

## 成層密度流の界面現象(2)

## HYDRODYNAMIC BEHAVIOUR OF INTERFACES IN STRATIFIED FLOWS (2)

水理委員会密度流研究小委員会  
Task Committee on the Stratified Flows (Committee  
on Hydraulics and Hydraulic Engineering, JSCE)

## (1) 塩水くさび

## 第3編 界面形状

## 1. まえがき

成層密度流の界面形状に包含される問題はかなり多岐にわたり、かつ界面混合、界面抵抗などの諸問題とも密接に関連している。すなわち、有効重力の概念さえ導入すると、近似的あるいは大局的には開水路流れの水面形解析の手法が界面形状の計算にそのまま用いることができる場合が多い。しかしながら成層密度流の界面現象固有の問題はまさに前述した界面混合、界面抵抗にあるので、このことについて議論するのではなければ、極言すると開水路水理学の成果を有効重力で読み替えるだけで事が終ってしまう。混合、抵抗のいずれも他の編で詳細に検討されるのであるが、本編においては上の理由によって界面形状に直接関与する混合・抵抗の問題を重複して述べざるを得ない。

一方、多方面にわたる界面形状問題について種々の分類が可能であるが、ここでは開水路水理学の系統に従って次のように分類する。

- (1) 漸変する成層流界面
- (2) 急変する成層流界面
- (3) 密度差のある場合での jet, plume

ここでいう漸変・急変は空間的・時間的な変化をいうのであって密度変化を意味するのではない。

## 2. 漸変する成層流界面形状

ここでは、主として塩水くさび、および河口流出について述べる。

下層海水が静止している定常二層流について Schijf-Schönfeld<sup>1)</sup> が基礎方程式を導きその解を得て以来、Farmer-Morgan<sup>2)</sup> を始め、多くの近似解が得られており、抵抗の評価が妥当であれば、いずれの式も大局的には実測値とよく合致するといわれる。

河口二層流にもおいて、下層海水が静止しているときの基礎方程式は次式のようにかける<sup>3)</sup>。

$$\left(1 - \frac{1}{\epsilon g} \cdot \frac{u_1^2}{h_1}\right) \frac{\partial h_1}{\partial x} + \frac{u_1^2}{\epsilon g} \left(\frac{k}{h_1} \cdot \frac{h_1 + h_2}{h_2} - \frac{\partial b_1 / \partial x}{b_1}\right) = 0 \dots \dots \dots (1)$$

ここに、 $h_1, h_2$  : それぞれ河水層、海水層の厚さ、 $b_1$  : 河幅、 $\epsilon = (\rho_2 - \rho_1) / \rho_2$ 、 $k$  : 二層間の抵抗を  $\rho k u_1^2$  ( $u_1$  : 河水流速) とおいたときの抵抗係数。

式(1)から、(i) 抵抗係数  $k$  が小さいとき、(ii) 海水層の厚さ  $h_2$  が大きいとき、(iii) 河幅  $b_1$  が海側に向かって広がっているとき、塩水くさびの侵入距離は長くなるのがわかる。塩水くさびの長さ、形状は抵抗係数のとりかたによって相当変化する。したがって係数の具体的な値を知ることが河口二層流の問題で重要となる。抵抗係数の値としては現地実測、模型実験とも相当散乱するため、ある一定の表示では示しがたいが、その傾向は式(2)の形に表示することができる。

$$f_i = c [R_e \cdot F_i^2]^{-n} \dots \dots \dots (2)$$

ここに、 $k = f_i / 2$ 、 $n, c$  : 定数、 $R_e = u_1 h_1 / \nu$  : 淡水層のレイノルズ数、 $F_i = u_1 / \sqrt{\epsilon g h_1}$  : 淡水層の内部フルード数。

抵抗係数  $f_i$  の値は模型実験で  $10^{-3}$  程度、現地観測で  $10^{-3} \sim 10^{-4}$  程度の値となっていて、現象の規模の拡大とともに減少する傾向にある。現実的には、式(1)はくさびの侵入長の実測結果に基づいて、式中に含まれているくさび全長にわたる平均界面抵抗係数を逆算するのに適しているというべきであろう。

なお、完全な成層状態にない弱混合型の塩水くさびについて、定常・変断面の条件のもとで Pritchard<sup>4)</sup> が基礎方程式を示し、Rattray-Hansen<sup>5)</sup> らがその近似解を得ている。ただし、その過程で鉛直方向密度勾配は十分小さいとしてその高次項を省略しているのだから適用範囲は限られる。河口内の流速および塩分分布は、河川水流出のモード、風応力のモード、熱対流理論で使われる Rayleigh 数に関連した因子から構成される三つのモードの組合せによって表現されることを示している。

その結果、河口内の鉛直断面で塩分分布が一様であっても、必ずしも一方向のみの流速を持つとは限らないことを示した。このことは Arons & Stommel<sup>6)</sup> の Flushing 理論による強混合型河口の实在そのものに対する矛盾を指摘していることになる。また、Bowden<sup>7)</sup> は Shear effect 理論によって、河口内の塩分分布におよぼす鉛直循環の効果は水平拡散と同等であることを指摘している。

Keulegan<sup>8)</sup> はいち早く成層界面の安定・不安定、界面抵抗、界面混合の諸問題を取り上げた後も塩水くさびについての研究を進め、非定常塩水くさび、特に先端の運動特性について理論的な解明を行った。

界面抵抗の評価の問題を除けば、単純化された一様勾配の prismatic channel における塩水くさびの概略形状については（あたかも開水路漸変流水面形の一次元問題と同じ程度に）計算手法の改良など、技術的な問題を除いてほとんど解決されたといっても過言ではない。ただし、後の問題点で改めて指摘するように、くさび形状の計算始点である河口境界条件の設定、あるいは水路形状の不整（水路の弯曲、水路床勾配の急変、水路幅の変化、水路床の凹凸など）に起因する界面形状の局所的変形と、それらの効果が界面混合の発達・抑制におよぼす影響などについていまだ明らかでない点が多く、今後この方面の研究が期待される。

このように理想化された単純水路の塩水くさびの解析・実験による基礎的知見の蓄積と併行して、実際の河川における数多くの実測が理論検証の資料としてのみならず、解決すべき新たな問題を提起したことは重要である。わが国においては浜田<sup>9),10)</sup>の新潟港における観測をはじめ、室田<sup>11)</sup>の安治川河口の実測と界面安定の検討、本間・堀川など<sup>12)</sup>による相模川河口の調査、中村・稲松<sup>13)</sup>による神通川河口調査などきわめて多くの調査研究があるが、なかでも 1942 年の発表以来<sup>14)</sup>石狩川河口を対象として継続調査されている北大グループの塩水くさびの実態研究<sup>15)</sup>はこの分野におけるきわめてすぐれた成果であろう。福島らは超音波測深機による塩水くさび界面（正確には密度急変層）の観測技術を開発し、きわめて興味ある実測資料を提示した。

## (2) 河口流出

河口流出の研究の初期には平面噴流のモデルが慣用された。しかし、河口流出問題では河水・海水の密度流効果を考慮しなければならないのは当然である。

高野<sup>16)</sup>は海域で密度成層を形成しているときの河川流出の研究を行い、流出する表面淡水流の外縁形状は双曲線的に拡がるという結果を得ている。一方、石狩川での実測によると、表面流の流線形状は指数関数的ひろがりをするのが認められている<sup>17)</sup>。この関係は式 (1) において全水深  $h (=h_1+h_2)$  の変化が微小であるので一定として、河口の支配断面近傍でのせつ動式から求められる。すなわち、1 次式としての

$$-\frac{h_{10}}{b_{10}} \left( \frac{\partial b_1}{\partial x} \right)_0 + \frac{kh}{h_{20}} = 0$$

より、支配断面の近傍では  $b_1 = b_{10} \cdot e^{\alpha x}$  ( $\alpha = kh/h_{10} \cdot h_{20} > 0$ ) が求められ、河流の幅は増大する。理論的に求めた  $\alpha$  と柏村ら<sup>17)</sup>の石狩川河口沖の河水流の観測結果に基づく  $\alpha'$  と比較するとき、 $\alpha' > \alpha$  となる。これは淡水流出水が流下方向と直角な方向の密度勾配のほか水平拡散の影響を受け、河水層の幅が一般に上述の  $b_1 \cdot e^{\alpha x}$  で示されるものよりは大きくなるためである<sup>3)</sup>。

河口を出る淡水の平面的流出機構については、柏村・吉田の現地調査、水理実験に基づいた研究があり、河口流出の形式は Keulegan 数と Reynolds 数との関係によって、放射状に広がる成層密度流形式のものから、次第に周辺から海水を連行する型を経て、最終的には平面噴流モデルに類似な流況に至る数種の型に分類され、各形式が現われる水理条件が明らかにされている<sup>17)~19)</sup>。Bates-Freeman は彼らの現地調査によって、河口幅の 4~5 倍沖のところほとんど例外がなく堆積が起こると指摘していたが、前記のどの型の河口流出においても河口の少し沖の流心部で、淡水の浮上効果のため流れの局所的加速部が現われることが実験によって確かめられている。いずれにしても成層効果があるために、平面噴流モデルのように流速が単調に減少するのではないことが特徴的である。

岩崎<sup>20)</sup>は河川水流出に伴う淡塩水混合層近傍における鉛直方向の流速分布および密度分布を、Tollmien の方法に従い、鉛直 2 次元の移流拡散方程式を併用して理論的に解いている。和田<sup>21)</sup>は河川水流出による河口近傍での湧昇流の存在を流動と塩分濃度分布との相互干渉を解析した研究によって確認している。

復水器温排水の海域への放出の問題も、この河口流出の現象も熱収支を除けば力学的にはまったく同種の問題であるので、連行・拡散などについては jet-plume の項で述べる。現地観測技術として赤外線写真による表層

水拡散の撮影が行われるようになり、たとえば Mississippi 川河口の流出観測例<sup>22)</sup>はとくに興味深い。

(3) 問題点と今後の課題

a) 塩水くさびの局所変形

現地観測を実施して強く抱く印象は、自然に存在するくさびの状況は理論や単純化された水理模型実験のそれと異なり予想外の現象を観測することがしばしばである。たとえば、河床上にかなり大きな凸出部があると、それがまだくさびのなかに埋没していても、界面に内部ジャンプを発生させ、さらには界面混合を促進して表層塩分を増加させ、下流側に混合層を形成する。この混合層は Richardson 数で表わされる安定条件によって減衰することも増幅することもある。

現実の界面は外乱に対しきわめて不安定で、水面を航行する船、水面を吹送する風などによって直ちに乱される。特に潮差の小さい日本海沿岸の河口では、潮汐振動よりはむしろ低気圧の方がくさびの盛衰に大きな影響を示すようである。低気圧が接近するとくさびはさらに上流へ進み、下流の上層塩分濃度は増加する。低気圧と表層塩分の間には強い相関が見られるという。

河道弯曲部の界面形状の実測記録はきわめて興味深い。弯曲部では水位は外側が高く、上層厚も外側で厚いから界面勾配は内から外に向って下がり、その勾配は静的つり合いの条件から  $1/\varepsilon$  のオーダーとなろう。ところが弯曲部横断面内の流速分布は予想とまったく異なり、表層流速の最大点は中心より外側には現われず、多くは川の中心部か、むしろ内側に存在することさえある。この事実、表層流れがポテンシャル流的傾向を示すことを示唆するに思われる。

後述する急変成層流とも当然関連するが、一般に密度流においては有効重力が小さいから、曲線流に伴う遠心力加速度の効果が相対的に顕著になるのはもちろんであるから、このような界面の局所変形問題では curvilinear flow の特性を十分考慮する必要がある。

b) 河口条件

Stommel-Farmer<sup>23)</sup> はすでに、成層密度流の河口条件として、内部フルード数が 1.0 であるという条件が妥当であることを示している。式 (1) において、支配断面近傍での 2 次の摂動式より求めた式

$$\left(\frac{\partial h_1}{\partial x}\right)_0 = -\frac{1}{3} \cdot \frac{h_{10}}{b_{10}} \left(\frac{\partial b_1}{\partial x}\right)_0 \frac{h}{h_{20}}$$

から、 $\alpha(=kh/h_{10} \cdot h_{20}) > 0$  のとき  $(\partial h_1/\partial x)_0$  は負の値をとり河水層の厚さは支配断面で減少することを示している<sup>3)</sup>。

実際の河口においては、出水時を除く平常の流況の際には、内部フルード数は上流から下流に向かってゆるやかに

増加し、河口近傍で急増して、河口で 1.0 となり、河口を出てさらに増加するという理論が予測する傾向と大局的には一致するようである。ただし詳細にみると内部フルード数の変化はかなり複雑で、たとえば、河口に近づくと、まず両岸近くで 1 になり、流心部では河口を出たあたりで 1 となる。しかも潮汐の干満によって限界点はあるいは沖へ、あるいは上流へと若干振動するようである。

そもそも河口において内部フルード数が 1 になるというのは、上、下層の運動方程式および連続方程式の微係数の係数が 0 になるという必要条件から得られるので、決して十分な条件ではない。さらに動力学的な条件によって補完される必要があるろう。

3. 急変する成層流界面形状

ここでは、比較的短かい区間で生ずる界面形状の変化、すなわち内部跳水、堰・ゲート付近の成層流の挙動、および内部波サージについて述べる。

(1) 内部跳水

Schijf・Schönfeld が内部跳水の存在を理論的に予想して以来、特に跳水に伴うエネルギー損失と安定な内部跳水の存在の可能性をめぐる論争された。浜田<sup>24)</sup>は、Schijf らの結論と反対に、エネルギー損失のあるジャンプをもって安定な跳水であるとしている。

図-1 のように、水平水路床上の二層流を考え、全水深  $h$  は一定とし、混合は考えない。跳水によって水面は当然変動するが、椎貝<sup>25)</sup>によればその量は  $\varepsilon$  のオーダーの微小量であることがわかっている。また界面混合を考慮した内部ジャンプは、Stefan・早川<sup>26)</sup>によって扱われている。ただし、この基礎式は混合機構を定量的に示しうる特性式がなければ解けない。岩崎の解析<sup>27)</sup>によると、運動量方程式は次式で与えられる。

$$\frac{h_1^2}{h_1'} (F_1')^2 - (1+\varepsilon) \left(\frac{h_2^2}{h_2'}\right) (F_2')^2 + \frac{1}{2}(h_2+h_2')=0 \dots\dots\dots (2)$$

ここに、

$$F_1'^2 = u_1^2/\varepsilon g h_1, \quad F_2'^2 = u_2^2/\varepsilon g h_2, \quad \varepsilon = (\rho_2 - \rho_1)/\rho_1$$

一方、跳水による損失エネルギーは次のようになる<sup>27)</sup>。

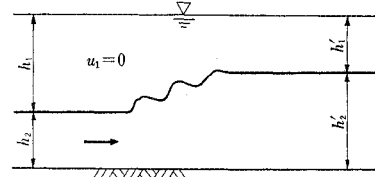


図-1 内部跳水 ( $u_1=0, u_2 \neq 0$ )

$$\Delta E = \rho_1 \varepsilon g h_2 (q-1) \left[ \left\{ \left( \frac{1+\varepsilon}{2} \right) (F_2')^2 \left( \frac{1+q}{q^2} \right) - 1 \right\} \cdot Q_2 - \frac{1}{2} (F_1')^2 \frac{1+p}{\rho^2} Q_1 \right] \dots\dots\dots (3)$$

ここに、

$p = h_1'/h_1, q = h_2'/h_2, Q_1$  : 上層 (単位幅) 流量,  
 $Q_2$  : 下層流量。

a)  $u_1 = 0, u_2 \neq 0$

上層静止の場合は、式 (2) の解は次のようになる。

$$\frac{h_2'}{h_2} = \frac{1}{2} (\sqrt{1+8(1+\varepsilon)(F_2')^2} - 1) \dots\dots\dots (4)$$

損失エネルギーは

$$\Delta E \approx \rho_2 \varepsilon g \frac{(h_2' - h_2)^3}{4 h_2 h_3} Q_2 > 0 \dots\dots\dots (5)$$

となり、開水路跳水の式と類似である。

b)  $u_1 \neq 0, u_2 = 0$

下層静止の場合は、式 (2) の左辺は常に正、 $\Delta E < 0$  となり、エネルギーの取得があることになるから、このような跳水は存在し得ない。

一方、全水深が一定、 $h_2' > h_2$  という制約条件をなくすとき、内部ジャンプの存在条件

$$\Delta E = -g u_1 \Delta \rho (h_2' - h_2) \frac{(h_1 - h_1')^2}{4 h_1'} > 0$$

から、 $h_2' - h_2 < 0$  が求められる。このとき、内部ジャンプが生じ、跳水前後の水位差および水深の変化は次のようになる<sup>28)</sup> (図-2 参照)。

$$\Delta h = (h_1 + h_2) - (h_1' + h_2') = \frac{\Delta \rho}{\rho_1} (h_2' - h_2) < 0 \dots\dots\dots (6)$$

$$\frac{h_1'}{h_1} = \frac{1}{2} (\sqrt{1+8(1+\varepsilon)(F_1')^2} - 1) \dots\dots\dots (7)$$

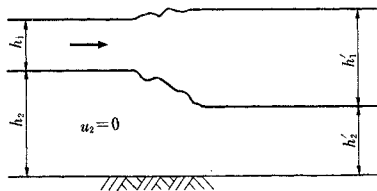


図-2 内部跳水 ( $u_1 \neq 0, u_2 = 0$ )

c)  $u_1 \neq 0, u_2 \neq 0$

$h_2' > h_2$  の場合について限定して、上、下層とも流動している場合を考える<sup>27)</sup>。図-3 を参照して、式 (3) の正負を判定すると、

タイプ I :  $Q_1 < 0, Q_2 > 0$  のとき  $\Delta E > 0$  となるからこのタイプの跳水は存在しうる。

タイプ II :  $Q_1 > 0, Q_2 < 0$  のとき  $\Delta E < 0$  となり、このタイプの跳水は存在し得ない。

タイプ III :  $Q_1 > 0, Q_2 > 0$  のとき

$$\left\{ \frac{1+\varepsilon}{2} (F_2')^2 \frac{1+q}{q^2} - 1 \right\} Q_2 \geq \left\{ \frac{1}{2} (F_1')^2 \frac{1+p}{\rho^2} \right\} Q_1 \dots\dots\dots (8)$$

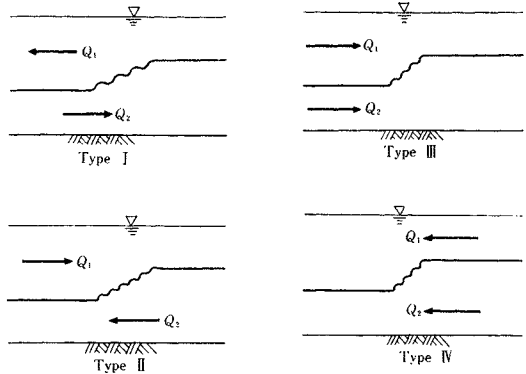


図-3 内部跳水の形式

の条件を満たす場合に限りエネルギーの損失がある。

タイプ IV :  $Q_1 < 0, Q_2 < 0$  のときは、逆に式 (8) の不等号を逆にした条件を満たす場合に限りエネルギーの損失がある。

結局、上下層とも同方向に流動している場合は、条件付で、内部跳水の存在が可能なのである。なお、完全跳水の場合は、ジャンプ位置に発生するローラーによって上、下層の混合が強制され、このため内部跳水を diffuser として応用することもあり<sup>29)</sup>、この現象に関連する乱れの機構も、岩崎ら<sup>30)</sup>によって調べられている。

(2) 堰をこえる成層流

海と内水面との間に、短い水路で連絡されている所、水中に広頂堰がある所をとおして、外海と、内水部とが連絡されている場合、淡水流量、淡水位および密度差の関係によって2成層不等流問題が生じる。図-4 のような広頂堰をこえる成層流については Rigrter<sup>31)</sup> の研究がある。水路幅および全水深は一定として特性方程式を次のように示した。

$$F_1^2 \cdot A^3 + F_2^2 \cdot (1-A)^3 - A^2(1-A)^3 = 0 \dots\dots\dots (9)$$

ただし、 $A$  は無次元長さとし、

$$h(x) = A \cdot h, h_1(x_1) = A_1 \cdot h, h_2(x_2) = A_2 \cdot h$$

$A_2$ 、すなわち  $x_2$  での下層の水深が境界条件として与えられているとき、式 (9) を満たす  $A_1$  が得られるとき、あるいは  $A_1$  が境界条件として与えられるとき、式 (9) を満たす  $A_2$  が得られるときに最大の海水流入量が現われるとしている。

川幅および水深の変化する場合の成層流に対して、界

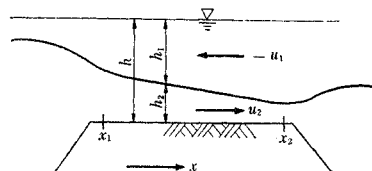


図-4 広頂堰を越える成層密度流

面混合を考慮した解は Pedersen<sup>32)</sup> によって与えられている。彼は、下層が静止して、上層の水平流速を  $V$ 、連行流速を  $E$ 、界面抵抗係数を  $f_i$  として、流量一定とした最小エネルギーの式、運動量方程式ならびに流速の鉛直分布を考慮して

$$f_i = E/V$$

が成り立つことを示し、さらにせん断応力および密度の分布式を求める関係式を導いている。

前述したように、このような局所的成層密度流の問題では、均質な開水路流れ以上に、曲線流としての特性が強く作用するので、curvilinear-stratified density current の研究が今後の課題であろう。

### (3) 内部サージ

淡塩水塊を隔離した平板を瞬間的に引き上げると、いわゆる内部段波が発生し、上方淡水、下方塩水サージ先端の伝播速度  $C$  はともに等しく次式で与えられる。

$$C = K \sqrt{g h} \dots\dots\dots (10)$$

$K$  については Keulegan は 0.57, Yih は 0.45, 室田・神田<sup>33)</sup> は段波波高  $\eta$  と水深  $h$  の比が重要なパラメーターとしているが、平均的には同じくほぼ 0.5 を得ている。段波先端部形状などについては古く Keulegan<sup>34)</sup> の研究がある。

サージのような成層流の非定常問題で、理論的にも実験的にも、もっとも困難な問題の一つは、遷移状態における流速分布、密度分布、および両者の相関の問題がある。これは終局的には非定常界面混合の問題に帰着するのであろうが、たとえば伝播速度に例をとっても式(10)のような古典的な値は、サージ発生のごく初期にしか適用できず、サージが長く走行すると界面およびフロントの混合のために、backlayer が次第にやせて行って、式(10)で予想される値からかなり急激に減衰する。特に、この種の界面混合では非定常界面に発生する規則的な内部二次流の存在が重要であろう。

また近年、Navier-Stokes 式を直接数値的に解く MAC 法などによる、密度流現象、あるいは境界面の不安定の成長過程などの数値シミュレーションが多く行われるようになってきた<sup>35), 36)</sup>。これらの手法によると、現象の遷移状態を詳細に再現できる。しかし、このようなシミュレーションでのモデル化においても、なお、混合機構を正確に表現する理論に欠けているのが現状である。いずれにしろ、今後は成層密度流に関する混合機構の物理的な解明が、重要な研究課題になるものと考えられる。

## 4. Plume

### (1) 基本式系

Jet とはその放出源で浮力の作用のないもの、plume は密度差による浮力が作用するものをいう。すなわち、plume はその放出源で質量・運動量束の他に浮力束をも持つ。さらに浮力束のみで運動量束のないものを pure plume, そうでない一般のものを forced plume という。

Plume の希釈拡散過程を考える際に、便宜上次のような領域に分ける (図-5 参照)。

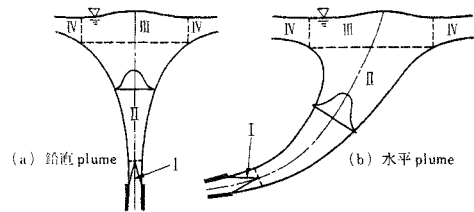


図-5 Plume の領域区分

I. Zone of flow establishment : 放出口付近の流況で plume の初期速度が保存されるコア一部分と、それを囲む混合域からなる。

II. Zone of established flow : 領域 I に続くもので混合は全断面で行われ、流速分布は正規分布で近似される。

III. 表層遷移領域 : 流れが水面にぶつかって水平方向に転じ、強い混合が生じる。

IV. 表層水平流領域 : この領域はすでに plume の希釈混合過程の範囲外にあり、移流効果と渦動拡散に支配される。

Jet や plume の研究においては、流速や密度の横断方向分布関数形を実験的に確認した適当な分布形 (Gauss 分布, top-hat 形等) を仮定し、噴流軸上の物理量の変化を調べることに主眼がおかれる。

重力場の影響、ことに密度が高さとともに変化する場合を最初に扱ったのは、Priestley-Ball<sup>37)</sup>, Morton・Taylor・Turner<sup>38)</sup> であるが、Morton はその後、解法を改め<sup>39)</sup>、さらに日野<sup>40)</sup>は噴流体が質量・運動量・浮力をもつ場合を論じ、plume の上昇限界と、初期運動量との関係を理論的に求めた。

Plume の基礎式である質量、鉛直方向 ( $z$ ) の運動量および密度の保存を表わす関係はそれぞれ次のごとくである<sup>41)</sup>。

$$E_c = \frac{\partial}{\partial r} (ru) + \frac{\partial}{\partial z} (rw) = 0 \text{ (質量)} \dots\dots\dots (11)$$

$$E_m = \frac{\partial}{\partial r} (ruw) + \frac{\partial}{\partial z} (rvw^2)$$

$$+\frac{\partial}{\partial r}(r \cdot \text{Cov}\{u'w'\}) - gr \frac{\Delta\rho}{\rho_0} = 0 \text{ (運動量)}$$

$$E_d = \frac{\partial}{\partial r}(ru\Delta\rho) + \frac{\partial}{\partial z}(r\omega\Delta\rho) + \frac{\partial}{\partial r}(r \cdot \text{Cov}\{u'\rho'\}) = 0 \text{ (密度)} \dots\dots (13)$$

ここに、 $w, u : z, r$  方向の速度、 $\Delta\rho = \rho_e - \rho, \rho_e$  : 周囲水の密度、 $\rho_0$  : 放出水密度。

Plume の運動は式 (11) ~ (13) を適切な境界条件ならびに  $\text{Cov}\{u'w'\}, \text{Cov}\{u'\rho'\}$  の項が平均流れの変数により表示できるとき記述できる。境界条件としては、

- (i)  $r=0$  で、 $u=0, \partial w/\partial r=0, \partial \Delta\rho/\partial r=0, \text{Cov}\{u'w'\}=0, \text{Cov}\{u'\rho'\}=0$
- (ii)  $r=\infty$  で、 $u=0, w=0, \Delta\rho=0, \text{Cov}\{u'w'\}=0, \text{Cov}\{u'\rho'\}=0$

を考えればよい。式 (11) ~ (13) は本来 plume 断面内において適用されるべきものであるが、plume 縁端の位置ならびに縁端での境界条件については未定な部分が多い。これに対しては、連行機構を示す特性方程式が考えられている。

Plume の運動に関する基本式として、上記の 3 式のほかにエネルギー保存式 ( $E_k$ ) を考える場合がある。

$$E_k = \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{2}ruw^2\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{2}r\omega^2\right) + w \frac{\partial}{\partial r} r \cdot \text{Cov}\{u'w'\} - grw \frac{\Delta\rho}{\rho_0} = wE_m - \frac{1}{2}w^2E_c = 0 \dots\dots (14)$$

$E_c=0, E_m=0$  のとき、 $E_k=0$  となるので式 (15) は一次系を表わしている。この場合、plume の運動を記述する基本式系は次のようになる。

$$E_c=0, E_m=0, E_k=0, E_d=0 \dots\dots (16)$$

式 (16) は 3 個の未知量に対して、最後の  $E_d$  の項を除いて過剰の関係を与えるが、いずれか 1 つの項が削除されても解は影響を受けない。いずれにせよ、解を求めるためには前述の半径方向の境界条件とともに放出口半径、放出速度、密度欠損量が与えられなければならない。

いま、基本式系 (16) を半径方向に積分し、前述の境界条件 (i), (ii) を適用するとき次式を得る。

$$\frac{d}{dz} \int_0^\infty ruw dr = -(ru)_\infty \dots\dots (17)$$

$$\int_0^\infty E_m dr = 0 = \frac{d}{dz} \int_0^\infty ruw^2 - g \int_0^\infty r \cdot \frac{\Delta\rho}{\rho_0} dr \dots\dots (18)$$

$$\frac{d}{dz} \int_0^\infty ru\Delta\rho = \frac{d\rho}{dz} \int_0^\infty (ru)_\infty dz \dots\dots (19)$$

$$\frac{d}{dz} \int_0^\infty \frac{1}{2} ruw^2 dr = \int_0^\infty \text{Cov}\{u'w'\} \frac{\partial w}{\partial r} r dr + g \int_0^\infty ruw \frac{\Delta\rho}{\rho_0} dr \dots\dots (20)$$

上式から、(1) 質量束は高さとともに単調増加し、その増加率は周囲流体からの連行加入量に等しい、(2) 運動量束は、浮力が上方へ向うときにのみ増加する、(3) 密度欠損束は高さが増すにつれて減少し、その変化率は周囲流体の密度勾配に比例することが見出される。

したがって、積分方程式系は

$$\int E_c dr = 0, \int E_m dr = 0, \int E_k = 0, \int E_d = 0 \dots (21)$$

のように表わされる。エネルギー式のなかに一つの未確定要素 ( $\text{Cov}\{u'w'\}$ ) が残されたことになる。式 (21) は、式 (16) の場合と異なり、 $w=2E_m/E_c$  のときに限って同時に成立する。

このように、plume の運動は噴流幅、軸上濃度、軸上流速、連行流量がわかれば記述できる。このうち、連行機構に関する特性が plume 理論の主要な部分を占めている。したがって以下に、連行現象にとくに重点を置きながら、一様な密度あるいは安定な密度勾配のある場合の plume、および水平な流れの場での plume の挙動について述べる。

(2) 一様な密度をもつ静止流体内の鉛直 plume

この場合の plume の性状は放出口での densimetric Froude 数

$$Fr_0 = u_0 / (\varepsilon g D)^{1/2}$$

で特性化できる。ここに、 $u_0$  は放出口での噴出速度、 $D$  は放出口の径、 $\varepsilon = \Delta\rho/\rho_0$ 。

放出口付近では運動量が卓越し、浮力の影響は受けず ( $Fr_0 \rightarrow \infty$ )、中間領域 ( $0 < Fr_0 < \infty$ ) を経て放出口からかなりはなれた上方で浮力効果が卓越する ( $Fr_0 \rightarrow 0$ )。

鉛直 plume の運動を積分方程式系 (17) ~ (20) に基づいて解くとき、plume 軸に直角な断面における流速、密度分布が流れの形成領域において相似形を有するものとして展開を行うのが一般である。局所的な半径スケールを  $R(z)$  とすると、

$$\eta = r/R(z)$$

$$w = W(z) \cdot \exp(-\alpha\eta^2), \Delta\rho = \Delta\rho(z) \cdot \exp(-r\eta^2)$$

の形を考える。一方、Reynolds 応力はまた相似形をもつものと仮定する。

$$-\text{Cov}\{u'w'\} = kW^2(z) \cdot f(\eta)$$

ここに、 $k$  : 一定。

これらの式を積分方程式系に代入するとき、次のごとく基本式系が求められる。

$$\frac{d}{dz}(R^2W) = -2\alpha(ru)_\infty \dots\dots (22)$$

$$\frac{d}{dz}(R^2W^2) = \frac{2\alpha}{r} gR^2(\Delta\rho/\rho_0) \dots\dots (23)$$

$$\frac{d}{dz}(R^2W^3) = -RW^3 + \frac{6\alpha}{\alpha+r} gR^2W(\Delta\rho/\rho_0) \dots\dots (24)$$

$$\frac{d}{dz}(R^2 W \cdot \Delta \rho) = -\frac{\alpha + \tau}{\alpha} R^2 W \frac{d\rho}{dz} \dots\dots\dots(25)$$

ここに、

$$I = 24 k \alpha^2 \int_0^\infty \eta^2 f e^{-\alpha \eta} d\eta \quad (= \text{一定})$$

次に、鉛直プリュームに関する代表的な3つのモデルについて対比比較してみよう。

1) Priestley & Ball<sup>37)</sup> (PB モデル) および林<sup>42)</sup>のモデル

PB-林のモデルは基本式系として、運動量、エネルギー、密度欠損の保存式 (23)~(25) を用いている。式系のなかの係数は  $\alpha = \tau = 1/2$  であり、Reynolds 応力については、相似形を仮定している ( $\text{Cov}\{u'w'\} = 1/2 \cdot W^2 f(\eta)$ )。

PB-林モデルの解の特徴は plume が

$$dR/dz = I \quad \text{あるいは} \quad R = Iz \dots\dots\dots(26)$$

で表わされる円すい形状を示している点にある。ここに、 $z$  は仮想源からの高さである。 $I$  は plume の広がりに関する広がり係数ともいえるもので、 $f(\eta)$  の関数になっている。

2) Morton, Taylor & Turner モデル (MTT モデル)<sup>38)</sup>

MTT モデルは、式系のなかの係数として  $\alpha = \tau = 1$  とおき、質量、運動量 および密度欠損に関する保存式 (22), (23) および (25) を採用し、周囲流体の plume への加入状態を表わす関係式として、

$$-(ru)_\infty = ERW$$

という連行加入の仮定を導入して解を求めるものである。

したがって MTT モデルにおける質量保存式は

$$d/dz \cdot (R^2 W) = 2 ERW \dots\dots\dots(27)$$

となり、モデルにおける主要な式である。連行係数  $E$  は plume 全領域において一定と設定し、その値は、Abraham などの結果から 0.08 位にとられる。

PB-林モデルと MTT モデルによる解は正の浮力の領域において差を認めないが、負浮力領域において、MTT モデルにおける plume は鉛直速度が減少するときその幅を著しく拡大する ( $z \rightarrow z_{max}$  のとき、 $R \rightarrow \infty$ )。

3) Fox モデル<sup>43)</sup>

Fox モデルは基本式系として、質量、運動量、エネルギーおよび密度欠損の保存式 (22)~(25) についてすべてを用いている。速度、密度の分布形状は Gauss 分布で表わされるとし、形状定数については  $\alpha = 1$ 、 $\tau = -\lambda^2$  と設定し、plume の運動量幅と密度幅について異なる割合を与えている。

このように、物理量の横断方向分布形は任意の関数で表わしてよいが、用いた関数形によって連行係数  $E$  や

噴流幅比  $\lambda$  は違ってくる。日野<sup>40)</sup>によれば、軸対称 plume の場合次のようになるという。

Gauss 分布  $E = 0.08$ ,  $\lambda = 1.16$

矩形分布  $E = 0.12$ ,  $\lambda = 1.08$

ただし、plume の運動量幅は  $B$ 、密度幅は  $B\lambda$  と想定している。

Fox は質量とエネルギーの保存に関する基本式から、連行加入速度として次式を得ている。

$$-(ru)_\infty / R = (E_1 + E_2 \cdot F_r^{-2}) W \dots\dots\dots(28)$$

ここに、 $E_1$  は相似形状、せん断応力の積分に関係する因子、 $E_2$  は相似形状のみに関係する因子、 $F_r$  は3個の独立変数よりなる無次元数で  $F_r = W / (g \cdot \Delta \rho \cdot R / \rho_1)^{1/2}$  で与えられる。

Fox が強調している点は、式 (28) を誘導する際、plume の横断方向物理量と  $\text{Cov}\{u'w'\}$  についての相似仮設以外に何らの拘束条件を必要としなかったことにある。

一方、Abraham<sup>44)</sup> は連行係数  $E$  が重力噴流が jet に近いのか、forced plume に近いかで異なる値となることを指摘した。係数  $E$  が噴流の拡散過程でどのように変化するかをエネルギー方程式を用いて検討している。この問題は、前述の3つのモデルも含めて、今後検討すべき問題点の一つである。

(3) 一様な密度をもつ静止流体内の水平 plume

この場合、plume は浮力により逐次上昇するので、軸線は曲線になる。その曲率は  $F_{r0}$  で定まり、 $F_{r0}$  が小さければ曲率は大きく、 $F_{r0}$  が大きければ軸線は水平に近づく (図-6 参照)。

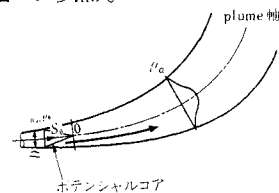


図-6 水平プリューム

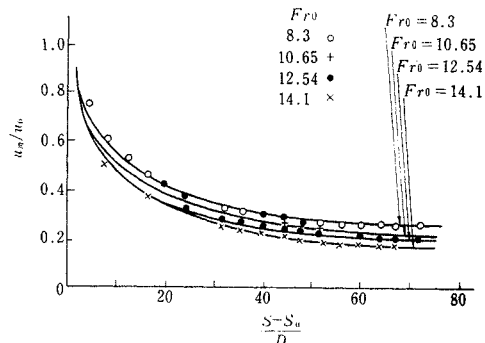


図-7 Plume 軸に沿う流速分布

$U_m$ : Plume 軸での流速,  $U_0$ : 放出口での流速

Abraham<sup>45)</sup> と Anwar<sup>46)</sup> は同じ基礎式(質量・運動量・密度欠損の保存式)から解を求めているが、解析法が多少異なる。

Anwar による軸方向の流速分布の解析解と実験値の比較を 図-7 に示すが放出口に近い範囲  $(S-S_0)/D < 40$  では一致しない。Anwar の解析は連行係数  $E$  を一

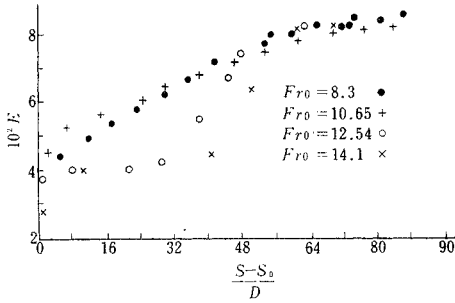


図-8 Plume 軸に沿う連行係数

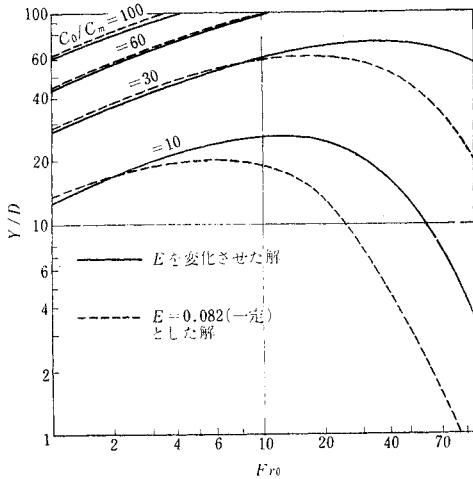


図-9 Plume 軸に沿う希釈率

( $C_0$ : 放出口での濃度,  $C_m$ : 軸上濃度)

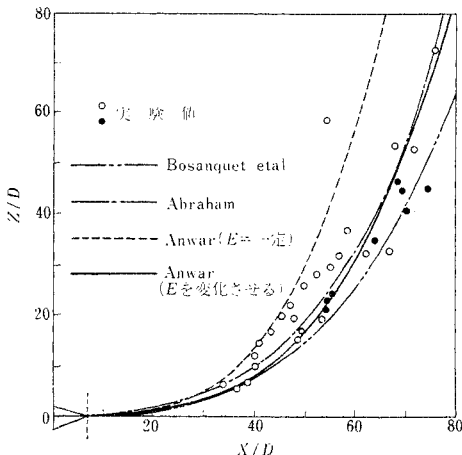


図-10  $Fr_0=20$  の場合に対する plume 軌跡の解析解と実測値との比較

定(=0.08)として求めたものである。このときの実験結果から 図-8 に示すように  $E$  が plume 軸の無次元距離  $(S-S_0)/D$  とともに変化し、 $(S-S_0)/D > 52$  のときはほぼ一定値 0.08 に近づくことが見出されている。図-9 は plume 軸に沿う希釈率について、 $E$ :一定の場合と 図-8 のように  $E$  を変化した場合の比較を示したものである<sup>47)</sup>。 $Fr_0 < 10$  のとき、両者はほとんど一致するが、 $Fr_0 > 10$  の範囲では後者の方が軸線長がより長くなる。

図-10 は、 $Fr_0$  を一定としたときの plume の軌跡を示したものである。図中、Bosanquet et al<sup>48)</sup>、Abraham、Anwar の理論値と Syrkin et al<sup>49)</sup>、Cederwall<sup>49)</sup> の実験値が対比較されている。図から、 $E$  の変化を考慮した理論解がよい結果を与えるようである。図中の Abraham による解は、放出口付近で plume は噴流の挙動を示し、水面付近では浮力作用が卓越すると想定して plume 軸に沿う  $E$  の変化を考慮している。この仮定に基づく  $E$  の変化は 図-8 に示した実験値とは完全に一致していない。なお、軸方向流速分布も  $E$  を変える方がよいことは 図-11 で見られる通りである。

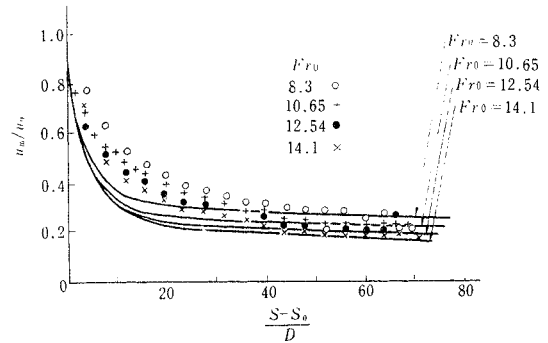


図-11 Plume 軸に沿う流速分布

以上のことから、 $Fr_0 < 10$  のときは、ポテンシャル・コア領域の終端を過ぎるとただちに軸線が上方に曲り始め、以後  $E$  は plume の全領域において一定(=0.082)と取り扱っても十分であるが、 $Fr_0 > 10$  では  $E$  を plume の各断面で変化させるような取り扱いが必要であることが確認された。

別に、Hirst<sup>50)</sup> は、Abraham ならび Anwar による同一の式系から出発しているが、周囲流体からの連行を表わす特性式として、エネルギー保存式と質量方程式とを組み合わせた連行加入係数を用いている。式形は

$$E = \left( a_1 + \frac{a_2}{FrL} \sin \theta \right) u_m b \dots \dots \dots (29)$$

となり、Fox の式 (28) と類似している(鉛直 plume に対しては  $\sin \theta = 1.0$  となる)。ここに、 $a_1 = 6I$ 、 $a_2 = 2\lambda^2 - (3\lambda^2/[\lambda^2 + 1])$ 、 $FrL$ : 局所なフルード数、 $I$  は、 $\int_0^\infty u \frac{\partial \{r \langle u' \rangle\}}{\partial r} dr = I u_m^3 b$  と設定したときの係数値。



式 (29) における 2 つの係数  $a_1, a_2$  は一定として設定している。すなわち,  $a_1$  は噴流に関する Albertson et al のデータから,  $a_1=0.057$  を採用している。一方,  $a_2$  の項は  $F_{rL}$  の小さい値に対して重要になることから,  $\lambda=1.16$  として  $a_2=0.97$  を得ている。

この方法で求めた結果は, 前述の Abraham, Anwar による結果と比較的良好な一致を示している。

(4) 安定な密度勾配をもつ流体内の plume

この場合の plume は, 放出口の鉛直上方のある深さのところでは上昇運動を停止し, 水平方向に移動して広がるようになる (図-12 参照)。この平衡面付近で plume の鉛直束は高さとともに減少するのはもちろんであるが, Priestly-Ball<sup>37)</sup>, Morton<sup>39)</sup> は放出口から平衡面まで鉛直束一定として理論解を求めているので, 平衡面で物質濃度が無限大になるか, 噴流幅が無限大になるという矛盾がある。この方面の修正が必要であるが, 最近 Hirst<sup>50)</sup>, Abraham-Eysink<sup>51)</sup> はこの面付近で物質の鉛直束が有限におさまるように, plume の上昇中は周囲流体の正の連行を, 水平拡散流では負の連行を想定するような近似解を示している。このように, 正・負の連行に分割して考えるとき, 両者の遷移領域の位置は次の条件を満足しなければならない。

$$z = z_t \text{ で } Q' = 0 \text{ (連行加入量が零)}$$

ここに,  $z_t$  は遷移鉛直座標である。

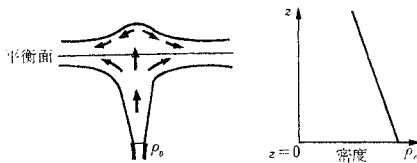


図-12 Plume の模式図

正の連行領域は, いままでの取り扱いでよいが, 負の領域では新たな仮定が必要で, この点に関して Abraham-Eysink は plume の広がり放出口からの距離に比例すると仮定して近似的な理論展開を行っている。

しかしこの扱いは, 負の連行領域における厳密な展開を与えたものではなく今後の一層の検討を要する問題である。

(5) 水平流れの場の中の plume

この場合の plume は平均場の流れのために強く水平方向に曲げられるが, 希釈混合については初期, 中間期, 最終期に分けて考えるのが便利である。

a) 初期の段階

この段階では, 平均場と plume との速度差が混合を支配するであろうと考えて, Fan<sup>52)</sup> は, 混合が両者のベ

クトル速度差に比例するものとし, さらに plume flux に作用する平均場流れの“抗力”によって軸線の曲りを求めている。この解析では連行係数  $E$  と抗力係数  $C_d$  が実験によって定められるものとしているが, この手法では解析解が得られないので,  $E$  と  $C_d$  の多くの組み合わせについて数値解を求め, 実験値と対比するという面倒な手続きをふまねばならない。

Slawson-Csanady<sup>53)</sup> は別にこの段階でも混合は plume と周囲流体の密度差による放出水自身の乱れによるものとし, 浮力による鉛直方向流速に比例した連行が発生するものと考えた。これによれば, plume の平均径路  $z(x)$  は

$$z/l = c(x/l)^{2/3} \dots \dots \dots (30)$$

となる。ここに,

$$c = (3/2E^2)^{1/3} : \text{一定, } l = F/U^3 (= D_0 g \cdot 4\rho_0/\rho U^3),$$

$U$ : 平均場の流速

首藤<sup>54)</sup> も同様な考えに基づいて解析を試み, 実験によって  $E$  を求めた。これによれば,

径路, 希釈率, 幅から,  $E=0.33$

厚さから,  $E=0.17$

としているがこの値は Fan の 0.4~0.5 に比べて小さいが, 静止流体内での値  $E=0.08$  よりはるかに大きい。

放出流速が場の流れに比して大きい放出口付近では, 速度差を  $u_m$  とし,  $Q' = E \cdot 2\pi b \cdot u_m$  とおいて  $E=0.06$  といわれているが, 放出口から十分離れたところでは噴流体と周囲流体間の水平速度差は消失し, 鉛直速度成分  $V$  のみが残るので,  $Q' = E \cdot 2\pi b \cdot V$  となり,  $E=0.5$  の程度となる。

b) 中間の段階

この段階では plume 固有の特性は無視できて, ほとんど, 平均場の乱れの構造で決まってしまう。Slawson-Csanady<sup>53)</sup> による慣性小領域の乱子モデルによる解がある。このときの連行速度は  $c_1 \epsilon^{1/3} R^{1/3}$  ( $R$ : plume の径,  $\epsilon$ : エネルギー逸散率) で与えている。

c) 最終段階

ここでは energy containing eddies が混合を支配し, 連行速度は  $c_2 v(L/R)$  ( $v$ :  $r \cdot m \cdot s$  変動速度,  $L$ : 拡散の長さのスケール) であり, plume 径  $R$  が大きくなるにつれて減少する。

林<sup>55)</sup> は水平一様な流れの場の中に放出された plume が水面に近づくと二条に分岐する現象を実験的に確かめ, これは上昇する plume が水平流れによって曲げられていく過程において plume は一対の渦 (pair vortex) をもつことに起因するとし, 双渦の運動方程式からこの現象の発生原因を明らかにしようと試みた。

これに関連して煙突から出る plume の変形について詳しい検討がなされている。まず, 放出直後は円形断面

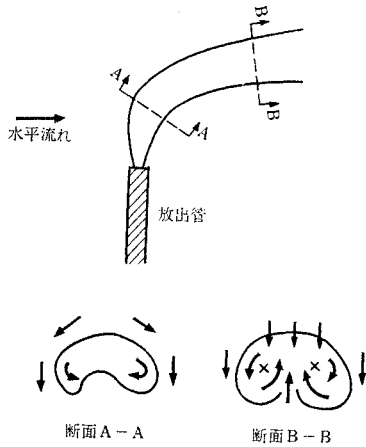


図-13 Plume の断面図

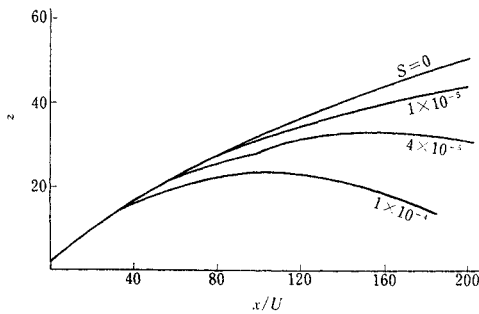


図-14 一様な流体内の plume の軌跡

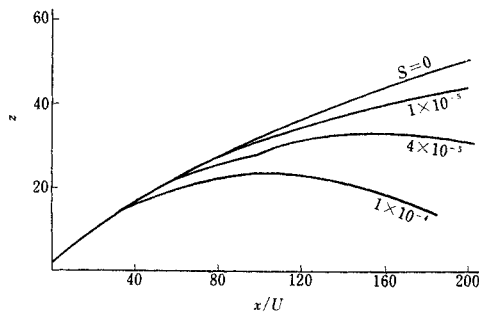


図-15 Plume の軌跡におよぼす密度成層の影響

であった plume は、移行するにつれて図-13 のようなインゲン豆のような形に変形し、平均流で bent over されるにつれて pair vortex が作られる。Schwarz-Tulin<sup>56)</sup> はこの双渦効果も含み plume の拡散の解析を行い、実験値と良好な一致がえられたという。たとえば、plume 軸線は

$$(z/l) = (3/2 E)^{2/3} (x/l)^{2/3} \dots \dots \dots (31)$$

で与えられ、形式的には式 (30) と同様の解が得られた。図-14 に Schwarz-Tulin, Slawson-Csanady の両理論曲線と実験値の比較を示す。

また、安定した層密度勾配 (S) のある場での双渦の運

動状態が図-15 のように求められている。

参考文献

- 1) Schijf, J.B. and Schönfeld, J.C. : Theoretical consideration on the motion of salt and fresh water, Proc. Minnesota International Hydraulic Convention, p. 321, IAHR & ASGE, Sept. 1953.
- 2) Farmer, H.G. and Morgan, G.W. : The salt wedge, Proc. 3rd Conf. on Coastal Eng., 1952.
- 3) 浜田徳一：河口密度流の 2, 3 の性質について、不等質の流れのシンポジウム、日本学術会議、昭和 44 年。
- 4) Prichard, D.W. : A study of the salt balance in a coastal plain estuary, Jour. Mar. Res., Vol. 13, p. 133, 1954.  
Prichard D.W. : The dynamic structure of a coastal plain estuary, Jour. Mar. Res. Vol. 15, p. 33, 1956.
- 5) Rattray, M. Jr. and Hansen, D.V. : A similarity solution for circulation in an estuary, Jour. Mar. Res., Vol. 20, p. 121, 1962.
- 6) Arons, A.B. and Stommel, H. : A mixing theory of tidal flushing, Trans. AGU., Vol. 32, No. 3., pp. 419 ~421, 1951.
- 7) Bowden, K.F. : Horizontal mixing in the sea due to a shearing current, J. Fluid Mech, Vol. 21, pp. 83 ~95, 1965.
- 8) Keulegan, G.H. : Formation characteristics of arrested saline wedge, Nat. Bureau of Stand., Report 5482, Oct. 1957.
- 9) 浜田徳一：新潟港技術調査報告、新潟港技術調査委員会 1948.
- 10) 浜田徳一：河口港としての石巻港の研究、運輸省港湾技術研究所、1950.
- 11) Murota, A. : Some hydraulic studies on estuaries, Tech. Reports of the Osaka Univ., Vol. 5, No. 175, 1956.
- 12) 本間 仁・堀川清司・影山正樹・鮮干 澈：相模川河口について、第 8 回海岸工学講演会講演集、1961.
- 13) 中村 宏・稲松敏夫：神通川河口の塩水くさびについて、第 13 回海岸工学講演会講演集、1966.
- 14) 福島久雄：石狩川河口の観測、日本海洋学会誌、1 巻、1 号、1942.
- 15) 福島久雄・八敏 功・高橋 将・大谷守正：石狩川河口の研究 (1)~(5)、第 11 回~第 16 回海岸工学講演会講演集、1964~1969.
- 16) Takano, K. : On the salinity and velocity distributions off the mouth of a river, Jour. Oceanogr. Soc. Japan. Vol. 10, No. 3, pp. 92~98, 1954.
- 17) Kashiwamura, M. and Yoshida, S. : Outflow pattern of fresh water issued from a river mouth, Coastal Eng. in Japan, Vol. 10, 1967.
- 18) 柏村正和・吉田静男：河口の flow pattern について、第 12 回水理講演会講演集、1968.
- 19) 柏村正和・吉田静男：河口流の実態、第 17 回海岸工学講演会論文集、1970.
- 20) Iwasaki, T. : On the shear stress at the interface and its effects in the stratified flow, Proc. 9th Conf. on Coastal Engineering, A.S.C.E., 1964.
- 21) 和田 明：大きな河について、沿岸海洋研究ノート、Vol. 12, No.1, 1974.
- 22) Wright, L.D. and Coleman, J.M. : Effluent expansion and interfacial mixing in the pressure of a salt wedge, Mississippi River Delta, Jour. Geoph. Res., Vol. 76, No. 36, 1971.

- 23) Stommel, H. and Farmer, H.G. : Abrupt change in width in two-layer open channel flow, *Jour. Mar. Res.*, Vol. 11, No. 2, 1952.
- 24) 浜田徳一 : 内部ジャンプについて, 第 5 回海岸工学講演会講演集, pp. 7~11, 1958.
- 25) Shi-igai, H. : Some aspects and experiments on the density current, *Trans. JSCE*, No. 83, July, 1962.
- 26) 早川典生・Stefan, H. : 混合を伴う内部ジャンプについて, 第 17 回水理講演会講演集, 1973.
- 27) 岩崎敏夫 : 密度流の諸問題, 水工学に関する 夏期研修会 講義集, 1966.
- 28) Hamada, T. : On the control section of two-layer flows, 13th, Congress of IAHR, Vol. 3, 1969.
- 29) Stefan, H. and Hayakawa, N. : Mixing induced by an internal jump, *Water Resources Bulletin*, Vol. 8, No. 3, 1972.
- 30) 岩崎敏夫・上原忠保 : インターナルジャンプの変動スペクトルに関する研究, 第 18 回海岸工学講演会 論文集, 1971.
- 31) Rigger, B.P. : Density induced return in outlet channel, *Proc. ASCE*, HY 2, Feb. 1970.
- 32) Pederson, F.B. : Gradually varying two-layer stratified flow, *Proc. ASCE*, HY 1, Jan. 1972.
- 33) 室田 明・神田 徹 : 水門からの海水侵入に関する基礎的研究, 第 11 回海岸工学講演会講演集, 1964.
- 34) Keulegan, G.H. : The motion of saline fronts in still water, *Nat. Bur. Stand. Report* 5831, Apr. 1958.
- 35) Daly, B.J. and Pracht, W.E. : Numerical study of density current surge, *Phy. of Fluids*, Vol. 11, No. 1, p. 15, 1968.
- 36) Young, J.A. and Hirt, C.W. : Numerical calculation of internal wave motions, *J. Fluid Mech.*, Vol. 56, Part 2, 1972
- 37) Priestley, C.H.B. and Ball, F.K. : Continuous convection from an isolated source of heat, *Quarterly Journ. of the Roy. Meteorolog. Soc.*, 81, No. 348, pp. 144~157, 1955.
- 38) Morton, B.R., Taylor, G. and Turner, J.S. : Turbulent gravitational convection from maintained and instantaneous sources, *Proc. Roy. Soc. Ser. A*, 234, 1956.
- 39) Morton, B.R. : Forced plumes, *Jour. Fluid Mech.*, 5, part I, pp. 151~163, 1959.
- 40) Hino, M. : Forced plumes in a stably stratified fluid, *Trans. JSCE*, 86, 1962.
- 41) Morton, B.R. : The choice of conservation equations for plume models, *Jour. Geoph. Res.*, Vol. 76, No. 30, 1971.
- 42) Hayashi, T. and Ito, M. : Diffusion of effluent discharging vertically into stagnant sea water, *Coastal Eng. in Japan*, Vol. 17, 1974.
- 43) Fox, D.G. : Forced plume in a stratified fluid, *Jour. Geophy. Res.*, Vol. 75, No. 33, 1970.
- 44) Abranam, G. : Jet diffusion in stagnant ambient fluid, *Delft Hydraulics Lab. Publication*, No. 29, 1963.
- 45) Abraham, G. : Horizontal jets in stagnant fluid of other density, *Proc. ASCE*, HY 4, pp. 139~154, 1965.
- 46) Anwar, H.O. : Experiment on an effluent discharging from a slot into stationary on slow moving fluid of greater density, *Jour. Hydraulics Res.*, No. 47, pp. 411~431, 1969.
- 47) Anwar, H.O. : Measurements on horizontal buoyant jet in calm ambient fluid with theory based on variable coefficient of entrainment determined experimentally, *La Houille Blanche*, No. 4, 1972.
- 48) Bosanquet, C.H., Horn, G. and Thring, M.W. : The effect of density differences on the path of jets, *Proc. Roy. Soc., A*, Vol. 263, pp. 340~352, 1961.
- 49) Cederwall, K. : Hydraulics of marine water disposal, *Sweden Report No. 42, Hydraulic Div., Chalmers Inst. of Technology, Göteborg*.
- 50) Hirst, E. : Buoyant jets discharged into quiescent stratified ambients, *Jour. of Geophy. Res.*, 76, pp. 7375~7384, 1971.
- 51) Abraham, G. and Eysink, W.H. : Jets issuing into fluids with a density gradient, *J. Hydr. Res.*, Vol. 7, No. 2, pp. 145~176, 1969.
- 52) Loh-Nien Fan : Turbulent buoyant jets into stratified or flowing ambient fluid, *California Instit. of Technology, Report No. KH-R-15*, 1967.
- 53) Slawson, P.R. and Csanady, G.T. : On the mean path of buoyant, bent-over chimney plume, *J. Fluid Mech.*, Vol. 28, Part 2, 1967.
- 54) Shuto, N. : Buoyant plume in a cross stream, *Coastal Eng., in Japan*, Vol. 14, pp. 163~173, 1971.
- 55) 林 泰造・竹中 節 : 廃液浮上ブリュームの分岐拡散の現象について, 第 18 回海岸工学講演会論文集, pp. 305~312, 1971.
- 56) Schwarz, J. and Tulin, M.P. : Chimney plumes in neutral and stable surroundings, *Atmospheric Environment*, Vol. 6, pp. 19~35, 1972.

## 第4編 地下密度流

### 1. はじめに

地下水の密度流現象は海岸地下水を中心として Bardon-Ghyben, Herzberg らにより先駆的な研究が行われたが、さらに Nomitsu, Toyohara, Kamimoto<sup>1)</sup>(1927) によって解析的な手法による研究が行われ、その定常流としての特性が初めて明らかにされた。その後、地下水の過剰揚水による地盤沈下や海水浸透の問題が深刻化するとともに、浸透機構についての基礎的研究や recharge well による地下水の涵養などの応用的研究がしだいに活発となって行った。また最近では、新しい水資源の開発方式の一つとして河口湖開発の計画が各所で検討されるにつれ、湖内の水質維持や周辺地下水の塩害防止のためのさらに詳細な研究が進められている。

地下密度流の概念からいえば、上記海岸地下水のような淡・塩密度流のみならず、温泉のまわりの熱対流、土壌内の不飽和浸透流あるいは油井、および注入井のために生ずる油層内の流れなども含まれる。また、境界面が不安定となる条件や、その結果として生ずる混合、拡散の問題、あるいはいくつかの成分からなる気相および液相が媒質内で共存して流れたり、熱力学的な条件で互いに他へ遷移したりする現象も対象となる。したがって、地下密度流の現象は土木工学、土質工学、採油工学、化学工学などの各分野から注目されており、現象の基礎概念や解析手法についての活発な討議が共通の場で行われるようになってきている。たとえば、1969年には Haifa (Israel) で、1971年には Calgary (Canada) で、また1972年には Guelph (Canada) で多孔媒質流の国際シンポジウムが開催され、それぞれの分野間の情報交換や先導的な研究成果の発表が行われた。

このような情報交換や新しい知見をいかに土木工学の分野に取り入れていくかは今後の課題であり、また研究の進展もこの方向に沿うことが予想される。ここでは、比較的土木工学の分野に関連の深いものだけを取りあげ、地下密度流の解析的手法について概説する。

### 2. 準一様定常流

地下密度流の基礎方程式から具体的な境界条件、初期条件を満足する厳密解が導かれる場合はきわめてまれである。それは方程式の非線型性、従属変数の増加、境界

条件の複雑さなどによるものである。しかし、鉛直流速が水平流速に比し無視できる場合には、層内の圧力は静水圧分布をなし、鉛直断面内では水平流速は一樣であると見なされるので、解析的な解の得られる場合が少なくない。このような条件を満足する流れを準一様な流れとよぶ。

図-1 に示す流れの領域を考え、透水層は homogeneous であり、Darcy 法則に従うとすれば、上述の仮定により、基礎方程式は次のように簡略化して表わされる。

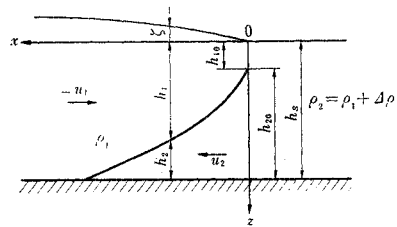


図-1

$$\left. \begin{aligned} u_1 &= \frac{Q_1}{h_1 + \zeta} = -K \frac{d\zeta}{dx} \\ u_2 &= \frac{Q_2}{h_2} = -K \left\{ (1 - \epsilon) \frac{d\zeta}{dx} + \epsilon \frac{dh_2}{dx} \right\} \end{aligned} \right\} \dots (1)$$

ここに、

	上層	下層
水 深	$\zeta + h_1$	$h_2$
密 度	$\rho_1$	$\rho_2$
流 速	$u_1$	$u_2$
海岸線水深	$h_{10}$	$h_{20}$
流 量	$Q_1$	$Q_2$
透 水 係 数	$K$	
無次元密度差	$\epsilon = \Delta\rho/\rho_1$	
海 の 水 深	$h_s = h_1 + h_2$	

である。

#### (1) 塩水くさび

海岸付近では、上層を陸側からの淡水 ( $Q_1 = Q_L$ ) が流れ、下層では海側から塩水がくさび状に浸入し、定常状態では静止している。

式 (1) の第2式において  $Q_2 = 0$  とおき、その二次以上の微小項を省略すれば

$$\zeta = \epsilon h_1 \dots \dots \dots (2)$$

が導びかれる。この関係を Herzberg の条件式とよんでいる。

式 (2) を式 (1) の第1式に代入すれば、境界面形状およびくさびの長さ  $L$  は直ちに求められ、次式で示さ

れる。

$$\frac{h_1^2}{2} = \frac{|QL|}{\varepsilon(1+\varepsilon)K} x, \quad L = \frac{K\varepsilon(1+\varepsilon)h_s^2}{2|QL|} \dots(3)$$

(2) 海岸線における鉛直流速効果

上記の解では、 $x=0$  で  $h_1=0$ 、すなわち上層流速  $u_1$  が無限大となる不都合が生ずる。また、現実の流れでも図-1 で示す  $h_{10}$  が存在する。この原因は、海岸線付近では境界面の勾配がきつくなり、鉛直流速が無視できないにもかかわらず準一様流の仮定を適用しているためである。Henry<sup>2)</sup> は、Hamel<sup>3)</sup> が地下水流に適用したホドグラフ法(後述)を用い、二次元流としての厳密な解析を行っており、また Glover<sup>4)</sup> は類似の境界条件に対する近似解を与えている。一方、Rumer & Harleman<sup>5)</sup> は有限域の場合に対し、準一様流の仮定から出発して近似解を求め、実験と比較して良好な結果を得ている。野満<sup>6)</sup> も(1)で述べた先駆的研究に引続いて、海岸線付近での鉛直流速効果の検討を行った。

いま、淡水層の任意点の鉛直流速を  $w_1$  とすれば、連続の式より

$$w_1 = - \int_{-\zeta}^z \frac{\partial u_1}{\partial x} dz + [w_1]_{z=-\zeta} \dots(4)$$

となり、式(1)の第1式および(2)より  $\partial u_1 / \partial x$  を求め、上式に代入して積分すれば、 $w_1$  を次式のように示すことができる。

$$w_1 = - \frac{QL^2}{K} \frac{1+\varepsilon}{\varepsilon} \frac{z+\zeta}{(h_1+\zeta)^3} \dots(5)$$

ここに、自由表面上での鉛直流速  $[w_1]_{z=-\zeta}$  は小さいとして無視する。

上式と鉛直方向の Darcy 法則から  $w_1$  を消去し、さらに淡水層内での圧力分布を求めれば、

$$p_1 = \rho_1 g(z+\zeta) + \frac{\rho_1 g QL^2}{2K^2} \frac{1+\varepsilon}{\varepsilon} \frac{(z+\zeta)^2}{(h_1+\zeta)^3} \dots(6)$$

となる。ここで、 $x=0, z=h_{10}$  で淡水層側から測った圧力の強さと、海側から測ったそれとが等しいという条件を適用すれば、海岸線における上層水深  $h_{10}$  は次式のように示される。

$$h_{10} = \frac{|QL|}{K} \frac{1}{\varepsilon} \sqrt{\frac{1+\varepsilon}{2}} = \frac{|QL|}{\sqrt{2\varepsilon}K} \dots(7)$$

また、 $h_{10}$  の存在を考慮すれば境界面形状は次式のように示される。

$$\frac{h_1^2}{2} = \frac{|QL|}{\varepsilon(1+\varepsilon)K} x + \frac{h_{10}^2}{2} \dots(8)$$

式(7)を考慮しながら式(8)を無次元化したものが次式である。

$$\frac{\varepsilon K}{|QL|} h_1 = \left( 2 \frac{\varepsilon K}{|QL|} x + 0.5 \right)^{1/2} \dots(9)$$

図-2 は、式(9)の解と Henry および Rumer &

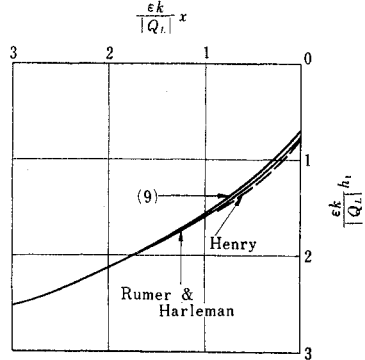


図-2 境界面形状についての各解の比較

Harleman の解の比較を行ったもので、いずれの解も良く似た結果を与えることが知れる。

(3) 定常二層流

図-3 のように淡水湖と海とが幅  $L$  の透水層によって連絡している場合、湖面高  $\zeta$  が  $\varepsilon h_s$  より低くなれば、塩水くさびは湖側に浸入し二層流が発達する。嶋<sup>7)</sup> はこのような流れに対し次のような取扱いを行った。

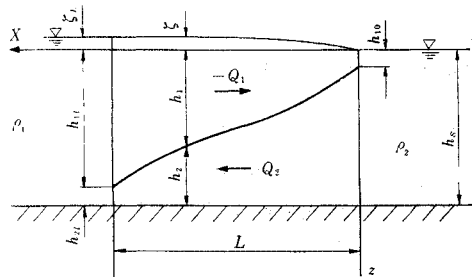


図-3 定常二層流

式(1)において、 $\zeta$  の流量に対する寄与は  $h_1$  に比して小さいとし、また  $\varepsilon$  の二次以上の微小項を無視する。さらに  $h_s = h_1 + h_2$  を考慮することにより、境界面形状ならびに自由表面形状を規定する二つの無次元化された微分方程式が次のように導かれる。

$$\frac{d\eta}{d\xi} = (1-\lambda)\mu \frac{1-\lambda-\eta}{(1-\eta)\eta} \dots(10)$$

$$\frac{d\xi}{d\eta} = \frac{\varepsilon(1-\eta)}{1-(1-\lambda)\eta} \dots(11)$$

ここに

$$\left. \begin{aligned} \lambda &= -\frac{Q_2}{Q_1}, \quad \mu = \frac{-Q_1 L}{K\varepsilon h_s^2} \\ \xi &= \frac{x}{L}, \quad \eta = \frac{h_1}{h_s}, \quad \zeta = \frac{\zeta}{h_s} \end{aligned} \right\} \dots(12)$$

である。

式(10)および(11)を積分し、簡単のため境界条件

を

$$\left. \begin{aligned} \xi=0; \eta=0, \bar{\zeta}=0 \\ \xi=1; \eta=1, \bar{\zeta}=\frac{\zeta L}{h_s}=a \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(13)$$

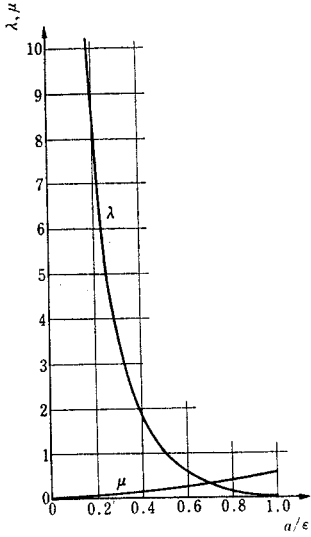


図-4 a/ε-λ, μ

とおけば、二層流の定常特性を表わす二つのパラメーターλおよびμ（上下層の流量比および無次元上層流量）がa/εの関数として示されることになる。また、λおよびμが指定されれば、境界面形状および自由表面形状を求めることができる。二層流はa/ε<1で発達し、a/εの値に応じてλおよびμの値は図-4のようになる。

また、岩佐<sup>9)</sup>らは Radial flow について考察を行い、二重管の井戸でストレーナーの位置を適当に定めることにより、塩水と淡水の分離取水の問題を解析した。

(4) 降雨による塩水の遮断効果<sup>9),10)</sup>

雨が地中に浸透し、地下水面まで達すると、降雨の補給が十分であれば地下水面は上方に盛り上がり、雨水は淡水湖側へはもちろん海側に向かって流出する。このとき、図-5に示すように、塩水くさびが地下水面の最高となる断面x<sub>m</sub>より海側のx=lの位置に止まっていれば、たとえ湖面が海面より低くても塩水は降雨によって遮断されることになる。

実際の降雨は連続的ではないが、ここでは平均的に考

えることとし、また降雨量のうち蒸発あるいは表面流出等の損失は除き地下水面に到達する単位時間あたりの有効降雨量をNとする。

0 < x < l では連続の式は

$$\frac{d}{dx} \{u_1(h_1+\zeta)\} = N \dots\dots\dots(14)$$

で示される。式(1)および(2)を用いてu<sub>1</sub>およびh<sub>1</sub>を消去し、上式を積分する。さらに、境界条件x=0, ζ=0とx=l, ζ=εh<sub>s</sub>を代入すれば次式が求められる。

$$\zeta^2 = \frac{N\epsilon}{K(1+\epsilon)}(l-x)x + \frac{\epsilon^2 h_s^2}{l} x \dots\dots\dots(15)$$

一方、l < x < L では、単一流であるので、連続の式は

$$\frac{d(uh)}{dx} = N \dots\dots\dots(16)$$

となる。

Darcy 法則を用いてuを消去し上式を積分する。さらに、境界条件x=l, h=(1+ε)h<sub>s</sub>とx=L, h=h<sub>L</sub>を代入すれば次式が求められる。

$$h^2 = (1+\epsilon)^2 h_s^2 + \frac{N}{K}(L-x)(x-l) - \frac{(1+\epsilon)^2 h_s^2 - h_L^2}{L-l}(x-l) \dots\dots\dots(17)$$

塩水くさびが降雨で遮断される限界はlがx<sub>m</sub>と一致する時である。したがって、式(15)および(17)を微分して零とおき、それぞれでx<sub>m</sub>=lとおき、さらに両式からlを消去すれば、次式のような遮断限界の条件式が導かれる。

$$\sqrt{\frac{N}{K}} \frac{L}{h_s} > \sqrt{(1+\epsilon)^2 - \left(\frac{h_L}{h_s}\right)^2} + \sqrt{\epsilon(1+\epsilon)} \dots\dots\dots(18)$$

ここに、L: 透水層の長さ、h<sub>s</sub>: 海の水深、h<sub>L</sub>: 淡水湖の水深である。

3. 二次元定常流

一般に、地下密度流に現われる領域の境界は、①等ポテンシャル面、②不浸透面、③浸出面、④自由表面および⑤二層境界面の5種類が適宜組合わされて構成されている。ここに⑤の二層境界面の存在が、一般の浸透流に比べて地下密度流の異なる点で、この境界面が未知であることが地下密度流の解析を困難にしているといえる。ここでは二層のうち一方の流体は静止していて、他方の流体は流動し、その流れはDarcyの法則に従い、また二層境界面の拡散はなく、地盤は等方性であるとして、この場合の二次元定常の地下密度流について、複素ポテンシャル理論を適用した解析手法の主なものをあげてみよう。

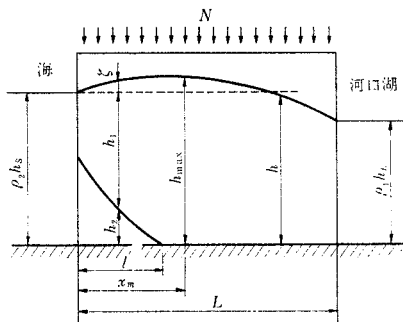


図-5 降雨補給のある場合の塩水くさび

(1) ホドグラフ法

Helmholtz や Kirchhoff<sup>11)</sup> によって二次元の非圧縮、非回転の不連続流に適用されたこの手法は、Hamel<sup>12)</sup> により初めて地下水の自由表面および浸出面をもつ流れに導入された。その後、Dachler<sup>13)</sup>、Davison<sup>14)</sup>、Muskat<sup>15)</sup>、Vedernikov<sup>16)</sup>、Polubarinova-Kochina<sup>17)</sup> ら多くの人々はこの手法を用い地下水流の各種の問題を解析した。Henry<sup>18)</sup>、Bear & Dagan<sup>19)</sup>、de Josselin de Jong<sup>20)</sup> らはさらに地下密度流の境界面形状の解析にこの手法を拡張した。

いま、物理面を  $z=x+iy$ 、複素ポテンシャル面を  $\zeta=\phi+i\Psi$ 、Darcy 的平均流速の  $x$  および  $y$  の正方向の成分を  $q_x=-\partial\phi/\partial x=-\partial\Psi/\partial y$  および  $q_y=-\partial\phi/\partial y=\partial\Psi/\partial x$ 、Darcy 単位の透水係数を  $k$ 、流れている流体の単位重量を  $\gamma$ 、その粘性係数を  $\mu$ 、静止流体の単位重量を  $\gamma'$  とし、

$$K=\left(\frac{\gamma}{\mu}\right)k, \quad K'=\left(\frac{\gamma'}{\mu}\right)K,$$

ここに

$$d\gamma=(\gamma'-\gamma), \quad \varepsilon=\frac{d\gamma}{\gamma} \dots\dots\dots(19)$$

とおき、任意点の圧力  $p$  とすれば、Darcy 則より

$$\left. \begin{aligned} q_x &= -K \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{p}{\gamma} + y \right) \\ q_y &= -K \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{p}{\gamma} + y \right) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(20)$$

$$\phi = K \left\{ \left( \frac{p}{\gamma} + y \right) \right\} + \text{const.} \dots\dots\dots(21)$$

で表わされる。いまホドグラフ面  $w=q_x+iq_y$  について、前述の5種類の境界面を考えてみよう。

まず、①等ポテンシャル面と②不浸透面は、それが直線の場合は、速度の方向がその面上で一定であることから、 $w$  面では原点を通る直線となる。また③浸出面は、その面上で  $p=0$ 、したがって式(21)より  $\phi=Ky+\text{const.}$  であるから、浸出面  $S$  にそう微分から

$$\begin{aligned} \frac{d\phi}{ds} &= K \frac{dy}{ds} = K \cos \beta_{sy} \\ &= \frac{\partial\phi}{\partial x} \cos \beta_{sx} + \frac{\partial\phi}{\partial y} \cos \beta_{sy} \end{aligned}$$

であり、ここに、 $\beta_{sy}, \beta_{sx}$  はそれぞれ  $S$  面と  $y$  軸、 $x$  軸とのなす角である。

$$\therefore q_y = q_x \tan(\beta_{sx} - 90^\circ) - K \dots\dots\dots(22)$$

すなわち浸出面が直線の場合には、 $w$  面は浸出面に直角な原点を通らない直線となる。

次に④自由表面では、 $p=0$ 、したがって式(21)より

$$\phi - Ky = \text{const.}$$

いま  $S'$  を自由表面にそって、流れの方向にとれば、

$$\frac{\partial\phi}{\partial s'} - K \frac{\partial y}{\partial s'} = 0$$

あるいは

$$\left( \frac{\partial\phi}{\partial s'} \right)^2 - K \left( \frac{\partial\phi}{\partial s'} \right) \left( \frac{\partial y}{\partial s'} \right) = 0$$

$$\therefore q_x^2 + q_y^2 + Kq_y = 0,$$

あるいは

$$q_x^2 + \left( q_y + \frac{K}{2} \right)^2 = \left( \frac{K}{2} \right)^2$$

したがって、 $w$  面では中心  $(0, -K/2)$ 、半径  $K/2$  の円となる。

次に⑤二層境界面では、圧力を静止流体側とすれば、式(21)において  $p=r'(H-y)$ 、(ここに  $H$  は静止流体側の水深で const. である) を入れれば、

$$\phi + K'y = \text{const.} \dots\dots\dots(24)$$

したがって、式(23)と同様にして

$$q_x^2 + q_y^2 - K'q_y = 0,$$

あるいは

$$q_x^2 + \left( q_y - \frac{K'}{2} \right)^2 = \left( \frac{K'}{2} \right)^2$$

すなわち、 $w$  面では中心  $(0, K'/2)$ 、半径  $K'/2$  の円となる。いま、 $w$  の複素共やく面  $\bar{w}=q_x-ig_y$  を考えると

$$\bar{w} = -\frac{d\zeta}{dz} \dots\dots\dots(26)$$

すなわち、 $\bar{w}$  は正則関数である。

さて、ホドグラフ法の一般的な手順を図-6を例にとりてのべると、まず、前述のように、 $z$  面の5種類の境界をホドグラフ面に表わし、ついでこれを  $x$  軸について反転することによって、 $\bar{w}$  面、図-6 (b) を求める。

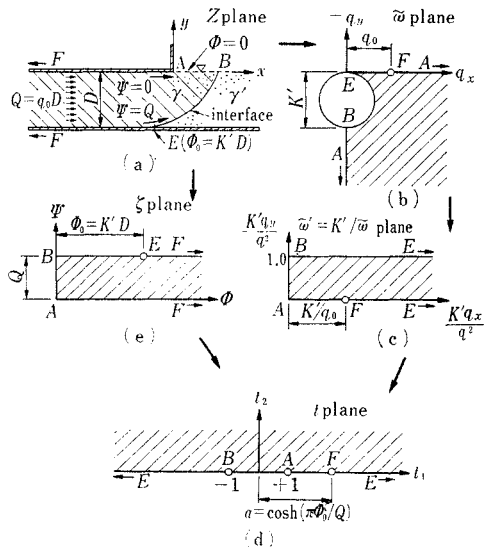


図-6 ホドグラフ法

次に、 $\tilde{w}$  を  $\tilde{w}' = K'/\tilde{w} = K'\{(q_x/q^2) + i(q_y/q^2)\}$  の面に写像させると、図-6 (c) となる。すなわち、式 (25) は  $K'q_y/q^2=1$  であるので、 $\tilde{w}$  面の二層境界面の円は  $\tilde{w}'$  面では実軸に平行な直線となり、同様に自由表面も実軸に平行な直線となる。また、 $\tilde{w}$  面で原点を通る直線は  $\tilde{w}'$  面でも直線となる。したがって、直線の不浸透面、直線の等ポテンシャル面、自由表面および二層境界面よりなる  $z$  面に対応する  $\tilde{w}'$  は一般に多角形をなす。次に、 $\zeta$  面は 図-6 (e) となり、この例のように浸出面のない場合は、帯状あるいは長方形となる。したがって、 $\tilde{w}'$  面と  $\zeta$  面をそれぞれ Schwarz-Christoffel の定理により 図-6 (d) の  $t$  平面の実軸上に写像させて関連づければよい。この 図-6 中の  $\tilde{w}'$  と  $t$  との変換式および  $\zeta$  と  $t$  との変換式はそれぞれ次のようになる。

$$t = \cosh \pi \tilde{w}', \quad \zeta = \frac{Q}{\pi} \cosh^{-1} \left\{ \frac{(at-1)}{(a-t)} \right\} \dots (27)$$

ここに、 $a = \cosh(\pi \phi_0/Q)$  である。

したがって、式 (26) よりえられる、

$$z = \int \frac{\tilde{w}'(t)}{K'} \frac{d\zeta}{dt} dt + \text{const.} \dots (28)$$

の式に式 (27) を代入すれば、 $z$  と  $t$  との関係が求まり、式 (27) とから  $z$  と  $\zeta$  とを関連づけることができ、問題を解決できる。この場合二層境界面 EB は、 $t$  を  $-\infty \sim -1$  の範囲で積分して、 $z$  を求めることにより決定できる。なお、浸出面をもつ場合にはこの手段では解決困難で、ホドグラフ面について種々の手段が考えられている。

(2) Zhukovsky 関数の応用

$$\left. \begin{aligned} \varrho_1 &= \phi + K'y, \quad \varrho_2 = \psi - K'x \\ \varrho_2 &= \varrho_1 + i\varrho_2 = \zeta - iK'z \end{aligned} \right\} \dots (29)$$

で定義される Zhukovsky 関数を考えると、二層境界面と水平な等ポテンシャル面は、式 (24) および式 (29) の  $\varrho_1$  の式より、 $\varrho_1 = \text{const.}$  となり、また鉛直固体壁は、これにそって  $\psi, x$  が  $\text{const.}$  であるので、式 (29) の  $\varrho_2$  の式より  $\varrho_2 = \text{const.}$  となる。したがって、これらの境界よりなる  $z$  面の流れは  $\varrho$  面の多角形領域の内部に写像されて解析的に有利となる。

一方、浸出面を持たない流れの  $\zeta$  平面は帯状領域あるいは長方形領域で表わされるから、 $\zeta$  面と  $\varrho$  面とを適当な媒介平面  $t$  を導入して結びつけば、 $\zeta$  と  $\varrho$  との関係、さらに  $\zeta$  と  $z$  との関係を求めることができる。Ackermann<sup>21)</sup> らはこの手法を用いて、図-7 の  $H_w=0$  の場合を解き、上田・崎山<sup>22)</sup> は  $H_w \neq 0$  の場合を解き、注水溝による河口貯水池の塩水遮断条件などについて検討した。

図-7 はこの場合の写像関係を示したもので、 $\zeta \sim t$  お

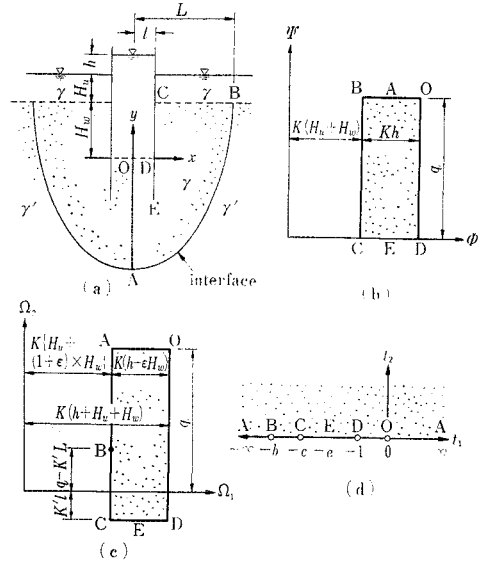


図-7 Zhukovsky 関数による写像

よび  $\varrho \sim t$  の写像関数は Schwarz-Christoffel の定理より、それぞれ次式のようになる。

$$\zeta = A \int \frac{dt}{\sqrt{-b-t}\sqrt{-c-t}\sqrt{-1-t}\sqrt{-t}} + B$$

$$\varrho = M \int \frac{dt}{\sqrt{-c-t}\sqrt{-1-t}\sqrt{-t}} + N$$

したがって、 $\zeta$  面と  $\varrho$  面は  $t$  を媒介平面として関係づけられ、さらに式 (29) より  $\zeta$  面と  $z$  面との関係がえられる。また、崎山<sup>23)</sup>は河口貯水池底面上層地盤内の淡水を二次元溝により取水する場合の塩水混入限界について検討を加え、上田・杉尾<sup>24)</sup>は円形暗渠から海水を取水した場合の淡・塩境界面の低下および円形暗渠から海水飽和地盤中に淡水を注入した場合の境界面形状<sup>25)</sup>の問題を取り上げて検討した。

次に、上田・杉尾<sup>25)</sup>は円形暗渠からの淡水注入による淡・塩境界面について、次のような近似的手法を示した。すなわち、海水飽和地盤中に考えた淡水のポテンシャルは  $K\varepsilon$  の勾配で鉛直上方に減少する。したがって、海水側を鉛直上方に向う淡水の等速平行流に近似的に置きかえて、この流れと暗渠から流出する淡水流れとを重ね合わせて、これによってえられる流れの境界面を淡・塩境界面とするものである。この結果は前述の Zhukovsky 関数による厳密解とよい一致を示している。

(3) 従属変数と独立変数を交換させる方法

ホドグラフ法あるいは Zhukovsky 関数利用の方法では、前述の  $\tilde{w}'$  面あるいは  $\varrho$  面で多角形とならなければ、解析は困難となる。したがって、一般に複雑な境界の浸透領域の解は、 $\phi$  または  $\psi$  に関する Laplace の式の数値解によらねばならない。しかし、地下密度流の



場合、二層境界面は未知であるので浸透領域も確定しない。したがって、 $\phi, \psi$  について解く場合 trial 計算となる。一方、複雑な境界でも浸出面がなければ、その  $\zeta = \phi + i\psi$  面は、一般に長方形をなすから、この領域について数値解析を行うことが、地下密度流の場合有利であると推定される。

いま、 $\phi, \psi$  が  $x, y$  の関数として関数行列式  $J$  が

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial \phi}{\partial x} & \frac{\partial \phi}{\partial y} \\ \frac{\partial \psi}{\partial x} & \frac{\partial \psi}{\partial y} \end{vmatrix} = q_x^2 + q_y^2 \neq 0 \dots\dots\dots(30)$$

の場合は、 $x, y$  は  $\phi, \psi$  の関数として表わされる。したがって、その全微分は

$$\left. \begin{aligned} dx &= \frac{\partial x}{\partial \phi} d\phi + \frac{\partial x}{\partial \psi} d\psi \\ dy &= \frac{\partial y}{\partial \phi} d\phi + \frac{\partial y}{\partial \psi} d\psi \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(31)$$

である。

次に、 $\phi(x, y), \psi(x, y)$  の全微分の式を連立に解いて、 $dx, dy$  を求めれば、

$$\left. \begin{aligned} dx &= \frac{1}{J} \left( \frac{\partial \psi}{\partial y} d\phi - \frac{\partial \phi}{\partial y} d\psi \right) \\ dy &= \frac{1}{J} \left( -\frac{\partial \psi}{\partial x} d\phi + \frac{\partial \phi}{\partial x} d\psi \right) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(32)$$

となり、式 (31) と式 (32) とを比較して、

$$\left. \begin{aligned} \frac{q_x}{J} &= -\frac{\partial x}{\partial \phi} = -\frac{\partial y}{\partial \psi} \\ \frac{q_y}{J} &= -\frac{\partial x}{\partial \psi} = \frac{\partial y}{\partial \phi} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(33)$$

すなわち、 $x, y$  は Cauchy-Riemann の微分方程式を満足する。式 (33) は

$$\frac{\partial^2 x}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 x}{\partial \psi^2} = 0, \frac{\partial^2 y}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 y}{\partial \psi^2} = 0 \dots\dots\dots(34)$$

である。すなわち、 $\zeta$  面の領域境界で  $x$  または  $y$  に関する条件が与えられれば、式 (34) の数値解により、 $x$  または  $y$  を求めることができ、問題の解がえられる。この場合、領域境界の条件設定時に二層境界面が未知であることなどのため、trial 計算がやはり必要であるが、 $\zeta$  面の数値解における trial に比べればはるかに労が少ない。この方法で、Charmonman<sup>26)</sup> は海水飽和地盤中へ二次元溝から淡水を注入した場合の淡・塩境界面を算定しているが、さらに崎山<sup>27)</sup> は複雑な境界の場合を検討し、この方法を実際に適用する場合の種々の問題点を除去した。いま、適用例についてその手順をのべてみよう。

図-8 (a) は河口堰底面に矢板 KL, CB を打ち、地盤 MA から淡水を注入して、海水飽和地盤中にウォーターカーテン IHGFE を形成させて、貯水池への海水浸透を遮断した場合の定常状態の図である。この流れの  $\zeta$  面は 図-8 (c) となるが、特異点 B, C, L, K および

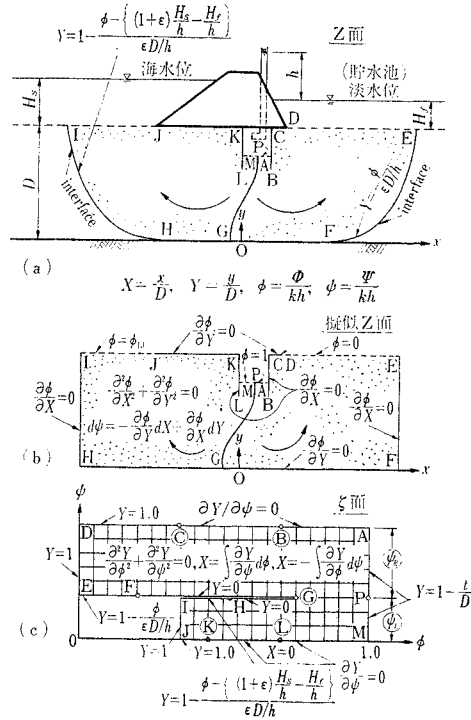


図-8 変数を変換させる方法

G の  $\phi$ , 海側と貯水池側への淡水の流出量  $\psi_L$  と  $\psi_B$  (図中の丸印の値) はあらかじめわかっていないので、これらの点の  $\zeta$  面の位置と  $\zeta$  面の領域の大きさが定まらない。したがって、これらの推定値が必要となり、この推定を次のように行っている。すなわち、図-8 (b) のような、ほぼウォーターカーテンとして希望する境界面 (図-8 (a) 中の EF, IH) を固体壁 (図-8 (b) 中の EF, IH) におきかえた疑似的  $\zeta$  面について、矢板、淡水注入圧などを変えて行った  $\phi$  に関する Laplace の式の数値解のうちから、F と H の点の  $\phi$  がこの位置の海水側の  $\phi$  と一致する解を求める。これによって、B, L, C, K および G 点の  $\phi$  と  $\psi_L$  および  $\psi_B$  が求まるので、これらの点の 図-8 (c) 中における  $\zeta$  面上の位置と  $\zeta$  面の大きさが定まる。したがって、この  $\zeta$  面について  $y$  を Laplace の式 (34) の数値解より求め、ついで  $x$  を求める。  $x$  の算定は式 (33) より

$$\left. \begin{aligned} \psi &= \text{const. に} \text{ して、} x = x_L + \int_{\phi_L}^{\phi} \frac{\partial y}{\partial \psi} d\phi \\ \phi &= \text{const. に} \text{ して、} x = x_L - \int_{\psi_L}^{\psi} \frac{\partial y}{\partial \phi} d\psi \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(35)$$

のように求められる。

こうしてえられたウォーターカーテンは、所期のものとほぼ一致する。したがって、この手法によれば、河口堰より離れて貯水池内に淡水注入溝を作った場合、海水

側に淡水が流出しないようなウォーターカーテンを作ることもでき<sup>27)</sup>、現地で適用されるような複雑な境界条件のもとでの目的のウォーターカーテンを比較的容易に求めることができる。

### 4. 非定常流

#### (1) 境界面条件

いま、単位重量と粘性係数の異なる二種の流体が、互いに混合することなく、明瞭な境界面を形成して非定常運動していると考え、この時の移動境界面の条件は以下のように示される。

境界面形状を

$$F(x, y, z, t) = z - \zeta(x, y, t) = 0 \dots\dots\dots(36)$$

とおけば、境界面上は常に同一の流質で占められることから

$$\frac{DF}{Dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla F) = 0 \dots\dots\dots(37)$$

が満足される。ここに、 $\mathbf{V}$  は流体分子の移動速度のベクトルであって、Darcy の法則

$$\mathbf{q} = \frac{k_r}{\mu} \nabla \left( \frac{p}{r} + z \right) = \frac{k_r}{\mu} \nabla \varphi \dots\dots\dots(38)$$

で示され、 $\mathbf{q}$  とは次のような関係にある。

$$\mathbf{V} = \frac{\mathbf{q}}{n} \dots\dots\dots(39)$$

ここに、 $k$  : ダルシー単位の透水係数、 $\mu$  : 粘性係数、 $r$  : 流体の単位重量、 $p$  : 圧力の強さ、 $n$  : 空隙率である。

式 (36)~(39) より、境界面において流体 1 および流体 2 についてそれぞれ次の条件式が成立する。

$$\left. \begin{aligned} n \frac{\partial \zeta}{\partial t} - \frac{k r_1}{\mu_1} \left( \frac{\partial \zeta}{\partial x} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + \frac{\partial \zeta}{\partial y} \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} - \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} \right) &= 0 \\ n \frac{\partial \zeta}{\partial t} - \frac{k r_2}{\mu_2} \left( \frac{\partial \zeta}{\partial x} \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} + \frac{\partial \zeta}{\partial y} \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} - \frac{\partial \varphi_2}{\partial z} \right) &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(40)$$

さらに、境界面において表面張力  $p_c$  が働くものとすれば

$$p_2 - p_1 = p_c \dots\dots\dots(41)$$

あるいは、式 (38) で示した  $\varphi$  を用いて表わせば

$$\begin{aligned} z &= \frac{r_2}{d r} \varphi_2 - \frac{r_1}{d r} \varphi_1 - \frac{p_c}{d r} \\ &= \alpha_2 \varphi_2 - \alpha_1 \varphi_1 - \frac{p_c}{d r}, \quad (z = \zeta) \end{aligned} \dots\dots\dots(42)$$

ここに、

$$\alpha_i = \frac{\mu_i}{k d r}, \quad \Phi_i = \frac{k r_i}{\mu_i} \varphi_i = k_i \varphi_i \dots\dots\dots(43)$$

$d r = r_2 - r_1, i = 1, 2$  である。

式 (36) を考慮して式 (42) の関係を式 (40) に代入

すれば、境界面条件は次式のように示される。

$$\left. \begin{aligned} n \left( \alpha_1 \frac{\partial \Phi_1}{\partial t} - \alpha_2 \frac{\partial \Phi_2}{\partial t} \right) - \alpha_1 (\nabla \Phi_1)^2 \\ \quad + \alpha_2 (\nabla \Phi_1 \cdot \nabla \Phi_2) - \frac{\partial \Phi_1}{\partial z} &= 0 \\ n \left( \alpha_1 \frac{\partial \Phi_1}{\partial t} - \alpha_2 \frac{\partial \Phi_2}{\partial t} \right) + \alpha_2 (\nabla \Phi_2)^2 \\ \quad - \alpha_1 (\nabla \Phi_1 \cdot \nabla \Phi_2) - \frac{\partial \Phi_2}{\partial z} &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots(44)$$

同様な関係式は非等方性の媒質の場合にも導かれる。

#### (2) 一次元的な流れ

探油工学の分野では、老衰した油田を回復させるため、注入井より他の液体を圧入させ、油層中の油を油井へと導くことがしばしば試みられている。ここでは、その最も簡単な例として水平な一次元的な流れを取扱う。

いま、図-9 のように長さ  $L$  の媒質の両端に  $p_1' - p_2'$  の圧力差を与え、浸透度  $k_2/\mu_2$  の流体を浸透度  $k_1/\mu_1$  の流体で置き換えるとき、境界面の移動特性を考えることとする。

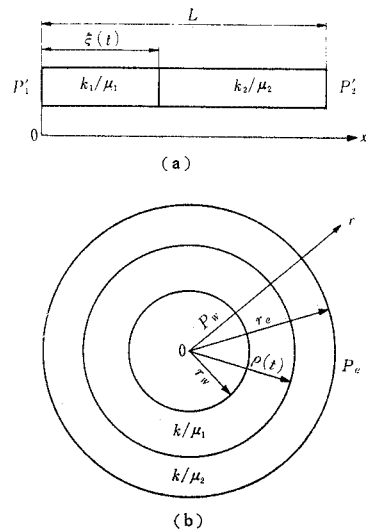


図-9 一次元的な流れ

境界面の位置を原点から  $\xi(t)$  とすれば、式 (36) に対応して

$$F(x, t) = x - \xi(t) = 0 \dots\dots\dots(45)$$

また、式 (40) に対応して次式が得られる。

$$n \frac{\partial \xi}{\partial t} - q_x = 0 \dots\dots\dots(46)$$

一方、Darcy の法則と連続の条件より

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 p_1}{\partial x^2} &= 0 : 0 < x < \xi(t) \\ \frac{\partial^2 p_2}{\partial x^2} &= 0 : \xi(t) < x < L \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(47)$$

がそれぞれの領域で成立する。

境界面上  $x=\xi(t)$  では  $p_c$  を無視して

$$\left. \begin{aligned} p_1 &= p_2 \\ \frac{k_1}{\mu_1} \frac{\partial p_1}{\partial x} &= \frac{k_2}{\mu_2} \frac{\partial p_2}{\partial x} = -q_x \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (48)$$

さらに、境界条件

$$\left. \begin{aligned} x=0 : p_1 &= p_1' \\ x=L : p_2 &= p_2' \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (49)$$

である。

上記の4条件の下で式(47)を解けば、 $p_1$  および  $p_2$  に対してそれぞれ次式が求められる。

$$\begin{aligned} p_1 &= -\frac{p_1' - p_2'}{ML + (1-M)\xi} + p_1' \\ p_2 &= \frac{p_1' - p_2'}{ML + (1-M)\xi} M(L-x) + p_2' \dots (50) \end{aligned}$$

また、 $q_x$  は

$$q_x = \frac{k_1}{\mu_1} \frac{p_1' - p_2'}{ML + (1-M)\xi} \dots\dots\dots (51)$$

となる。ここに、 $M$  は mobility ratio とよび、次式で定義される。

$$M = \frac{k_1}{\mu_1} / \frac{k_2}{\mu_2} \dots\dots\dots (52)$$

式(51)を式(46)に代入して解けば、境界面の移動特性は次式で与えられる。

$$t = \frac{\mu_1 n (1-S_1-S_2)}{k_1 (p_1' - p_2')} \left\{ ML\xi + \frac{1}{2} (1-M)\xi^2 \right\} \dots\dots\dots (53)$$

ここに、 $n(1-S_1-S_2)$  : 有効な空隙率である。

上式より、特性はパラメーター  $M$  に大きく支配され、 $M=1$  であれば移動速度は一定であるが、 $M > 1$  では加速され、 $M < 1$  では減速されることが知られる<sup>28)</sup>。

軸対称一次元流<sup>29)</sup> (図-9 (b)) については、Muskat や Scheidegger が取扱い、境界面の位置を

$$F(r, t) = r - \rho(t) = 0 \dots\dots\dots (54)$$

とすると、 $\rho$  の時間的特性は次式で与えられることを示した。

$$\begin{aligned} \frac{4k(p_e - p_w)}{\mu_1 r_e^2 n} t &= \left( \frac{\rho}{r_e} \right)^2 \left\{ \log \left( \frac{\rho}{r_e} \right)^2 \right. \\ &\quad \left. - M \log \left( \frac{\rho}{r_w} \right)^2 + M - 1 \right\} - M \log \left( \frac{r_w}{r_e} \right)^2 \\ &\quad - (M-1) \dots\dots\dots (55) \end{aligned}$$

ここに、境界条件 ( $r_e > r_w$ ) は次式で与える。

$$\begin{aligned} r=r_e : p &= p_e \\ r=r_w : p &= p_w \end{aligned}$$

また、浸透度は  $\mu$  のみに支配されるとしている。

(3) 境界面の不安定現象 (Fingering)<sup>30), 31)</sup>

浸透度が  $k_2/\mu_2$  の流体2の中へ浸透度  $k_1/\mu_1$  の流体1が浸入していくとき、境界面の一部が図-10に示されるように不安定となる場合が生ずる。すなわち、境界面

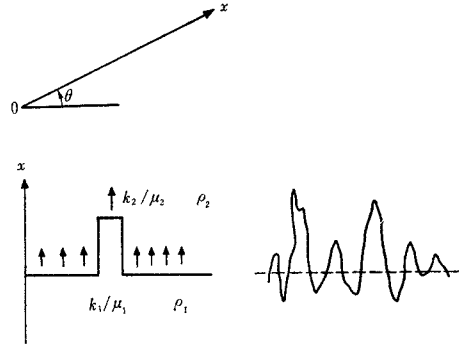


図-10 境界面の不安定現象

の移動速度が一樣でなく、局部的に速い速度で浸入する。この現象を fingering とよび、これが発達すると前述の置換を行ったときの採油効率が著しく低下することになる。

いま、流れを水平な一次元流であるとすれば、境界面の移動速度は式(46)および(51)より

$$\frac{d\xi}{dt} = \frac{k_1(p_1' - p_2')}{\mu_1 n (1-S_1-S_2) \{ML + (1-M)\xi\}} \dots\dots\dots (56)$$

となる。ここで、境界面の一部が  $\xi + \xi'$  の位置に先行したとすれば、その部分でも一次元的な流れが成立しているので、その移動速度は次式で示される。

$$\frac{d(\xi + \xi')}{dt} = \frac{k_1(p_1 - p_2')}{\mu_1 n (1-S_1-S_2) \{ML + (1-M)(\xi + \xi')\}} \dots\dots\dots (57)$$

式(56)および(57)より、 $\xi' \ll \xi$  を考慮すれば

$$\frac{d\xi'}{dt} = \frac{-k_1(p_1' - p_2')(1-M)\xi'}{\mu_1 n (1-S_1-S_2) \{ML + (1-M)\xi\}^2} \dots\dots\dots (58)$$

が求められる。したがって、

$$M > 1 \dots\dots\dots (59)$$

であれば、 $\xi'$  は時間の経過につれ指数関数的に増加し、境界面は不安定となることが指摘される。

さらに、もし一次元的な流れが、水平線に対し  $\theta$  だけ傾いた面内に起きているとすれば、重力(密度差)の影響が加わることになる。 $x$  軸を面内の流れの進む方向にとれば、境界面上での条件は式(48)の第2式の代わりに次式が用いられる。

$$\frac{k_1}{\mu_1} \left( \frac{\partial p_1}{\partial x} + \rho_1 g \sin \theta \right) = \frac{k_2}{\mu_2} \left( \frac{\partial p_2}{\partial x} + \rho_2 g \sin \theta \right) \dots\dots\dots (60)$$

その他は、基礎方程式も境界面条件および境界条件も同一である。この場合の境界面の移動速度は

$$\frac{d\xi}{dt} = \frac{k_1 [p_1' - p_2' - \{\rho_2 L + (\rho_1 - \rho_2)\xi\} g \sin \theta]}{\mu_1 n (1-S_1-S_2) \{ML + (1-M)\xi\}} \dots\dots\dots (61)$$

となる。前とまったく同じ方法で  $d(\xi + \xi')/dt$  を求め、

さらに  $d\xi'/dt$  を導けば次式のようになる。

$$\frac{d\xi'}{dt} = - \frac{k_1 \{ (1-M)(p_1' - p_2' - \rho_2 L g) + M(\rho_1 - \rho_2) g L \sin \theta \}}{\mu_1 n (1-S_1 - S_2) \{ ML + (1-M)\xi' \}^2} \xi' \dots\dots\dots (62)$$

したがって、分子の  $\{ \}$  内が負であれば境界面は不安定となる。そこで、式 (61) より  $p_1' - p_2'$  を求め、境界面での Darcy 的平均流速  $q_x = (d\xi'/dt)n(1-S_1 - S_2)$  を考慮して、 $\{ \}$  内の  $p_1' - p_2'$  を消去すれば、境界面の不安定となる条件は次式のように表わされる。

$$(M-1) \left\{ q_x + \frac{k_1(\rho_1 - \rho_2) g \sin \theta}{\mu_1(1-M)} \right\} > 0 \dots\dots (63)$$

なお、上記の不安定現象の解析は、Scheidegger, Marle, Hawthorne らによって行われた。

(4) 曲線座標系を用いる方法

Muskat<sup>(32)</sup> らは水平な二次元的な流れの境界面の移動を近似的に評価するため、曲線座標系を用いる解法を示した。

境界面の条件式 (40) は次式のようにも表わされる。

$$\frac{\partial F}{\partial t} - \frac{K^{(\alpha)}}{n} \frac{\partial \varphi^{(\alpha)}}{\partial x_i} \frac{\partial F}{\partial x_i} = 0 \dots\dots\dots (64)$$

ただし、 $(\alpha)$  は流体 1 および 2 に対しそれぞれ成立することを示し、 $K$  は透水係数を表わし、また  $x_i; x, y, z$  である。

いま、直交曲線座標系

$$\left. \begin{aligned} \xi_1 &= \xi_1(x, y, z) \\ \xi_2 &= \xi_2(x, y, z) \\ \xi_3 &= \xi_3(x, y, z) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (65)$$

を導入すれば、直交条件より

$$\frac{\partial \xi_i}{\partial x_j} \frac{\partial \xi_k}{\partial x_j} = 0 \dots\dots\dots (66)$$

が成立つ。したがって、

$$\frac{\partial \varphi^{(\alpha)}}{\partial x_i} \frac{\partial F}{\partial x_i} = \frac{\partial \varphi^{(\alpha)}}{\partial \xi_j} \frac{\partial F}{\partial \xi_j} \left\{ \sum_i \left( \frac{\partial \xi_j}{\partial x_i} \right)^2 \right\}$$

であり、ここで、 $\xi_1(x, y, z) = \text{const.}$  を等ポテンシャル面と一致させれば

$$\frac{\partial \varphi^{(\alpha)}}{\partial x_i} \frac{\partial F}{\partial x_i} = \frac{\partial F}{\partial \xi_1} \left( \frac{\partial \xi_1}{\partial x_i} \frac{\partial \xi_1}{\partial x_i} \right) = \frac{\partial F}{\partial \xi_1} |\nabla \xi_1|^2$$

となる。

したがって、式 (64) は

$$\frac{\partial F}{\partial t} - \frac{K^{(\alpha)}}{n} |\nabla \xi_1|^2 \frac{\partial F}{\partial \xi_1} = 0 \dots\dots\dots (67)$$

となる。そこで、もし  $|\nabla \xi_1|^2$  を  $\xi_1, \xi_2, \xi_3$  の関数として表現できれば、式 (67) は積分可能となり、次式が移動境界面の解となる。

$$F = t + \frac{n}{K^{(\alpha)}} \int \frac{d\xi_1}{|\nabla \xi_1|^2} + g(\xi_2, \xi_3) = \text{const.} \dots\dots\dots (68)$$

具体的な問題として、図-11 に示すように、 $y=0$  が等ポテンシャル面であり、 $x=0, y=d$  に流入点のある場合、 $t=0$  で  $y=0$  になった流体の実質部分が時間の経過とともにどのように移動するかを注目する。

ここでは、流体の性質の相違はないとして、水平な二次元定常流が起きているとする。

そこで

$$\left. \begin{aligned} \xi_1 &= \varphi(x, y) \\ \xi_2 &= \psi(x, y) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (69)$$

とすれば、式 (68) は次式のようになる。ここに、 $\psi$  は流関数である。

$$F(\varphi, \psi, t) = t + \frac{n}{K} \int \frac{d\varphi}{|\nabla \varphi|^2} \quad g(\psi) = \text{const.} \dots\dots\dots (70)$$

上記の流れの場合には、流入量を  $Q$  とすれば

$$\left. \begin{aligned} \varphi_0 - \varphi &= \frac{Q}{4\pi K} \log \frac{x^2 + (y-d)^2}{x^2 + (y+d)^2} \\ \psi &= - \frac{Q}{2\pi K} \tan^{-1} \frac{-2dx}{x^2 + y^2 - d^2} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (71)$$

いま、

$$\frac{2\pi K(\varphi - \varphi_0)}{Q} = \xi_1, \quad - \frac{2\pi K\psi}{Q} = \xi_2 \dots\dots\dots (72)$$

とおけば、式 (71) より

$$\left. \begin{aligned} x^2 + y^2 + d^2 &= 2yd \coth \xi_1 \\ x^2 + y^2 - d^2 &= -2xd \cot \xi_2 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (73)$$

となる。

一方、

$$|\nabla \xi_1|^2 = \frac{4d^2}{(x^2 + y^2 - d^2)^2 + 4x^2d^2} \dots\dots\dots (74)$$

であるから、式 (73) を用いて  $x, y$  を消去すれば

$$|\nabla \xi_1|^2 = \frac{(\cosh \xi_1 + \cos \xi_2)^2}{d^2} = \left( \frac{2\pi K}{Q} \right)^2 |\nabla \varphi|^2 \dots\dots\dots (75)$$

となる。

式 (75) を式 (70) に代入すれば

$$F(\xi_1, \xi_2, t) = t + n \frac{2\pi d^2}{Q} \int \frac{d\xi_1}{(\cosh \xi_1 + \cos \xi_2)^2} + g(\xi_2) = \text{const.} \dots\dots\dots (76)$$

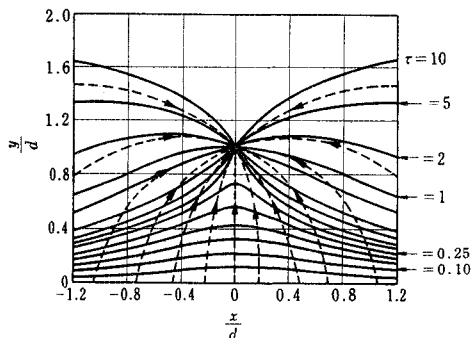


図-11 暗渠への流れ

であり、積分し、初期条件を考慮すれば

$$t = \frac{-2\pi d^2 n}{Q \sin^2 \xi_2} \left\{ \frac{\sinh \xi_1}{\cosh \xi_1 + \cos \xi_2} - 2 \cot \xi_2 \tan^{-1} \left( \tanh \frac{\xi_1}{2} \cdot \tan \frac{\xi_2}{2} \right) \right\} \dots (77)$$

が求める解となる。いま、 $\tau = Qt/2\pi nd^2$  とし、境界面の移動を追跡した結果が 図-11 の実線で示され、また流線群は点線で示されている。

同様な解は注入井と取水井の二つの井戸から成る系に対しても与えられている。

(5) 準一様非定常流<sup>33)</sup>

密度や浸透度の異なる流れの非定常現象は、一次元流を除いてはほとんど厳密解が得られていない。そこで、条件を損わない範囲で何か省略を行う必要が生ずる。

海岸付近の地下水(塩水くさび)では、特別な場合を除いて鉛直流速が水平流速に比し小さいので準一様流的な取扱いが可能となる。

図-12 で示される流れの場を考えれば、上下層の流速  $u_1, u_2$  は鉛直断面内では一定となり、Darcy の法則が満足されるとすれば、それぞれ以下のように示される。

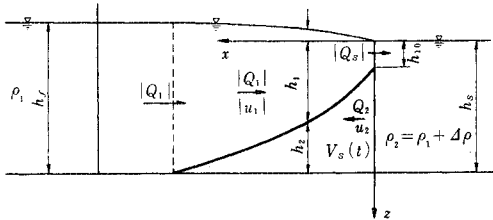


図-12 塩水くさびの非定常過程

$$\left. \begin{aligned} u_1 &= -K \frac{\partial \zeta}{\partial x} \\ u_2 &= -K \left\{ (1-\varepsilon) \frac{\partial \zeta}{\partial x} + \varepsilon \frac{\partial h_2}{\partial x} \right\} \end{aligned} \right\} \dots (78)$$

連続の式は

$$\left. \begin{aligned} n \frac{\partial}{\partial t} (\zeta + h_s - h_2) + \frac{\partial}{\partial x} \{ u_1 (\zeta + h_s - h_2) \} &= 0 \\ n \frac{\partial h_2}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (u_2 h_2) &= 0 \end{aligned} \right\} \dots (79)$$

である。

式 (78) および (79) より  $u_1$  および  $u_2$  を消去するとともに、 $\zeta$  は  $h_s$  に対し  $\varepsilon$  の order であるとし、微小項を省略すれば、準一様地下密度流の基礎方程式として次式が求められる。

$$\left. \begin{aligned} -\frac{n}{K} \frac{\partial h_2}{\partial t} - h_s \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial x} \left( h_2 \frac{\partial \zeta}{\partial x} \right) &= 0 \\ \frac{n}{K} \frac{\partial h_2}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left( h_2 \frac{\partial \zeta}{\partial x} \right) - \frac{\varepsilon}{2} \frac{\partial^2 h_2^2}{\partial x^2} &= 0 \end{aligned} \right\} \dots (80)$$

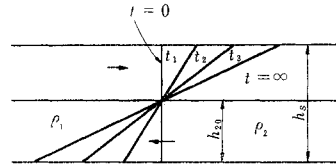


図-13 逆転流

a) 逆転流

図-13 のように  $-\infty < x < \infty$  に透水層が自由表面を持たない状態で存在し、密度差のみによって  $x=0$  に関し対称な流れの生ずる場合を逆転流とよぶことにする。

この場合には、上層および下層の流量をそれぞれ  $Q_1$  および  $Q_2$  とするとき

$$Q_1 + Q_2 = 0 \dots (81)$$

となる。

一方、式 (80) の第 1 式と第 2 式を加えて積分すれば

$$h_s \frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{\varepsilon}{2} \frac{\partial h_2^2}{\partial x} = C(t)$$

となるが、 $C(t)$  は  $Q_1 + Q_2$  を意味しているのので、逆転流の場合には  $C(t) = 0$  とすればよい。

したがって、この結果を式 (80) に代入すれば

$$\frac{n}{K} \frac{\partial h_2}{\partial t} - \frac{\varepsilon}{2} \frac{\partial^2 h_2^2}{\partial x^2} + \frac{\varepsilon}{2 h_s} \frac{\partial}{\partial x} \left( h_2 \frac{\partial h_2^2}{\partial x} \right) = 0 \dots (82)$$

が基本式となる。

Rumer & Harleman<sup>34)</sup>, Bear & Dagan<sup>35)</sup>, 玉井・嶋<sup>36)</sup>らがこの問題を取扱ったが、最後の解析結果は次のようである。

いま、

$$\left. \begin{aligned} r &= \frac{h_2}{h_{20}}, \quad \beta = \frac{h_{20}}{h_s} \\ \xi &= \sqrt{\frac{n}{2K\varepsilon h_{20} t}} x \end{aligned} \right\} \dots (83)$$

とおけば、式 (82) は次のような常微分方程式に帰着される。

$$\frac{d^2 r^2}{d\xi^2} + 2\xi \frac{dr}{d\xi} - \beta \frac{d}{d\xi} \left( r \frac{dr^2}{d\xi} \right) = 0 \dots (84)$$

ここに、 $h_{20}$  は  $x=0$  の  $h_2$  の値で不変とする。

境界条件  $\xi=0, r=1$  の  $F$  に式 (84) の級数解を求めれば

$$\begin{aligned} r(\xi) &= -l(\xi-l) + \left( -\frac{1}{4} + \frac{\beta l^2}{2} \right) (\xi-l)^2 \\ &+ \left( -\frac{1}{72} + \frac{5}{18} \beta l \right) (\xi-l)^3 \\ &+ \frac{5}{96} \beta (\xi-l)^4 + \dots \end{aligned} \dots (85)$$

ただし、 $l$  は  $\beta$  の値によって次の値をとる。

$\beta$	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
$l$	1.048	1.033	1.014	1.009	0.996	0.986

ここに、 $l$  はくさび先端での  $\xi$  の値を示すものであり、くさび先端の位置を  $x_t$  とすれば

$$x_t = l\sqrt{\frac{2\beta K\epsilon h_s}{n}}t \dots\dots\dots(86)$$

である。

(6) 塩水くさびの非定常過程

逆転流では式(86)で示されるように、くさびの先端の位置は時間の経過とともにどこまでも浸入を続けることとなる。しかし、現実の塩水くさびでは、陸側の地下水面のポテンシャルが密度差によって生ずる海側のポテンシャルより高いので、くさびの先端はある距離まで浸入し、停止する。

Bear & Dagan<sup>37)</sup>、玉井・嶋<sup>38)</sup>がこの場合を取扱ったが、さらに嶋<sup>39)</sup>は次のような手順を踏むことにより理論の厳密化を試みた。

①  $x=0$  における鉛直流速効果を考慮することにより、海側と透水層の間で成立すべき圧力のつり合い条件をそれぞれ上層および下層に関し求め、このことより任意時刻における  $x=0$  の境界面位置と淡水流量との関係を導いた。

② Bear & Dagan が淡水流量の場所的分布を与えた上層水深に関する線型仮定を拡張し、高次の項を入れることにより、現象の初期においては上向きに凸、以後においては下向きに凸となる実際現象に近い境界面形状が与えられるようにする。

③ これらを準一様流の運動方程式あるいは連続方程式と組み合わせることにより最終的な解を導く。

①、② および ③ を経て得られた結果は次のとおりである。

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\bar{V}_s}{d\alpha} \frac{d\alpha}{dt} &= \frac{(1-\alpha)(\alpha-\beta)}{\beta} \\ \bar{V}_s &= \frac{(1-\alpha)\beta}{(\eta-1)(\alpha-\beta)} \left\{ \frac{(1-\alpha)^2}{2} - \frac{(1-\alpha)}{\mu} \right. \\ &\quad \left. - \frac{1-\mu}{\mu^2} \log \frac{1-\mu}{1-\mu\alpha} \right\} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(87)$$

式(87)より  $\bar{V}_s$  を消去して  $\alpha$  と  $t$  の関係を求め、次式に代入することにより

$$\left. \begin{aligned} \bar{x} &= \frac{(1-\alpha)\beta}{(1-\eta)(\alpha-\beta)} \left\{ \frac{1}{\mu} \log \frac{1-\mu\alpha}{1-\mu\zeta} - (\zeta-\alpha) \right\} \\ \mu &= \frac{(1-\eta)(\alpha-\beta)}{\alpha\{1+\beta(\eta-1)-\eta\alpha\}} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(88)$$

任意時刻の境界面形状が求められる。

ここに、

$$\left. \begin{aligned} \bar{V}_s &= \frac{|Q_L|V_s}{K\epsilon h_s^3}, \quad t = \frac{QL^2t}{nK\epsilon h_s^3} \\ \bar{x} &= \frac{|Q_L|x}{K\epsilon h_s^2}, \quad \zeta = \frac{h_1}{h_s} \\ \alpha &= \frac{h_{10}}{h_s}, \quad \beta = \left( \frac{h_{10}}{h_s} \right)_{c=\infty} = \frac{Q_L|}{\sqrt{2}K\epsilon h_s} \end{aligned} \right\} \dots(89)$$

である。

なお、 $\eta$  は淡水流量の場所的分布を仮定するときに入る定数で、実験との比較では  $\eta=2$  とすればよいことが知られる。

$t=0$  で隔壁が取り除かれた後の塩水くさびの浸入状況に関し、図-14 は境界面の時間的変化の一例を示したものである。また、図-15 はくさび先端の浸行状況を示す解析結果で、 $\beta=0.1, 0.3, 0.5$  の場合に対しそれぞれ  $\eta=1$  および 4 とした結果を示している。なお、海岸線で境界面位置を不動とした場合 ( $\alpha=\text{const.}$ ) の解も比較のため示されている。

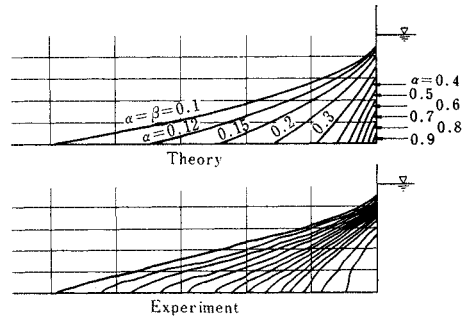


図-14 境界面の時間的変化

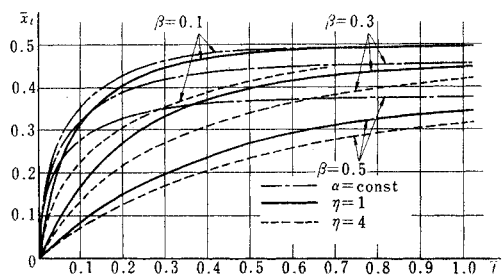


図-15 くさびの進行状況

参考文献

- 1) Nomitsu, T., Toyohara, Y., Kamimoto, R.: On the contact surface of fresh and salt-water under the ground near a sandy sea shore, Memoir of Coll. Sci., Kyoto Imperial Univ., A. Vol. 10, No. 7, p. 279, 1927.
- 2) Henry, H.R.: Salt intrusion into fresh-water aqui-

- fers, J. Geophysical Res., Vol. 64, No. 11, pp. 1911~1919, Nov., 1959.
- 3) Hamel, G. : Über Grundwasserströmung, Z.A.M.M., XIV, p. 129, 1934.
  - 4) Glover, R.E. : The Pattern of fresh-water flow in a coastal aquifer, J. Geophysical Res., Vol. 64, No. 4, pp. 457~459, Apr. 1959.
  - 5) Rumer, R.R., Harleman, D.R.F. : Intruded salt-water wedge in porous media, Proc. A.S.C.E., Vol. 89, No. HY 6, Nov. 1963.
  - 6) 野満隆治 : 前出 1)
  - 7) 嶋 祐之 : 地下水 (密度流の諸問題), 土木学会水理委員会, 水工学に関する夏期研修会講義集, A-8-9, 1971.
  - 8) Iwasa, Y., Takeuchi, H. : Control of sea water level in coastal porous media by means of double pumping, Proc. of the 13th Congr. of I.A.H.R., Vol. 4, pp. 391~397, 1969.
  - 9) 山口柏樹 : 刈田地区工業用水道水源調査報告書, p. 133, 1962.
  - 10) 嶋 祐之 : 河工湖工学, 日本工業用水協会, p. 79, 1968, もしくは前出 7), A-8-12.
  - 11) Kirchhoff, G. : Zur Theorie freier Flüssigkeitsstrahlen, Crelle, t. XIX, Ges. Abh. p. 416, 1869.
  - 12) Hamel, G. : 前出 3)
  - 13) Dachler, R. : Grundwasserströmung, Springer, Wien, 1936.
  - 14) Davison, B.B., Rosenhead, L. : Some cases of the steady two-dimensional percolation of water through ground, Proc. Roy. Soc. London, Vol. 175, No. A 962, p. 12, June, 1940.
  - 15) Muskat, M. : The Flow of Homogeneous Fluids Through Porous Media, McGraw-Hill, p. 378, 1937.
  - 16) Vedernikov, V.V. : Seepage from channels (in Russian), Gosstroizdat, Moscow, 1934.
  - 17) Polubarinova-Kochina, P. Ya : Theory of Ground Water Movement (in Russian), Gosstroizdat, Moscow, 1952. (also English translation by DeWiest, R.J.M., Princeton Univ. Press, Princeton, New Jersey)
  - 18) Henry, H.R. : 前出 2)
  - 19) Bear, J., Dagan, G. : The use of the hodograph method for ground water investigations, Technion Haifa, Dept. of Civil Eng., 1962.
  - 20) De Josselin De Jong, G. : A many valued hodograph in an interface problem, Technische Hogeschool Delft, Afd., Wegen Waterbaukunde, 1964.
  - 21) Achermann, N.L., Sridurongkatum, P. : Salt water interface near a fresh-water canal, Proc. of A.S.C.E., HY6, 1964.
  - 22) 上田年比古・崎山正常 : 海水飽和地盤における淡水注入溝の浸透, 土木学会論文集, 第 135 号, Nov. 1966.
  - 23) 山崎正常 : 淡塩二層地盤よりの二次元的淡水取水の一方方法, 土木学会論文報告集, 第 180 号, Aug., 1970.
  - 24) 上田年比古・杉尾 哲 : 淡塩二層地盤内の海水取水円形暗きょによる淡塩境界面, 第 26 回土木学会年次学術講演会講演集, 第 2 部, pp. 469~472, Oct., 1971.
  - 25) 上田年比古・杉尾 哲 : 暗きょからの淡水注入による淡塩境界面の解析, 土木学会論文報告集, 第 225 号, pp. 43~52, May 1974.
  - 26) Charmonman, S. : Coastal parallel canals with intermediate drains, Proc. of A.S.C.E., No. HY 1, Vol. 93, pp. 13~28 Jan. 1967.
  - 27) 崎山正常 : 河口貯水池における海水排除に伴う定常地下密度流の解析について, 第 28 回土木学会年次学術講演会講演集, 第 2 部, pp. 380~381, Oct. 1973.
  - 28) Muskat, M. : 前出 15), pp. 459~462
  - 29) Muskat, M. : 前出 15), pp. 462~466
  - 30) Scheidegger, A.E. : Statistical hydrodynamics in porous media, Advan. Hydrosci., 1, pp. 161~181, 1964.
  - 31) Collins, R.E. : Flow of Fluids Through Porous Materials, Reinhold Pub. Corp., New York, pp. 196~200, 1961.
  - 32) Muskat, M. : 前出 15), pp. 466~476.
  - 33) 嶋 祐之 : 前出 7), A-8-6.
  - 34) Rumer, R.R., Harleman, D.R.F. : 前出 5)
  - 35) Bear, J., Dagan, G. : Moving interface in coastal aquifers, Proc. of A.S.C.E., No. HY 4, pp. 193~216 July, 1964.
  - 36) Tamai, N., Shima, S. : Salt-water wedge in unconfined coastal aquifers, 土木学会論文集, No. 139, pp. 31~38, March, 1967.
  - 37) Bear, J., Dagan, G. : 前出 35)
  - 38) Tamai, N., Shima, S. : 前出 36)
  - 39) Shima, S. : Transient characteristics of salt-water wedge, Proc. of 13th Congr. of I.A.H.R., Vol. 4, pp. 433~440, 1969.

(1975.5.22・受付)