

討 議

宇佐美 勉 著 “補剛材つき板の弾性ならびに非弾性圧縮座屈強度”
への討議

(土木学会論文報告集第 228 号・1974 年 8 月掲載)

討議者：長谷川彰夫 (名古屋工業大学)
西野 文雄 (東京大学)

補剛材の座屈強度に対する補剛材のねじり剛性の効果や補剛材内部に存在する残留応力の影響に関しては、実用設計上重要な問題であるにもかかわらず、その研究は必ずしも多くはなかった。この問題に対し、有限帯板法を用いて解析し検討された著者の論文を同様の問題に関心を持ち検討を進めているもの一人として興味深く読ませていただいた。著者は計算結果に基づいて、実用設計に役立たせることを考慮して、補剛材の座屈強度の特性を検討されているが、疑問を感じた点を指摘し討議としたい。

1) 2. の仮定 g) で補剛材のねじり剛性を考慮するときには補剛材の断面寸法を一定としているが、ねじり剛性を考慮しないときも補剛材の断面寸法は一定として解析されているのではないかと想像されるがどうであろうか。

2) 14 ページ右側の 33~34 行で「 V_y および M_y を……次のように表わす」と表現されているが実際には板の理論に基づいて V_y , M_y は式 (2), (3) を用い、自動的に求められる。このことは単に表現上の問題ではなく、仮定と演繹を区別することが力学を扱ううえで重要なことであるので留意すべき問題であろう。

3) パラメーターは基本的には互いに独立な量で定義されるのが普通である。討議者らの報告²⁴⁾では式 (16) に相当する補剛材のパラメーターに対し、任意の補剛材断面をはり-柱と評価し、座屈強度に対する補剛材の影響を一意的に決定するために、5つの独立なパラメーターを定義している。この5つのパラメーターは式 (16) の r_z のかわりに $r_p = r_s^2/b^2$ (r_s は補剛材断面の極2次半径) を定義しているほかは、式 (16) とまったく同じものである。著者は解析の対象を長方形断面の補剛材に限定されているが式 (16) に示す補剛材のパラメーターを定義する場合には、補剛材を板の片側に配置された長方形断面に限定する必要はないのではなからうか。逆に

補剛材を長方形断面に限定した場合には式 (16) に示す5つのパラメーターは独立となり得ないため、パラメーターとしての意味がなくなるのではないと思われる。

4) 一般の断面に対しては式 (16) に相当する5つのパラメーターはお互いに独立であるが長方形断面に限定した場合は、著者も指摘されているとおり、2つになる。長方形断面に限定した場合に著者は独立な補剛材のパラメーターとして δ と ϵ を用いている。この場合、式 (20)~(22) の関係から式 (14), (15) の右辺が断面係数の非弾性度を示す $\bar{B}_y, \bar{B}_z, \bar{C}_w, \bar{C}_T$ を除いてすべて決定されるものと思うが、式 (17) の $\bar{P}_s, \bar{K}, \bar{d}$ と式 (22) の \bar{K}_p および式 (15) の b_s/b がどのようにして δ, ϵ によって無次元的に与えることができるのかが明らかでない。 $\bar{d}, \bar{P}_s, \bar{K}_p$ については補遺 2 に説明があり、 \bar{K} も式 (21) より求められるが幾何学量として δ と ϵ を与えれば、補剛材の幾何学的特性が唯一に決定されることが必ずしも明らかにされていない。

5) 著者は式 (20), (21) より補剛材のねじり剛性を考慮すると補剛材の特性を材質に関して無次元化することができないとしている。これに反し討議者らの報告²⁴⁾では補剛材のねじり剛性の影響を考慮した場合にも弾性解析では材質に関するパラメーターを導入しないで検討している。材質に関して無次元化できない原因は式 (19) に与えている補剛材のパラメーターとしての ϵ に材質のパラメーター σ_Y を導入したことによるのではないか。もしそうなら、パラメーターとして σ_Y を含む ϵ を用いることは好ましくない。

補剛材のねじり剛性の影響を考慮して非弾性座屈解析する場合にも、従来の一般の座屈解析と同様に基本的には弾性座屈解析を含む形で整理することが好ましく、非弾性の影響は著者も導入しているように式 (14), (15) 中の $\bar{B}_y, \bar{B}_z, \bar{C}_w, \bar{C}_T$ のような非弾性の影響係数に統一してまとめるべきではないと思われる。結局 16 ページ右側の 16~18 行の「これは補剛材のねじり剛性を考慮すると材質に関して無次元化した解を得ることができなくなることを示すものである」は一般的な事実では

なく、著者の選んだパラメーターのもとではという条件を必要とするのではないかと思われる。

6) 16 ページ右側 18~20 行の「式 (21) の右辺の第 1 項は第 2 項に比べて影響が小さくこの項を無視してさしつかえない」の根拠は何か。この節では理論展開をしているところであるが、理論的にすべての長方形断面についていえるか。

7) 3. (1) の最終パラグラフで $M=2$ のもとで $N=10\sim 24$ に変化させて解を求めたが結果に差異はなかったため $N=10$ で十分な精度を期待できると著者は判断されている。 N を多くとることにより、平均剛性を正確に評価することができるのは確かであるが、板の座屈の場合、要素内の剛性の位置による相違も座屈強度に影響を与える。これは M を変化させることにより精度を検討できることで著者の行っている平均化では処理できないものと思われる。したがってこの結果から残留応力を有する場合には $M=2$ で十分な精度が得られる保証はないのではないか。

8) 弾性座屈の範囲では、座屈応力が如何なる値となるろうとも、補剛板の幾何学的性質に変化はない。一般に荷重条件、支持条件が一定である場合には、弾性座屈応力は補剛板の幾何学的性質のみにより決定されることから考えて、補剛材のねじり剛性の影響の考慮の有無にかかわらず座屈係数は弾性座屈応力に無関係に一定となると討議者は理解している²⁴⁾。Fig. 6 (a) で座屈係数 k が σ_{cr}/σ_Y の値により変化しているのは力学的にはどのような理由によるものか。Fig. 6 (b) の破線では σ_{cr}/σ_Y の値により座屈係数 k が変化しているがこれは弾性座屈の範囲においても、横軸の τ に σ_Y を導入していることに原因するのではないか。

座屈係数 k が σ_{cr}/σ_Y の関数として与えられる理由は補遺 3 に説明されている。そのとき、式 (A.16) を導く際に式 (21) の右辺の第 1 項を省略しているがこの省略により、ねじり剛性を無視した場合、従来の弾性座屈理論に一致するところがしなくなり、著者の求めた結果をチェックできなくなることはないか。そのような省略によって弾性座屈理論において一般に認められている座屈係数の座屈応力に対する非依存性がくずれていることはないか。

9) $n=3$, $n\delta=0.4$, $\alpha=1.0$ の補剛板に対する計算結果である Fig. 6 (a) より k がピークになるときの m の値として $m=1.44$ を著者は得ている。この値の $n\delta$, α に対する変動性を Fig. 8 (a), Fig. 9 で検討しているがその図から判断して設計を考える際の特性値としてはパラメーターに対する依存度が大きいと思われる。補剛材の設計を考える際の特性値としてこの数字を提案さ

れているが、この場合、 τ , δ , n , α のどのような値に対し検証されているのかの説明が必要であろう。

10) Fig. 10 のチャートを求める根拠となっている Fig. 8 (b) では $\alpha=1.0$ として計算されている。Fig. 10 のチャートでは α の影響はどのようになるのか。数値計算例ではなく設計チャートとしての意図が Fig. 10 にある場合、 α についてのコメントが必要であろう。

11) 残留応力を持つ補剛板の非弾性座屈曲線を著者は求め、Fig. 12, 13, 15 に示しているが、非弾性座屈をする領域において討議者らの報告²⁴⁾の結果と著しく相違している。著者の用いている横軸のパラメーター R で $0.2 < R < 0.9$ の領域において、討議者らの求めた座屈曲線では補剛材剛性 r の大小による座屈曲線の相違があるのに対し、著者の求めた座屈曲線にはその相違がほとんどない。また横軸の値 (R または $b/t\sqrt{\sigma_Y/E}$) が小さくなるに従い、討議者らの求めた曲線では $\sigma_{cr}/\sigma_Y=1.0$ に漸的に近づくのに対し、著者の求めた曲線ではほぼ水平で $R=2$ 前後で急激に $\sigma_{cr}/\sigma_Y=1.0$ に達している。この討議の紙面をかりて、この原因について考察したい。

原因の第 1 は、補剛材内部に存在する残留応力の分布と評価に著者と討議者らとで相違のあることでありこの相違は特に $R=0.7$ 前後の座屈曲線の相違に反映しているものと思われる。このように補剛板の非弾性座屈強度は補剛材の内部に存在する残留応力の分布、評価の影響を敏感に受けることは注意されてよい。

原因の第 2 は用いている補剛材剛性の値 r^* が著者と討議者らで相違のあることである。著者は r^* として現行の道路橋示方書⁴⁾に定める所要補剛材剛比を用いているのに対し、討議者らは DIN 4114 に定める最小剛比 r^* を用いている。 $R \geq 0.7$ の領域ではそれぞれの最小剛比は一致する。しかし $R < 0.7$ の領域において、道路橋示方書では DIN 4114 に定める最小剛比 r^* に対する低減規定を採用しているため、道路橋示方書での値が DIN 4114 の値に比べて小さくなっている。この結果、著者の用いている r^* は討議者らの用いている r^* に比べ、この領域では極めて小さい。したがって、 R の小さい領域で著者の求めた座屈曲線が討議者らの求めた座屈曲線より低く求められている原因の一つになっているものと判断される。 r^* の記号は最小剛比というよりも、DIN 4114 の規定剛比として一般に理解されていることを考えると著者の用いたこの量には r^* と異なった別の記号を用いることが好ましいのではないかと考える。

参考文献

- 24) 長谷川彰夫・大田孝二・西野文雄：補剛された板要素の座屈強度に関する二、三の考察，土木学会論文報告集，第 232 号，pp. 1~15, 1974.12.

回 答

回答者：宇佐美 勉 (岐阜大学)

著者の論文に関心を寄せられ、細部にわたるご検討をいただきました長谷川、西野両氏に深謝いたします。以下、ご討議の順に著者の考えを述べさせていただきます。

1) ご指摘のように、式(16)のパラメーターそのものは、断面形状、補剛材の配置方法に無関係に定義される量です。しかし、式(12)の微分方程式は補剛材のせん断中心がその重心と一致する場合のみ正しい式であること、および、式(20)の変換式は長方形断面の片側補剛材についてのみ成り立つ式であることから、解析の条件として論文中のf)を加えたわけです。また、条件f)のもとでは、式(16)のパラメーターは互いに独立でなくなるためパラメーターとしての意味がなくなるとのご指摘ですが、著者はこれらの量を独立に与えて数値計算を行っているわけではなく、式の展開の途中でただ単に定義した量の意味で用いておりますので、必ずしも互いに独立になる必要はないと考えます。

2) ご指摘の点に関しては、著者の論文がよく整理されていなかったため、以下のような補促を行います。

式(15)の右辺の \bar{K} は、式(21),(19),(16)の δ の式より

$$\bar{K} = -12(1-\nu^2) \cdot \delta \cdot \left(\frac{b_s}{b}\right)^2 \cdot \bar{K}_p \cdot \lambda^2 \dots\dots\dots(a)$$

と表わされる。ただし、式(21)の右辺第1項は4)で述べる理由により省略する。上式を式(15)に代入すれば、右辺第4,5項は次のようになる。

$$\begin{aligned} & \bar{K} - 12(1-\nu^2) \cdot \delta \cdot \bar{P}_s \cdot (b_s/b)^2 \cdot \bar{d}^2 \cdot \lambda^2 \\ & = -12(1-\nu^2) \cdot \delta \cdot r_p \cdot (\bar{K}_p + \bar{P}_s \cdot \bar{d}^2) \cdot \lambda^2 \dots\dots(b) \end{aligned}$$

ここで、新しく定義した量 r_p は次式で表わされる。

$$r_p = (b_s/b)^2 \dots\dots\dots(c)$$

上式の r_p は討論者²⁴⁾の定義した量 κ_p に類似の量であり、この r_p を式(16)の5つのパラメーターに加えるものとする。

このようにすると、著者の導入した補剛材に関するパラメーターは2種類に分けられます。一つは、板と補剛材の相対的寸法によってのみ定まる量であり、式(16)の5つのパラメーターおよび式(c)の r_p がこれに属し、今一つは、補剛材の応力状態のみによって定まり、板および補剛材の寸法には無関係な量で、補遺2に示した諸量(すなわち、 $\bar{B}_y, \bar{B}_z, \bar{C}_m, \bar{C}_T, \bar{d}, \bar{P}_s, \bar{K}_p$)がこれに属します。したがって、あらかじめ δ, τ および λ の3つの量に変換しておく必要がある量は第一の種類に属する量のみであり、式(20)および次式によって与えられます。

$$r_p = \delta^2 \cdot \epsilon_Y / \tau^2 \dots\dots\dots(d)$$

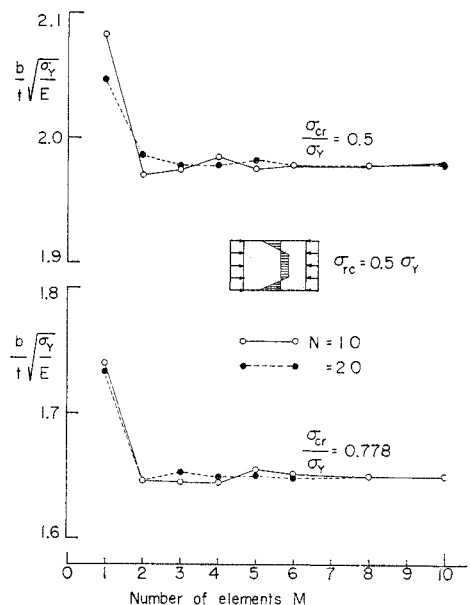
3) 式(19)で定義した τ に $\sqrt{\sigma_Y/E}$ を含ませたのは、板の幅厚比 λ (式(8))にこの量が含まれているため、式(20)の r と τ の関係式中に $\sqrt{\sigma_Y/E}$ が入ってこないようにするためです。もちろん、独立なパラメーターの一つとして τ の代わりにたとえば t_s/t を選んだとしても、材質に関して無次元化した解が得られないことは、補遺3の式(A.17)の関数 f_1, f_2 を検討すれば明らかです。すなわち、 f_1, f_2 の右辺の τ^2/ϵ_Y は $(t_s/t)^2$ となるが、 f_1 の右辺に座屈応力 σ_{cr} が σ_Y で無次元化されないまま含まれているためです。同様なことは、式(A.19)の関数 g_1, g_2 からも考察されます。

4) 式(21)の右辺第1,2項は、それぞれ、補剛材の z_s 軸, y_s 軸 (Fig. 2 参照) まわりの断面2次半径に比例する量であり、たとえば、残留応力のない弾性領域では、

$$\bar{K} = -(1-\nu^2) \cdot \frac{\sigma_s}{E} \cdot \delta \cdot \left(\frac{b}{t}\right)^2 \cdot \frac{t_s^2 + b_s^2}{b^2} \dots(e)$$

となります。したがって、ご指摘の点は、 $b_s^2 \gg t_s^2$ と仮定したことにあります。この仮定は通常の長方形断面補剛材では許されると思われる、また、討論者の論文²⁴⁾でもこの仮定は用いられています。なお、著者の論文中の数値計算結果はすべて z_s 軸まわりの断面2次半径も考慮した解であることを申し添えます。

5) ご指摘のように、剛性行列、安定係数行列の各要素を数値積分(Simpsonの公式)で求める場合、板の位置による精度の相違も考慮しなければならないと思われます。この影響を調べるためには、無補剛板で十分であ



図一A 要素数の変化による非弾性座屈解の収束状態

ると思われますので、図一A に無補剛板(最大圧縮残留応力が降伏応力の1/2のとき)に対する一計算例を示します。分割数 N は10と20であり、帯板要素数 M は1~10に変化させてあります。図では座屈応力 σ_{cr} を2通り考えているが、圧縮残留応力部がちょうど降伏するときの座屈応力に対する結果(この場合は $\sigma_{cr}/\sigma_Y=0.5$ のとき)が一般に最も精度が悪くなるため、この場合を考慮すれば十分です。図からわかるように、非弾性座屈の解は一般に振動し、弾性座屈の解のようになめらかに収束しない。これが、討論者のご指摘の影響であると思われる。しかし、その振幅は、要素数 M が2以上では $N=10, 20$ の場合ともかなり小さく、著者の論文で採用した $M=2, N=10$ の分割数により、十分精度のよい解が期待できると思われます。

6) 座屈係数が応力状態によって変化することもあるという事実の力学的理由については、論文中、p. 19の考察1)および補遺3に詳述してあり、 τ の式に σ_Y 導入したことに起因するものではありません。補剛材の座屈係数は、板のAspect ratio α を別にすれば、補剛材の特性を表わすパラメーターのみによって表わすことは可能です。ただし、用いるパラメーターとして座屈モードに応じて適切な量を選択する必要があります。たとえば、補剛材の曲げ抵抗の影響が支配的な、補剛板全体が幅方向に半波のモードで座屈する場合には、曲げ剛比 r と面積比 δ が支配的な量であり、座屈係数は r と δ によって精度よく表現でき、これらの値が一定ならば座屈係数は座屈応力に無関係に一定となります。ところが、同じ座屈モードのとき、曲げ剛比の代わりに板厚比 t_s/t をパラメーターの一つに選んだとします。そのとき、 t_s/t 、 δ を一定にして座屈応力を変化させれば、板の幅厚比は当然変化するため、板の幅厚比の関数として表わされる曲げ剛比(式(20)の第1式)も変化することとなる。したがって、結局、異なった座屈応力に対して異なった座屈係数が得られることとなります。著者の論文では、一般になじみの薄い量 t_s/t を導入し、しかも、これに材質に関する量を含ませた τ を用いて計算を行っているため誤解を招いたものと思われます。実際には、この τ を数値計算に用いる必要はなかったわけで、その代わりに St. Venant のねじり剛比 r_T を用いた方がわかり易かったかとも思われます。ねじり剛比 r_T は、式(20)の第3式からわかるように、面積比 δ を一定にすれば t_s/t の2乗に比例する量であるから、Fig. 5, 6(b)などの横軸はこの r_T に置き換えることが可能です。なお、補遺3の式(A.17)を導くときの省略を討論者は問題にされていますが、これは4)にも述べましたように、一般に認められている仮定を用いており、その省略ゆえに討論者のいわれることが生じたではありません。

7) ご指摘のように、座屈係数がピークとなるときの m 値はパラメーターに対する依存度が大きい。しかし、ここで著者の意図しているところは、座屈係数がピークとなる m 値(以下、 m_{opt} と記す)の上限値を Fig. 6, 8, 9 から見出すところにあります。この上限値はほぼ1.44であり、この値を設計における m 値の最小値(すなわち最適値)として用いれば安全であると考えたわけです。 m_{opt} の値が上限値近くになるのは、補剛材本数にかかわらず、補剛材のねじり抵抗が十分大きく、板のたわみ角の拘束がほぼ固定のときであり、ねじり抵抗が小さくなるにつれてこの値は上限値から離れます。したがって、 m_{opt} は用いるパラメーターによって種々変化するが、少なくともその上限値は正しく捉えていると考えます。なお、検証のために用いたパラメーターの変動範囲は、論文中に示したもののほか、補剛材が1本および3本の場合です。

8) 著者の提案する設計方法では、p. 21の1)の条件 $r \geq 1.44 r^*$ によって補剛材の座屈モードを補剛材軸が nodal line になるようなモード(Fig. 7の②~⑤)に制限しております。したがって、このような場合には、有限板と無限板の境界となるAspect ratio α の値はほぼ $1/n$ (n はサブパネルの数)になり、Fig. 8に示した実曲線部は実用的な補剛材の範囲内では α に無関係になると考えられます。それゆえ、Fig. 10に示した結果も α に無関係に用いることができると思います。

9) 著者の求めた座屈曲線が討論者の論文のそれと非弾性域において著しく異なることを指摘され、その原因を2つ挙げられていますが、著者の考えでは、非弾性域における補剛材剛性の評価の相違が最も大きな要因であると思います。著者の用いた補剛材剛性の計算方法は、ひずみの反転を考えない塑性変形理論の範囲内では厳密なものです。もちろん、残留応力分布を仮定しなければなりません。著者の用いた分布形は実測値²⁵⁾とときわめて類似しており、この点では問題がないと思います。一方、討論者の用いた手法は、残留応力の影響を平均化して材料非線形の問題に置き換えた(具体的には、短柱の平均圧縮応力-ひずみ曲線を補剛材の応力-ひずみ曲線とみなした)近似的な方法であると理解しております。この手法は、残留応力分布を仮定する必要がなく、また、計算を著しく簡単化するため、便利な方法であるが、少なくとも次のような2つの欠点があると思われます。

a) まず第一に、たとえば、この手法は柱の曲げ座屈解析に適用した場合を考えます。このとき、この手法によれば、非弾性域における柱断面の有効曲げ剛性の低下率は、強軸、弱軸ともに同じとなり、既往の理論的、実験的事実²⁶⁾と相入れなくなることで。すなわち、フランジ先端部に最大圧縮残留応力が存在する溶接集成 H 形

断面を考え、ウェブの効果を無視すれば、強軸まわりの有効曲げ剛性は接線剛性理論（著者の計算手法もこの理論に基づく）に従えば未降伏部分の断面積 (A_e) と全断面積 (A) の比 A_e/A （これは、短柱の平均応力-ひずみの曲線の接線 E_t と E の比 k に等しい）に比例して低下し、弱軸まわりの有効曲げ剛性は A_e/A の 3 乗に比例して低下することになる。しかし、討論者の手法は、いずれの軸に関する曲げ剛性の低下率も A_e/A に比例するという結果を与えます。ところで、いま問題にしている長方形断面補剛材を考えると、討論者および著者ともにこれを柱として評価しており、しかもその曲げ座屈軸は H 形断面の弱軸に相当しているため、補剛材の有効曲げ剛性はほぼ A_e/A の 3 乗に比例して低下するはずであるが*、討論者はこれを $A_e/A=k$ に比例して低下させています。この事実が、著者と討論者の座屈曲線に大きな差を生じた最大要因であると著者は考えます。b) 討論者の用いた手法の欠点の第 2 は、非弾性域における補剛材のねじり剛性を理論的に正しく評価することが困難

* 著者の仮定した残留応力分布は、補剛材の幅方向の中間部に最大圧縮残留応力が存在するため、有効曲げ剛性の低下率は、補剛材先端部が降伏するまでは、 A_e/A の 3 乗に正確に比例するわけではない。

であるということです。事実、討論者の論文にはねじり剛性の計算方法の詳細は述べられておりませんが、また、数値計算例でもこの影響は無視されています。

最後に、討論者の挙げられている原因の第 2 について触れておきます。著者の論文中に、曲げ剛比が道路橋示方書の最小剛比の 4 倍のときの計算例 Fig. 12, 13 の $m=4$ のときの座屈曲線）があるが、この曲げ剛比は等価幅厚比 R が 0.4 以上では DIN 4114 の最適剛比を上まわっております。しかし、その座屈曲線は $m=1$ のときの座屈曲線と大差ありません。したがって、ご指摘の点は、結果に大きな影響を与えないものと著者は考えます。なお、文献 25) では、基準となる量を DIN 4114 の最適剛比にとり、曲げ剛比をその 1, 2, 4 倍にしたときの計算例を示しておりますので、ご参照いただければ上述の事が明らかになるものと思います。

参考文献

- 25) Fukumoto, Y., Usami, T., Okamoto, Y.: Ultimate Compressive Strength of Stiffened Plates, Proc. ASCE Specialty Conference on Metal Bridges, St. Louis, Nov. 1974.
- 26) Galambos, T.V. 著, 福本・西野共訳: 鋼構造部材と骨組, 丸善, 1970.