

## 確率雨量配分率曲線の理論的推定

STATISTICAL ESTIMATION OF THEORETICAL CURVES BETWEEN  
FREQUENCY AND TIME DISTRIBUTION RATIO OF RAINFALL

長尾 正志\*

By Masashi NAGAO

## 1. 緒 論

治水計画において、計画基本量となる豪雨現象の確率統計的性格を解明することはきわめて重要である。ところで、降雨量は一般にある期間内総量として観測され、その期間によって統計的性格をかなり異にする。治水計画では、普通計画対象として日程度以下の短時間降雨が採用され、特に中小河川の流域では数時間以下の降雨が問題とされる。幸いにして、わが国では日程度の降雨量資料はかなり容易に入手し得るから、それに基づく短時間降雨量の推定を主体として以下の考察を進める。

## (1) 従来の推定手法とその問題点

降雨特性は場所的・時間的に著しく変動する。したがって、所要の地点流量を推定する目的で、かなり巨視的な観点から、降雨量 (Depth)、流域面積 (Area) および降雨継続期間 (Duration) を基本要因として組合わせて用いるという DAD 解析の概念が発生したのはきわめて自然といえる。最初 DAD 解析は、入手し得た降雨資料からある規模の流域面積と継続時間に対する最大降雨量を推定するために発案されたものであるが、これらの複雑な相互関係を明確にすることが困難なために、経験的公式に依存した解析に止まっているのが実情である。DAD 解析の概念が提案された当初はともかく、簡便だという理由から理論的根拠の不明なこれら経験式に現在も依存している態度には疑問を感じざるを得ない。なお、以後では、流域面積と降雨量の関係は別の機会に譲り、継続時間と降雨量の関係について詳述しよう。

さて、このような研究は、降雨強度曲線の経験式の誘導にその典型がみられる。降雨強度曲線とは、任意の降雨継続時間に対応した降雨強度を一つの曲線式で表現しようとしたものである。慣用されている降雨強度式は多

様であるが、代表的なものとしては、Talbot 形, Sherman 形, およびその変形とみられる久野・石黒の形式、さらにこれを一般化した Cleveland 形などがあげられる<sup>1)</sup>。

ところで、これら降雨強度曲線の形式および含まれる定数はまったく経験的に決定されているが、当然対象とする降雨頻度によってかなり相違するはずである。これに対して石黒らは、あらゆる降雨強度曲線はその勾配を表わす特性係数に 1 時間降雨強度を乗じて表現できるという考えから、確率特性係数という概念を提案している<sup>2)</sup>。さらに曲線式中の定数に直接的に確率年の概念を導入したものに Fair によるもの<sup>3)</sup>や Bernard による式<sup>4)</sup>など種々の提案が行われてきた。すなわち、これら諸公式は基本的な形式として経験式に準拠しながら、その定数項に形式的に統計的意義を含ませようとしたものと理解できる。しかし、前提となる経験式の成立そのものに対する議論はまったく等閑に付されたままであったといえよう。このような降雨時系列に対する理論的根拠が薄弱である限り、たとえ確率の概念を形式的に導入したとしても普遍性のある計画降雨の策定はほとんど困難であるように思える。

また、最近、短時間におけるハイエトグラフの形状に関する統計的性質を、独立降雨量の和分布の応用として、定量的に究明しようとする試みが石原・友杉によって行われている。これは、降雨量を球に分割期間を箱に擬して、球を箱に配分するという壺モデルとしての定式化であるが、理論結果の検証において、基礎仮定とした独立性を否定する結果を報告している<sup>5)</sup>。

一連降雨における短時間降雨量の実態観測によって、降雨時系列において自己相関性が無視し得ないという種々の報告<sup>6)</sup>を考えあわせると、降雨の配分過程においても、自己相関性の導入が不可欠であろう。このような考えから、ごく最近、ガンマ分布の和分布もガンマ分布族で近似できることを独立変量の和分布を基礎にして誘導

\* 正会員 工博 名古屋工業大学助教授 土木工学科

し、主として日単位以上の水文量時系列に対する時間スケールと分布形の関係を論じた室田・江藤らの注目すべき研究がある<sup>7)</sup>。ここでは、さらに理論的に厳密に、相関を考慮した二変数ガンマ分布理論から議論を展開し、日単位程度以下の配分問題を考察することにした。

(2) 本研究の目的と概要

治水計画では、流域の重要度に応じた高水流量の規模推定が根底となる。したがって、要求される確率年などの安全度に応じたハイドログラフのピーク流量、換言すれば、それに関与する時間的スケールにおける流域平均雨量の推定が必要となる。そこで、本研究では、通常入手しやすい日単位程度の基準期間降雨量の確率統計的特性から必要な時間間隔（普通には数時間程度から数十分程度まで）に対する短時間降雨量の推定手法の理論的開発を主眼とする。しかも、それには降雨量時系列の諸特性ないし現在までの経験的知識をできる限り活用したモデル化を試みている。

すなわち、まず短時間降雨量の従う非対称分布を有効に表現するために、ガンマ分布族を基礎分布として採用した。ついで、短時間降雨量の時系列に自己相関性が存在するとして導かれた和分布もガンマ分布族で近似し得ることを示し、それより、基準期間における降雨量分布の諸特性を用いて短時間雨量を確率的に推定し得ることを明らかにした。ついでこの結果を種々の形状母数および相関母数の下における確率雨量配分率曲線として図示した。さらに、従来の推定手法との比較などのために、上記の理論結果を簡略化して、確率雨量配分率曲線の理論的推定式を誘導し、基準期間降雨量の時系列特性および確率年との関係を明確にした。最後に、わが国で提案されている配分率曲線式との対比によりその特性を示した。

2. 降雨量時系列の確率分布モデル

(1) ガンマ型変量の和分布

いま、時刻  $t$  における降雨強度を  $r(t)$  とすると、通常入手し得るのは  $t$  までのある時間間隔  $T$  におよぶ積算値で、これを  $R(T, t)$  と記すと、それは次式で表わされる。

$$R(T, t) = \int_{t-T}^t r(t) dt \dots\dots\dots(2.1.1)$$

ここで、 $t$  は正と考え、離散的に  $t = T, 2T, 3T, \dots$  と採ることにする。さらに、

$$i \equiv t/T, R(T, t) \equiv R_i \quad (i=1, 2, 3, \dots)$$

と略記し、 $R_1$  と  $R_2$  の和分布を考える。なお、 $R_1$  と  $R_2$

はそれぞれ周辺分布が共通なガンマ分布に従うとしておく。したがって、 $R_i (i=1, 2)$  の密度分布は次式

$$f(R_i) = \frac{1}{\sigma \cdot \Gamma(\nu)} \left(\frac{R_i}{\sigma}\right)^{\nu-1} \exp\left(-\frac{R_i}{\sigma}\right) \quad (R_i \geq 0) \dots\dots(2.1.2)$$

あるいは、その累積分布は

$$F(R_i) = \frac{1}{\Gamma(\nu)} \cdot \tau\left(\nu, \frac{R_i}{\sigma}\right) \quad (R_i \geq 0) \dots(2.1.3)$$

で表わされる。ここに、 $\Gamma(\nu)$  はガンマ関数、 $\tau(\nu, x)$  は第1種不完全ガンマ関数であり、 $\nu, \sigma$  はそれぞれ形状母数、尺度母数といわれる。

さらに、 $R_1$  と  $R_2$  の同時生起の密度分布は、Kibble による表示<sup>8)</sup> を尺度母数を加味した形に直すと、次式のようになる。

$$f(R_1, R_2) = \frac{1}{\Gamma(\nu) \cdot \sigma^{\nu+1} \cdot (1-\rho)^{\nu} \cdot \rho^{\nu-1/2}} \times (R_1 R_2)^{\nu-1/2} \times \exp\left\{-\frac{R_1+R_2}{\sigma(1-\rho)}\right\} \cdot I_{\nu-1}\left(\frac{2\sqrt{\rho}}{1-\rho} \sqrt{R_1 R_2}\right) \dots(2.1.4)$$

ここに、 $I_{\nu-1}(x)$  は第1種変形ベッセル関数で、 $\rho$  は相関母数とよばれ、定義より明らかなように  $0 < \rho < 1$  の値である。なお、記述の便宜上、以後  $R_i$  が上記のようなガンマ分布に従うことを  $R_i \in G(\nu, \sigma; \rho)$  と略記する。

a) 和分布の厳密解

さて、和  $z = R_1 + R_2$  の密度分布は、井沢によって、次式で与えられている<sup>9)</sup>。

$$f(\nu, \sigma, \rho; z) = \frac{\pi^{1/2}}{\Gamma(\nu) \cdot \sigma^{\nu+1/2} \cdot (1-\rho)^{1/2} \cdot \rho^{(2\nu-1)/4}} \times \left(\frac{z}{\sigma}\right)^{\nu-1/2} \times \exp\left\{-\frac{z}{\sigma(1-\rho)}\right\} \cdot I_{\nu-1/2}\left(\frac{\rho}{\sigma(1-\rho)} z\right) \dots(2.1.5)$$

この累積分布は一般には簡単な表示が困難だが、 $\nu$  が自然数および半奇数については以下のように表現できる。

①  $\nu$  が自然数の場合 ( $\nu \equiv n=1, 2, \dots$ )

$$F(n, \sigma, \rho; z) = \left\{ \begin{aligned} &= \sum_{k=0}^{n-1} \left[ a_k \cdot \tau\left(n-k, \frac{z}{\sigma(1+\sqrt{\rho})}\right) + a_{-k} \cdot \tau\left(n-k, \frac{z}{\sigma(1-\sqrt{\rho})}\right) \right] \\ &ただし \\ &a_k = (-1)^k \frac{(n+k-1)!}{(n-1)!k!(n-1-k)!} \times \frac{(1-\rho)^k (1+\sqrt{\rho})^{n-k}}{(2\sqrt{\rho})^{n+k}} \\ &a_{-k} = (-1)^n \frac{(n+k-1)!}{(n-1)!k!(n-1-k)!} \times \frac{(1-\rho)^k (1-\sqrt{\rho})^{n-k}}{(2\sqrt{\rho})^{n+k}} \end{aligned} \right\} \dots(2.1.6)$$

②  $\nu$  が半奇数の場合 ( $\nu \equiv n+1/2; n=0, 1, 2, \dots$ )

$$\left. \begin{aligned}
 &F(n+1/2, \sigma, \rho; z) \\
 &= \sum_{k=0}^{\infty} b_k \cdot \gamma(2n+2k+1, z/\sigma(1-\rho)) \\
 \text{ただし} \\
 &b_k = n!(1-\rho)^{n+1/2} \rho^k / (2n)! k! (n+k)! 2^{2k} \\
 &\dots\dots\dots(2.1.7)
 \end{aligned} \right\}$$

一方、 $\rho$  が 0 (完全独立) または 1 (完全従属) に漸近した極限状態では、累積分布は以下のようにガンマ分布で表現され、再生性をもつ。

$$F(\nu, \sigma, \rho; z) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(2\nu)} \cdot \gamma\left(2\nu, \frac{z}{\sigma}\right) & (\rho \rightarrow 0) \\ \frac{1}{\Gamma(\nu)} \cdot \gamma\left(\nu, \frac{z}{2\sigma}\right) & (\rho \rightarrow 1) \end{cases} \dots\dots\dots(2.1.8)$$

**b) 和分布のガンマ分布近似**

上記より明らかなように、相関をもつガンマ型変量の和分布はもはや厳密にはガンマ分布に従わない。しかし日ないし時間程度の任意の期間降雨量はほぼガンマ分布に従うことが種々報告されている。そこでこの知見に対応するような近似解を得ることを試みる。

まず、和  $z$  の特性関数は、式 (2.1.5) より次式となる。

$$\begin{aligned}
 Q_z(\theta) &\equiv \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\theta z} \cdot f(\nu, \sigma, \rho; z) dz \\
 &= [1 - \sigma^2(1-\rho)\theta^2 - 2\sigma\theta i]^{-\nu} \dots\dots\dots(2.1.9)
 \end{aligned}$$

これより、和の平均値  $m$ 、分散  $d^2$  およびひずみ関数  $c_s$  に添字 (2) を付記すると、それぞれ以下ようになる。

$$\left. \begin{aligned}
 m(2) &= 2\nu\sigma, \quad d^2(2) = 2\nu\sigma^2(1+\rho) \\
 c_s(2) &= 2\{4-3(1-\rho)\} (2\nu)^{-1/2} (1+\rho)^{-3/2} \\
 &\dots\dots\dots(2.1.10)
 \end{aligned} \right\}$$

この結果を利用して和分布もガンマ分布で近似し得るとしてその母数を推定する。 $\sigma(2)$  の近似値を  $\sigma(2)'$  のように表わすと、詳細は省略するが、平均値と分散とが厳密解と近似解とで一致するという条件から、近似母数および近似累積分布はそれぞれ式(2.1.11)および式(2.1.12)となる<sup>10)</sup>。

$$\nu(2)' = 2\nu/(1+\rho), \quad \sigma(2)' = \sigma(1+\rho) \dots\dots(2.1.11)$$

$$F(\nu', \sigma', \rho; z) = \{\Gamma(\nu(2)')\}^{-1} \cdot \gamma(\nu(2)', z/\sigma(2)') \dots\dots\dots(2.1.12)$$

**c) 近似の誤差評価**

近似解では 2 次以下の積率に関して完全な一致が得られたが、当然 3 次以上の積率を用いる統計量には誤差を生ずる。これを実用的に 3 次の積率を用いたひずみ係数の近似の程度で評価する。すなわち、ひずみ係数  $c_s(2)$  の近似度  $\alpha[c_s(2)]$  は、式 (2.1.10), (2.1.11) より、

$$\alpha[c_s(2)] \equiv c_s(2)' / c_s(2) = (1+\rho)^2 / (1+3\rho) \dots\dots\dots(2.1.13)$$

で求められる。 $\alpha[c_s(2)]$  は  $\rho$  のみの関数となり、その関係を 図-1 に示す。

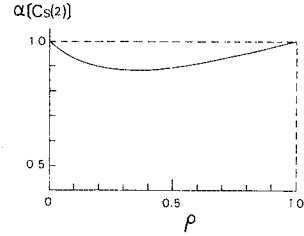


図-1 相関母数とひずみ係数の近似度との関係

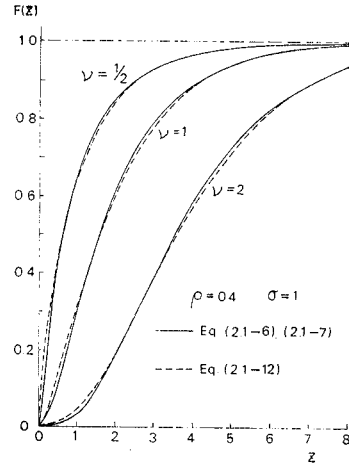


図-2 和の累積分布の厳密解と近似解

すなわち、 $\alpha[c_s(2)]$  は一般に 1 に近く、最小値でも 0.889 ( $\rho=0.33$ ) で、近似度は十分に高い。また、 $\rho$  が 0 または 1 に漸近するにつれて、 $\alpha[c_s(2)]$  は 1 に、したがって近似解は厳密解に漸近する。

次に、これを累積分布の値として、厳密解、式(2.1.6), (2.1.7) と近似解、式 (2.1.12) とを比較し誤差を調べる。具体的検討は、 $\sigma=1$  とし、 $\nu=1/2, 1, 2$  および  $\rho=0.1(0.1)0.9$  について行っているので文献<sup>11)</sup>を参照されたいが、誤差の大きくなる 1 例を 図-2 に示すに止める。

図のように、近似解では密度分布が若干平滑化される傾向はあるが近似度は十分高い。さらに治水計画問題となる  $z$  の大きい領域、すなわち累積分布の値が 1 に近い領域での近似の精度は非常に高く、十分実用性を有することがわかる。

**(2) ガンマ型多変量の和分布**

上述の近似の許容されるような最小の単位期間ごとの降雨量時系列を、式 (2.1.1) より、

$$\{R(T=1, t=i)\} \equiv \{R(1, i)\} \equiv \{R_i(i)\} \quad (i=1, 2, \dots)$$

と表現する。これを  $\{R(i)\}$  と略記すると、 $R(i)$  はガンマ分布に従い、各母数に単位期間を意味する (1) を付すと、以下のように表記できる。

$$R(i) \in G(\nu(1), \sigma(1); \rho(1)) \quad (i=1, 2, \dots)$$

次に、継続する単位期間降雨量の和、たとえば  $R(1) + R(2)$  が同様にガンマ分布に従うとすれば、それを

$$R(1) + R(2) \in G(\nu(2)', \sigma(2)'; \rho(2))$$

と記すと、上式右辺に含まれる母数は次式で近似できる。

$$\nu(2)' = 2 \cdot \nu(1) / \{1 + \rho(1)\}, \quad \sigma(2)' = \sigma(1) \{1 + \rho(1)\} \dots\dots\dots (2.2.1)$$

さらに、 $\{R(1) + R(2)\} + \{R(3) + R(4)\} \in G(\nu(4)', \sigma(4)'; \rho(4))$  であれば、同様に、次式が成り立つ。

$$\left. \begin{aligned} \nu(4)' &= 2^2 \cdot \nu(1) / \{1 + \rho(1)\} \{1 + \rho(2)\} \\ \sigma(4)' &= \sigma(1) \{1 + \rho(1)\} \{1 + \rho(2)\} \end{aligned} \right\} \dots\dots (2.2.2)$$

同様に、一般に単位期間の  $2^n (n=0, 1, 2, \dots)$  倍の期間長に対する降雨量、 $R(1) + R(2) + \dots + R(2^n)$  が

$$R(1) + R(2) + \dots + R(2^n) \in G(\nu(2^n)', \sigma(2^n)'; \rho(2^n))$$

ならば

$$\left. \begin{aligned} \nu(2^n)' &= 2^n \cdot \nu(1) / \prod_{i=1}^n \{1 + \rho(2^{i-1})\}, \\ \sigma(2^n)' &= \sigma(1) \cdot \prod_{i=1}^n \{1 + \rho(2^{i-1})\} \end{aligned} \right\} \dots\dots (2.2.3)$$

が成り立つ。なお、その場合ひずみ係数  $c_s(2^n)'$  は

$$\left. \begin{aligned} c_s(2^n)' &\equiv 2 / \sqrt{\nu(2^n)'} \\ &= c_s(1) / \sqrt{\prod_{i=1}^n \{[1 + \rho(2^{i-1})] / 2\}} \\ \text{ここに} \\ c_s(1) &= 2 / \sqrt{\nu(1)} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2.2.4)$$

となる。

次に、 $\rho(2^{i-1})$  の特別な場合を考えておく。まず  $\rho(2^{i-1}) \rightarrow 1$  ならば式 (2.2.3), (2.2.4) より、 $\nu(2^n)' \rightarrow \nu(1)$  および  $c_s(2^n)' \rightarrow c_s(1)$ 、すなわち相関が非常に強ければ、和分布はもとの単位期間降雨量の分布形と変わらなくなる。他方、 $\rho(2^{i-1}) \rightarrow 0$  なら、 $\nu(2^n)' \rightarrow 2^n \cdot \nu(1)$ 、 $c_s(2^n)' \rightarrow c_s(1) / \sqrt{2^n}$ 、したがって  $n$  が十分大きければ、 $\nu(2^n)' \rightarrow \infty$ 、 $c_s(2^n)' \rightarrow 0$ 、換言すれば、非常に多数のガンマ型変量の和は、相関が非常に弱い場合には正規分布に漸近する。これはいわゆる中心極限定理の拡張された表現と解釈できる。

以上によって、ある基準期間に対する降雨量を単位期間に分割した際の降雨量の分布形状を推定するには、前述の経過を逆にたどればよい。ただし、そのためには、任意の期間降雨量時系列に対する自己相関の特性を把握しておく必要がある。

### 3. 降雨量時系列の自己相関モデル

いうまでもなく、このようなモデル構成には豪雨量時系列の実態解明が基礎となるべきであるが、この方面の

研究が十分でない現状では、まず簡単な理論モデルから出発してみる。

#### (1) 基礎仮定

##### a) 弱定常性

降雨量時系列  $\{R(i)\}$  に関する 2 次以下の積率についての統計量は、以下のようである。まず、平均値と分散は

$$\left. \begin{aligned} m &\equiv E[R(i)] = \nu(1) \cdot \sigma(1), \\ d^2 &\equiv E[\{R(i) - m\}^2] = \nu(1) \cdot \{\sigma(1)\}^2 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (3.1.1)$$

次に、相関母数  $\rho$  は、従来の研究により積率解では通常の標本相関係数と合致する<sup>12)</sup>ので、単位期間ずれの自己相関係数は次式で表わされることになる。

$$\rho \equiv E[\{R(i) - m\} \{R(i+1) - m\}] / d^2 \dots\dots\dots (3.1.2)$$

以下、これらの諸量が時点  $i$  に無関係な定数、すなわち弱定常性と仮定して考察を進める。

##### b) 線型 1 次自己回帰モデル

あい継続する降雨量時系列  $R(i)$ ,  $R(i+1)$  の関係として、式 (2.1.4) で定義される分布では回帰曲線が線型回帰をなす<sup>13)</sup>ことに着目して、簡単に次式の線型 1 次の自己回帰モデルを仮定する。ただし、右辺第 2 項の  $\omega(i)$  は線型回帰からの偏差項、すなわちランダム項であり、 $E[\omega(i)] = 0$  である。

$$\{R(i+1) - m\} / d = \rho \{R(i) - m\} / d + \omega(i) \dots\dots\dots (3.1.3)$$

#### (2) 継続期間と自己相関係数の関係

基準期間長を  $S$  とし、 $S$  が  $2^n$ 、ただし  $n=0, 1, 2, \dots$ 、の場合（以後簡単に倍数系列の場合という）とそのほかの任意分割の場合に分けて議論する。

##### a) 倍数系列の分割の場合

$R(i)$  に関してずれ  $\tau$  の自己相関係数  $\rho[\tau]$  を次式のよう

$$\rho[\tau] \equiv E[\{R(i) - m\} \{R(i+\tau) - m\}] / d^2 \dots\dots\dots (3.2.1)$$

若干の計算により、 $\tau=2$  の自己相関係数は次式となる。

$$\left. \begin{aligned} \rho[2] &= \rho^2 + E_r \\ \rho &\equiv \rho[1], \quad E_r \equiv E[\omega(i+1) \cdot R(i)] / d \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (3.2.2)$$

上式中の  $E_r$  は、変量  $R(i)$  と、 $R(i+1)$  より  $R(i+2)$  への推定に回帰直線を用いた際の誤差  $\omega(i+1)$  との相互相関に関連し、 $R(i)$  が正規分布に従えば当然 0 となる。しかし、いまの場合にはその保証はない。そこで、同時密度分布  $f(R(i+2), R(i+1), R(i))$  に対して、いま 1 次の自己回帰モデルを仮定していることを考え、 $R(i)$  の生起下における  $R(i+1)$  の条件付分布を  $f(R(i+1)|R(i))$  と記すと、次式が成り立つ。

$$\begin{aligned}
 & f(R(i+2), R(i+1), R(i)) \\
 &= f(R(i)) \cdot f(R(i+1)|R(i)) \\
 & \cdot f(R(i+2)|\{R(i+1), R(i)\}) \\
 & \equiv f(R(i)) \cdot f(R(i+1)|R(i)) \\
 & \cdot f(R(i+2)|R(i+1)) \dots\dots\dots(3.2.3)
 \end{aligned}$$

上式および採用した二変数ガンマ分布の線型回帰特性など

$$\left. \begin{aligned}
 & \int_0^\infty R(i+2) \cdot f(R(i+2)|R(i+1)) \cdot dR(i+2) \\
 &= m + \rho\{R(i+1) - m\} \\
 & \int_0^\infty f(R(i+2)|R(i+1)) \cdot dR(i+2) = 1 \\
 & \dots\dots\dots(3.2.4)
 \end{aligned} \right\}$$

を用いると、詳細は省略するが、恒等的に  $E_r \equiv 0$  が証明される。結局、いまの場合、式 (3.2.2) より  $\rho[2] = \rho^2$ 、さらに一般的にずれ  $\tau$  の自己相関係数に関しては  $\rho[\tau] = \rho^\tau$  ( $\tau=0, 1, 2, \dots$ ).....(3.2.5)

の成立が明らかとなる。

上式と式 (2.2.1) より、 $\{R(1)+R(2)\}$  と  $\{R(3)+R(4)\}$  のようなあい継続する2単位期間の降雨量相互間の相関係数は次式で表わされる。

$$\rho(2) = \rho(1) \cdot \{1 + \rho(1)\} / 2$$

さらに一般的に、 $S=2^n$  ( $n$  は自然数) 単位期間の降雨量に対しては、次式の漸化式

$$\rho(2^i) = \rho(2^{i-1}) \cdot \{1 + \rho(2^{i-1})\} / 2 \quad \left. \dots\dots\dots(3.2.6) \right\}$$

$(i=1, 2, \dots, n)$

が成り立つ。結局、以上により、 $\rho(S) = \rho(2^n)$  と  $\rho(1)$  の関係が明確になったわけである。

**b) 任意分割の場合**

前出の式 (3.2.6) は、倍数系列の分割に対してのみ成り立つものであった。そこで、任意の正数  $S$  について成り立つ近似式を求める。これを著者は上式で  $n=0, 1, 2$  の3点で適合する近似多項式として求めると次式のようになり、この結果は江藤らの結果と同じ形である。ただし、ダッシュは近似値を示す。

$$\begin{aligned}
 \rho(S)' &= \rho(1) [S\{1 - \rho(1)^2\} \\
 & - 2\rho(1)\{1 - \rho(1)^S\}] / S^2\{1 - \rho(1)\}^2 \\
 & \dots\dots\dots(3.2.7)
 \end{aligned}$$

上式は  $S=1, 2, 4$  については式 (3.2.6) と完全に一致し、さらに  $S \approx 2^n$  ( $n=0$ , 正整数) でも使用できることが予想される。

そこで、 $S=8, 16, 32$  を代入して式 (3.2.7) の近似の程度を調べる。図-3 は、横軸に真値  $\rho(1)$ 、縦軸に相対誤差  $\epsilon_R = \{\rho(1)' - \rho(1)\} / \rho(1)$  を採ったもので、 $\rho(1)'$  は式 (3.2.7) による  $\rho(S)' = \rho(S)$  からの  $\rho(1)$  の近似推定値である。これによると、 $\epsilon_R$  の各  $S$  についての最大値は、 $S=8, 16, 32$  でそれぞれ 1.8%, 4.6%, 7.0% である。

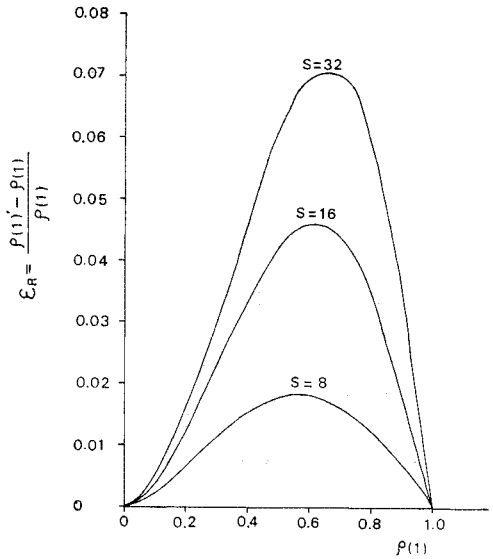


図-3 任意分割 ( $S \neq 2^n, n=0, 1, 2, \dots$ ) 近似式の相対誤差

すなわち、対象としている日あるいは24時間程度の雨量時系列から1時間程度以上の期間雨量時系列への分割では、自己相関係数の推定に式 (3.2.7) を使った際の相対誤差は概略数 % 以内である。さらに上記以外の任意の  $S(\approx 2^n)$  分割の場合にも、上記結論は演繹し得ることは自明であろう。

以上により、任意の基準期間  $S$  に対する自己相関係数  $\rho(S)$  から単位期間に対する自己相関係数  $\rho(1)$  の推定が可能となる。したがって、基準期間長  $S$  に対する降雨量分布が  $G(\nu(S), \sigma(S); \rho(S))$  として既知であれば、それを任意の単位期間に分割した際の分布は、 $G(\nu(1), \sigma(1); \rho(1))$  として容易に求められる。すなわち、任意の  $S$  に対して、式 (3.2.6) または式 (3.2.7) から  $\rho(S)$  より  $\rho(1)$  が求まり、さらに式 (2.2.3) より、

$$\begin{aligned}
 \nu(1) / \nu(S) &= \sigma(S) / \{S \cdot \sigma(1)\} = \rho(S) / \rho(1) \\
 & \dots\dots\dots(3.2.8)
 \end{aligned}$$

が得られる。結局、 $\nu(1)$  および  $\sigma(1)$  という単位期間に対する降雨量分布の形状母数および尺度母数が計算できたことになる。

**4. 継続時間と確率雨量配分率の関係**

**(1) 短時間配分への基礎条件の設定**

前述のように、基準期間に対する雨量時系列特性が既知であれば、単位期間の雨量分布は推定される。そこで、単位期間の雨量分布の推定に必要な図を作製するが、以下そのための基礎条件を設定する。

① 相関母数

基準期間の相関母数  $\rho(S)$  には、豪雨を生ずる気象原因に応じた適切な数値の存在が予想されるが、詳細は不明である。短時間での豪雨時系列の相関として通常正と考えられるので、 $\rho(S)$  は 0 と 1 の間を考え、以下の値を与えて計算を行っている。すなわち、 $\rho(S)=0, 0.05, 0.1 (0.1) 0.9, 0.95, 1$  を設定しておく。

② 尺度母数

尺度母数は、降雨量の大きさを表現する際の換算尺度である。したがって  $\sigma(S) \equiv 1$  としても一般性を失わない。

③ 形状母数

基準期間に日あるいは 24 時間程度を採用しているので、その降雨量分布は、指数分布ないしはそれより若干ひずんだ逆 J 字型となる。そこで  $\nu(S)$  を 1 ないし 1/2 程度と考え、具体的には  $\nu(S)=1, 3/4, 1/2$  を設定しておく。

さて、上記の諸条件の下で、24 時間程度を基準として、それ以下 1 時間程度までの配分を対象とする。具体的には、 $S=1, 1.5, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24, 32, 48$  としている。なお、分割数  $S$  と継続時間  $T$  の関係は、基準期間に 24 時間を採用すれば、次のように表わせる。

$$T=24/S \text{ あるいは } S=24/T \dots\dots\dots(4.1.1)$$

すなわち、この場合、設定した  $S$  に対する  $T$  の値は、 $T=24, 16, 12, 8, 6, 4, 3, 2, 3/2, 1, 1/2$  時間である。

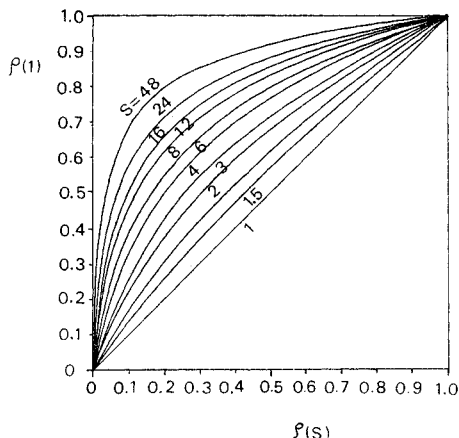


図-4  $\rho(S)$  と  $\rho(1)$  の関係

(2) 確率雨量配分率の計算

以後、新たに単位期間およびその  $S$  倍の期間に対する降雨量を  $R(1)$  および  $R(S)$  と記す。特に基準期間の  $S$  等分割期間降雨量を強調する場合には、単位期間雨量  $R(1)$  を  $R^{(S)} \equiv [R(S)]_{s=1}$  と書くことにする。したがって、ここでは、既知の基準期間雨量に対する統計量から、所与の超過確率  $F$  に対する単位期間雨量  $R^{(S)}$ 、あるいは、基準期間雨量  $R^{(1)}$  の単位期間雨量  $R^{(S)}$  への配分率  $R^{(S)}/R^{(1)}$  を算定する手順を説明する。もちろん、 $R^{(1)} \equiv [R(S)]_{s=1} = R(S)$  である。

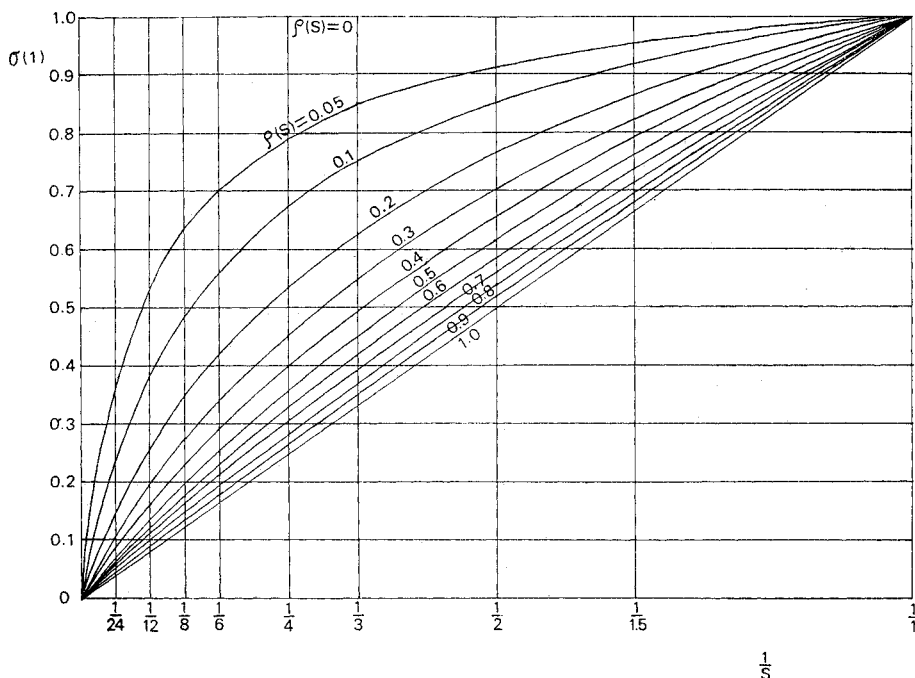


図-5  $\rho(S)$  と  $\sigma(1)$  の関係

a) 各種母数の計算

まず基準期間雨量に対する各母数, すなわち相関母数  $\rho(S)$ , 尺度母数  $\sigma(S)$ , 形状母数  $\nu(S)$  から単位期間雨量に対するそれぞれ  $\rho(1)$ ,  $\sigma(1)$ ,  $\nu(1)$  を計算する。

① 相関母数

$S=2^n$  ( $n$ : 正整数) に対する相関母数  $\rho(S)$  が既知の場合には,  $\rho(1)$  は漸化式 (3.2.6) より求められる。ついで,  $S \neq 2^n$  の任意分割の場合には, 式 (3.2.7) において  $S$  と  $\rho(S)$  を与えて  $\rho(1)$  に関する  $(S+2)$  次方程式を解けばよい。具体的に  $S=3 \times 2^{n-1}$  ( $n$ : 正整数)

に対しては, まず  $S=1.5$  に対する  $\rho(1)$  を式 (3.2.7) より求め, その結果を漸化式 (3.2.6) に適用して,  $S=3, 6, 12, \dots$  に対する  $\rho(1)$  を算出している。求められた  $\rho(S)$  と  $\rho(1)$  の関係を 図-4 に示す。

② 尺度母数

前出の式 (3.2.8) で,  $\sigma(S)=1$  とおき, 尺度母数  $\sigma(1)$  は次式で求められ, その結果を 図-5 に示す。

$$\sigma(1) = \rho(1) \cdot \sigma(S) / S \cdot \rho(S) = \rho(1) / S \cdot \rho(S) \quad \dots\dots\dots(4.2.1)$$

③ 形状母数

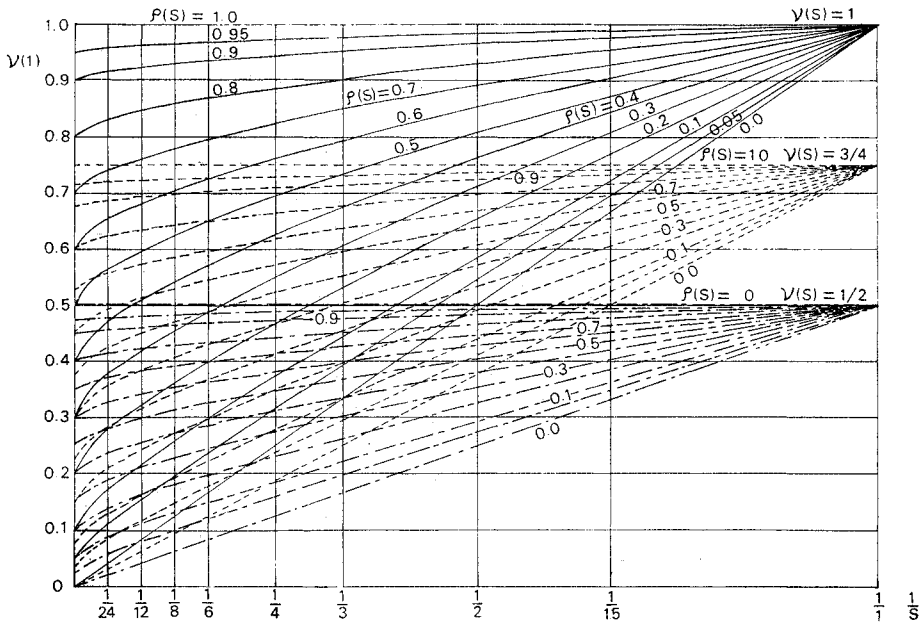


図-6  $\rho(S)$  と  $\nu(1)$  の関係

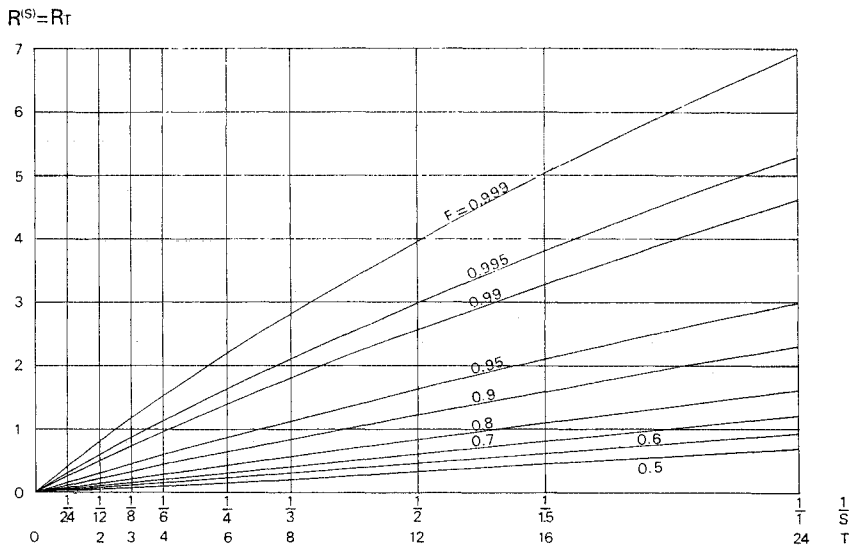


図-7 分割数  $S$ , 単位期間降雨量  $R^{(S)}$ , および非超過確率  $F$  の関係 ( $\nu(S)=1, \rho(S)=0.5$ )

同様に、式 (3.2.8) より、 $\nu(1)$  は次式で求められ、その結果を図-6 に示す。

$$\nu(1) = \rho(S) \cdot \nu(S) / \rho(1) \dots\dots\dots(4.2.2)$$

**b) 確率雨量配分率の計算**

前述のように、形状母数  $\nu$ 、尺度母数  $\sigma$  のガンマ分布に従う降雨量  $R$  の非超過確率  $F(R)$  は、式 (2.1.3) で求められる。ここで、 $\nu \equiv \nu(1)$ 、 $\sigma \equiv \sigma(1)$  と記せば、所与の  $S$ 、 $\rho(S)$ 、 $\sigma(S)$ 、 $\nu(S)$  に対して、 $\nu$ 、 $\sigma$  は上述のように既知となり、非超過確率  $F$  を指定すれば  $R \equiv R(1)$  が計算できる。すなわち、降雨量  $R$  を

$$\xi \equiv R/\sigma, R \equiv [R(S)]_{S=S}, \sigma \equiv \sigma(1) \dots(4.2.3)$$

により規準化変量  $\xi$  に変換して表示すると、式 (2.1.3) は尺度母数に無関係な次式で簡単に計算できる。

$$F(\xi) = \frac{1}{\Gamma(\nu)} \cdot \gamma(\nu, \xi) = \frac{1}{\Gamma(\nu)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \xi^{\nu+n}}{n! \cdot (\nu+n)} \dots\dots\dots(4.2.4)$$

したがって、 $F$  に対応する  $\xi$  を  $\xi_F$  と記すと、所与の  $F$  に対して上式より  $\xi_F$  を求め、この  $\xi_F$  から単位期間降雨量 (基準期間の  $S$  分割期間雨量)  $R^{(S)}$  が次式で計算される。

$$R^{(S)} \equiv [R(S)]_{S=S} = [\xi_F \cdot \sigma(S)]_{S=S} = [\xi_F]_{S=S} \cdot \sigma(1) \dots\dots\dots(4.2.5)$$

図-7 は、 $\nu(S)=1$ 、 $\rho(S)=0.5$  の計算例で、分割数  $S$ 、単位期間雨量  $R^{(S)}$  および非超過確率  $F$  の関係を示したものである。

なお、同図の横軸  $T$  は、基準期間に 24 時間を採用した場合の  $S$  分割期間長で、 $T$ 、 $S$  の間には、式 (4.1.1) の関係があり、 $R_{24} = R^{(1)}$ 、 $R_T = R^{(S)}$  である。

以上を表現の便宜上、基準期間雨量  $R^{(1)}$  の単位期間雨量への配分率  $R^{(S)}/R^{(1)}$ 、すなわち慣用的表現では、24 時間雨量  $R_{24}$  の  $T$  時間雨量への配分率  $R_T/R_{24}$  で表現しておく。図-8 は 図-7 に対するものである。

**c) 完全独立、完全従属状態の考察**

以下、基準期間雨量の相関母数  $\rho(S)$  が 0 あるいは 1 の場合について考察する。

**① 完全独立の場合**

まず、 $S=2^n$  ( $n$ : 正整数) について考える。式 (3.2.6) より  $\rho(S)=0$  ならば  $\rho(1)=0$  である。さらに、 $\rho(2^n)$  を  $\rho \equiv \rho(1)$  のべき級数で表わすと

$$\rho(2^n) = \rho \cdot (1 + c_1 \rho + c_2 \rho^2 + \dots) / 2^n$$

となり、ここに  $c_1, c_2, \dots$  は  $n$  のみに関係する定数である。 $S=2^n$  とおけば、 $\rho \equiv \rho(1) \rightarrow 0$  のときには、 $\rho(S)/\rho(1) \rightarrow 1/S$  が、さらに  $S \equiv 2^n$  のときにも式 (3.2.7) よりまったく同じ結果が得られる。以上を式 (3.2.8) に用いると次式が求められる。

$$\left. \begin{aligned} \nu(1) &= \nu(S) \cdot \rho(S) / \rho(1) = \nu(S) / S \\ \sigma(1) &= \sigma(S) \cdot \rho(1) / S \cdot \rho(S) = \sigma(S) \equiv 1 \\ R^{(S)} &= [\xi_F]_{S=S} \cdot \sigma(1) = [\xi_F]_{S=S} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(4.2.6)$$

たとえば、 $\nu(S)=1$  の場合、 $F$  と  $R^{(S)} = [\xi_F]_{S=S}$  の関係は 図-9 のようになる。この  $\nu(S)=1$  の計算結果を利用すれば、 $\nu(S)=3/4, 1/2$  の場合の  $F \sim R^{(S)}$  の計算も容易であることは自明であろう。

**② 完全従属の場合**

式 (3.2.6) より  $\rho(S)=1$  となり、これを式 (3.2.8) に用いると、次式が得られる。

$$\nu(1) = \nu(S) \cdot \rho(S) / \rho(1) = \nu(S)$$

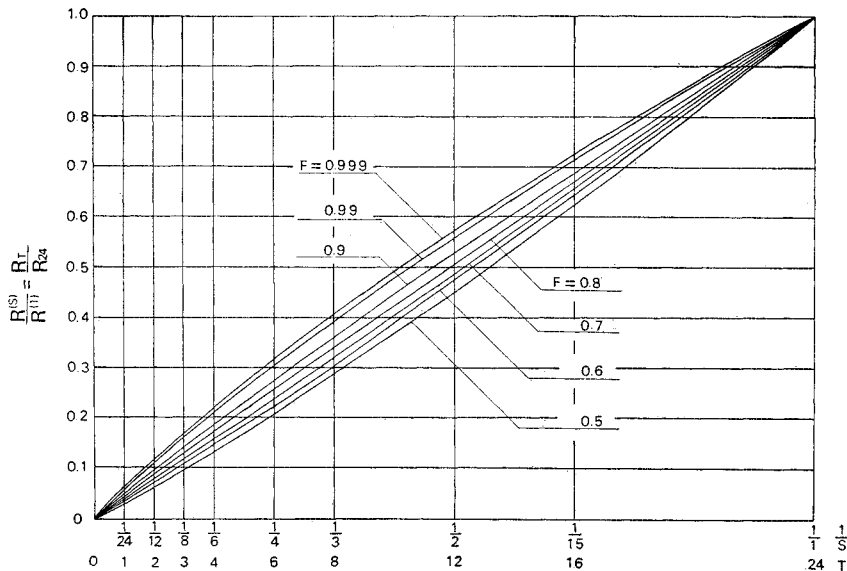


図-8 降雨配分率  $R^{(S)}/R^{(1)}$ 、分割数  $S$  と非超過確率  $F$  の関係 ( $\nu(S)=1$ 、 $\rho(S)=0.5$ )



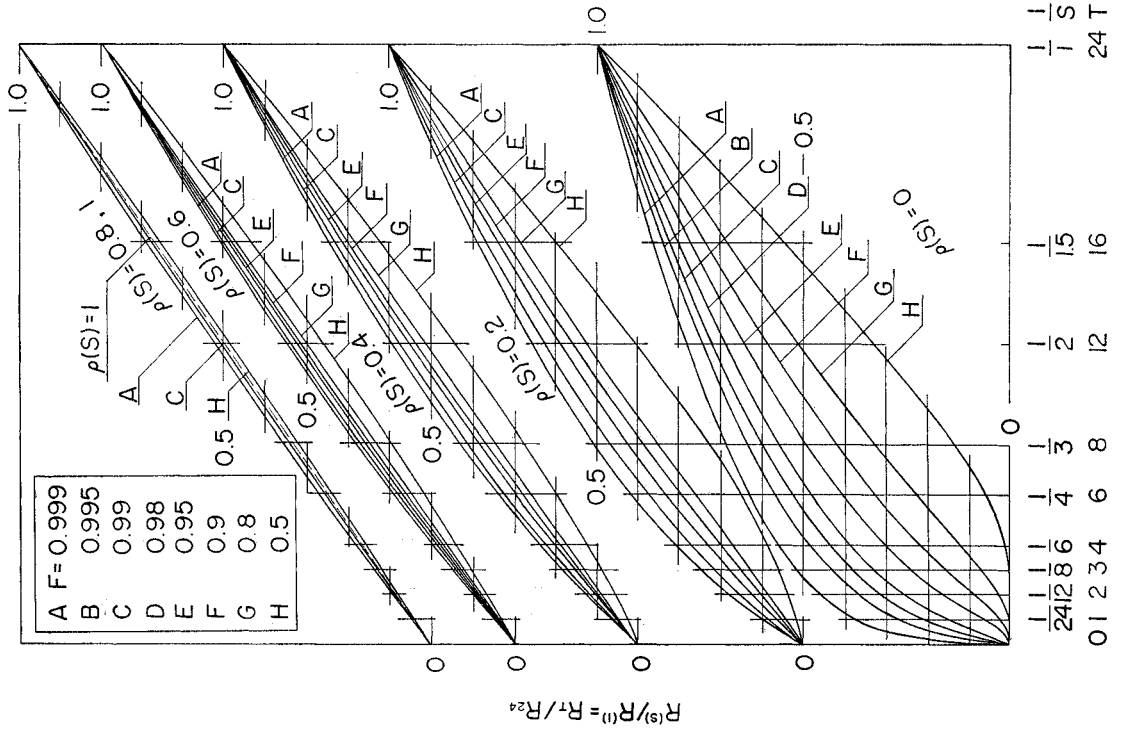


図-10 確率雨量配分率曲線  $\nu(S)=1$

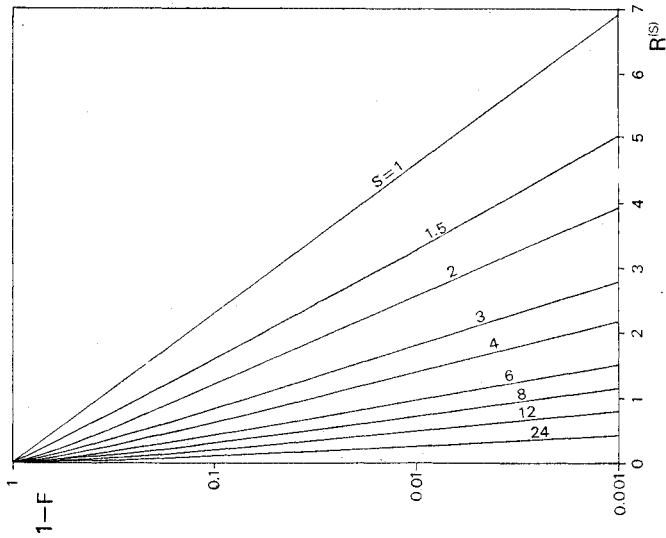
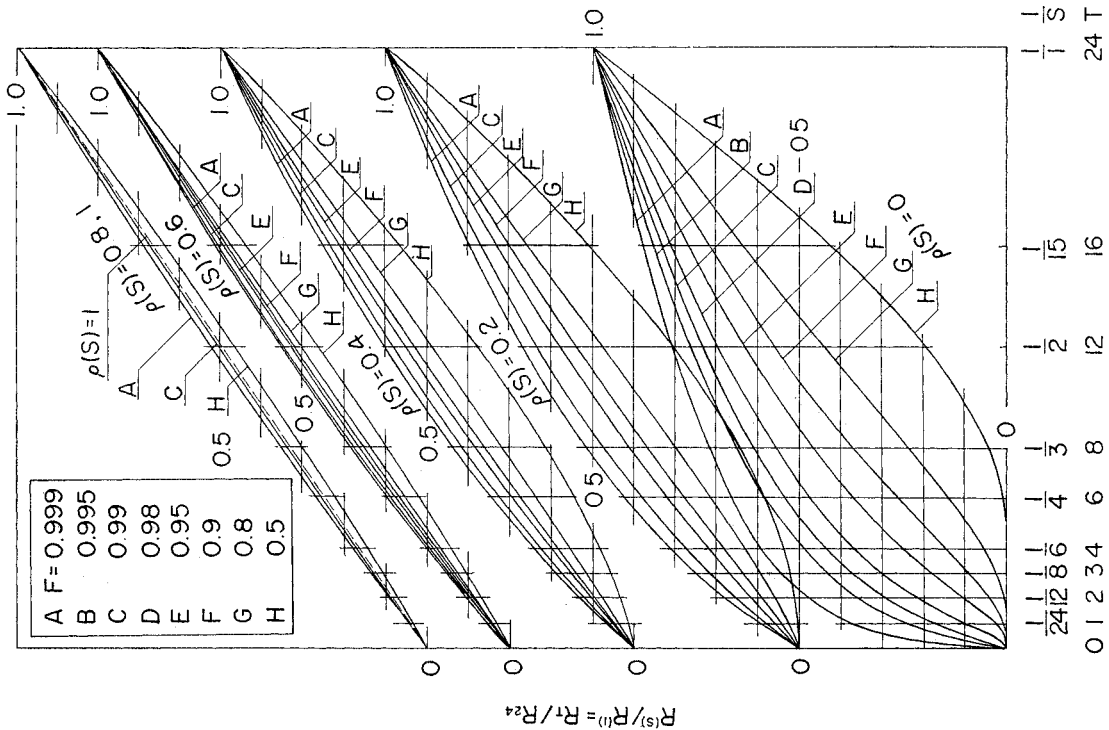
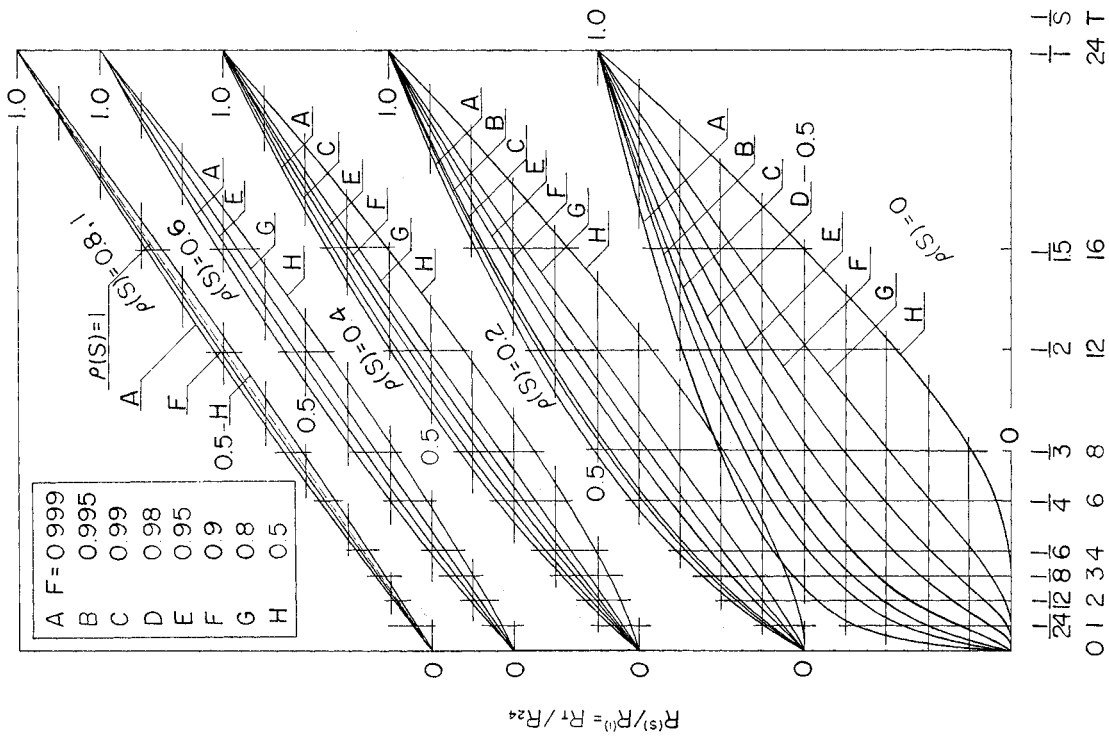


図-9 単位期間降雨量  $R^{(s)}$  と超過確率  $(1-F)$  の関係  
( $\nu(S)=1, \rho(S)=0.5$ )



圖一11 確率雨量配分率曲線  $\nu(S)=3/4$



圖一12 確率雨量配分率曲線  $\nu(S)=1/2$

表一 完全従属の場合における非超過確率  $F$  と基準期間降雨量  $R^{(1)}$  の関係

$F$	$\nu(S)$	1	3/4	1/2
0.999		6.907755	6.213303	5.414049
0.995		5.298317	4.665537	3.939747
0.99		4.605170	4.004461	3.317457
0.95		2.995732	2.490098	1.920730
0.9		2.302585	1.852130	1.352772
0.8		1.609438	1.229561	0.821187
0.7		1.203973	0.876895	0.537097
0.6		0.916291	0.634888	0.354163
0.5		0.693147	0.454167	0.227468

$$\left. \begin{aligned} \sigma(1) &= \sigma(S) \cdot \rho(1) / S \cdot \rho(S) = 1/S \\ R^{(S)} &= [\xi_F]_{S=S} \cdot \rho(1) = [\xi_F]_{S=S} / S \end{aligned} \right\} \dots (4.2.7)$$

この場合形状母数は分割によって変わらないから、 $[\xi_F]_{S=S}$  は  $S$  に無関係、したがって

$$R_T = R_{24} / S = R_{24} / (T/24) \dots (4.2.8)$$

すなわち、同じ超過確率に対する  $T$  時間確率雨量  $R_T$  は期間長  $T$  に比例することになる。

対象とする  $\nu(S)$  および  $F$  の大きい領域に対する基準期間確率雨量  $R^{(1)} = [\xi_F]_{S=1}$  の値を表一に示す。問題とする程度の  $\nu(S)$  および  $F$  の範囲では、 $\nu(S)$  が増すにつれて、同一の  $F$  に対する  $\xi_F$  の値が増すことが分る。

(3) 確率雨量配分率曲線とその特性

a) 確率雨量配分率曲線の図示

以後、上述の  $S \sim R^{(S)} / R^{(1)}$  曲線を確率雨量配分率曲線とよぶ。これを、 $F$  をパラメーターとし、 $\nu(S) = 1, 3/4, 1/2$  に対する曲線として図示したのが、図-10, 11, 12 である。なお、各図最上部の破線は  $\rho(S) = 1$  の曲線である。

b) 確率雨量配分率曲線の一般的特性

これらの図より、各関係要因について以下のような傾向を読み取ることができる。

①  $\nu(S)$  の影響

任意の  $S$  に対する  $R^{(S)} / R^{(1)}$  の値は、 $F$  が大きくなれば 1 に、 $F$  が小さくなれば 0 に近づく。計算した  $F$  の領域でのこのような  $R^{(S)} / R^{(1)}$  の変動域の範囲は、 $\nu(S)$  が小さいと広く、 $\nu(S)$  が大きいと狭くなる。

②  $\rho(S)$  の影響

任意の  $S$  に対して、 $\rho(S)$  の値が大きくなると、 $R^{(S)} / R^{(1)}$  の存在範囲は狭くなり、最終的に  $\rho(S) = 1$  では直線に収束する。逆に  $\rho(S)$  が 0 に近づくとき、存在範囲は広がるが、 $\rho(S) = 0$  では各  $F$  に応じた配分率曲線形が存在する。

③  $F$  の影響

$F$  が大きくなると配分率曲線は上に凸に、逆に  $F$  が小さくなると、次第に上に凹に移行し、その中間に直線

に近い遷移状態が介在する。

④  $F \rightarrow 1$  および  $\rho(S) \rightarrow 0$  の極限

$F$  が十分 1 に近づき、かつ  $\rho(S) \rightarrow 0$  ならば、配分率曲線は指数関数形  $(1/S)^\alpha = (T/24)^\alpha$  に漸近する。ここに、 $\alpha$  は  $0 < \alpha < 1$  の定数であり、その値は  $F$  が 1 に近づくにつれて減ずる。

以上の諸特性を勘案して、任意の継続期間に対する確率雨量配分率の推定式を理論的に誘導してみる。

5. 確率雨量配分率曲線の推定式の誘導

(1) 規準化確率雨量の近似的表現

確率雨量配分率の計算の基礎になっているのは、前出の式 (4.2.4) における非超過確率  $F$  に対する規準化確率雨量  $\xi_F$  の算定である。これには第 1 種不完全ガンマ関数  $\gamma(\nu, \xi)$  の計算が必要で、 $\xi_F$  は  $F$  について直接的に表現することはできない。そこで、概略の  $\xi_F$  の値を知るために、 $\xi$  がかなり大、かつ  $\nu$  が 1 の近傍の数という仮定の下に、 $\xi_F$  の直接的表現を行ってみる。

式 (4.2.4) を書き直すと、次式のようになる。

$$1 - F = \Gamma(\nu, \xi) / \Gamma(\nu), \quad \Gamma(\nu, \xi) = \Gamma(\nu) - \gamma(\nu, \xi) \dots (5.1.1)$$

さて、 $|\xi|$  の大きい値に対する  $\Gamma(\nu, \xi)$  の漸近的表現は次のようである<sup>14)</sup>。

$$\begin{aligned} \Gamma(\nu, \xi) &= \xi^{\nu-1} \cdot e^{-\xi} \left[ \sum_{m=0}^{M-1} \frac{(-1)^m \cdot \Gamma(1-\nu+m)}{\xi^m \cdot \Gamma(1-\nu)} \right. \\ &\quad \left. + O(|\xi|^{-M}) \right] \\ &[ |\xi| \rightarrow \infty, M=1, 2, \dots ] \end{aligned}$$

具体的に、 $M=2, \xi > 0$  とすると、次式が成り立つ。

$$\Gamma(\nu, \xi) = \xi^{\nu-1} \cdot e^{-\xi} \left[ 1 - (1-\nu)/\xi + O(\xi^{-2}) \right]$$

いま、 $\xi \gg 1, \nu \approx 1$  と仮定すると、 $O(\xi^{-2})$  はそれ以前に比して無視できるので、それを式 (5.1.1) に代入すれば、結局次式が得られる。

$$1 - F = \xi^{\nu-1} \cdot e^{-\xi} \{ 1 - (1-\nu)/\xi \} / \Gamma(\nu) \dots (5.1.2)$$

さらに簡略化するために、上式の対数を取り、その右辺中で以下の近似を使用する。

$$\begin{aligned} \log \xi &= 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k-1} \left( \frac{\xi-1}{\xi+1} \right)^{2k-1} \approx 2 \frac{\xi-1}{\xi+1} \\ \log \left( 1 - \frac{1-\nu}{\xi} \right) &= - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \left( \frac{1-\nu}{\xi} \right)^k \\ &\approx - \frac{1-\nu}{\xi} \approx - \frac{1-\nu}{\xi+1} \end{aligned}$$

結局、式 (5.1.2) は  $\xi$  に関する次の 2 次方程式となる。

$$\begin{aligned} \xi^2 + [\log(1-F) + \log \Gamma(\nu) + 2(1-\nu) + 1] \xi \\ + [\log(1-F) + \log \Gamma(\nu) - (1-\nu)] = 0 \dots (5.1.3) \end{aligned}$$

当然、 $\xi$  が実在するためには、2 次方程式の判別式が正

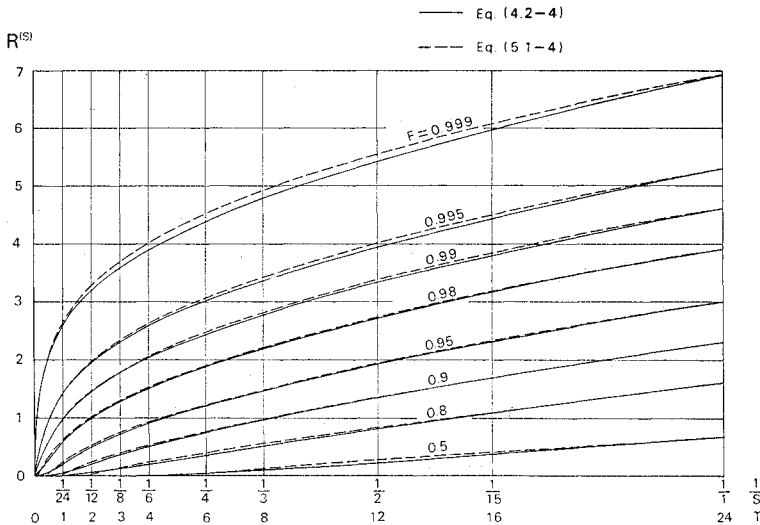


図-13 厳密式と近似式による確率標準化雨量の比較

でなければならない。いま、

$$A \equiv \log(1-F) + \log \Gamma(\nu) - (1-\nu)$$

と記すと、 $A < 0$  の際の次式の正根のみが条件を満たす解となる。

$$\xi_F = \frac{-\{\log(1-F) + \log \Gamma(\nu) + 2(1-\nu) + 1\} + \sqrt{\{\log(1-F) + \log \Gamma(\nu) + 2(1-\nu) - 1\}^2 + 12(1-\nu)}}{2} \dots (5.1.4)$$

以上により、標準化確率雨量  $\xi_F$  が、近似的ではあるが、陽の形で表現された。

さて、従来の雨量配分理論はそのほとんどが雨量時系列の独立性を基礎にしていたと考えられる。そこで、たとえば  $\nu(S)=1, \rho(S)=0$  について、厳密式(4.2.4)と近似式(5.1.4)を比較したのが、図-13である。すなわち、分割数  $S$  が非常に大きければ両者に若干の差が認められるが、実用上問題となる  $S \leq 24$  程度ではきわ

表-2 完全独立の場合の降雨配分率曲線  $\frac{R_T}{R_{24}} = \left(\frac{T}{24}\right)^\alpha$  における指数、非超過確率および形状母数の関係

$F$	$\nu(S)$	1	3/4	1/2
Eq. (5.2.4)		$\frac{2.5772b-3}{\xi_0 b}$	$1.1572(\sqrt{b^2+3+b})-2.25$	$0.9909(\sqrt{b^2+6+b})-1.5$
		$b = -\ln \epsilon + 1$	$b = -\ln \epsilon + 0.2967$	$b = -\ln \epsilon - 0.5724$
$\alpha$		$\xi_0 = -\ln \epsilon$	$\xi_0 = (b-2+\sqrt{b^2+3})/2$	$\xi_0 = (b-2+\sqrt{b^2+6})/2$
	0.999	0.318	0.314	0.305
	0.995	0.397	0.397	0.395
	0.99	0.443	0.448	0.450
	0.95	0.610	0.629	0.647
	0.9	0.725	0.752	0.779
$\hat{\alpha}$	0.999	0.349	0.329	0.306
	0.995	0.425	0.409	0.394
	0.99	0.471	0.458	0.449
	0.95	0.647	0.655	0.684
	0.9	0.782	0.813	0.886

めて良好な一致を示すことが他の  $\nu(S)$  についてもいえる。なお  $\nu(S)=1, \rho(S)=0$  の場合、 $S=1$  では両者が完全に一致することがわかる。

(2) 確率雨量配分率曲線の推定式

以後、理論の出発点を近似式(5.1.4)におく。簡単に、 $S=1$  に対応する  $\xi, \nu(S)$  などを  $\xi_0, \nu_0$  また  $\epsilon \equiv 1-F$  と記す。すなわち、 $\xi_0 \equiv [\xi]_{S=1} = [\xi]_{\nu=\nu_0}$  とすれば、式(5.1.4)より次式が成り立つ。

$$\xi_0 = (a + \sqrt{b^2+c})/2$$

ただし

$$\left. \begin{aligned} a &\equiv -\log \epsilon - \log \Gamma(\nu_0) - 2(1-\nu_0) - 1 \\ b &\equiv -\log \epsilon - \log \Gamma(\nu_0) - 2(1-\nu_0) + 1 \\ c &\equiv 12(1-\nu_0) \end{aligned} \right\} \dots (5.2.1)$$

$\nu_0$  以下かつ  $\nu_0$  近傍の  $\nu$  に対して、 $\xi/\xi_0$  の近似式を誘導する。すなわち、 $\delta \equiv \nu - \nu_0$  とおき、 $\delta \rightarrow 0$  のとき  $\xi$  は近似的に次式を満足する。

$$\log(\xi/\xi_0) = \log\{1 + (\xi - \xi_0)/\xi_0\} \approx (\xi - \xi_0)/\xi_0 \dots (5.2.2)$$

次に、 $\xi$  に含まれる関数  $\log \Gamma(\nu)$  を  $\nu = \nu_0$  の近傍で Taylor 展開し  $\delta \rightarrow 0$  を考える。これは、 $\delta$  の2次以上の項を無視すると、次のようになる。

$$\log \Gamma(\nu) = \log \Gamma(\nu_0) + \psi(\nu_0) \cdot \delta + \frac{\psi'(\nu_0)}{2!} \delta^2 + \dots \approx \log \Gamma(\nu_0) + \psi(\nu_0) \cdot \delta \dots (5.2.3)$$

ただし、 $\psi(\nu) \equiv d \log \Gamma(\nu) / d\nu$  である。式(5.2.1)、(5.2.3)を式(5.1.4)に用い、 $\delta$  の2次以上の項を無視すると、 $\xi$  は次式のように表わせる。

$$\xi \approx \frac{1}{2} [a + \sqrt{b^2+c}] + \frac{1}{2} \left[ \frac{\{2 - \psi(\nu_0)\} (\sqrt{b^2+c+b}) - 6}{\sqrt{b^2+c}} \cdot \delta \right]$$

最後に、 $\delta \equiv -\nu_0(1-\nu/\nu_0) \approx -\nu_0 \log(\nu/\nu_0)$  を式(5.2.2)に用いて整理すると、結局、推定の基礎式として次式が得られる。

$$\left. \begin{aligned} \xi/\xi_0 &= (\nu/\nu_0)^\alpha \\ \alpha &\equiv (\nu_0/2 \xi_0 \sqrt{b^2+c}) [\{2 - \psi(\nu_0)\} \times (\sqrt{b^2+c+b}) - 6] \end{aligned} \right\} \dots (5.2.4)$$

さて、上式に基づいて、一般的な確率雨量配分率曲線の推定式を誘導できるが、説明の便宜上、完全独立の場合から説明を行

う。

**b) 完全独立の場合の推定式**

基準期間を 24 時間に採って説明する。 $\rho(S)=0$  の場合、式 (4.2.6), (4.1.1) より、

$$\left. \begin{aligned} \nu(1)/\nu(S) &\equiv \nu/\nu_0 = 1/S = T/24 \\ [\xi]_{S=S}/[\xi]_{S=1} &\equiv \xi/\xi_0 = R^{(S)}/R^{(1)} = R_T/R_{24} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(5.2.5)$$

これを、式 (5.2.4) に用いると、以下の理論的な推定式が誘導される。

$$R_T/R_{24} = (T/24)^\alpha \dots\dots\dots(5.2.6)$$

上式中の指数  $\alpha$  は、式 (5.2.4) で明らかのように、超過確率  $(1-F)$  および形状母数  $\nu(S)$  のみの関数である。

次に、推定式の性質、すなわち、指数  $\alpha$  の特性とその近似度を検討する。 $F=0.9, 0.95, 0.99, 0.995, 0.999$  および  $\nu(S)=1, 3/4, 1/2$  に対して、 $\alpha$  の推定式およびその値を表-2 に示す。また、表には、 $\rho(S)=0$  における降雨配分率の理論曲線について、式 (5.2.6) のような指数表示が可能とした際の  $\alpha$  の平均的推定値  $\hat{\alpha}$  の値をも記している。具体的な  $\hat{\alpha}$  の計算は、 $T/24$  の変域  $(0, 1)$  を 6 等分した場合の両端を除く各点  $(T_i/24, R_{T_i}/R_{24})$ ,  $(T_i/24=1/6, 2/6, \dots, 5/6)$  について求めた  $\alpha_i$  を次式のように平均したものである。

$$\hat{\alpha} = \left[ \sum_{i=1}^5 \{ \log(R_{T_i}/R_{24}) / \{ \log(T_i/24) \} \right] / 5$$

表で、 $\hat{\alpha}$  をほぼ真値に近いと考えると、理論値  $\alpha$  の誘導過程にかなり粗い近似を含んでいるにもかかわらず、両者の差は相対誤差にして、計算範囲内で 1 例が 12% 程度である以外は、ほぼ数 % 以内で、特に  $F$  が大きくなると減少し、よく一致しているといえる。もちろん、前出 4.(3) b) ④ で述べた  $\alpha$  の定性的傾向とも合致する。

結局、この場合、雨量配分率曲線は Sherman 形式に帰着して表現でき、それに含まれる経験的指数の水文統計的意義が明確にされたわけである。

ところで、わが国で従来慣用されている物部公式では  $\alpha=1/3$ 、また伊藤式では

上限:  $R_1/R_{24}=0.20$  より  $\alpha=0.506$

下限:  $R_1/R_{24}=0.12$  より  $\alpha=0.667$

が採用されている<sup>15)</sup>。通常の豪雨分布の形状や標本の確率年などを勘案すると、前述の計算結果から判断して、従来の経験式による推定もあながち不当とはいえない。しかしながら、推定式に降雨時系列特性や超過確率への配慮がまったく無視されていたことは根本的な欠陥といえよう。

**c) 一般の場合の推定式**

ここでは、 $\rho(S) \neq 0$  の場合における推定式を誘導する。以後、 $\rho(S)=\rho_0, \sigma(S)=\sigma_0, \dots$  と略記する。

まず、式 (4.2.1) を式 (4.2.5) に代入すると次式が

得られる。

$$R^{(S)} = [\xi]_{S=S} \cdot (\sigma_0/\rho_0) \cdot [\rho(1)/S]_{S=S} \dots\dots(5.2.7)$$

上式で  $S=1$  とおき、若干の計算の後、降雨配分率は次式のようになる。

$$\frac{R^{(S)}}{R^{(1)}} = \frac{[\rho(1)]_{S=S}}{\rho_0} \frac{1}{S} \frac{[\xi]_{S=S}}{\xi_0} \dots\dots\dots(5.2.8)$$

さらに、式 (4.2.2), (5.2.4) より、

$$\frac{[\nu(1)]_{S=S}}{\nu_0} = \frac{\rho_0}{[\rho(1)]_{S=S}}, \quad \frac{[\xi]_{S=S}}{\xi_0} = \left\{ \frac{[\nu(1)]_{S=S}}{\nu_0} \right\}^\alpha$$

であり、これを式 (5.2.8) に用いると、降雨配分率の一般式は次式のようになる。

$$\frac{R^{(S)}}{R^{(1)}} = \frac{1}{S} \left\{ \frac{[\rho(1)]_{S=S}}{\rho_0} \right\}^{1-\alpha} = \frac{1}{S} \left\{ \frac{\rho(1)}{\rho(S)} \right\}^{1-\alpha} \dots\dots\dots(5.2.9)$$

最後に、上式を 24 時間雨量  $R_{24}$  の  $T$  時間雨量への配分率として表現し直す。すなわち、

$$\frac{R^{(S)}}{R^{(1)}} = \frac{R_T}{R_{24}}, \quad \frac{1}{S} \equiv \frac{T}{24}, \quad \frac{\rho(1)}{\rho(S)} \equiv \frac{\rho_T}{\rho_{24}}$$

であるから、式 (5.2.9) は、24 時間を基準として、Sherman 形式と類似な次式で表現できる。

$$\frac{R_T}{R_{24}} = \frac{T}{24} \left( \frac{\rho_T}{\rho_{24}} \right)^{1-\alpha} \dots\dots\dots(5.2.10)$$

上式の右辺の指数  $\alpha$  は、式 (5.2.4) 下段と同一のものである。また、 $\rho(1)/\rho(S)$  あるいは  $\rho_T/\rho_{24}$  は、 $\rho(S)$ ,  $\nu(S)$  あるいは  $\rho_{24}$ ,  $\nu_{24}$  が既知ならば  $1/S$  あるいは  $T/24$  のみの関数である。したがって、降雨配分率  $R^{(S)}/R^{(1)}$  あるいは  $R_T/R_{24}$  は、 $\nu(S)$ ,  $\rho(S)$  あるいは  $\nu_{24}$ ,  $\rho_{24}$  が既知であれば、ある超過確率  $F$  に対応した分割比  $1/S$  あるいは  $T/24$  のみの関数として示されたこととなる。すなわち、式 (5.2.9) あるいは (5.2.10) は、雨量時系列の自己相関性をも導入したきわめて普遍性のある確率雨量配分率の推定式といえる。

なお、既出 4.(2) c) の結果を用いると、完全独立の場合には  $\rho(S)/\rho(1)=1/S$  より式 (5.2.6) が、完全従属の場合には  $\rho(S)/\rho(1)=1$  より式 (4.2.8) が、それぞれ式 (5.2.9) に基づいて簡単に誘導される。

**6. む す び**

計画降雨の科学的推定は、治水計画の根底として最重要視されねばならないが、従来この方面の研究はほとんど経験的公式の流用に終始しており、豪雨時系列の確率統計的性格に対する配慮が欠除していたといえよう。本研究は、多変数確率分布理論の最近の成果を活用して、降雨時系列をガンマ分布族に従うと仮定し、その和分布の誘導により、たとえば 24 時間単位のような基準期間に対する降雨量特性から、12 時間、6 時間、3 時間、… といった 1 時間程度までの任意の短時間の確率雨量を推

定する手法を提案した。また、それに必要な図表作製や推定式の理論的誘導を行ったものである。

その成果を要約すると以下のとおりである。

(1) 基準期間雨量の分布特性である尺度母数、形状母数および相関母数が既知であれば、所要の超過確率を勘案した任意の短時間雨量を容易に推定し得ることを理論的に明確にした。

(2) (1)の結果を、種々の形状母数、相関母数の下での確率雨量配分率曲線として図示した。これにより、各種母数および超過確率の影響が明らかになった。

(3) 降雨時系列が完全独立の場合には、確率雨量配分率曲線の推定式はいわゆる Sherman 形式で近似でき、それに含まれる経験的指数の水文統計的意義が理論的に明確となった。

(4) 降雨時系列が自己相関性を有する場合にも、確率雨量配分率曲線の推定式が Sherman 形式と類似な形で表現でき、きわめて普遍性のある推定式の誘導が可能となった。

このように、本研究は河川計画における DAD 解析への応用などの実用性のみならず、最近における水文気象統計学の中心課題である雨量時系列特性の理論的解明への有力な手掛りを与え得るものと考えている。

なお、本理論の実例への適用については、雨量母集団に課せられた基礎仮定や等質性などが満足されねばならない。現在、名古屋地方気象台の豪雨資料について、気象原因別に特性解析を実施中で、興味ある成果を得ているので別の機会に報告したいと考えている。

文末ではあるが、本研究遂行にあたり終始ご懇切なご指導をいただききた京都大学防災研究所 角屋睦教授ならびに熱心に協力していただいた、前名古屋工業大学学生 後藤晴男、村上芳樹の両君に厚く感謝する次第で

ある。

#### 参考文献

- 1) たとえば土木学会：水理公式集，昭和 38 年増補改訂版，[3・5・1] 降雨強度公式，pp. 384~386, 1963.
- 2) 石黒政儀：特性係数法による確率降雨強度式算定法について，土木学会論文集，第 74 号，1961.
- 3) Fair G.M. and J.C. Geyer : Water Supply and Waste Water Disposal, John Wiley & Sons, Inc., New York, p. 168, 1959.
- 4) Bernard Merril : Formulas for rainfall intensities of long duration, Trans. ASCE, Vol. 96, pp. 592~624, 1932.
- 5) 石原安雄・友杉邦雄：降雨の時間配分に関する確率論的考察，京都大学防災研究所年報，第 14 号 B, pp. 87~102, 1971.
- 6) 今井一郎ほか：降雨の統計的性質と電波の減衰，研究時報，第 16 卷 3 号，pp. 137~166, 1964.
- 7) 室田 明・江藤剛治・田中 剛：水文量の和に関する統計的研究，土木学会論文報告集，第 223 号，pp. 23~31, 1974.
- 8) Kibble W.F. : A Two-Variate Gamma Type Distribution, SANKHYA, (The Indian Journal of Statistics), Vol. 5, pp. 137~150, 1941.
- 9) 井沢竜夫：二変数のガンマ分布について (続)，気象と統計，第 4 巻，第 2 号，pp. 15~19, 1953.
- 10) 長尾正志：短時間豪雨分布の推定に関する二変数ガンマ分布の応用，名古屋工業大学学报，第 25 号，pp. 325~333, 1973.
- 11) 詳細は前出 10) の pp. 327~329.
- 12) 長尾正志・角屋 睦：二変数ガンマ分布とその適用に関する研究 (2)——二変数ガンマ分布の母数推定法——，京都大学防災研究所年報，第 14 号 B, p. 47, 1971.
- 13) 長尾正志・角屋 睦：二変数ガンマ分布とその適用に関する研究 (1)——二変数指数分布の基礎理論——，京都大学防災研究所年報，第 15 号 B, p. 107, 1970.
- 14) Gradshteyn I.S. and I.M. Ryzhik : Table of Integrals, Series, and Products, Academic Press, New York, p. 942, 1965.
- 15) 伊藤 剛：昭和 13 年の豪雨記録により導きたる雨量強度式について，内務省土木試験所報告，第 53 号，1940.

(1975.4.1・受付)