

アーランサービス循環待ち合わせ系 の解析法に関する一考察

AN ANALYSIS OF CYCLIC QUEUES WITH ERLANG SERVICE DISTRIBUTION

吉川和広*・山本幸司**
By Kazuhiro YOSHIKAWA and Koshi YAMAMOTO

1. 緒言

土木施工の分野においては、土工機械系による整地工事、しゅんせつ船団によるしゅんせつ工事などのように投入資源量が有限で、かつ、サイクリックな作業工程によって構成される工事が少なくない。これらの工事は一般に循環待ち合わせ系（サイクルキューシステム）としてモデル化が可能と考えられるが、このような現象の解析方法は待ち行列理論による解析的方法とモンテカルロシミュレーションによる方法とに大別される。

前者は実際現象のサービス時間分布を指数分布あるいはアーラン分布等で近似し、システムが推移する状態を連立微分方程式によって記述（定式化）し、これを解析的に解くことによってシステムを集合平均的に評価する方法である。この方法によれば、実際のサービス時間分布を理論分布に近似する精度が問題となるが、定式化が可能であり、かつ、その解法が明らかであれば厳密解を得ることができる。

一方後者は計算機上でシステムを擬似的に再現し、その状態変数を観測することによってシステムを時間平均的に評価する方法である。したがって、一般に定式化が不可能な場合でも解析が可能であるが、1回のシミュレーションでは1つのサンプルパスが得られるにすぎないため繰り返し実験が必要であること、およびシミュレーションに不可欠な擬似乱数が本質的に乱数としての統計的性質（一様性と無規則性）を満足しえないことなどの問題点がある¹⁾。

このようにサイクルキューシステムの解析方法としての待ち行列理論およびモンテカルロシミュレーションには一長一短があるが、本研究では特に待ち行列理論による解析法をとりあげて以下に考察を進めていくこととす

る。

従来、サイクルキューモデルの数値解法に関しては、2つのステージのうち少なくとも一方のステージの窓口でのサービス時間が指数分布に従うと仮定した研究が多い。この理由としては、指数サービスを仮定することにより、

① 待ち合わせ現象を単純マルコフ過程に従うとして記述することができるので、システムでのサービスはランダムとなり、輻輳の程度の上限を評価することになる。したがって待ち時間または待ち行列長を評価する場合には安全側（余裕側）の解析結果を期待することができる。

② システムの推移状態の記述が比較的簡単であり、数値解析も容易である。などを考えることができる。

しかし、土木の施工分野に現われるサイクルキューの現象をみても、サービス時間が図-1(a)のような指数分布に従う場合はまれであり、(b)に示すようなアーラン分布で近似しうるものがほとんどである。したがって、実際現象にできるだけ即応した精度の高い解析を行うためには、まずアーランサービスを前提とした解析方法を開発することが重要である。しかし、このような厳密解を求めるためのモデルはまだ開発されていないのが現状である。もちろん、ここで提案するアーランサービスに従うサイクルキューモデルは非常に複雑となるため、幾多の解析上の困難が予想される。したがって、アーランサービスによるサイクルキューモデルの解析結果と、解析が比較的容易な指数サービスによるモデルのそれとを比較検討しておくことは、実際に施工計画その他の計画を立案する場合に何かと有利であろうと考える。

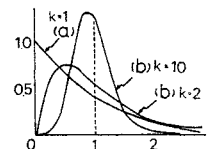


図-1 指数分布およびアーラン分布（平均値1）

* 正会員 工博 京都大学教授 工学部土木工学教室
** 正会員 工修 京都大学助手 工学部土木工学教室

本研究では、2. において、

アーランサービスサイクルキューモデルの定式化を試みるとともに指数サービスの場合との差異を明らかにする。また、3. ではアーランサービスサイクルキューの状態方程式を連立一次方程式系へ変換することにより、大型係数行列の連立一次方程式を反復法によって解くための方法について述べる。4. ではこのようなサイクルキューモデルの評価尺度について考察し、最後に5. では適用事例としてしゅんせつ船団によるしゅんせつ工事をとりあげ、指数サービスあるいはアーランサービス(後者では位相 k の値を変化させる)を仮定した場合の解析結果を示して考察を加えることとする。

2. サイクルキューモデル(アーランサービス)の定式化

(1) 定式化に必要な因子

2つのサービスステージよりなるサイクルキューシステムの一例としてしゅんせつ工事を考える²⁾。しゅんせつ工事は、土砂積込→往航→土砂投棄→復航という作業サイクルから成り立つが、往航→土砂投棄→復航という作業は土運船が押船から一環して受けるサービスであり、かつ、土砂投棄区域での作業待ちがほとんどあり得ないため、土砂積込と往航→土砂投棄→復航という2つのステージに大別することが可能であり、図-2のようなモデルで表現することができる。このようにモデル化されたしゅんせつ工事における土運船、押船、しゅんせつ船の動態は次のとおりである。

N 隻の土運船(客)がステージ I にいる S_1 隻のしゅんせつ船(窓口)のいずれかから土砂積込のサービスを受け、サービス終了後ただちにステージ II にいる S_2 隻の押船(窓口)のいずれかによって、往航→土砂投棄→復航というサービスを受ける。ステージ II でのサービスが終了すればただちにステージ I へもどり、ステージ I, II の各窓口がふさがっておればそれが空くまで作業待ちの状態にはいるというものである。これは明らかに有限母集団のサイクルキューモデルである。

以下では、ステージ I の各窓口のサービス能力は同一

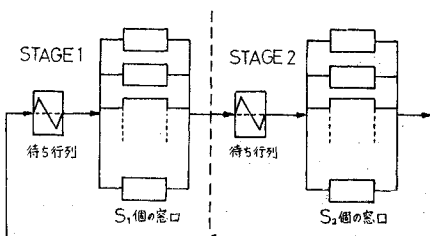


図-2 サイクルキューのモデル図

であり、ステージ II の各窓口のサービス能力も一定であるととし、さらに、待ち行列に関しては先着順サービスで個々の窓口に対してではなくステージに対して行列を作るものとし、指数サービスおよびアーランサービスのサイクルキューモデルの定式化に必要な因子を考える。

1) 指数サービスのサイクルキューモデルの場合³⁾

指数サービスの場合は客が各窓口でサービス中か否かのみを問題とすればよい。したがって、ある任意の時刻 t におけるシステムの生起状態を記述するための因子としては両ステージにいる客の数のみを考えればよい。すなわち時刻 t における生起状態は $(n_1, n_2|t)$ 、したがってその状態確率変数は $P(n_1, n_2|t)$ で表わすことができる。ここに、 n_i は時刻 t にステージ i にいる客数であり、システム内の全客数を N とすれば次式が成立つ。

$$\left. \begin{aligned} n_1 + n_2 &= N \\ \sum_{n_1=0}^N P(n_1, n_2|t) &= 1 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (1)$$

2) アーランサービスのサイクルキューモデルの場合

窓口でのサービス時間が平均値 $1/\mu$ 、分散 $1/k\mu^2$ でかつ山が1つであるような確率分布を示す場合、サービス時間は位相 k のアーラン分布に従うと仮定されるが、これは平均値 $1/k\mu$ の指数分布が k 個タンデムに並んだものと考えられている⁴⁾。このように、1つのアーランサービス窓口は k 個の指数サービス窓口(仮想窓口)で構成されるため、仮に第1番目の仮想窓口が空いていても第2番めから第 k 番めまでのいずれかの仮想窓口がふさがっておれば、アーランサービス窓口はふさがっていると考えるなければならない。したがって、ステージ $l(l=1, 2)$ の窓口数を S_l 、位相 k のアーランサービスを呈する第 i 個めの窓口の第 j 番めの仮想窓口でサービス中の客数を a'_{ij} で表わせば次式が成立する。

$$\left. \begin{aligned} a'_{ij} &= \begin{cases} 0; & \text{仮想窓口}(i, j) \text{が空いている場合} \\ 1; & \text{仮想窓口}(i, j) \text{がふさがっている場合} \end{cases} \\ \sum_j a'_{ij} &= \begin{cases} 0; & \text{窓口 } i \text{が空いている場合} \\ 1; & \text{窓口 } i \text{がふさがっている場合} \end{cases} \\ 0 \leq \sum_j a'_{ij} &\leq S_l \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2)$$

アーラン分布を持つこのような性質を考慮して、アーランサービスのサイクルキューの生起状態を記述するためには、単に何番めの窓口が占有されているかだけではなく、現在その客がどの仮想窓口を占有しているかまでを明示しなければならない。しかし、本研究のように客が窓口全体に対して1つの待ち行列を作ると仮定すれば、待ち行列の先頭の客はただちにサービスの完了した任意の窓口へはいることができる。この場合にはシステム全体として個々のアーランサービス窓口を識別する必要はなく、次式で表わされる各仮想窓口 j を占有してい

る客数 a^l_j のみを記述すればよい。

$$a^l_j = \sum_i a^l_{ij} \dots\dots\dots (3)$$

したがって、ステージ **I** にのみ着目すれば、任意の時刻 t における生起状態は $(a^1_1, a^1_2, \dots, a^1_{k_1}; n_1|t)$ で表わされる。ここで n_1 はステージ **I** にいる客数である。同様に、ステージ **II** についても $(a^2_1, a^2_2, \dots, a^2_{k_2}; n_2|t)$ で表わすことができる。しかしながら、2つのステージより成るサイクルキューシステムとしては、 n_1 と n_2 との間に $n_1+n_2=N$ という関係が存在するため、 $(a^1_1, a^1_2, \dots, a^1_{k_1}; n_1|t)$ と $(a^2_1, a^2_2, \dots, a^2_{k_2}; n_2|t)$ とを独立な事象と考えることはできない。

以上のことより、任意の時刻 t において客がステージ **I** に n_1 、ステージ **II** に n_2 、かつそのうちステージ **I** の仮想窓口 j に a^1_j 、ステージ **II** の仮想窓口 j に a^2_j いる状態を表現するためには、 $(a^1_1, a^1_2, \dots, a^1_{k_1}; a^2_1, a^2_2, \dots, a^2_{k_2}; n_1, n_2|t)$ という記述法をとる必要がある。この場合次式が成立する。

$$\left. \begin{aligned} \sum_{j=1}^{k_1} a^1_j &= \begin{cases} S_1 & (n_1 \geq S_1) \\ n_1 & (n_1 < S_1) \end{cases} \\ \sum_{j=1}^{k_2} a^2_j &= \begin{cases} S_2 & (n_2 \geq S_2) \\ n_2 & (n_2 < S_2) \end{cases} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (4)$$

また $(n_1, n_2|t)$ および $(a^1_1, a^1_2, \dots, a^1_{k_1}; a^2_1, a^2_2, \dots, a^2_{k_2}; n_1, n_2|t)$ なる事象の状態確率を考えると、

$$\left. \begin{aligned} P(n_1, n_2|t) &= \sum_{\{a^1_j, a^2_j\}^*} P(a^1_1, a^1_2, \dots, a^1_{k_1}; \\ &\quad a^2_1, a^2_2, \dots, a^2_{k_2}; n_1, n_2|t) \\ \sum_{\substack{n_1=0 \\ n_1+n_2=N}}^N P(n_1, n_2|t) &= 1 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (5)$$

が成立する。ここに $\{a^1_j, a^2_j\}^*$ は式 (2), (4) の制約のもとで a^1_j, a^2_j がとりうるすべての組合せを意味する。

(2) 状態方程式の作成

2つのステージを持つサイクルキューシステムを待ち行列理論によって解析するためには、まずその状態方程式を作成することから始めなければならない。この場合、すでに解法が求められている指数サービスサイクルキューに関しては状態方程式も以下に示すように比較的簡単に作成することができる⁵⁾。

$$\begin{aligned} P(0, N|t+dt) &= P(0, N|t)(1-S_2\mu_2dt) + P(1, N-1|t) \\ &\quad \times \mu_1dt(1-S_2\mu_2dt) \dots\dots\dots (6) \\ P(n_1, n_2|t+dt) &= P(n_1, n_2|t)(1-n_1\mu_1dt)(1-S_2\mu_2dt) \\ &\quad + P(n_1+1, n_2-1|t)(n_1+1)\mu_1dt \\ &\quad \times \{1-(n_2-1)\mu_2dt\} + P(n_1-1, n_2+1|t) \\ &\quad \times \{1-(n_1-1)\mu_1dt\}S_2\mu_2dt \\ &\quad (S_1 > n_1, S_2 < n_2) \dots\dots\dots (7) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(n_1, n_2|t+dt) &= P(n_1, n_2|t)(1-S_1\mu_1dt) \\ &\quad \times (1-S_2\mu_2dt) + P(n_1+1, n_2-1|t)S_1\mu_1dt \\ &\quad \times (1-S_2\mu_2dt) + P(n_1-1, n_2+1|t) \\ &\quad \times (1-S_1\mu_1dt)S_2\mu_2dt \\ &\quad (S_1 \leq n_1, S_2 \leq n_2) \dots\dots\dots (8) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(n_1, n_2|t+dt) &= P(n_1, n_2|t)(1-n_1\mu_1dt) \\ &\quad \times (1-n_2\mu_2dt) + P(n_1+1, n_2-1|t) \\ &\quad \times (n_1+1)\mu_1dt\{1-(n_2-1)\mu_2dt\} \\ &\quad + P(n_1-1, n_2+1|t)\{1-(n_1-1)\mu_1dt\} \\ &\quad \times (n_2+1)\mu_2dt \quad (S_1 > n_1, S_2 > n_2) \dots\dots\dots (9) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(n_1, n_2|t+dt) &= P(n_1, n_2|t)(1-S_1\mu_1dt) \\ &\quad \times (1-n_2\mu_2dt) + P(n_1+1, n_2-1|t)S_1\mu_1dt \\ &\quad \times \{1-(n_2-1)\mu_2dt\} + P(n_1-1, n_2+1|t) \\ &\quad \times (1-S_1\mu_1dt)(n_2+1)\mu_2dt \\ &\quad (S_1 \leq n_1, S_2 > n_2) \dots\dots\dots (10) \end{aligned}$$

ここで、 μ_1, μ_2 はそれぞれステージ **I, II** のサービス速度である。実際には、 $N \geq S_1+S_2$ のときは式 (6)~式 (8) および式 (10) の中より、また $N < S_1+S_2$ のときは式 (6), (7) および式 (9), (10) の中より $N+1$ 個の状態方程式が得られる。

次に、本研究で厳密解を求めようとするアーランサービスサイクルキューについては、式 (5) から明らかなように生起状態の場合の数、すなわち、状態確率変数の数 M は次式によって求められる。

$$\left. \begin{aligned} M &= \sum_{n_1=0}^N x_1+k_1-1 C_{x_1} \times x_2+k_2-1 C_{x_2} \\ \text{ここに、} & \\ x_1 &= \min\{n_1, S_1\} \\ x_2 &= \min\{N-n_1, S_2\} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (11)$$

この M の値はアーランサービスの位相 k_1, k_2 および窓口数 S_1, S_2 の値によって指数的に増大する。たとえば、図-2 のモデルを指数サービス ($k_1=k_2=1$) と考え

表-1 $S_1=1, S_2=3, k_1=k_2=2$ の場合の状態確率変数

<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	$P(00:30:04 t) \rightarrow P_1(t)$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	$P(10:20:22 t) \rightarrow P_{13}(t)$
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	$P(00:21:04 t) \rightarrow P_2(t)$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	$P(10:11:22 t) \rightarrow P_{14}(t)$
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	$P(00:12:04 t) \rightarrow P_3(t)$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	$P(10:02:22 t) \rightarrow P_{15}(t)$
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	$P(00:03:04 t) \rightarrow P_4(t)$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	$P(01:20:22 t) \rightarrow P_{16}(t)$
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	$P(10:30:13 t) \rightarrow P_5(t)$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	$P(01:11:22 t) \rightarrow P_{17}(t)$
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	$P(10:21:13 t) \rightarrow P_6(t)$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	$P(01:02:22 t) \rightarrow P_{18}(t)$
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	$P(10:12:13 t) \rightarrow P_7(t)$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	$P(10:10:31 t) \rightarrow P_{19}(t)$
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	$P(10:03:13 t) \rightarrow P_8(t)$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	$P(10:01:31 t) \rightarrow P_{20}(t)$
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	$P(01:30:13 t) \rightarrow P_9(t)$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	$P(01:10:31 t) \rightarrow P_{21}(t)$
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	$P(01:21:13 t) \rightarrow P_{10}(t)$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	$P(01:01:31 t) \rightarrow P_{22}(t)$
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	$P(01:12:13 t) \rightarrow P_{11}(t)$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	$P(10:00:40 t) \rightarrow P_{23}(t)$
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	$P(01:03:13 t) \rightarrow P_{12}(t)$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	$P(01:00:40 t) \rightarrow P_{24}(t)$

れば $M=5$ であるのに対し, 5. で事例としてとりあげる $k_1=11, k_2=100$ のアーランサービスでは $M=2117061$ となる。1つの状態確率変数に対して1つの状態方程式が成立することを考えると, この場合には 2117061 個の状態方程式を作成しなければならないということになる。ここでは, $S_1=1, S_2=3, k_1=k_2=2$ (したがって式 (11) より $M=24$) という簡単な場合について状態方程式を作成することから始める。まず 24 個の状態確率変数を列挙すれば表一のようなになる。ここで各状態確率変数を $P_i(t)$ ($i=1, 2, \dots, 24$) という記号で表現すれば以下のような 24 個の状態方程式が得られる。ここに, $K_1=k_1\mu_1, K_2=k_2\mu_2$ である。

$$\begin{aligned}
 P_1(t+dt) &= P_1(t)(1-3K_2dt) + P_9(t)K_1dt(1-3K_2dt) \\
 P_2(t+dt) &= P_2(t)(1-3K_2dt) + P_1(t)3K_2dt + P_{10}(t)K_1dt(1-3K_2dt) \\
 P_3(t+dt) &= P_3(t)(1-3K_2dt) + P_2(t)2K_2dt + P_{11}(t)K_1dt(1-3K_2dt) \\
 P_4(t+dt) &= P_4(t)(1-3K_2dt) + P_3(t)K_2dt + P_{12}(t)K_1dt(1-3K_2dt) \\
 P_5(t+dt) &= P_5(t)(1-K_1dt)(1-3K_2dt) + P_2(t)K_2dt + P_{16}(t)K_1dt(1-2K_2dt) \\
 P_6(t+dt) &= P_6(t)(1-K_1dt)(1-3K_2dt) + P_3(t)2K_2dt + P_{17}(t)K_1dt(1-2K_2dt) + P_5(t)(1-K_1dt)3K_2dt \\
 P_7(t+dt) &= P_7(t)(1-K_1dt)(1-3K_2dt) + P_4(t)3K_2dt + P_{18}(t)K_1dt(1-2K_2dt) + P_6(t)(1-K_1dt)2K_2dt \\
 P_8(t+dt) &= P_8(t)(1-K_1dt)(1-3K_2dt) + P_7(t)(1-K_1dt)K_2dt \\
 P_9(t+dt) &= P_9(t)(1-K_1dt)(1-3K_2dt) + P_5(t)K_1dt(1-3K_2dt) \\
 P_{10}(t+dt) &= P_{10}(t)(1-K_1dt)(1-3K_2dt) + P_6(t)K_1dt(1-3K_2dt) + P_9(t)(1-K_1dt)3K_2dt \\
 P_{11}(t+dt) &= P_{11}(t)(1-K_1dt)(1-3K_2dt) + P_7(t)K_1dt(1-3K_2dt) + P_{10}(t)(1-K_1dt)2K_2dt \\
 P_{12}(t+dt) &= P_{12}(t)(1-K_1dt)(1-3K_2dt) + P_8(t)K_1dt(1-3K_2dt) + P_{11}(t)(1-K_1dt)K_2dt \\
 P_{13}(t+dt) &= P_{13}(t)(1-K_1dt)(1-2K_2dt) + P_6(t)(1-K_1dt)K_2dt + P_{21}(t)K_1dt(1-K_2dt) \\
 P_{14}(t+dt) &= P_{14}(t)(1-K_1dt)(1-2K_2dt) + P_7(t)(1-K_1dt)2K_2dt + P_{13}(t)(1-K_1dt)2K_2dt \\
 &\quad + P_{22}(t)K_1dt(1-K_2dt) \\
 P_{15}(t+dt) &= P_{15}(t)(1-K_1dt)(1-2K_2dt) + P_8(t)(1-K_1dt)3K_2dt + P_{14}(t)(1-K_1dt)K_2dt \\
 P_{16}(t+dt) &= P_{16}(t)(1-K_1dt)(1-2K_2dt) + P_{10}(t)(1-K_1dt)K_2dt + P_{13}(t)K_1dt(1-2K_2dt) \\
 P_{17}(t+dt) &= P_{17}(t)(1-K_1dt)(1-2K_2dt) + P_{11}(t)(1-K_1dt)2K_2dt + P_{14}(t)K_1dt(1-2K_2dt) \\
 &\quad + P_{16}(t)(1-K_1dt)2K_2dt \\
 P_{18}(t+dt) &= P_{18}(t)(1-K_1dt)(1-2K_2dt) + P_{12}(t)(1-K_1dt)3K_2dt + P_{15}(t)K_1dt(1-2K_2dt) \\
 &\quad + P_{17}(t)(1-K_1dt)K_2dt \\
 P_{19}(t+dt) &= P_{19}(t)(1-K_1dt)(1-K_2dt) + P_{14}(t)(1-K_1dt)K_2dt + P_{24}(t)K_1dt \\
 P_{20}(t+dt) &= P_{20}(t)(1-K_1dt)(1-K_2dt) + P_{15}(t)(1-K_1dt)2K_2dt + P_{19}(t)(1-K_1dt)K_2dt \\
 P_{21}(t+dt) &= P_{21}(t)(1-K_1dt)(1-K_2dt) + P_{17}(t)(1-K_1dt)K_2dt + P_{19}(t)K_1dt(1-K_2dt) \\
 P_{22}(t+dt) &= P_{22}(t)(1-K_1dt)(1-K_2dt) + P_{18}(t)(1-K_1dt)2K_2dt + P_{20}(t)K_1dt(1-K_2dt) \\
 &\quad + P_{21}(t)(1-K_1dt)K_2dt \\
 P_{23}(t+dt) &= P_{23}(t)(1-K_1dt) + P_{20}(t)(1-K_1dt)K_2dt \\
 P_{24}(t+dt) &= P_{24}(t)(1-K_1dt) + P_{22}(t)(1-K_1dt)K_2dt + P_{23}(t)K_1dt
 \end{aligned}$$

.....(12)

このように, アーランサービスサイクルキューの場合には窓口数および位相の大きさによって1つの状態 $P(n_1, n_2|t)$ を構成する状態確率変数 (式 (5) の右辺) の記述方法が異なるため, 指数サービスサイクルキューの場合 (式 (6)~式 (10)) のような一般的記述が困難である。そこで, 次章では個々の状態方程式を一般的な連立一次方程式系へ変換していく方法について考えていくこととする。

3. サイクルキューモデル (アーランサービス) の解法

(1) 連立一次方程式系への交換

待ち行列モデルの数値解法としては, 母関数や特性関

数, あるいはラグランジェの展開を利用する特殊な方法などが考えられているが⁶⁾, ここでは以下に述べるように最も一般的な連立一次方程式系としての解法を考えていくことにする。

2.(2) では, 指数サービスの場合には式 (6)~式 (10), また $S_1=1, S_2=3, k_1=k_2=2$ のアーランサービスの場合には式 (12) のようにその状態方程式が作成できることを示した。

いまこれらの各方程式の両辺を dt で割り, $dt \rightarrow 0$ とすると, $P(n_1, n_2|t)$ あるいは $P(a^1, a^2, \dots, a^{k_1}; a^1, a^2, \dots, a^{k_2}; n_1, n_2|t)$ に関する連立微分方程式系が得られる。さらに定常状態に達した場合を考えれば,

$$\begin{aligned}
 P(n_1, n_2|t) &= P(n_1, n_2) \rightarrow \text{const.} \\
 P(a^1, a^2, \dots, a^{k_1}; a^1, a^2, \dots, a^{k_2}; n_1, n_2|t) &
 \end{aligned}$$

$$=P(a^1_1, a^1_2, \dots, a^1_{k_1}; a^2_1, a^2_2, \dots, a^2_{k_2}; n_1, n_2) \rightarrow \text{const.} \quad \dots\dots\dots(13)$$

となり、連立微分方程式系を連立一次方程式系へ変換することが可能である。すなわち、2. (2) で例示したアーランサービスサイクルキューモデルについていえば、24個の状態確率変数を未知数とする24元の連立一次方程式系となる。しかし、これら24個の方程式の中には次のような理由により非独立な式が1つ存在するため、結局はそれを除いた23個の独立な方程式と、すべての状態確率の和が1であることを示す式(5)とによる連立一次方程式を考えていくことになる。

すなわち、サイクルキューは閉じた1つのシステムと考えられるため、1つの生起状態をそれぞれの入力側および出力側から見て状態方程式を作成していくと、サイクルを閉じる部分では入力と出力とを重複して考えることになる。この重複する部分の推移状態を表わす方程式は当然非独立なものとなる。換言すれば、これは連立一次方程式系の係数行列の階数がM(方程式の元数)ではなくM-1となることを意味するものである。また、上記のことより係数行列の各要素の列和が零となることも明らかである。

以上の考察結果より、状態確率変数ベクトルを $x = (x_1, x_2, \dots, x_M)^T$ 、係数行列を $A^* = (a^*_{ij}; i=1, 2, \dots, M, j=1, 2, \dots, M)$ 、また行列 A^* の任意の1行を単位ベクトルで置きかえた行列を $A = (a_{ij})$ とすれば、サイクルキューの推移状態を表わす連立一次方程式系は次のように表現することができる。

$$Ax = b$$

ここに、

$$A = \left(\begin{array}{c} \left. \begin{array}{c} A^* \text{から任意の1} \\ \text{列を抜いた行列} \end{array} \right\} M-1 \text{行} \\ \left. \begin{array}{c} 1, 1, \dots, 1, 1 \end{array} \right\} \end{array} \right) \dots\dots\dots(14)$$

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_M)^T$$

$$b = (0, 0, \dots, 1)^T$$

また、すべての j に対して

$$\sum_{i=1}^M a^*_{ij} = 0 \dots\dots\dots(15)$$

が成立する。なお、係数行列 A^* が持つ式(15)の性質はM個の状態方程式が正しく作成されたかどうかのチェックに利用することができる。

(2) 連立一次方程式の反復解法

前節ではサイクルキューモデルが連立一次方程式系として定式化できることを明らかにした。そこで、本節ではまずその係数行列 A について考察し、ついでこのような係数行列 A を持つ連立一次方程式に適した解法を考えていくことにする。

アーランサービスサイクルキューモデルは2. (2) で述べたように位相 k および窓口数 S によって状態確率変数の数 M の値が指数的に大きくなり、このため3. (1) で考察した連立一次方程式の係数行列 A (M行M列) もキングサイズのものになってしまう。

- しかし、1つの生起状態へ推移する可能性としては、
- ① ステージ I の待ち行列からステージ I の窓口へ
 - ② ステージ I の窓口内の仮想窓口間へ
 - ③ ステージ I の窓口からステージ II の待ち行列へ
 - ④ ステージ II の待ち行列からステージ II の窓口へ
 - ⑤ ステージ II の窓口内の仮想窓口間へ
 - ⑥ ステージ II の窓口からステージ I の待ち行列へ

という6つの場面しかあり得ないため、個々の状態方程式についてみればその項数は上記Mの値に比較して小さい。したがってこの係数行列 A は‘疎’な行列であるといえる。しかも、項数は窓口数 S の大きさに左右されるものの位相 k の値にはほとんど影響を受けないため、位相 k の値が大きくなればなるほど‘疎’という性質が強くなる。たとえば5. で事例として解析したモデルでは147行147列の係数行列となるが非零要素は全体の約0.3%にすぎない。また、この係数行列 A は式(14)に示す第M行を除いたM-1行M列の行列をとっても帯行列(Band Matrix)とみなすには帯幅があまりにも大きすぎ、たとえ任意の行あるいは列を入れて帯幅を縮小しようとしても、このままでは第M行が存在するために不可能である⁷⁾。しかし、この場合、第M行を除いて任意の x_i 値を仮定することによって得られるM-1元の連立一次方程式を解き、最終的に、

$$\sum_{i=1}^M x_i = 1 \dots\dots\dots(16)$$

となるように正規化する方法⁸⁾をとることにすればある程度まで帯幅を縮小できる可能性はある。

以上をとりまとめてこの係数行列 A の特徴を示すと、「対角要素が非零であり、非対称かつ非常に疎なキングサイズの行列で、帯行列とはいえない正則行列」ということができる。したがって、以下ではこのような係数行列の特徴を生かした連立一次方程式の解法を考えていくこととする。

連立一次方程式の基本解法としては直接法と反復法がある。前者は理論的に厳密解を得ることが可能な方法であり、ガウス消去法、コレスキー法をはじめとして多くの解法が提案されている。しかし、直接法は原則として係数行列の全要素を記憶する必要があるため、コンピュータの記憶容量に対する制限から大きなモデルには適用できないという問題点がある。

一方、後者は係数行列のうち非零要素のみを記憶すればよいので、上述した係数行列 A を持つ連立一次方程式

式の解法としては非常に有効と考えられる。この方法にはヤコビ法、ガウス＝ザイデル法、最急降下法 (Steepest Decent Method; 以下 SD 法と略す)、共役勾配法 (Conjugate Gradient Method; 以下 CG 法と略す) など多くの解法が提案されている。これらのうち前 2 者は係数行列の対角要素が他に比べて優越する場合に解の収束が保証される方法である。しかし、アーランサービスのサイクルキューモデルでは式 (12) の定式化でも明らかなように、位相 k_1, k_2 および平均サービス時間 $1/\mu_1, 1/\mu_2$ の値によっては係数行列の対角要素が他の要素に優越しない場合もあるため、これらの方法は一般的でない。そのため、本研究では係数行列が正則でさえあれば式 (14) に示す形のままで解を求めることが可能な後 2 者のうち、とりわけ収束速度の早い CG 法による解析方法を採用することにした。

CG 法は SD 法と同様、本来、「ある値 $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ が最小 (あるいは最大) となるような x_1, x_2, \dots, x_n を求めよ」という極値問題の解法である。いま、残差ベクトル r を用いて式 (14) のような連立一次方程式を、

$$r = b - Ax \dots\dots\dots(17)$$

と変形する。ここで、 $f(x)$ として

$$f(x) = (r, r) = \sum_{i=1}^M r_i^2 \dots\dots\dots(18)$$

をとれば、一般に、

$$f(x) \geq 0 \dots\dots\dots(19)$$

であり、 $r=0$ 、すなわち正解が得られたときに等号が成立する。したがって、連立一次方程式を解く問題は $f(x)$ を最小とするような x を求める極値問題に帰着し、CG 法による解析が可能となる。

CG 法は変数 x_i を 1 つずつ動かすのではなく $f(x)$ の最急勾配方向をたどる方法の 1 つであり、特に最急勾配方向から前回修正した方向の成分を除いたものを今回の修正方向にとる方法である。その場合、第 k および第 $k+1$ 段階の最急勾配方向を P_k, P_{k+1} で表わすと、

$$(P_k, AP_{k+1}) = 0 \dots\dots\dots(20)$$

が成立する⁹⁾。これは P_{k+1} が P_k のみでなく、 P_{k-1}, P_{k-2}, \dots などいままでに修正したすべての方向と直交することを意味する。換言すれば、いかなる i, j (ただし $i \neq j$) に対しても、

$$(P_i, AP_j) = 0 \dots\dots\dots(21)$$

が成立することである。これに関連して、

$$(r_i, r_j) = 0 \quad (\text{ただし } i \neq j) \dots\dots\dots(22)$$

$$\alpha_i \geq 0, \beta_j \geq 0 \quad (\alpha_i, \beta_j \text{ は図-3 を参照}) \dots\dots\dots(23)$$

が成立する¹⁰⁾。式 (22) は残差 r_i が互いに直交することを意味するが、 M 次元ベクトルで互いに直交するのは $M+1$ 個以上ありえないため、必ず、

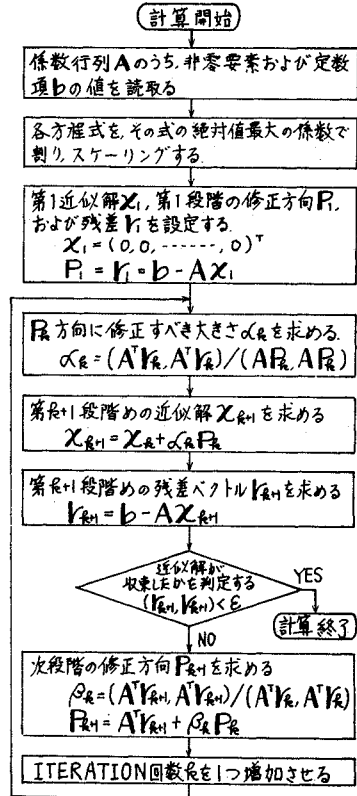


図-3 CG 法による計算プロセス

$$r_{M+1} = 0 \dots\dots\dots(24)$$

が成立する。これは、計算中に誤差が絶対に入らないと仮定したとき、CG 法が反復回数 M 回までに必ず正解に到達することを保証するものである。また、式 (23) の α_i, β_j が負となることは計算誤差が累積して解が収束しなくなることを意味し、このような場合は以後の計算続行が無意味である。したがって、式 (23) は反復計算の途中での検算に利用することができる。これらのことから、本研究における連立一次方程式の解法として CG 法は非常に有効な方法であるといえる。CG 法の計算プロセスを示したのが図-3 である。

4. サイクルキューモデルの評価尺度

一般の待ち行列系の評価尺度としては、定常状態における系または列の長さや待ち時間の分布が考えられている。いま待ち行列長を L_q 、平均待ち時間を W_q 、平均到着率を λ とすれば、到着分布やサービス時間分布の種類、窓口数あるいはサービス方法の規律などの如何にかかわらず、

$$L_q = \lambda W_q \dots\dots\dots(25)$$

という関係が成立することが明らかにされている¹¹⁾。こ

のうち L_q に関しては、サイクルキューモデルであっても、

$$\left. \begin{aligned} \text{ステージ I の } L_q; L_{q_1} &= \sum_{n_1=S_1+1}^N (n_1 - S_1) \\ &\quad \times P(n_1, N - n_1) \\ \text{ステージ II の } L_q; L_{q_2} &= \sum_{n_2=S_2+1}^N (n_2 - S_2) \\ &\quad \times P(N - n_2, n_2) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(26)$$

として簡単に算定することができる。

しかし、サイクルキューモデル、特にアーランサービスのサイクルキューモデルでは平均待ち時間 W_q を直接求めることが困難である。そこで、式 (26) を式 (25) へ代入することによって平均待ち時間 W_q を求める方法が考えられるが、この場合、式 (25) そのものが成立するかどうか明らかでなく、仮に成立するとしても平均到着率 λ を直接算定するのが困難である。

この問題を検討した結果、指数サービスサイクルキューモデルのうち、特に $S_1=1$ の場合には、 $P(N, 0) \equiv 0$ の場合のみ式 (25) が近似的に成立することが明らかとなった¹²⁾。しかし、アーランサービスのサイクルキューでは式 (25) の成立が保証しないため、次章では L_q のみを評価尺度として考えることにする。

5. サイクルキューモデルの適用例

以上により、CG 法によるアーランサービスサイクルキューモデルの解析は、施工計画面に現われる実際の待ち現象の解析法として有効なものであるということが明らかとなった。このようなアーランサービスサイクルキューモデルの厳密解法による計算値と、計算の比較的簡単な指数サービスサイクルキューモデルとして解析した場合の計算値とを比較してみるため、ここでは 2.(1) で概述したしゅんせつ工事への適用を試みることにする。

事例現場としては、図-2 のモデルで示される瀬戸内海航路しゅんせつ工事を採用した。これをアーランサービスサイクルキューモデルとして定式化するために必要な各因子の値は次のとおりである¹³⁾。

- 土運船の隻数; $N=4$ (隻)
- しゅんせつ船の隻数; $S_1=1$ (隻)
- 押船の隻数; $S_2=3$ (隻)
- しゅんせつ船のサービス時間
 平均値; $1/\mu_1=51.7$ (分) 位相; $k_1=11$
- 押船のサービス時間
 平均値; $1/\mu_2=228.0$ (分) 位相; $k_2=100$

いま、これらの値を用いて定式化しようとするれば、2.(2) で触れたように状態確率変数の個数は $M=2117061$ 個となり、同数だけの状態方程式を作成しなければならない。また、かりに 2117061 元の状態方程式を作成することができたとしても、このようなキングサイズの連立方程式を解くことは不可能に近い。

そこで、まず指数サービスサイクルキューモデル ($k_1=k_2=1$) の計算結果を基準として、低次 (位相が小) のアーランサービスサイクルキューとして定式化した場合に待ち行列長 L_q がどのように変化するかを検討することにし、表-2 に示すような 8 つの Case を考えた。なお表-2 には各 Case の状態確率変数の個数 M (したがって連立一次方程式系としての係数行列のランク) を併記した。

表-2 各 CASE の位相 k_1, k_2 および状態確率変数の数 M

Case	k_1	k_2	M
1	1	1	5
2	2	3	50
3	2	4	90
4	2	5	147
5	3	3	70
6	3	4	125
7	5	5	315
8	5	10	1650

ここでは、各 Case ごとの状態方程式は省略し、計算方法についてのみ簡単に述べることにする。まず、解析法としては CG 法を用いたが、このような反復法では許容誤差 ϵ としてどの程度の値をとるかが解の精度に大きく影響する。そこで、掃出し法によって Case 4 (すなわち 147 元の連立一次方程式系) の厳密解を求め、続いて ϵ の値を変化させながら同一 Case を CG 法によって解析し解の収束状況を検討したところ、 $\epsilon=1.0 \times 10^{-15}$ で両者の解が一致したため、この値を許容誤差として設定した。

計算結果を示したのが表-3 である。ここで $M/S_1 + M/S_2$ はステージ I, II の窓口がそれぞれ S_1, S_2 個の指

表-3 各 CASE の計算結果

	$M/1+M/3$	$E_2/1+E_3/3$	$E_2/1+E_4/3$	$E_2/1+E_3/3$	$E_3/1+E_3/3$	$E_3/1+E_4/3$	$E_3/1+E_5/3$	$E_2/1+E_{10}/3$
$P(0, 4)$	0.4166	0.3881	0.3860	0.3846	0.3813	0.3789	0.3714	0.3678
$P(1, 3)$	0.2834	0.3697	0.3760	0.3800	0.3919	0.3995	0.4266	0.4399
$P(2, 2)$	0.1928	0.1877	0.1878	0.1881	0.1846	0.1839	0.1769	0.1727
$P(3, 1)$	0.0874	0.0496	0.0463	0.0441	0.0395	0.0358	0.0246	0.0194
$P(4, 0)$	0.0198	0.0049	0.0039	0.0032	0.0027	0.0019	0.0005	0.0001
L_{q_1}	0.4271	0.3017	0.2921	0.2860	0.2716	0.2611	0.2277	0.2119
L_{q_2}	0.4166	0.3881	0.3860	0.3846	0.3813	0.3789	0.3714	0.3678
H_1	0.5834	0.6119	0.6140	0.6154	0.6187	0.6211	0.6286	0.6322
H_2	2.5729	2.6984	2.7079	2.7140	2.7284	2.7389	2.7723	2.7881

表-4 各 CASE の評価値の比

	Case 2/ Case 1	Case 8/ Case 1
L_{q1}	0.7063	0.4962
L_{q2}	0.9317	0.8829
H_1	1.0488	1.0836
H_2	1.0488	1.0837

数サービスサイクルキューモデルを意味し、 $E_{k_1}/S_1 + E_{k_2}/S_2$ はステージ I, II のサービス時間分布がそれぞれ位相 k_1, k_2 のアーラン分布に従うアーランサービスサイクルキューモデルであることを表わす。また、表-3 において $P(n_1, n_2)$ は式 (5) で得られる状態確率であり、 L_{q1}, L_{q2} は式 (26) で求められるステージ I およびステージ II の平均待ち行列長である。また、 H_1, H_2 は各ステージでサービス中の土運船の平均隻数であり、これらは次式によって求められる。

$$\left. \begin{aligned} H_1 &= \sum_{n_1=1}^4 P(n_1, 4-n_1) \\ H_2 &= \sum_{n_2=1}^{S_2-1} n_2 \times P(4-n_2, n_2) \\ &\quad + \sum_{n_2=S_2}^4 3 \cdot P(4-n_2, n_2) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (27)$$

アーランサービスのサイクルキューモデルの評価値として、 $L_{q1}, H_i (i=1, 2)$ をとり、これらを図示したものが図-4 である。これより以下のことが明らかとなった。

- ① 位相 k_1, k_2 の値が大きくなるにしたがって、 H_1, H_2 の値は増加するが、 L_{q1}, L_{q2} の値は減少している。
- ② k_1 の値を一定としたとき、 k_2 の値を大きくしていくと各評価値は一定値に収束する。
- ③ 指数サービス (Case 1) の評価値を基準として、低次 (位相が小) のアーランサービスの場合 (Case 2) および高次 (位相が大) のアーランサービ

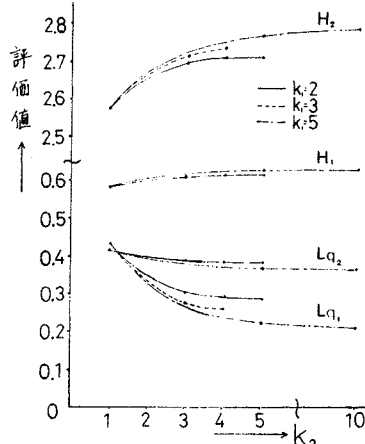


図-4 位相 k_1, k_2 と評価値との関係 ($1/\mu_1=51.7, 1/\mu_2=228.0$)

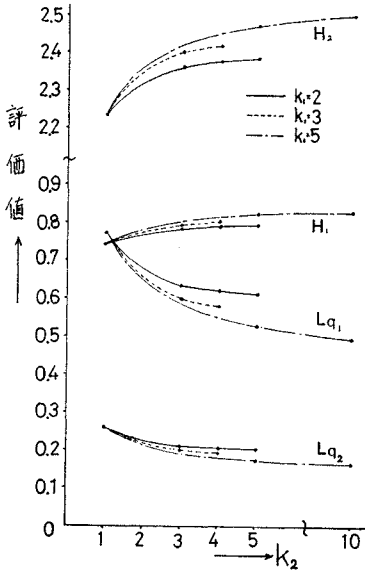


図-6 位相 k_1, k_2 と評価値との関係 ($\mu_1/\mu_2=3$)

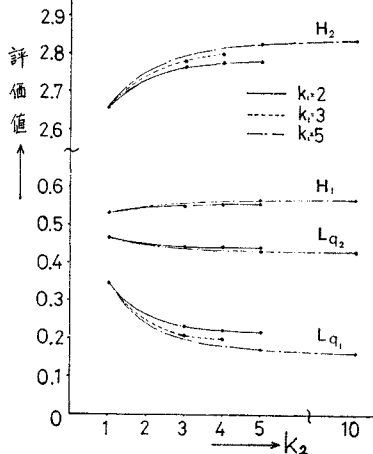


図-8 位相 k_1, k_2 と評価値との関係 ($\mu_1/\mu_2=5$)

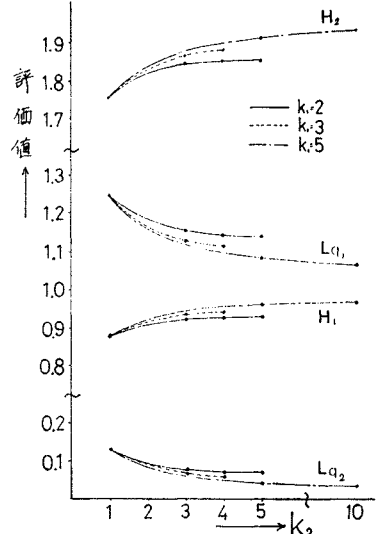


図-5 位相 k_1, k_2 と評価値との関係 ($\mu_1/\mu_2=2$)

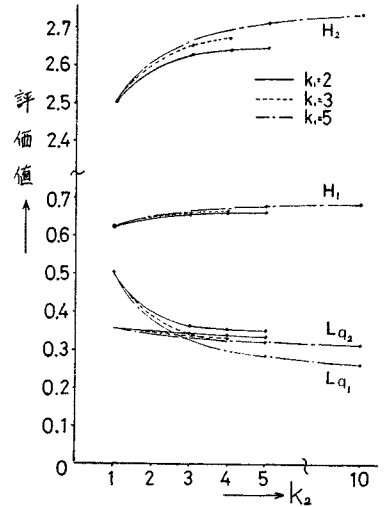


図-7 位相 k_1, k_2 と評価値との関係 ($\mu_1/\mu_2=4$)

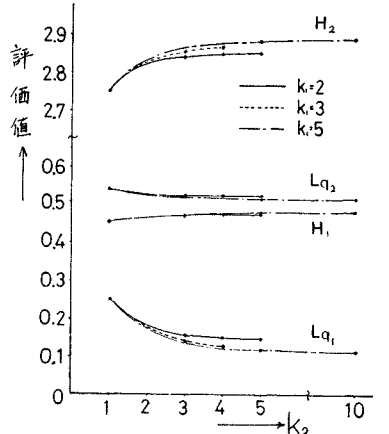


図-9 位相 k_1, k_2 と評価値との関係 ($\mu_1/\mu_2=6$)

スの場合 (Case 8) に注目して、各評価値の比 Case 2/Case 1, Case 8/Case 1 を求めると表-4 が得られる。この表および図-4 から、指数サービスとアーランサービスとでは、それぞれの評価値に明瞭な差異の現われることが明らかとなった。

以上のうち、①は指数サービスよりも低次のアーランサービス、次に高次のアーランサービス、さらに一定サービス ($k_1=k_2=\infty$) と位相が大きくなるにしたがってシステムとしての効率がよくなっていくということを裏づけるものである。また、 L_{q_2}, H_1 の変化が L_{q_1}, H_2 の変化よりも小さいのは本事例においてステージ I の窓口数がステージ II の窓口数よりも少ないためである。

次に、②および③は、実際の現象において窓口でのサービス時間がアーラン分布にしたがうと考えられる場合には、アーランサービスサイクルキューモデルによる解析が必要であること、また、位相 k_1, k_2 の値が大きくなっていくにしたがって評価値 $L_{q_1}, L_{q_2}, H_1, H_2$ の値がある一定値に収束していくこと、したがって位相の大きなアーランサービスサイクルキューモデルは、これを低次のアーランサービスサイクルキューモデルによって近似しても実用上さしつかえないということを結論づけるものである。

また、アーランサービスサイクルキューモデルでは、ステージ I, II の窓口数および位相の大きさだけでなく、式 (12) の定式化からも明らかなように、平均サービス時間 $1/\mu_1$ と $1/\mu_2$ の比も各評価値に大きく影響する。そこで、表-2 に示した 8 つの Case について、 $1/\mu_1$ を 51.7 分に固定して μ_1/μ_2 の値を 2, 3, 4, 5, 6 と順次変更し各場合の $L_{q_1}, L_{q_2}, H_1, H_2$ の値を求めた。計算結果を図示したのが図-5~9 である。これらより以下のことが明らかとなった。

④ 上述した①~③の傾向は μ_1/μ_2 の大きさに関係なく成立する。

⑤ μ_1/μ_2 の値が大きくなるにつれて、 L_{q_1}, H_1 の値は減少し、 L_{q_2}, H_2 の値は増加する。このことは、 $1/\mu_2$ が大きくなるにつれて相対的にステージ I 側に余裕が生じてくることを示している。

6. 結 言

本研究は、土木施工の分野で数多く見受けられる循環待ちせ現象をアーランサービスサイクルキューモデルとして定式化するとともに、これを連立一次方程式系へ変換し、CG 法による解法を示したものである。

この場合、従来のような指数サービスサイクルキューモデルとしての定式化とは異なり、客が現在何番めの仮想窓口を占有しているかということまで記述する必要が

あるため、状態確率変数の数(すなわち状態方程式の数)が膨大なものになってしまう。このため、待ち行列理論の解法として有効な母関数あるいは特性方程式などを利用する解法の導入は非常に困難である。

そこで、この状態方程式系を連立一次方程式系に変換することを考えたが、係数行列の階数 M が膨大になってしまうため、普通の連立一次方程式の解法では解けない。そのため、その係数行列の特徴に注目して CG 法による解法を試みた。

さらに、実際の循環待ちせ現象を指数サービスサイクルキューモデルとして定式化した場合とアーランサービスサイクルキューモデルとして定式化した場合について計算結果を比較してみたが、両者の評価値 $L_{q_1}, L_{q_2}, H_1, H_2$ の間にはかなりの差があることが明らかとなった。

また、アーランサービスサイクルキューモデルにおいては、位相 k_1, k_2 の値が大きくなっていくにしたがって評価値 $L_{q_1}, L_{q_2}, H_1, H_2$ の値はある一定値に収束していくこと、したがって、高次のアーランサービスサイクルキューモデルは、これを低次のアーランサービスサイクルキューモデルで近似しても実用上さしつかえないということが明らかとなった。

また、本研究では 2 つのステージを持つサイクルキューモデルをとりあげたが、この方法は 3 つ以上のステージで構成されるサイクルキューに対しても準用することが可能である。

最後に、今後に残された研究課題を列挙すると以下のとおりである。

① 窓口数 S_i , 位相 k_i の値をさらに大きくしたときの効率的な状態方程式の作成方法の確立。

② アーランサービスの位相 k_i をさらに大きくした場合およびその極限としての一定サービスの場合の厳密解の算定。

本研究を遂行するにあたり、有益なご助言をいただいた京都大学工学部土木工学教室 春名 攻 助教授に謝意を表します。

参 考 文 献

- 1) 杉原五郎: 待ち合わせ系の記述および解析に関する基礎的研究— $M/M/1(\infty)$ システムを対象として—, 京都大学修士論文, 1974.
- 2) 竹内益雄: サイクルキューモデルによるしゅんせつ船団計画に関する研究, 土木学会論文報告集, 第 140 号, pp. 13~20, 1967.
- 3) 吉川和広: 土木計画と OR, 丸善, pp. 311~314, 1969.
- 4) 国沢清典・本間鶴千代: 応用待ち行列事典, 廣川書店, pp. 242~245, 1971.
- 5) E. Koenigsberg: Finite Queues and Cyclic Queues, Operations Research, Vol. 8, pp. 246~253, 1960.
- 6) 国沢清典・本間鶴千代: 応用待ち行列事典, 廣川書店, pp. 229~290, 1971.

- 7) R.J. Collins : Bandwidth Reduction by Automatic Renumbering, International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 6, pp. 345~356, 1973.
- 8) F.S. Hillier & B.W. Boling : Finite Queues in Series with Exponential or Erlang Service Times—a Numerical Approach, Operations Research, Vol. 15, pp. 286~303, 1967.
- 9) 戸川隼人：マトリクスの数値計算，オーム社，pp. 95-102, 1971.
- 10) 新谷尚義：数値計算 I 一線形計算一，朝倉書店，pp. 97~101, 1967.
- 11) 国沢清典・本間鶴千代：応用待ち行列事典，廣川書店，pp. 169~170, 1971.
- 12) 吉川和広・山本幸司：待ち行列理論による機械系選定情報の作成，昭和 49 年度土木学会関西支部年次学術講演概要集，1974.
- 13) 竹内益雄：サイクルキューモデルによるしゅんせつ船団計画に関する研究，土木学会論文報告集，第 140 号，pp. 13~20, 1967.

(1975.4.3・受付)
