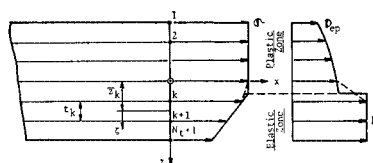


図-2 層 割 り

e) 一つの要素内では板面方向の残留応力分布は一定であるとし、板厚方向の残留応力の変化は各層で直線変化するものとする。

さて、各有限要素の局所座標系 (x, y, z) を図-3 に示すように設ける。そして、三角形要素 ijk の頂点 i を通り板の中央面に直角下向きに z 軸を取り、 z 軸と板の中央面との交点を原点 O とする。この原点 O を通り、 ij 方向に平行に x 軸を取り、それらに垂直に $\vec{O}k$ の方向に y 軸をとるものとする。

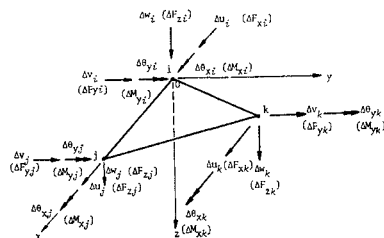


図-3 要素座標系, 増分節点変位, 増分節点力

さて、図-3 に示すように局所座標系で表わした増分節点変位, 増分節点力をそれぞれ $\Delta d, \Delta f$ とおく。これらのベクトルは、それぞれ xy 平面の面内成分と面外成分からなる。面内増分変位およびそれに対応する増分節点力を、それぞれ、 $\Delta d_s, \Delta f_s$ 、面外増分変位およびそれに対応する増分節点力を、それぞれ、 $\Delta d_b, \Delta f_b$ とする。

すると、変形状態 I における節点力増分 Δf_I と、節点変位増分 Δd_I は、

$$\Delta f_I = \begin{Bmatrix} \Delta f_{sI} \\ \Delta f_{bI} \end{Bmatrix}, \quad \Delta d_I = \begin{Bmatrix} \Delta d_{sI} \\ \Delta d_{bI} \end{Bmatrix} \dots\dots\dots(2.1.1)$$

$$\Delta f_{sI} = \{\Delta F_{xi}; \Delta F_{yi}; \Delta F_{xj}; \Delta F_{yj}; \Delta F_{xk}; \Delta F_{yk}\}_I \dots\dots\dots(2.1.2)$$

$$\Delta d_{sI} = \{\Delta u_i; \Delta v_i; \Delta u_j; \Delta v_j; \Delta u_k; \Delta v_k\}_I \dots\dots\dots(2.1.3)$$

$$\Delta f_{bI} = \{\Delta F_{zi}; \Delta M_{xi}; \Delta M_{yi}; \Delta F_{zj}; \Delta M_{xj}; M_{yj}; \Delta F_{zk}; \Delta M_{xk}; \Delta M_{yk}\}_I \dots\dots\dots(2.1.4)$$

$$\Delta d_{bI} = \{\Delta w_i; \Delta \theta_{xi}; \Delta \theta_{yi}; \Delta w_j; \Delta \theta_{xj}; \Delta \theta_{yj}; \Delta w_k; \Delta \theta_{xk}; \Delta \theta_{yk}\}_I \dots\dots\dots(2.1.5)$$

いま、 M 番目の平衡状態（つまり、図-4 に示す M 番目の荷重段階）から Newton-Raphson による反復法を用いて次の平衡状態 ($M+1$) を求めるにあたり、状態 M における I 回反復後の変形状態 I から変形状態 ($I+1$) を推定する時には、以下の線形式を用いる（式 (2.2.22) 参照）。

$$\Delta F_I = K_I \cdot \Delta U_I \dots\dots\dots(2.1.6)$$

変形状態 I において、式 (2.1.6) によって計算した変位増分 ΔU_I をもとに、変形状態 ($I+1$) におけるつり合いを考えると、式 (2.1.6) において考慮しなかった非線形項が、つり合い力として生じてくる。このつり合い力は、高次の非線形項を考慮した関係式⁹⁾を誘導しておき、その式にさきほど算定した変位を代入することにより厳密に求めることもできる。しかし、この厳密な関係式の誘導は非常に複雑である。特に、有限変位と弾塑性の非線形性が併存してくると、その複雑さは加速

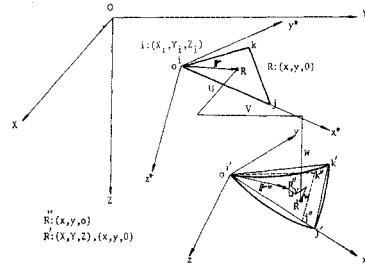


図-5 (a) 剛体変位の除去

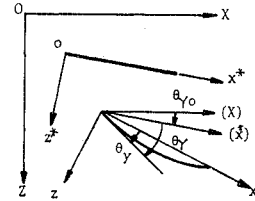


図-5 (b) 剛体変位の除去

度的に増大する。そこで本理論においては、以下に示すような方法でつり合い力を算定した。すなわち、まず、図-5 (a) に示すように変形前に理想化された初期平面三角形要素の節点 ijk を大きくたわんだ板の変形後の三角形要素の節点 $i'j'k'$ の上に i 点と i' 点が一致し、辺 ij が、直線 $i'j'$ 上に載るように重ね合わせる。このように剛体変位した無載荷要素を $i'j'k'$ とする。 $i'j'k'$ を基準にとったときの変形後の要素 $i'j'k'$ 内の任意点の変位を求めると、それが剛体変形を除去した正味の変形による変位にほかならない (2. (3) 項参照)。有限要素分割を十分細かくすれば、この正味の変位については、微小変形理論が適用できる⁹⁾。これによって、高次項を含む剛性マトリックスの複雑な計算が除かれることになり、あとは材料の非線形性のみを考慮すれば良いことになる。この考え方により直前の平衡状態 M から出発して I 回反復後の変形状態 I における剛体変位を除去した変位 u_I を求め、さらに、直前の平衡状態 M からの増分変位 Δu_M を求める。その理由は、以下の通りである。図-4 (a) に示すように真の節点力と荷重の間の誤差が正の時、次の反復計算には、正の荷重を持ち込んでつり合い力の消去をはかるわけである。その反対に、図-4 (b) に示すようにつり合い力が負の場合は、逆向き、すなわち負の荷重を持ち込む。つまり、計算テクニック上除荷することになる。ところがもし前の変形状態 ($I-1$) ですでに塑性域に入っている要素があると、その除荷によって計算の過程で入ったまったく無意味な Strain Reversal が図-6 で示すように発生することになる。したがって、実際の挙動を表わしていないこのような見掛けの Strain Reversal が計算に入り込まないように、ひずみ増分は、つねに平衡状態 M からの増分ひず

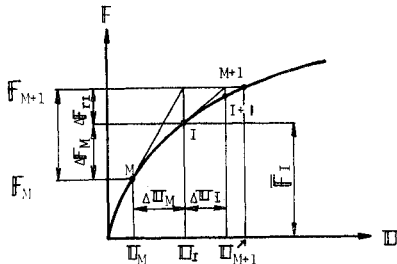


図-4 (a) 荷重-変位曲線 (1)

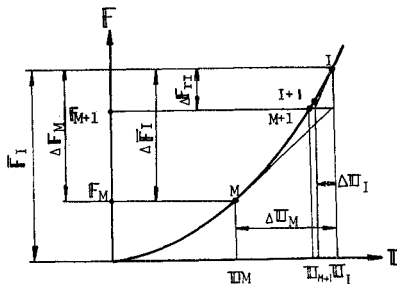


図-4 (b) 荷重-変位曲線 (2)

みを取る必要がある。この増分変位 Δu_M を用いて式 (2.4.12) により、各要素の変形状態 I における増分節点力 Δf_I を求め、式 (2.4.9) に従い

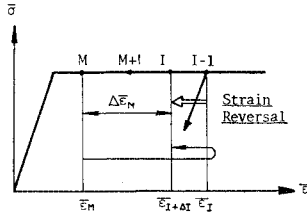


図-6 Strain Reversal の説明

これを平衡状態 M での真の節点力 f_M に加えて全体座標系へ変換し全要素について集成することにより変形状態 I における真の節点力 \bar{F}_I を求めることができる。載荷重 $F_{(M+1)}$ と変形状態 I における真の節点力 \bar{F}_I の差が不釣り合い力 ΔF_{rI} である。すなわち、

$$\Delta F_{rI} = F_{(M+1)} - \bar{F}_I \quad (2.1.7)$$

この不釣り合い力を消去するために

$$\Delta F_{rI} = K_I \cdot \Delta U_I \quad (2.1.8)$$

により節点変位 ΔU_I を求め、実用上十分な精度をもって平衡状態が満足されるまで反復計算する。そして次の荷重段階に移行する。次のステップ ($M+1$) へ移る時は、修正増分法を用いて一段階前の最終不釣り合い力 ΔF_r を次の荷重増分と一諸に与えるようにすれば、誤差の累積がなく、かなりの精度の向上が期待できる。

(2) 接線剛性マトリックスの誘導

$\Delta u, \Delta v, \Delta w$ を、それぞれ板の中央面における x 方向、 y 方向および z 方向の変位増分とする。また、中央面の線型ひずみ増分 $\Delta \epsilon_{0I}$ 、曲率の増分 $\Delta \phi_I$ 、たわみ角の増分 $\Delta \theta_I$ は、

$$\Delta \epsilon_{0I} = \begin{Bmatrix} \partial \Delta u / \partial x \\ \partial \Delta v / \partial y \\ \partial \Delta u / \partial y + \partial \Delta v / \partial x \end{Bmatrix} = B_u \cdot \Delta d_{sI} \quad (2.2.1)$$

$$\Delta \phi_I = \begin{Bmatrix} \partial^2 \Delta w / \partial x^2 \\ \partial^2 \Delta w / \partial y^2 \\ 2 \cdot \partial^2 \Delta w / \partial x \cdot \partial y \end{Bmatrix} = A_\phi \cdot \Delta d_{bI} \quad (2.2.2)$$

$$\Delta \theta_I = \begin{Bmatrix} \partial \Delta w / \partial x \\ \partial \Delta w / \partial y \end{Bmatrix} = A_\theta \cdot \Delta d_{bI} \quad (2.2.3)$$

により節点変位増分の一次関数として表わされる。すると、要素内の任意点における非線型項を考慮したひずみ増分 $\Delta \epsilon_I$ は、次のようになる (付録 A-4 参照)。

$$\Delta \epsilon_I = B_u \cdot \Delta d_{sI} + 1/2 \cdot \Delta C_{\theta I} \cdot A_\theta \cdot \Delta d_{bI} + C_{\theta I} \cdot A_\theta \cdot \Delta d_{bI} - z \cdot A_\phi \cdot \Delta d_{bI} \quad (2.2.4)$$

ここに

$$C_{\theta I} = \begin{bmatrix} \partial w_0 / \partial x & 0 \\ 0 & \partial w_0 / \partial y \\ \partial w_0 / \partial y & \partial w_0 / \partial x \end{bmatrix}_I \quad (2.2.5)$$

$$\Delta C_{\theta I} = \begin{bmatrix} \partial \Delta w / \partial x & 0 \\ 0 & \partial \Delta w / \partial y \\ \partial \Delta w / \partial y & \partial \Delta w / \partial x \end{bmatrix}_I \quad (2.2.6)$$

さらに、応力度増分は、

$$\Delta \sigma_I = D_I \cdot \Delta \epsilon_I \quad (2.2.7)$$

ここに、 D_I は板剛度マトリックスで

$$D_I = \begin{Bmatrix} D_{eI} & (\text{弾性}) \\ D_{epI} & (\text{塑性}) \end{Bmatrix} \quad (2.2.8)$$

D_{ep} については付録 A-2 に述べる。

いま、仮想節点変位およびそれによる仮想ひずみ $\Delta \tilde{\epsilon}$ 、 $\Delta \tilde{\epsilon}$ に対して、仮想変位の原理を適用すると、

$$\int \Delta \tilde{\epsilon}^T \cdot \{\sigma_I + \Delta \sigma_I\} dV = \Delta \tilde{d}^T \cdot \{f_I + \Delta f_I\} \quad (2.2.9)$$

式 (2.2.4), (2.2.7) を、式 (2.2.9) に代入して、任意の $\Delta \tilde{d}$ に対して式 (2.2.9) が成立することを考慮すると、次式をうる。

$$f_I + \Delta f_I = \begin{bmatrix} f_{sI} \\ f_{bI} + \int A_\theta^T \cdot C_{\theta I}^T \cdot \sigma_I dV \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{ssI} \\ \int A_\theta^T \cdot C_{\theta I}^T \cdot D_I \cdot B_u \cdot dV + k_{bsI} \\ \int B_u^T \cdot D_I \cdot C_{\theta I} \cdot A_\theta \cdot dV + k_{sbI} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta d_{sI} \\ \Delta d_{bI} \end{bmatrix} \quad (2.2.10)$$

ここに、

$$f_{sI} = \int B_u^T \cdot \sigma_I \cdot dV \quad (2.2.11)$$

$$f_{bI} = - \int z \cdot A_\theta^T \cdot \sigma_I \cdot dV \quad (2.2.12)$$

$$k_{ssI} = \int B_u^T \cdot D_I \cdot B_u \cdot dV \quad (2.2.13)$$

$$k_{sbI} = k_{bsI}^T = - \int z \cdot B_u^T \cdot D_I \cdot A_\theta \cdot dV \quad (2.2.14)$$

$$k_{BBI} = k_{bbI} + k_{GI} + \int A_\theta^T \cdot C_{\theta I}^T \cdot D_I \cdot C_{\theta I} \cdot A_\theta \cdot dV - \int z \cdot A_\theta^T \cdot C_{\theta I}^T \cdot D_I \cdot A_\theta \cdot dV - \int z \cdot A_\theta^T \cdot D_I \cdot C_{\theta I} \cdot A_\theta \cdot dV \quad (2.2.15)$$

$$k_{bbI} = \int z^2 \cdot A_\theta^T \cdot D_I \cdot A_\theta \cdot dV \quad (2.2.16)$$

$$k_{GI} = \int A_\theta^T \cdot P_I \cdot A_\theta \cdot dV \quad (2.2.17)$$

$$P_I = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{bmatrix}_I \quad (2.2.18)$$

ところで、変形状態 I を xy 平面上に載る平面三角形要素で表現すると、

$$\partial w_0 / \partial x = 0, \quad \partial w_0 / \partial y = 0$$

が近似的に成立つ、したがって式 (2.2.5) より、

$$C_{\theta I} = 0 \quad (2.2.19)$$

すると、式 (2.2.10) は、簡易化され、

$$\Delta F_I = \begin{bmatrix} k_{ssI} & k_{sbI} \\ k_{bsI} & k_{bbI} + k_{GI} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta d_{sI} \\ \Delta d_{bI} \end{bmatrix} = k_I \cdot \Delta d_I \quad \dots\dots\dots (2.2.20)$$

ここで、 k_I が要素の接線剛性マトリックスであり、 k_{GI} が幾何学的剛性マトリックスである。 k_{sbI}, k_{bsI} は、弾性範囲内であれば z について奇関数であるため、 $k_{sbI} = k_{bsI} = 0$ となる。しかし、塑性域に入ると、 D の値が板厚方向に直線分布しないため、 k_{sb}, k_{bs} は 0 とはならない。式 (2.2.20) を全体座標系に変換すると、

$$\Delta F_I^{(k)} = L_I^T \cdot k_I \cdot L_I \cdot \Delta U_I^{(k)} \quad \dots\dots\dots (2.2.21)$$

ここに、 L_I は座標変換マトリックス、添字 k は要素 k を示す。全要素について、式 (2.2.21) を集成すると、系全体の接線剛性マトリックス K_I を得る。

$$\Delta F_I = K_I \cdot \Delta U_I \quad \dots\dots\dots (2.2.22)$$

この連立方程式を解くことにより、与えられた荷重増分 ΔF_I に対する変位増分 ΔU_I が求められる。

(3) 剛体変位の除去

全体座標系 (X, Y, Z) における単位ベクトルを E_1, E_2, E_3 、変形前の局所座標系 (x^*, y^*, z^*) における単位ベクトルを e_1^*, e_2^*, e_3^* とし、変形後の局所座標系 (x, y, z) における単位ベクトルを e_1, e_2, e_3 とする。そして、

$$E = \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{bmatrix}, e^* = \begin{bmatrix} e_1^* \\ e_2^* \\ e_3^* \end{bmatrix}, e = \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots (2.3.1)$$

とおくと、次のような関係が存在する。

$$e = \lambda \cdot E, e^* = \lambda^* \cdot E \quad \dots\dots\dots (2.3.2, 3)$$

ここに、 λ, λ^* は、変形後ならびに変形前の局所座標系と全体座標系との座標変換マトリックスであり、それぞれ、

$$\lambda = \begin{bmatrix} a_{xX} & a_{xY} & a_{xZ} \\ a_{yX} & a_{yY} & a_{yZ} \\ a_{zX} & a_{zY} & a_{zZ} \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots (2.3.4)$$

$$\lambda^* = \begin{bmatrix} a_{x^*X} & a_{x^*Y} & a_{x^*Z} \\ a_{y^*X} & a_{y^*Y} & a_{y^*Z} \\ a_{z^*X} & a_{z^*Y} & a_{z^*Z} \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots (2.3.5)$$

ここに、 $a_{xX} \dots$ は、 x 軸と X 軸の方向余弦。他も同様。図-5 に示すように、変形前の要素内の中央面上の任意点を R 、その点の変形後の位置を R' とする。また、変形後の要素の節点 $i'j'k'$ を含む平面内に変形後の要素を、 i 点と i' 点が等しく、辺 \overline{ij} が直線 $\overline{i'j'}$ に一致するように載せた時の R 点の位置を R'' とする。全変位 $\overline{RR'}$ のうち、 $\overline{RR''}$ が要素の剛体変位を意味し、 $\overline{R''R'}$ が要素の変形による正味の変位を意味する。さらに、点 R から点 R' へ変形する時の変位を全体座標系で表わして、 $U(U, V, W)$ とおき、点 R'' から点

表-1 変位

座標		(X, Y, Z)	(x^*, y^*, z^*)	(x, y, z)
点	R'	$R'(X, Y, Z)$		$r'(x, y, 0)$
点	R		$r(x^*, y^*, 0)$	
点	R''			$r''(x^*, y^*, 0)$
点	i	$R_i(X_i, Y_i, Z_i)$		
変位	$R \rightarrow R'$	$U(U, V, W)$		
変位	$R'' \rightarrow R'$	$\bar{U}(\bar{U}, \bar{V}, \bar{W})$		$u(u, v, w)$
変位	$i \rightarrow i'(i'')$	$U_i(U_i, V_i, W_i)$		

R' への変位は、全体座標系および局所座標系で、それぞれ、 $\bar{U}(\bar{U}, \bar{V}, \bar{W})$ および $u(u, v, w)$ とおく。また、 i から i' への変位を全体座標系で $U_i(U_i, V_i, W_i)$ とする。

$$r = \overrightarrow{iR}, r'' = \overrightarrow{i'R''}$$

を局所座標系で表わすと、次式が成立する。

$$r = r'' \quad \dots\dots\dots (2.3.6)$$

図-5 からわかるように、ベクトル $\overrightarrow{iR'}$ は、次のように表わされる。

$$\overrightarrow{iR'} = \overrightarrow{iR} + \overrightarrow{RR'} = \overrightarrow{ii'} + \overrightarrow{i'R''} + \overrightarrow{R''R'} \quad \dots\dots\dots (2.3.7)$$

ベクトル表示すれば、式 (2.3.2), (2.3.3) を用いて、 $\rho = \overrightarrow{iR'}$ として、

$$\rho = r^T \cdot \lambda^* \cdot E + U^T \cdot E \\ = U_i^T \cdot E + r''^T \cdot \lambda \cdot E + u^T \cdot E \quad \dots\dots\dots (2.3.8)$$

また、

$$u = \lambda \cdot \bar{U} \quad \dots\dots\dots (2.3.9)$$

ここで、式 (2.3.6), (2.3.8) および (2.3.9) より

$$\bar{U} = \lambda^* T \cdot r - \lambda^T \cdot r + U - U_i \quad \dots\dots\dots (2.3.10)$$

式 (2.3.10) を式 (2.3.9) に代入して得られた u が局所座標系で表わした剛体変位を除去した正味の変位を意味する。以上で x 方向、 y 方向および z 方向の変位が求められることになる。次に、図-5 (b) に示すように、 x 軸まわり、 y 軸まわりのたわみ角を求める。

全体座標系でのたわみ角を θ_X, θ_Y とすると、

$$\left. \begin{aligned} \theta_Y &= \tan \theta_Y = \frac{\partial(W_0 + W)}{\partial X} = \theta_{Y0} + \frac{\partial W}{\partial X} \\ \theta_X &= \tan \theta_X = -\frac{\partial(W_0 + W)}{\partial Y} = \theta_{X0} - \frac{\partial W}{\partial Y} \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (2.3.11)$$

ここに、 W_0 ；要素内の初期たわみ。 θ_{X0}, θ_{Y0} ；要素内の初期たわみ角で、要素内で一定と仮定する。また、変形後の局所座標軸まわりのたわみ角を θ_x, θ_y とすると、

$$\left. \begin{aligned} \theta_x &= -\tan^{-1} \partial w / \partial y = -\partial w / \partial y \\ \theta_y &= \tan^{-1} \partial w / \partial x = \partial w / \partial x \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (2.3.12)$$

いま、局所座標系における要素内の任意点の変位 (u, v, w) は、微小変形理論に基づく平面応力問題および平板曲げ問題として取扱う³⁾。そして、図-5 に示す局所座標 (x^*, y^*) で表わすと、

$$u = u(x^*, y^*) \\ v = v(x^*, y^*)$$

$$w = w(x^*, y^*)$$

そこで、面内の変位関数に次の1次形を用いる。

$$\left. \begin{aligned} u &= \alpha_1 + \alpha_2 x^* + \alpha_3 y^* \\ v &= \alpha_4 + \alpha_5 x^* + \alpha_6 y^* \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2.3.13)$$

一方、式(2.3.9)において、 z 軸方向の変位 w のみに注目すれば、ベクトル r'' は、 xy 平面上にあるから、

$$[a_{zX}, a_{zY}, a_{zZ}] \cdot \lambda^T \cdot r'' = 0$$

となる。よって、表-1に示すような各点の座標を用いて、

$$w = [a_{zX}, a_{zY}, a_{zZ}] \cdot \begin{bmatrix} X - X_i - U_i \\ Y - Y_i - V_i \\ a_{x^*Z} \cdot x^* + a_{y^*Z} \cdot y^* + W - W_i \end{bmatrix} \dots\dots\dots (2.3.14)$$

たわみ角は、

$$\left. \begin{aligned} \partial w / \partial x &= \partial w / \partial X \cdot \partial X / \partial x + \partial w / \partial Y \cdot \partial Y / \partial x \\ \partial w / \partial y &= \partial w / \partial X \cdot \partial X / \partial y + \partial w / \partial Y \cdot \partial Y / \partial y \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2.3.15)$$

式(2.3.12), (2.3.13), (2.3.14) および (2.3.15) より、変形後の局所座標系で表わした剛体変位を除去したたわみ角は、次のとおりである。

$$\begin{aligned} \theta_x = & -\{ (a_{zX} + a_{zZ} \cdot \partial W / \partial X) \cdot (a_{xX} \cdot x_x^* \\ & + a_{yX} \cdot y_x^* + a_{xX} \cdot u_{,x} + a_{yX} \cdot v_{,x}) \\ & + (a_{zY} + a_{zZ} \cdot \partial W / \partial Y) \cdot (a_{xY} \cdot x_x^* + a_{yY} \cdot y_x^* \\ & + a_{xY} \cdot u_{,x} + a_{yY} \cdot v_{,x}) + (a_{x^*Z} \cdot x_x^* + a_{y^*Z} \\ & \cdot y_x^*) \cdot a_{yY} \} / \{ 1 - (a_{zX} + a_{zY} \cdot \partial W / \partial X) \\ & \cdot a_{zX} - (a_{zY} + a_{zZ} \cdot \partial W / \partial Y) \cdot a_{zY} \} \end{aligned} \dots\dots\dots (2.3.16)$$

$$\begin{aligned} \theta_y = & \{ (a_{zX} + a_{zZ} \cdot \partial W / \partial X) \cdot (a_{xX} \cdot x_y^* + a_{yX} \cdot y_y^* \\ & + a_{xX} \cdot u_{,y} + a_{yX} \cdot v_{,y}) + (a_{zY} + a_{zZ} \cdot \partial W / \partial Y) \\ & \cdot (a_{xY} \cdot x_y^* + a_{yY} \cdot y_y^* + a_{xY} \cdot u_{,y} + a_{yY} \cdot v_{,y}) \\ & + (a_{x^*Z} \cdot x_y^* + a_{y^*Z} \cdot y_y^*) \cdot a_{zZ} \} / \{ 1 - (a_{zX} \\ & + a_{zZ} \cdot \partial W / \partial X) \cdot a_{zX} - (a_{zY} + a_{zZ} \\ & \cdot \partial W / \partial Y) \cdot a_{zY} \} \dots\dots\dots (2.3.17) \end{aligned}$$

ここで

$$\left. \begin{aligned} x_x^* &= (1 + \alpha_6) / S, \quad x_y^* = -\alpha_3 / S \\ y_x^* &= -\alpha_5 / S, \quad y_y^* = (1 + \alpha_2) / S \\ S &= (1 + \alpha_2)(1 + \alpha_6) - \alpha_3 \cdot \alpha_5 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2.3.18)$$

$$\left. \begin{aligned} u_{,x} &= \alpha_2 \cdot x_x^* + \alpha_3 \cdot y_x^*, \quad v_{,x} = \alpha_5 \cdot x_x^* + \alpha_6 \cdot y_x^* \\ u_{,y} &= \alpha_2 \cdot x_y^* + \alpha_3 \cdot y_y^*, \quad v_{,y} = \alpha_5 \cdot x_y^* + \alpha_6 \cdot y_y^* \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2.3.19)$$

(4) 不つり合い力の算定

図-4に示すように、平衡状態 M から I 回復後の変形状態 I における任意要素の応力度、ひずみおよび平衡状態 M からの応力度増分、ひずみ増分を、それぞれ σ_I, ϵ_I および $\Delta\sigma_M, \Delta\epsilon_M$ とおく。つまり

$$\sigma_I = \sigma_M + \Delta\sigma_M \dots\dots\dots (2.4.1)$$

$$\epsilon_I = \epsilon_M + \Delta\epsilon_M \dots\dots\dots (2.4.2)$$

さらに、式(2.2.7)を用いて

$$\sigma_I = \sigma_M + D_M \cdot \Delta\epsilon_M \dots\dots\dots (2.4.3)$$

ここに、

$$D_M = \begin{cases} D_e & \text{(弾性, Strain Reversal)} \\ \alpha D_e + (1 - \alpha) D_{ep} & \text{(弾性} \rightarrow \text{塑性)} \\ D_{ep} & \text{(塑性)} \end{cases} \dots\dots\dots (2.4.4)$$

変形状態 M では、弾性状態であったが、変形状態 I では塑性状態に移行する有限要素では、その間のひずみ増分を弾性領域と塑性領域とで分離して取り扱う。ここで

$$\alpha = \frac{\text{降伏に至るひずみ増分}}{\text{全ひずみ増分}}$$

また、 α は、次式から求める。

$$\begin{aligned} & (\sigma_{xM} + \alpha \cdot \Delta\sigma_{xM})^2 - (\sigma_{xM} + \alpha \cdot \Delta\sigma_{xM}) \\ & \cdot (\sigma_{yM} + \alpha \cdot \Delta\sigma_{yM}) + (\sigma_{yM} + \alpha \cdot \Delta\sigma_{yM})^2 \\ & + 3(\tau_{xyM} + \alpha \cdot \Delta\tau_{xyM})^2 = \sigma_Y^2 \dots\dots\dots (2.4.5) \end{aligned}$$

式(2.3.9), (2.3.16) および (2.3.17) より与えられる剛体変位を除去した正味の変位増分を Δu_I とすると、この変位に対しては微小変形理論が適用できると考えられるので、

$$\Delta\epsilon_M = \epsilon_I - \epsilon_M = A \cdot \Delta u_M \dots\dots\dots (2.4.6)$$

ここに

$$A = [B_u, -z \cdot A_\phi] \dots\dots\dots (2.4.7)$$

仮想変位の原理により、仮想変位 $\Delta \tilde{u}$ に対して次式が成り立つ。

$$\int \Delta \tilde{\epsilon}^T \cdot \sigma_I dV = \Delta \tilde{u}^T \cdot f_I \dots\dots\dots (2.4.8)$$

式(2.4.3), (2.4.6) を式(2.4.8)に代入し、任意の仮想変位 $\Delta \tilde{u}$ に対して、式(2.4.8)が成立するためには、

$$f_I = f_M + k_M \cdot \Delta u_M \dots\dots\dots (2.4.9)$$

ここで、

$$f_M = \int A^T \cdot \sigma_M dV \dots\dots\dots (2.4.10)$$

$$k_M = \int A^T \cdot D_M \cdot A dV$$

$$= \begin{bmatrix} \int B_u^T \cdot D_M \cdot B_u dV, & -\int z \cdot B_u^T \cdot D_M \cdot A_\phi dV \\ -\int z \cdot A_\phi^T \cdot D_M \cdot B_u dV, & \int z^2 \cdot A_\phi^T \cdot D_M \cdot A_\phi dV \end{bmatrix} \dots\dots\dots (2.4.11)$$

式(2.4.9)より、各要素の節点力の増分量 Δf_M は、

$$\Delta f_M = k_M \cdot \Delta u_M \dots\dots\dots (2.4.12)$$

この Δf_M を平衡状態 M での真の節点力 f_M に加え、変形状態 I における節点力 f_I を求め、全体座標系へ変換し、全要素について積分すると、変形状態 I における真の節点力 \bar{F}_I を得る。式(2.1.7)で示すよう

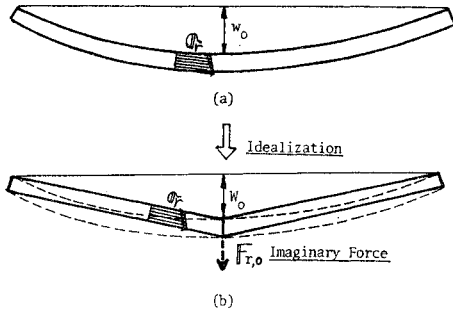


図-7 残留応力の導入

に、ここで生じる節点荷重 $F_{(M+1)}$ との差が不釣り合い力 ΔF_{rI} にほかならない。

(5) 残留応力の導入

図-7 (a) に示すように初期たわみ W_0 、残留応力 σ_r を有する板について考える。この板はこの状態で自己平衡状態にある。いまこの板を図-7 (b) のように平面三角形要素で近似する。その場合の状態 M における任意要素の応力 σ_M を残留応力 σ_r と変形による応力 σ_{uM} とに分けると、

$$\sigma_M = \sigma_r + \sigma_{uM} \dots\dots\dots(2.5.1)$$

すると、式 (2.4.9) は次のようになる。

$$f_I = f_r + f_{uM} + k_M \cdot \Delta u_M \dots\dots\dots(2.5.2)$$

ここで、

$$f_r = \int A^T \cdot \sigma_r \cdot dV \dots\dots\dots(2.5.3)$$

$$f_{uM} = \int A^T \cdot \sigma_{uM} \cdot dV \dots\dots\dots(2.5.4)$$

式 (2.5.2) を全体座標系へと変換し、全要素について集成すると、真の節点力 \bar{F}_I は、

$$\bar{F}_I = \bar{F}_{r,I} + \bar{F}_{uM,I} + K_M \cdot \Delta U_M \dots\dots\dots(2.5.5)$$

ここで

$$\bar{F}_{r,I} = \sum L_I^T \cdot f_r \dots\dots\dots(2.5.6)$$

$$\bar{F}_{uM,I} = \sum L_I^T \cdot f_{uM} \dots\dots\dots(2.5.7)$$

L_I : 座標変換マトリックス

外力を作用させる前の状態においては、式 (2.5.5) の \bar{F}_I は

$$\bar{F}_I = \bar{F}_{r,0} = \sum L_0^T \cdot f_r \dots\dots\dots(2.5.8)$$

この式を式 (2.1.7) に代入すると、いま外力 $F_{(M+1)}$ は 0 であるから、不釣り合い力 ΔF_{r0} は、

$$\Delta F_{r0} = -\bar{F}_{r,0} \dots\dots\dots(2.5.9)$$

この不釣り合い節点力 ΔF_{r0} は、曲面板を平面三角形要素の集合体で近似したことによるものである。いま、板は、図-7 (b) の状態で実際にはつり合っていないのであるから不釣り合い節点力 ΔF_{r0} は実際には 0 でなくてはならない。そこで、計算の技巧上、逆方向の $F_{r,0}$ なる仮想外力を作用させることにすると、不

釣り合い力は、

$$\Delta F_{rI} = F_{(M+1)} + \bar{F}_{r,0} - \bar{F}_I \dots\dots\dots(2.5.10)$$

となり、初期状態においては不釣り合い力が 0 となり、自己平衡条件を満足する。

(6) 変位関数

変位関数として次のものを用いる。

$$\left. \begin{aligned} \text{面内変位: } u &= \alpha_1 + \alpha_2 \cdot x + \alpha_3 \cdot y \\ v &= \alpha_4 + \alpha_5 \cdot x + \alpha_6 \cdot y \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(2.6.1)$$

$$\begin{aligned} \text{面外変位: } w &= \alpha_{b1} + \alpha_{b2} \cdot L_1 + \alpha_{b3} \cdot L_2 + \alpha_{b4} \cdot L_1 \cdot L_2 \\ &+ \alpha_{b5} \cdot L_2 \cdot L_3 + \alpha_{b6} \cdot L_3 \cdot L_1 + \alpha_{b7} \\ &\cdot (L_1 \cdot L_2^2 - L_2 \cdot L_1^2) + \alpha_{b8} \cdot (L_2 \cdot L_3^2 \\ &- L_3 \cdot L_1^2) + \alpha_{b9} \cdot (L_3 \cdot L_1^2 - L_1 \cdot L_3^2) \\ &\dots\dots\dots(2.6.2) \end{aligned}$$

ここで、 L_1, L_2, L_3 は面積座標を表わす。

3. 数値計算における諸問題

(1) 数値計算例

数値計算例として、残留応力および初期たわみを同時に有する周辺単純支持の正方形 1 方向圧縮板を取りあげ、本解析法の精度、収束性について検討を加える。

ただし、膜応力に関する境界条件は、 $Y=0, b$ 辺で $\sigma_Y=0$ 、 $X=\pm a/2$ 辺で $N_{XY}=0$ を満足するように、近似的に、板周辺での Y 軸方向の節点力 (P_Y) を 0 とした。

a) 初期たわみ

板の初期たわみを次の三角関数であると仮定する。

$$W_0 = \bar{W}_0 \cdot \cos \frac{\pi}{a} X \cdot \sin \frac{\pi}{b} Y \dots\dots\dots(3.1.1)$$

b) 残留応力

残留応力は、実測値²⁹⁾を参考にして図-8 に示すような自己平衡の分布形で与え、圧縮力方向 (X 軸方向) では一定とする。また、残留応力による軸方向力は存在しないという条件より

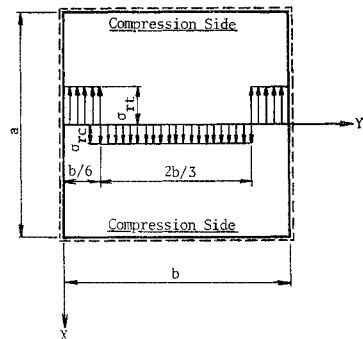


図-8 残留応力分布

$$\sigma_{rt} = -2 \cdot \sigma_{rc}$$

e) 応力度・ひずみ関係

Mises の相当応力 ($\bar{\sigma}$) と相当ひずみ ($\bar{\epsilon}$) の関係は、鋼材の引張試験より得られた応力度・ひずみ曲線を図-9 のように理想化して完全弾塑性材料として取扱う。

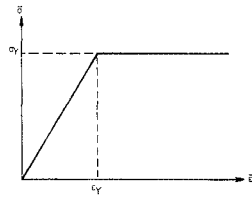


図-9 理想化された相当応力度・相当ひずみ曲線

d) 圧縮外力の与え方

圧縮力は、一様変位の変位増分によって与える。この方法により極限状態を過ぎて変形が増加しても解析が可能となる。

e) 連立方程式の解法

連立方程式の解法には対称なバンドのコレスキー法を用いた。

f) 収束判定条件

各荷重段階における収束の判定は、以下の3通りのいずれでも可能とした。

- ① $\max\{\Delta W_{cl}/W_{cl}; \Delta \bar{\sigma}_I/\bar{\sigma}_I\} < \delta$ (一定値)
- ② {反復回数 (N_s)} = n 回
- ③ {不釣り合い力 ($\Delta F_{r,I}$) のユークリッドノルム} $< \delta_u$ (一定値)

ここで、サフィックス c は、板の最大たわみを生じる点を意味する。また、 $\bar{\sigma}$ は、平均圧縮応力度を意味する。

(2) メッシュ割りと精度の問題

図-10 に示すようなメッシュ割りで解析を行い、分

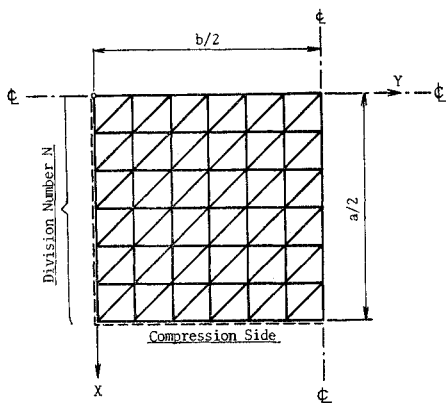


図-10 メッシュ割り

表-2 分割数 (N) と最大平均応力度 ($\bar{\sigma}_m/\sigma_Y$)

分割数 N	3	4	5	6
$\sigma_{rc} = 0$	0.627	0.629	0.629	0.630
$\sigma_{rc} = \sigma_Y/3$	0.541	—	—	0.536

$\sigma_Y = 6000 \text{ kg/cm}^2$, $E = 2.1 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2$, $b/t = 48$, $\bar{W}_0/t = 0.1$
 $t = 1.0 \text{ cm}$, $N_T = 8$

表-3 分割数 (N) と最大平均応力度 ($\bar{\sigma}_m/\sigma_Y$)

分割数 N	3	6
$\sigma_{rc} = 0$	0.781	0.779
$\sigma_{rc} = \sigma_Y/3$	0.799	0.802

$\sigma_Y = 2400 \text{ kg/cm}^2$, $E = 2.1 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2$, $b/t = 40$, $\bar{W}_0/t = 0.5$
 $t = 1.0 \text{ cm}$, $N_T = 8$

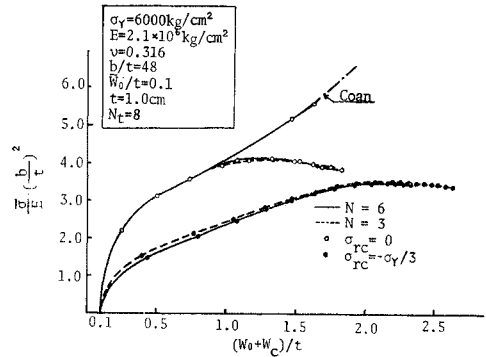


図-11 平均応力度と最大たわみ ($\sqrt{\sigma_Y/E} \cdot b/t = 2.57$)

割数 (N) と、最大平均応力度 ($\bar{\sigma}_m/\sigma_Y$) の関係を表-2, 3 に、平均応力度 ($\bar{\sigma}$) と板中央のたわみ (W_c) の関係を図-11, 12 に示す。これらの図表より、残留応力の有無に関係なく、正方形板の場合には、メッシュ $N=3$ で十分であると思われる。

また、残留応力のないものについては、図-11 に示すように、

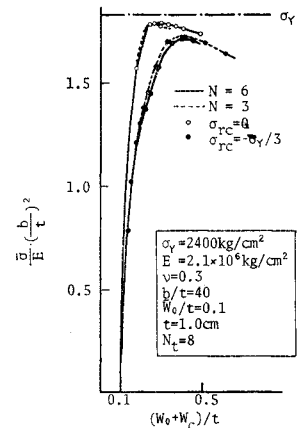


図-12 平均応力度と最大たわみ ($\sqrt{\sigma_Y/E} \cdot b/t = 1.352$)

図-11 に示すように、 $N=3, 6$ の場合とも弾塑性域においては、Coan²⁵⁾ の厳密解とよく一致している。Coan の解は弾性解であるため、挙動が塑性域に入ると本解析法の結果と離れてくる。

(3) 収束判定条件の問題

正方形板についての計算結果から、各荷重段階における収束性状の一例を表-4 に示す。さらに、反復回数 (n) と最大平均応力度 ($\bar{\sigma}_m/\sigma_Y$) の関係を表-5 に、判定条件 ① の δ と最大平均応力度の関係を表-6 に示す。判定条件 ① の場合、 δ は、1% で、条件 ② の場合、 $n=2$ で十分収束しているものと考えてよいと思われる。ただ、② による判定では、荷重増分の取り方および構造物が異なれば n も変わるため、一般性に欠ける。表-4 からわかるように、③ による判定では、弾塑性域に入っ

表-4 収束性

M	I	$\ dF_{rj}\ $	$d\bar{\sigma}_I/\bar{\sigma}_I$	dW_{cI}/W_{cI}	$(\bar{W}_0+W_c)/t$	$\bar{\sigma}/\sigma_Y$
1	1	43 290	1.0	1.0	0.1623	0.3461
1	2	278 800	-0.0279	0.381	0.2624	0.3367
1	3	22	0.0091	-0.0349	0.2536	0.3398
1	4	0	0.0001	-0.0003	0.2535	0.3398
1	5	0	0.0000	0.0000	0.2535	0.3398
2	1	45 570 000	0.4358	0.5846	0.6102	0.6023
2	2	17 930 000	-0.1310	0.3113	0.8859	0.5326
2	3	6 862	0.0580	-0.0565	0.8386	0.5553
2	4	354	0.0047	0.0083	0.8317	0.5680
2	5	0	0.0001	0.0000	0.8317	0.5681
3	1	20 950 000	0.0452	0.2597	1.1235	0.5950
3	2	20 300	0.0423	-0.0147	1.1072	0.5212
3	3	1 845	0.0002	-0.0004	1.1068	0.6213
3	4	379	-0.0002	-0.0000	1.1067	0.6212
3	5	239	0.0001	0.0000	1.1068	0.6213
4	1	15 880 000	-0.0228	0.1894	1.3653	0.6074
4	2	423 000	0.0320	-0.0148	1.3454	0.6275
4	3	67 300	0.0011	-0.0014	1.3435	0.6282
4	4	6 756	-0.0012	0.0002	1.3438	0.6275
4	5	3 328	0.0004	-0.0001	1.3436	0.6294
5	1	6 933 000	-0.0392	0.1335	1.5542	0.6040
5	2	251 500	0.0274	-0.0071	1.5432	0.6210
5	3	289 400	0.0001	-0.0009	1.5418	0.6211
5	4	75 600	-0.0003	0.0002	1.5421	0.6209
5	5	45 500	0.0001	-0.0002	1.5419	0.6209

反復回数 $n=5$, $\sigma_Y=6000 \text{ kg/cm}^2$, $\nu=0.316$, $E=2.1 \times 10^8 \text{ kg/cm}^2$
 $b/t=48$, $\bar{W}_0/t=0.1$, $\sigma_{rc}=0$, $N=3$, $N_T=8$

表-5 反復回数 (n) と最大平均応力度 ($\bar{\sigma}_m/\sigma_Y$)

n	1	2	3	4	5
$\bar{\sigma}_m/\sigma_Y$	解析不能	0.629	0.628	0.628	0.628
Cpu-Time*		2分01秒	2分42秒	3分26秒	4分08秒

$\sigma_Y=6000 \text{ kg/cm}^2$, $E=2.1 \times 10^8 \text{ kg/cm}^2$, $\nu=0.316$, $b/t=48$
 $\bar{W}_0/t=0.1$, $\sigma_{rc}=0$, $t=1.0 \text{ cm}$, $N=3$, $N_T=8$

*) 極限状態通過後1回の変位増分を行った時の全計算時間

表-6 収束判定条件 ①) と最大平均応力度 ($\bar{\sigma}_m/\sigma_Y$)

$\delta(\%)$	10	5	1	0.1
$\bar{\sigma}_m/\sigma_Y$	0.624	0.623	0.628	0.628
Cpu-Time ²⁾	1分45秒	1分53秒	2分42秒	3分18秒

$\sigma_Y=6000 \text{ kg/cm}^2$, $E=2.1 \times 10^8 \text{ kg/cm}^2$, $\nu=0.316$, $b/t=48$
 $\bar{W}_0/t=0.1$, $\sigma_{rc}=0$, $t=1.0 \text{ cm}$, $N=3$, $N_T=8$

1) $M_{ax} \{dW_{cI}/W_{cI}; d\bar{\sigma}_I/\bar{\sigma}_I\} < \delta$

2) 極限状態通過後1回の変位増分を行った時の全計算時間

てから、①による判定では十分収束しているのに、不
 つり合いカノルム $\|dF_{rj}\|$ は十分収束していないとい
 うこと。また、メッシュ割や構造物が異なれば、 δ_u も異
 なるということ。以上のことから、今後の正方形板のパ
 レーター解析には、①の判定条件を用いることにする。

(4) 計算時間

反復回数 (n) と極限状態通過後1回の変位増分を行
 った時の全計算時間の関係の一例を表-5, 6 に示す。な
 お、この数値計算は、大阪大学大型計算機センターの

NEAC-2200-700 を用いて行ったものである。

(5) 層割りの問題

層の分割数 (N_T) と平均最大応力度 ($\bar{\sigma}_m/\sigma_Y$) およ
 び解析に要した計算時間を表-7 に、また、平均応力度と
 板中央のたわみの関係を 図-13 に示す。これらの図表
 より、 $N_T=4$ で十分収束していることがわかる。また、
 分割数 (N_T) は、あまり計算時間に関係しないことが
 わかる。

表-7 層数 (N_T) と最大平均応力度 ($\bar{\sigma}_m/\sigma_Y$)

層数 N_T	2	4	6	8
$\bar{\sigma}_m/\sigma_Y$	0.611	0.623	0.625	0.625
Cpu-Time*	4'22"(28)	4'01"(25)	4'03"(25)	4'09"(25)

$\sigma_Y=6000 \text{ kg/cm}^2$, $E=2.1 \times 10^8 \text{ kg/cm}^2$, $\nu=0.3$, $b/t=48$
 $\bar{W}_0/t=0.1$, $\sigma_{rc}=0$, $t=1.0 \text{ cm}$, $N_T=8$

*) 極限状態通過後1回の変位増分を行った時の全計算時間。()内は
 全反復回数

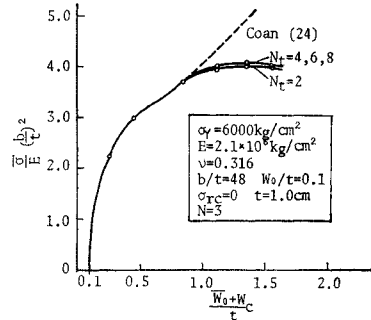


図-13 平均応力度と最大たわみ
 ($\sqrt{\sigma_Y/E} \cdot b/t=2.57$, $\sigma_{rc}=0$)

(6) 残留応力を有する場合と有しない場合の挙動の比較

板の中央面における応力度分布の比較を 図-14~19
 に示す。残留応力を有する圧縮板の場合、最初は仮定した

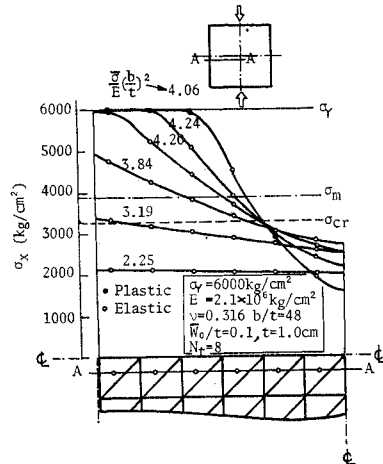


図-14 応力度分布 ($\sqrt{\sigma_Y/E} \cdot b/t=2.57$, $\sigma_{rc}=0$)

残留応力の存在のため不連続な応力度分布を示すが、極限状態付近では連続的な分布となっている。また、平均圧縮応力度と圧縮面内変位の関係を図-20, 21 に示す。さらに、残留応力を有する場合と有しない場合の座屈波

形の形状の比較を 図-22 に示す。両者の間にほとんど差異がないことがわかる。図-23 に板の裏表の表面における主応力の流れを示すが、正確に Mieses の降伏曲線の上を流れていることがわかる。また、板の表・裏面

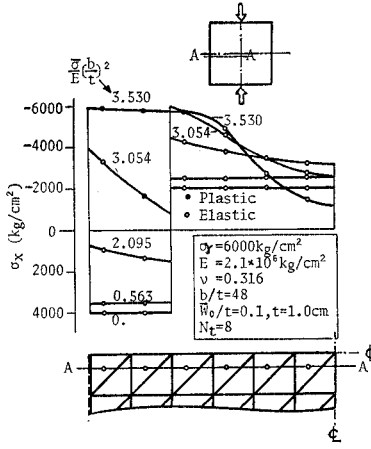


図-15 応力度分布 ($\sqrt{\sigma_Y/E} \cdot b/t = 2.57$, $\sigma_{rc} = -\sigma_Y/3$)

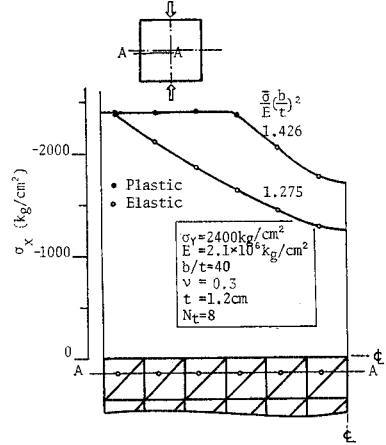


図-18 応力度分布 ($\sqrt{\sigma_Y/E} \cdot b/t = 1.352$, $\sigma_{rc} = 0$, $\bar{W}_0/t = 0.5$)

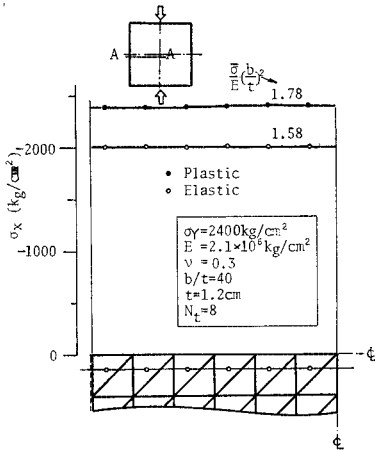


図-16 応力度分布 ($\sqrt{\sigma_Y/E} \cdot b/t = 1.352$, $\sigma_{rc} = 0$, $\bar{W}_0/t = 0.1$)

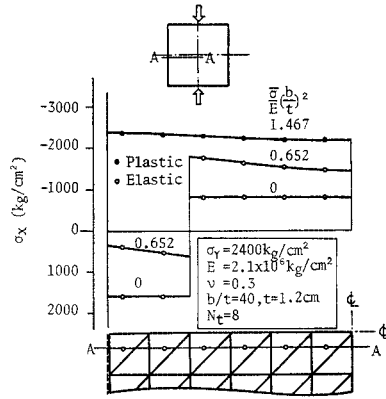


図-19 応力度分布 ($\sqrt{\sigma_Y/E} \cdot b/t = 1.352$, $\sigma_{rc} = -\sigma_Y/3$, $\bar{W}_0/t = 0.5$)

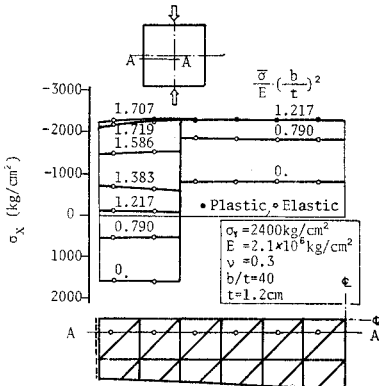


図-17 応力度分布 ($\sqrt{\sigma_Y/E} \cdot b/t = 1.352$, $\sigma_{rc} = -\sigma_Y/3$, $\bar{W}_0/t = 0.1$)

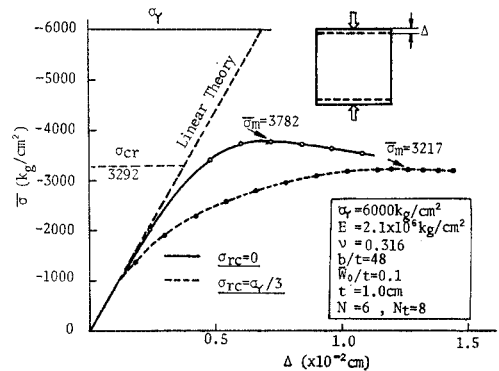


図-20 平均圧縮応力度と圧縮変位 ($\sqrt{\sigma_Y/E} \cdot b/t = 2.57$)

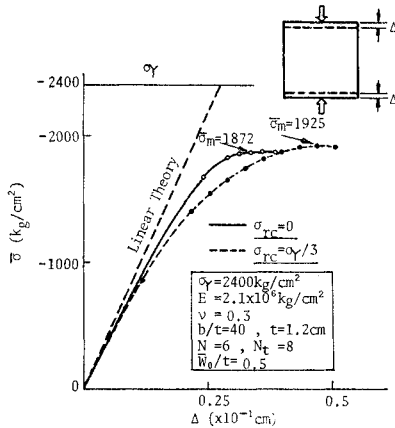


図-21 平均圧縮応力度と圧縮変位
($\sqrt{\sigma_Y/E} \cdot b/t = 1.352$)

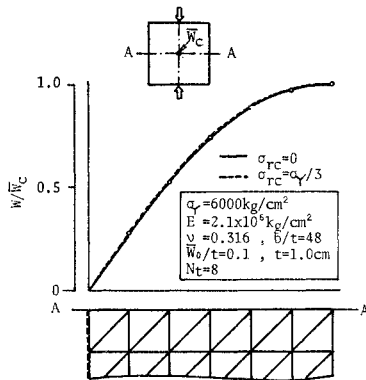


図-22 極限状態での座屈波形
($\sqrt{\sigma_Y/E} \cdot b/t = 2.57$)

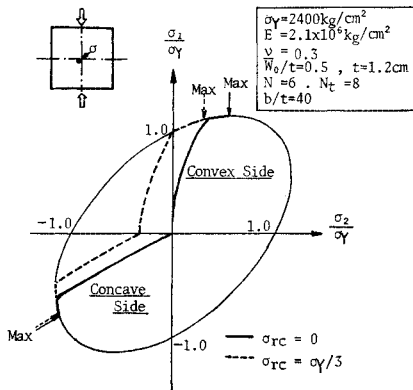


図-23 板の表面の主応力度の流れ

における塑性域の分布状況を図-24 に示す。

(7) 初期たわみと最大平均応力度の関係

道路橋示方書に規定されている幅厚比 $b/t=40$ (SS 41) のものについて、初期たわみを種々変化させて解析を行い、その結果を図-25 に示す。初期たわみが大きくな

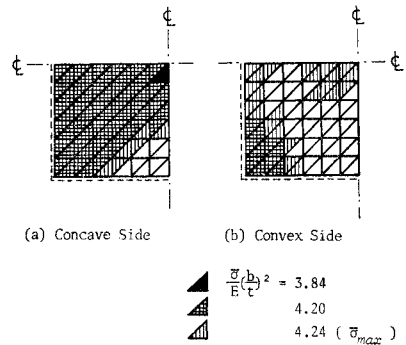


図-24 塑性域の広がり ($\sqrt{\sigma_Y/E} \cdot b/t = 2.57, \sigma_{rc} = 0$)

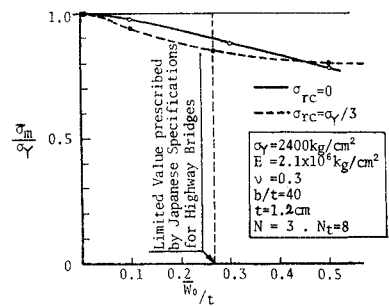


図-25 初期たわみと最大平均応力度

てくると、残留応力を有する板の方が、有しないものより極限強度がいささか大きくなることも興味深い現象である。

4. 結 論

以上、残留応力および初期たわみを同時に有する圧縮板の弾塑性有限変位理論による解析法について述べ、さらに、一様変位による面内圧縮を与えた場合の正方形鋼板の数値解析を種々行い、本理論の妥当性を示した。さらに、これらの数値計算より、以下のことが明らかになった。

- (1) 正方形板に面内圧縮力が作用する問題に本解析法を用いる場合、そのメッシュ割りは、 3×3 で十分である。
- (2) 本解析結果は、弾性域では、Coan²⁵⁾ の弾性厳密解と一致している。
- (3) 収束の判定条件は、 $\max\{\Delta W_{el}/W_{el}; \Delta \bar{\sigma}_I/\bar{\sigma}_I\} \leq 1\%$ で十分な精度が期待できる。
- (4) 板厚方向の層割りは、4層で十分な精度が得られる。また、層割り数は、計算時間をほとんど増加させないが、記憶容量が増大する。

なお、引続き残留応力、初期たわみによる圧縮板の極限強度への影響についてのパラメトリック解析を行い、さらに示方書との関連性については別途報告する予定で

ある。

【付 録】

A.1 応力度および応力-ひずみマトリックスの積分

各層では、応力度分布および応力-ひずみマトリックス分布が直線分布するものとすれば、第 k 層内の応力-ひずみマトリックスは

$$D_{(k)} = (D_{k+1} - D_k) \cdot \zeta / t_k + (D_{k+1} + D_k) / 2 \dots\dots\dots (A.1.1)$$

積分すると、

$$1. \int D dz = \sum_{k=1}^{N_T} (D_{k+1} + D_k) \cdot t_k / 2 \dots\dots\dots (A.1.2)$$

$$2. \int z \cdot D dz = \sum_{k=1}^{N_T} \{ \bar{z}_k \cdot t_k \cdot (D_{k+1} + D_k) / 2 + (D_{k+1} - D_k) \cdot t_k^2 / 12 \} \dots\dots\dots (A.1.3)$$

$$3. \int z^2 \cdot D dz = \sum_{k=1}^{N_T} \{ (D_{k+1} + D_k) / 2 \cdot t_k \cdot (\bar{z}_k^2 + t_k^2 / 12) + (D_{k+1} - D_k) \cdot \bar{z}_k \cdot t_k^2 / 6 \} \dots\dots\dots (A.1.4)$$

$$4. \int \sigma dz = \sum_{k=1}^{N_T} (\sigma_{k+1} + \sigma_k) \cdot t_k / 2 \dots\dots\dots (A.1.5)$$

A.2 弾塑性領域における板剛度マトリックス D_{ep} の誘導

増分ひずみを弾性成分と塑性成分に分離できると仮定すると、

$$\Delta \epsilon = \Delta \epsilon_e + \Delta \epsilon_p \dots\dots\dots (A.2.1)$$

弾性ひずみが応力度に抵抗するから

$$\Delta \epsilon_e = D_e^{-1} \cdot \Delta \sigma \dots\dots\dots (A.2.2)$$

ここに

$$D_e = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu)/2 \end{bmatrix} \dots\dots\dots (A.2.3)$$

さらに、Prandtl-Reuss の仮定より

$$\Delta \epsilon_p = \lambda \cdot \left\{ \frac{\partial F}{\partial \sigma} \right\} \dots\dots\dots (A.2.4)$$

ここで、 F は、降伏条件を表わし、材料が Mises の降伏条件に従う場合には、

$$F = (\sigma_x^2 - \sigma_x \cdot \sigma_y + \sigma_y^2 + 3 \tau_{xy}^2)^{1/2} - \sigma_Y \dots\dots\dots (A.2.5)$$

式 (A.2.1), (A.2.2), (A.2.4) より

$$\Delta \sigma = D_e \cdot \left[\Delta \epsilon - \lambda \cdot \left\{ \frac{\partial F}{\partial \sigma} \right\} \right] \dots\dots\dots (A.2.6)$$

また、塑性状態では、応力 σ は、降伏曲線上を流れるから、

$$dF = \left\{ \frac{\partial F}{\partial \sigma} \right\}^T \cdot d\sigma = 0 \dots\dots\dots (A.2.7)$$

式 (A.2.6) を式 (A.2.7) に代入すると、

$$\lambda = \frac{\left\{ \frac{\partial F}{\partial \sigma} \right\}^T \cdot D_e}{\left\{ \frac{\partial F}{\partial \sigma} \right\}^T \cdot D_e \cdot \left\{ \frac{\partial F}{\partial \sigma} \right\}} \cdot \Delta \epsilon \dots\dots\dots (A.2.8)$$

式 (A.2.8) を式 (A.2.6) に代入すると、

$$\Delta \sigma = D_{ep} \cdot \Delta \epsilon \dots\dots\dots (A.2.9)$$

$$D_{ep} = D_e - \frac{D_e \cdot \left\{ \frac{\partial F}{\partial \sigma} \right\} \cdot \left\{ \frac{\partial F}{\partial \sigma} \right\}^T \cdot D_e}{\left\{ \frac{\partial F}{\partial \sigma} \right\}^T \cdot D_e \cdot \left\{ \frac{\partial F}{\partial \sigma} \right\}} \dots\dots\dots (A.2.10)$$

A.3 フローチャート

本数値計算に使用したフローチャートを 図-26 に示す。

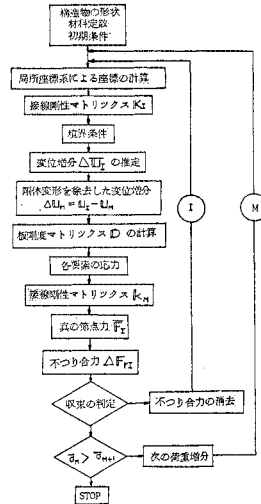


図-26 フローチャート

A.4 式 (2.2.4) の説明

変形状態 I における局所座標系による要素中央面内の任意点のたわみを w_0 、さらに、この点の状態 I からの変位増分を $\Delta u, \Delta v, \Delta w$ とする。いま、初期たわみ w_0 を有する浅いシェルに対する Marguerre のひずみ式をここに適用すると、板の中央面でのひずみは次のようになる⁹⁾。

$$\begin{Bmatrix} \Delta \epsilon_{x0} \\ \Delta \epsilon_{y0} \\ \Delta \gamma_{xy0} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \partial \Delta u / \partial x \\ \partial \Delta v / \partial y \\ \partial \Delta u / \partial y + \partial \Delta v / \partial x \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 1/2 \cdot (\partial \Delta w / \partial x)^2 \\ 1/2 \cdot (\partial \Delta w / \partial y)^2 \\ \partial \Delta w / \partial x \cdot \partial \Delta w / \partial y \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \partial w_0 / \partial x \cdot \partial \Delta w / \partial x \\ \partial w_0 / \partial y \cdot \partial \Delta w / \partial y \\ \partial w_0 / \partial y \cdot \partial \Delta w / \partial x + \partial w_0 / \partial x \cdot \partial \Delta w / \partial y \end{Bmatrix} \dots\dots\dots (A.4.1)$$

板内の任意点でのひずみ式 (2.2.4) は、式 (A.4.1) に、板の曲げに対するひずみ $(-z \cdot A_{\phi} \cdot \Delta d_{bl})$ を加えることによって得られる。

参考文献

- 1) Turner M.J., E.H. Din, H.C. Martin and R.J. Melosh : Large Deflections of Structures Subjected to Heating and External Loads, J. AERO/SPACE SCIENCES, Feb., 1960.
- 2) 川井忠彦・吉村信敏：有限要素法による平板の大たわみ問題の解析，生産研究，20 卷 8号，1968.
- 3) Mallett R.H. and P.V. Marcal : Finite Element Analysis of Nonlinear Structures, Proc. ASCE, St. 9, Sep., 1968.
- 4) Schmit L.A., F.K. Bogner and R.L. Fox : Finite Deflection Structural Analysis Using Plate and Shell Discrete Elements, AIAA J., Vol. 6, No. 5, May, 1968.
- 5) Murray D.W. and E.L. Wilson : Finite-Element Postbuckling Analysis of Thin Elastic Plates, AIAA J., Vol. 7, No. 10, Oct., 1969.
- 6) Yang T.Y. : Finite Displacement Plate Flexure by the Use of Matrix Incremental Approach, Int. J. for Numerical Methods in Eng., Vol. 4, 1972.
- 7) Gallagher R.H., S. Lien and T. Man : Finite Element Plate and Shell Pre-and Post-Buckling Analysis, Proc. of AIAA/ASME/SAE 13th Structures, Structural Dynamics and Materials Conference 1972.
- 8) Colville J., M.B. Becker and R.W. Furlong : Large Displacement Analysis of Thin Plates, Proc. of ASCE, St. 3, March, 1973.
- 9) Bergan P.G. and R.W. Clough : Large Deflection Analysis of Plates and Shallow Shells Using the Finite Element Method, Int. J. for Numerical Methods in Eng., Vol. 5, 1973.
- 10) Mendelson A. and S.S. Manson : Practical Solution of Plastic Deformation Problems in the Elastic-Plastic Range, NASA, T.R., R 28, 1959.
- 11) Gallagher R.H., J. Padlog and P.P. Bijlaard : Stress Analysis of Heated Complex Shapes, ARS J., May, 1962.
- 12) Argyris J.H. and D.W. Scharpf : Methods of Elastoplastic Analysis, I.S.D./ISSC, Proc. of the Symposium on Finite Element Techniques, Univ. of Stuttgart, June 10-12, 1969.
- 13) Pope G.G. : The Application of the Matrix Displacement Method in Plane Elasto-Plastic Problems, Proc. of the First International Conference on Matrix Methods in Structural Mechanics, Vol. 2, 1965.
- 14) Marcal P.V. and I.P. King : Elastic-Plastic Analysis of Two-dimensional Stress Systems by the Finite Element Method, Int. J. Mech. Sci., Vol. 9, 1967.
- 15) Zienkiewicz O.C., S. Valliappan and I.P. King : Elasto-Plastic Solutions of Engineering Problems "Initial Stress" Finite Element Approach, Int. J. for Numerical Methods in Eng., Vol. 1, 1969.
- 16) Nayak G.C. and O.C. Zienkiewicz : Note on the Alpha-Constant Stiffness Method for the Analysis of Non-Linear Problems, Int. J. for Numerical Methods in Eng., Vol. 4, 1972.
- 17) Yamada Y., N. Yoshimura and T. Sakurai : Plastic Stress-Strain Matrix and its Application for the Solution of Elastic-Plastic Problems by the Finite Element Methods, Int. J. Mech. Sci., Vol. 10, 1968.
- 18) Yamada Y. : Recent Japanese Developments in Matrix Displacement Method for Elastic-Plastic Problems, Japan-U.S. Seminar on Matrix Methods of Structural Analysis and Design, August 25-30, 1969, Tokyo.
- 19) Komatsu S. and T. Kitada : Refined Finite Element Analysis of Plane Elasto-Plastic Problems, Technology Reports of Osaka University, Vol. 25, 1975.
- 20) Murray D.W. and E.L. Wilson : An Approximate Nonlinear Analysis of Thin Plates, Proc. 2nd Conf. on Matrix Meth. in Struc. Mech., AFFDL-TR-68-150, Dec., 1969.
- 21) 大坪英臣：平板の大たわみ問題の一解法—特に平板の圧縮最終強度について—，日本造船学会論文集，130号，昭和46年12月。
- 22) 上田幸雄・山川武人・藤原昭文：有限要素法によるはり，柱，平板の熱弾塑性大たわみ解析，JSSC マトリックス構造解析講演論文集，1973。
- 23) 上田幸雄・山川武人・福田敬二：温度変化を伴う棒・板の非線型挙動，日本造船学会論文集，133号，昭和48年6月。
- 24) 日本道路協会：道路橋示方書・同解説，昭和48年2月。
- 25) Coan J.M. : Large Deflection Theory for Plates with small Initial Curvature Loaded in Edge Compression, J. of Applied Mech., Vol. 18, No. 2, June, 1951.
- 26) 山田嘉昭：マトリックス法による材料力学，コンピューターによる構造工学 I-3-A，培風館，昭和45年11月。
- 27) Nishino F. and L. Tall : Residual Stress and Local Buckling Strength of Steel Columns, Trans. JSCE, No. 172, 1969.
- 28) 福本湧士・伊藤義則：フランジ局部座屈強度とフランジの幅厚比制限，土木学会論文集，第160号，1968。
- 29) 小松定夫・半尾正之・北田俊行：補剛材を有する圧縮板の極限強度に関する実験的研究，土木学会第29回年次学術講演会講演概要集，1974年。
- 30) ÖNORM B 4300/4 (Österreichische Vorschrift) Berechnung und Ausführung der Tragwerke-Stahlbau, Knickung, Beulung, 1953.
- 31) Standard Specifications for Highway Bridges adopted by the American Association of State Highway Officials, 1973.
- 32) DIN 4114, —Stahlbau, Stabilitätsfälle (Knickung, Kippung, Beulung), RdErl. d. Innenministers v. 30.5. 1973, Der Stahlbau, 2/1974.
- 33) 鋼鉄道橋設計標準解説，土木学会，1970年。

(1975.3.17・受付)