

## H型鋼柱の局部座屈と曲げ座屈の連成座屈強度

## COUPLED STRENGTH OF LOCAL AND WHOLE BUCKLINGS OF H-COLUMNS

吉 田 博\*  
By Hiroshi YOSHIDA

## 1. 結 言

中心軸圧縮荷重を受ける真直なH型鋼柱は、次のような原因により強度を失うことが考えられる。

(1) 圧潰 鋼柱が座屈することなく、断面全体が降伏して荷重の増加に耐えられなくなる。非常に短い柱に起こる。

(2) 曲げ座屈 荷重がある大きさに達すると、横方向の曲げ変形が急激に生じ、耐力を失う。長い柱では弾性域で座屈するが、短い柱では非弾性域で座屈する。

(3) ねじり座屈 荷重がある大きさに達するとねじり変形が急激に生じ、耐力を失う。通常のH型断面では弱軸まわりの曲げ座屈強度の方が小さいが、横変形が拘束されている場合に生ずる<sup>10)</sup>。

(4) 局部座屈 荷重がある大きさに達すると断面形状の変化が急激に生ずる。これはフランジおよびウェブの幅厚比によって大きく影響を受ける。通常のH型断面では、後座屈強度は期待できず、局部座屈と同時に耐力を失う<sup>12)</sup>。比較的短い柱に生ずる。

鋼柱のこれらの強度に関する研究は、これまで多くの研究者によってなされてきたが、特に最近、高強度鋼の開発とともに、柱の座屈強度の研究の重要性が注目されるようになってきた。

通常のH型断面柱では、曲げ座屈強度を増加させるためには同一の断面積に対して断面形状を大きくし、薄肉化することが有利であるが、他方、局部座屈強度は急激に減少する。したがって、曲げ座屈強度と局部座屈強度は断面構成上相反するところがあり、これらの強度の相関性を知ることは、柱として経済的なH型断面形状決定に対して、重要な意味を持つことになる。さらに、圧延成形された断面または溶接組立断面には残留応力が存在し、この残留応力が局部座屈強度に大きな影響をおよぼすことが知られている<sup>8)~11), 15)</sup>。

残留応力が柱の曲げ座屈強度におよぼす影響については、多くの研究が成されているが、局部座屈強度に関しては、断面を構成する板要素についての研究が主であり、文献9)および11)を除いて、断面全体に対する研究はあまり見られないようである。たとえば、H型断面のフランジの局部座屈に関しては、フランジはウェブによって弾性的に拘束されているとして解かれ<sup>9), 11), 17)</sup>、また、ウェブの局部座屈に関しては、ウェブはフランジによって弾性的に拘束されているとして解かれている場合が多いようである<sup>9)</sup>。文献9)および11)においては、残留応力を有する箱型断面およびH型断面柱のフランジとウェブの連成座屈強度を有限階差法を用いて計算した例を示しており、精度を上げるためにはかなりの分割数を必要とすることを述べている。

本研究においては、わずかの分割数で、任意の残留応力分布および偏心軸荷重に対して十分な精度で座屈計算ができる弾塑性有限帯板要素法を用いることにする。これにより、中心軸圧縮荷重を受けるH型断面柱について、

(1) フランジはウェブによって弾性的に拘束されていると考えた場合 (Model I) のフランジの座屈、ウェブはフランジによって弾性的に拘束されていると考えた場合 (Model II) のウェブの座屈、フランジ自身は座屈によって断面形状の変化しない補剛材と考えた場合 (Model III) のウェブの座屈、フランジ自身は座屈によって断面形状の変化しない補剛材と考え、フランジの残留応力を考慮した場合 (Model IV) のウェブの座屈およびH型断面全体を一体として取り扱った場合 (Model V) の座屈について、種々のフランジおよびウェブの幅厚比、降伏応力および残留応力に対して数値計算を行い、それぞれの Model の座屈強度間の関係を明らかにし、各 Model の妥当性について検討を行う。

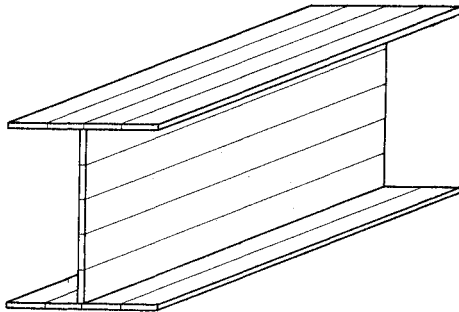
(2) フランジおよびウェブの局部座屈、フランジとウェブの連成座屈および曲げ座屈との連成の相互関連性について検討を行う。

\* 正会員 工博 金沢大学助教授 工学部土木工学科

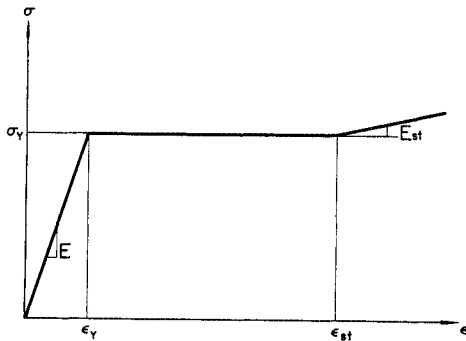
(3) H型断面全体の非弾性連成座屈解析を行い、残留応力および断面形状と座屈強度の関係について検討を行う。

2. 理論解析法

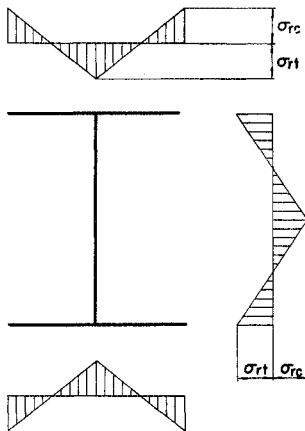
図一1 に示すようにH型鋼のフランジおよびウェブの板要素を有限個の長さ方向の帯板要素に分割する有限帯板要素法を用いる<sup>2), 3), 6), 16), 17)</sup>。圧縮応力はH型鋼の両端に軸方向に一樣に作用し、それ以外の応力は作用して



図一1 H型断面の有限帯板要素への分割



図一2 理想化された応力-ひずみ関係



図一3 理想化された残留応力分布

いないものとする。

解析に用いられる基礎的な仮定は、1) 材料の応力-ひずみ曲線は 図一2 に示すような理想化されたものとする。2) フランジおよびウェブ面内での初期変形はないものとする。3) 軸方向の残留応力は 図一3 に示すような理想化されたものを用いる。4) 座屈時のひずみの反転は生じないものとし、塑性領域においては、Bijlaard の塑性変形理論が成立つものとする<sup>1)</sup>。

部材断面を形成する平板要素の幅方向を分割し、1つの分割要素  $ij$  に対して、力と変形の関係を示す剛性方程式を次のように得ることができる。

剛性マトリックスの誘導は通常の板の弾性解析のものと同様であるが、非弾性域のモーメントと曲率の関係

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{Et^3}{12} \begin{bmatrix} \kappa_1 & \kappa_2 & 0 \\ \kappa_2 & \kappa_3 & 0 \\ 0 & 0 & \kappa_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ 2\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} = [\kappa] \{x\}$$

.....(1)

を用いて、非弾性域まで拡張できる<sup>1)</sup>。ここに、 $E$  は材料の縦弾性係数、 $t$  は板の厚さ、 $w$  は板のたわみであり、 $\kappa_1$  から  $\kappa_4$  は

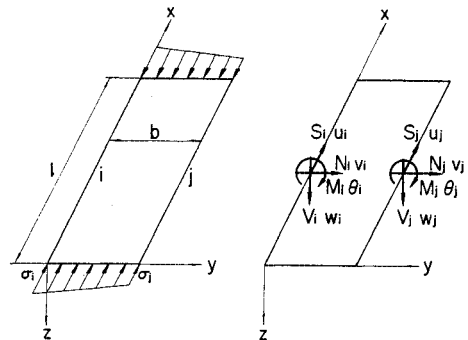
$$\left. \begin{aligned} \kappa_1 &= (1+3\tau)/\beta, \quad \kappa_2 = 2\{1-(1-2\nu')\tau\}/\beta \\ \kappa_3 &= 4/\beta, \quad \kappa_4 = 1/(2+2\nu'+3e) \end{aligned} \right\} \dots(2)$$

であり、

$$\begin{aligned} \beta &= 5-4\nu'+3e-(1-2\nu')^2\tau \\ \tau &= E_t/E, \quad e = \epsilon_p/\epsilon_Y \end{aligned}$$

で与えられる。ここに、 $\nu'$  は非弾性域でのポアソン比、 $E_t$  は材料の応力-ひずみ曲線の接線弾性係数であり、 $\epsilon_p$  はひずみの塑性成分、 $\epsilon_Y$  は降伏ひずみである。式 (2) において、 $\tau=1.0$  および  $e=0$  とおくと弾性のものとなる。

分割された帯板要素  $ij$  の座屈変形にともなう面外変位  $w$ 、面内変位  $u, v$  (図一4) の変位関数を次のように仮定する。



図一4 帯板要素と節線力、節線変位

$$w = \left[ \left( y - \frac{2y^2}{b} + \frac{y^3}{b^2} \right) \bar{\theta}_i + \left( 1 - \frac{3y^2}{b^2} + \frac{2y^3}{b^3} \right) \bar{w}_i + \left( -\frac{y^2}{b} + \frac{y^3}{b^2} \right) \bar{\theta}_j + \left( \frac{3y^2}{b^2} - \frac{2y^3}{b^3} \right) \bar{w}_j \right] \sin \frac{\pi x}{l} \dots\dots\dots (3 \cdot a)$$

$$v = \left[ \left( 1 - \frac{y}{b} \right) \bar{v}_i + \frac{y}{b} \bar{v}_j \right] \sin \frac{\pi x}{l} \dots\dots\dots (3 \cdot b)$$

$$u = \left[ \left( 1 - \frac{y}{b} \right) \bar{u}_i + \frac{y}{b} \bar{u}_j \right] \cos \frac{\pi x}{l} \dots\dots\dots (3 \cdot c)$$

これより節線変位は

$$w_i = \bar{w}_i \sin \frac{\pi x}{l}, \quad w_j = \bar{w}_j \sin \frac{\pi x}{l} \dots\dots\dots (4 \cdot a)$$

$$\theta_i = \bar{\theta}_i \sin \frac{\pi x}{l}, \quad \theta_j = \bar{\theta}_j \sin \frac{\pi x}{l} \dots\dots\dots (4 \cdot b)$$

$$v_i = \bar{v}_i \sin \frac{\pi x}{l}, \quad v_j = \bar{v}_j \sin \frac{\pi x}{l} \dots\dots\dots (4 \cdot c)$$

$$u_i = \bar{u}_i \cos \frac{\pi x}{l}, \quad u_j = \bar{u}_j \cos \frac{\pi x}{l} \dots\dots\dots (4 \cdot d)$$

と表わされる。節線変位に対応する節線力 (図-4) は

$$V_i = \bar{V}_i \sin \frac{\pi x}{l}, \quad V_j = \bar{V}_j \sin \frac{\pi x}{l} \dots\dots\dots (5 \cdot a)$$

$$M_i = \bar{M}_i \sin \frac{\pi x}{l}, \quad M_j = \bar{M}_j \sin \frac{\pi x}{l} \dots\dots\dots (5 \cdot b)$$

$$N_i = \bar{N}_i \sin \frac{\pi x}{l}, \quad N_j = \bar{N}_j \sin \frac{\pi x}{l} \dots\dots\dots (5 \cdot c)$$

$$S_i = \bar{S}_i \cos \frac{\pi x}{l}, \quad S_j = \bar{S}_j \cos \frac{\pi x}{l} \dots\dots\dots (5 \cdot d)$$

にて表わされる。ここに、 $l$  は座屈半波長であり、 $V, M, N, S$  はそれぞれの辺上における単位長さ当りの合せ断力、曲げモーメント、 $y$  方向の面内力および  $x$  方向の面内力を示す。

平面応力状態での弾塑性応力増分  $\{d\sigma\}$  とひずみ増分  $\{d\epsilon\}$  の関係式

$$\begin{Bmatrix} d\sigma_x \\ d\sigma_y \\ d\tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} d_1 & d_2 & 0 \\ d_2 & d_3 & 0 \\ 0 & 0 & d_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d\epsilon_x \\ d\epsilon_y \\ d\gamma_{xy} \end{Bmatrix} = [d_p] \{d\epsilon\} \dots\dots\dots (6)$$

および式 (1) の弾塑性曲げモーメントと曲率の関係式を用いて、帯板要素の座屈変形ともなうポテンシャルエネルギー  $\pi$  は、変形が微小で面外と面内の変形の連成がないものとして、以下のように表わされる。

$$\begin{aligned} \pi = & \frac{1}{2} D \int_0^l \int_0^b \left[ \kappa_1 \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + 2 \kappa_2 \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \right. \\ & \left. + \kappa_3 \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + 4 \kappa_4 \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] dx dy \\ & + \frac{Et}{2(1-\nu^2)} \int_0^l \int_0^b \left[ d_1 \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \right. \\ & \left. + 2 d_2 \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right) \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right) + d_3 \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & + d_4 \left\{ \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right\}^2 dx dy \\ & - \frac{t}{2} \int_0^l \int_0^b \sigma \left\{ \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \right. \\ & \left. + \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right\} dx dy \\ & - \int_0^l \{ (M_i \theta_i + V_i w_i + N_i v_i + S_i u_i) \\ & + (M_j \theta_j + V_j w_j + N_j v_j + S_j u_j) \} dx \dots\dots (7) \end{aligned}$$

式 (3), (4) および (5) を式 (7) に代入し、 $\pi$  の停留原理を用いると帯板要素の剛性マトリックスが求められる。

節線力ベクトルおよび節線変位ベクトルを

$$\{f\} = \{ \bar{M}_i/b_0 \bar{V}_i \bar{N}_i \bar{S}_i \bar{M}_j/b_0 \bar{V}_j \bar{N}_j \bar{S}_j \} \dots\dots\dots (8 \cdot a)$$

$$\{u\} = \{ b_0 \bar{\theta}_i \bar{w}_i \bar{v}_i \bar{u}_i b_0 \bar{\theta}_j \bar{w}_j \bar{v}_j \bar{u}_j \} \dots\dots\dots (8 \cdot b)$$

とすると、

$$\{f\} = [k] + [k'] \{u\} \dots\dots\dots (9)$$

の形となる。ここに、 $b_0$  は板の単位幅である。

式 (9) の剛性マトリックス  $[k]$  および安定係数マトリックス  $[k']$  の要素は、弾性域の場合または応力分布が比較的簡単な式で表わされる場合は直接積分が可能であるが<sup>17)</sup>、非弾性域が存在する場合または応力分布が複雑な場合は数値積分を行う必要がある。剛性マトリックスおよび安定係数マトリックスの要素の具体的な表現は付録に示してある。

フランジ自身は断面形状の変化しない補剛材と考える場合は以下のようにフランジとウェブの接合節線  $p$  での節線力と節線変位の関係を得ることができる。

フランジの図心はウェブとの接合節線に一致し、この図心  $p$  の  $x, y$  および  $z$  方向の変位をそれぞれ  $u_p, v_p$  および  $w_p$  とし、断面の回転角を  $\theta_p$ 、ゆがみ関数を  $\omega$  とすると、断面上の任意の位置の変位  $u, v$  および  $w$  は

$$u = u_p - \frac{dw_p}{dx} z - \frac{dv_p}{dx} y + \frac{d\theta_p}{dx} \omega \dots\dots\dots (10 \cdot a)$$

$$v = v_p - z\theta_p \dots\dots\dots (10 \cdot b)$$

$$w = w_p + y\theta_p \dots\dots\dots (10 \cdot c)$$

にて示される (図-5)。補剛材 (フランジ) の断面積を、 $A, y$  および  $z$  軸まわりの曲げ剛性を  $EI_y$  および  $EI_z$ 、曲げねじり剛性を  $EI_w$ 、および St. Venant のねじり剛性を  $GK_T$  とすると、圧縮応力  $\sigma$  が作用している時の座屈変形ともなうポテンシャルエネルギー  $\pi_s$  は

$$\begin{aligned} \pi_s = & \frac{EA}{2} \int_0^l \left( \frac{\partial u_p}{\partial x} \right)^2 dx + \frac{EI_y}{2} \int_0^l \left( \frac{d^2 w_p}{dx^2} \right)^2 dx \\ & + \frac{EI_z}{2} \int_0^l \left( \frac{d^2 v_p}{dx^2} \right)^2 dx + \frac{EI_w}{2} \int_0^l \left( \frac{d^2 \theta_p}{dx^2} \right)^2 dx \\ & + \frac{GK_T}{2} \int_0^l \left( \frac{d\theta_p}{dx} \right)^2 dx - \frac{1}{2} \int_0^l \int_A \sigma \left\{ \left( \frac{du}{dx} \right)^2 \right. \end{aligned}$$

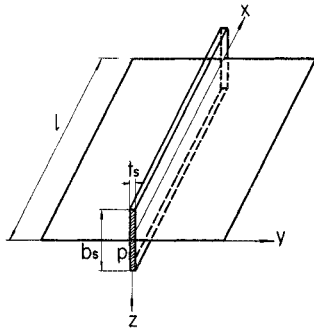


図-5 補剛材

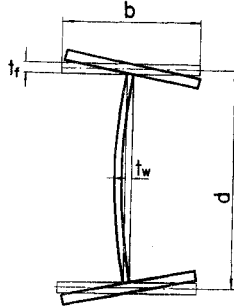


図-6 座屈によるウェブの変形

$$\begin{aligned}
 & + \left( \frac{dv}{dx} \right)^2 + \left( \frac{dw}{dx} \right)^2 \Big\} dA dx \\
 & - \int_0^l (M_p \theta_p + V_p w_p + N_p v_p + S_p u_p) dx \quad \dots\dots\dots(11)
 \end{aligned}$$

にて示される。ここに、接合節線におけるモーメント  $M_p$  および節線力  $V_p, N_p$  および  $S_p$  は 図-4 に示したものである。

式 (10) の  $u_p, v_p, w_p$  および  $\theta_p$  は接合している板と同一の変位になるとして、次のように表わされる。

$$\left. \begin{aligned}
 u_p &= \bar{u}_p \cos \frac{\pi x}{l} & v_p &= \bar{v}_p \sin \frac{\pi x}{l} \\
 w_p &= \bar{w}_p \sin \frac{\pi x}{l} & \theta_p &= \bar{\theta}_p \sin \frac{\pi x}{l}
 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(12)$$

ゆがみによる軸変位を微小として無視し、式 (10) および (12) を式 (11) に代入し、 $\pi_s$  の停留原理を用いれば、補剛材の接合節線  $p$  に関する剛性マトリックスおよび安定係数マトリックスが得られる。

節線力ベクトルおよび節線変位ベクトルを

$$\{f_s\} = \{\bar{M}_p / b_0 \bar{V}_p \bar{N}_p \bar{S}_p\} \quad \dots\dots\dots(13 \cdot a)$$

$$\{u_s\} = \{b_0 \bar{\theta}_p \bar{w}_p \bar{v}_p \bar{u}_p\} \quad \dots\dots\dots(13 \cdot b)$$

とすれば、

$$\{f_s\} = \{[k_s] + [k_s']\} \{u_s\} \quad \dots\dots\dots(14)$$

の形となる。

補剛材に非弾性域が存在する場合は、弾性域および弾性域に換算したひずみ硬化域の部分が有効であるとして各種剛性を計算する接線剛性を用いることにする。詳細を付録に示す。また、式 (14) の剛性マトリックス  $[k_s]$  および安定係数マトリックス  $[k_s']$  の要素は、弾性域の場合または応力分布が比較的簡単な式で表わされる場合は、直接積分が可能であるが、非弾性域が存在する場合または応力分布が複雑な場合は数値積分を行う必要がある。補剛材の剛性マトリックスおよび安定係数マトリックスの要素の具体的な表現は付録に示してある。

さて、このように板要素を有限個の長さ方向に分割した1つの帯板要素の剛性マトリックスおよび安定係数マトリックスと補剛材の剛性マトリックスおよび安定係数

マトリックスが得られたが、これらの剛性マトリックスを基礎として、H型鋼柱の局部座屈解析を以下の5つの Model について検討を行う。

**Model I** フランジはウェブによって弾性的に拘束されていると考える。フランジはウェブの接合節線に沿ってウェブより拘束を受ける。図-6を参照して回転ばね定数  $k_\phi$  は

$$k_\phi = \frac{2D}{d} \quad \dots\dots\dots(15)$$

にて表わされる。ここに、 $D = Et_w^3 / 12(1 - \nu^2)$  でウェブの板の曲げ剛度であり、 $t_w$  はウェブ厚さ、 $d$  はフランジ中心間の距離である。この回転ばね定数に対するフランジとウェブの接合節線  $p$  の剛性マトリックスは、節線力ベクトル  $\{f\} = \{\bar{M}_p / b_0 \bar{V}_p \bar{N}_p \bar{S}_p\}$  および節線変位ベクトル  $\{u\} = \{b_0 \bar{\theta}_p \bar{w}_p \bar{v}_p \bar{u}_p\}$  に対する1行1列が

$$k_{11} = \frac{2}{\pi^2} \left( \frac{b_0}{d} \right) \left( \frac{t_w}{t_f} \right)^3 \left( \frac{l}{b_0} \right)^2 \quad \dots\dots\dots(16)$$

にて与えられ、他の項はすべて0である。ここに  $b_0$  は基準板幅で、ここではフランジ幅の半分であり、 $t_f$  はフランジ厚さである。

一様圧縮を受けるフランジの全体剛性マトリックスにフランジとウェブの接合節線  $p$  に対する部分に式 (16) を加え合わせることで、ウェブの拘束効果を導入することができる。

**Model II** ウェブはウェブの両端  $p$  および  $p'$  でフランジによって弾性的に拘束されているものとする。この場合、フランジに作用する応力は無視し、拘束ばねのみを考慮することになる。すなわち、式 (14) で得られた補剛材の安定係数マトリックスを無視し、一様圧縮を受けるウェブの接合節線  $p$  および  $p'$  に対応する部分に補剛材の剛性マトリックスを加え合せ、ウェブの全体安定係数マトリックスには修正を加えないものとする。これにより、ウェブの両端が弾性的にばねで拘束されている場合の計算を行うことができる。

**Model III** フランジの残留応力を無視する。すなわち、式 (14) の補剛材の安定係数マトリックスにおいて、補剛材に作用する応力は外力による一様圧縮応力のみで、補剛材内では一定であるとする。一様圧縮を受けるウェブの全体剛性マトリックスおよび全体安定係数マトリックスのフランジとウェブの接合節線  $p$  および  $p'$  に対応する部分に補剛材の剛性マトリックスおよび安定係数マトリックスを加え合わせたものを用いる。

**Model IV** フランジの残留応力を考慮する。すなわち、式 (14) の補剛材の安定係数マトリックスにおいて、補剛材に作用する応力は外力による一様圧縮応力の外に、残留応力を加えたものが作用するものとする。一

様圧縮を受けるウェブの全体剛性マトリックスおよび全体安定係数マトリックスのフランジとウェブ接合節線  $p$  および  $p'$  に対応する部分へ補剛材の剛性マトリックスおよび安定係数マトリックスを加え合わせたものを用いる。

**Model V** フランジおよびウェブともに帯板要素に分割し、局部座標系に対して求めた各帯板要素の剛性マトリックスおよび安定係数マトリックスを全体座標系の全体剛性マトリックスおよび全体安定係数マトリックスに加え合わせたものを用いる。これにより、ウェブのみでなく、フランジの断面形状の変化をも考慮することができる。

3. 数値計算結果と考察

以後、数値計算に当っては主として 図-7 (a) および (b) に示す断面形状を有する 2 種の H 型鋼柱を用いるものとする。図-7 (a) の断面 (Section A) は、フランジ幅とフランジ中心間の距離が等しい断面で、フランジの座屈が先行する断面であり、図-7 (b) の断面 (Section B) はフランジ中心間の距離がフランジ幅の 2 倍の断面で、ウェブの座屈が先行する断面である。いずれの断面においても、フランジとウェブの厚さは等しいとし、残留応力分布は 図-3 に示すような圧延成形断面の残留応力分布を理想化したものを用いる。また、基準幅として、フランジ幅の半分を、基準厚さとしてフランジ厚  $t_f$  (=ウェブ厚  $t_w$ ) を用いる。

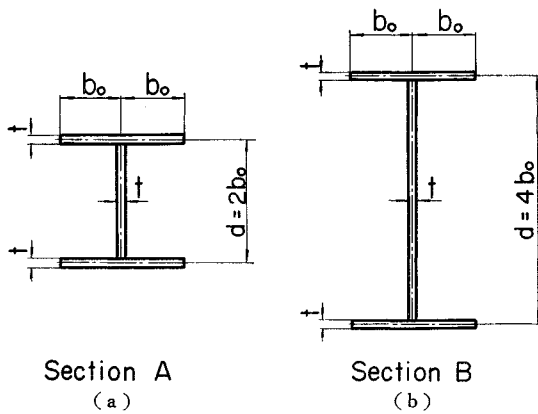


図-7 計算に用いた断面

(1) 分割数と精度

柱の長さ  $L=3b_0$  で、残留応力が  $\sigma_{rc}=0.3\sigma_Y$ ,  $\sigma_{rt}=-0.3\sigma_Y$  のとき、Section A の柱が一様圧縮を受ける場合について、Model V を用いて分割数と精度の関係を調べたものが 表-1 であり、座屈応力を

$$\sigma_{rc} = \frac{E\pi^2}{12(1-\nu^2)} \left(\frac{t_0}{b_0}\right)^2 \cdot k \dots\dots\dots(17)$$

表-1 分割数と精度

$b/b_0$	要素数	$\lambda=1.0$ (弾性)		$\lambda=0.75$ (非弾性)		
		$k$	$\sigma_{cr}/\sigma_Y$	分割数 $n$	$k$	$\sigma_{cr}/\sigma_Y$
1.0	3	0.407	0.449	10	0.440	0.812
				20	0.441	0.813
				30	0.444	0.819
0.5	6	0.495	0.448	10	0.442	0.816
				20	0.441	0.813
				30	0.441	0.813
0.25	12	0.495	0.447	10	0.444	0.819
				20	0.441	0.813
				30	0.440	0.811

で表わしたときの座屈係数  $k$  と、座屈応力を降伏応力で無次元化した  $\sigma_{cr}/\sigma_Y$  の値を示している。

計算は降伏ひずみ  $\epsilon_Y$  と基準幅厚比  $b_0/t_0$  のパラメーター

$$\lambda = \sqrt{\frac{\sigma_Y}{E}} \cdot \frac{b_0}{t_0} = \sqrt{\epsilon_Y} \cdot \frac{b_0}{t_0} \dots\dots\dots(18)$$

を用い、弾性域で座屈する  $\lambda=1.0$  と、非弾性域で座屈する  $\lambda=0.75$  について行った。ここに、座屈応力を降伏応力で無次元化した値と座屈係数の間には、式 (17) および (18) より

$$\frac{\sigma_{cr}}{\sigma_Y} = \frac{\pi^2 k}{12(1-\nu^2)\lambda^2} \dots\dots\dots(19)$$

の関係がある。

フランジおよびウェブの、幅  $b$  で分割された帯板要素の剛性マトリックスおよび安定係数マトリックスの計算において、弾性域では直接積分により、また、非弾性域においては 1 つの帯板要素の幅を  $n$  等分し、Simpson の 1/3 則を用いた数値積分によった。なお、数値計算に当っては、H 型断面の対称性を利用して、断面の半分 (図-8) で行った。

表-1 より、H 型断面の半分を 3 要素 (フランジを 2 要素、ウェブの半分を 1 要素) に分割し、非弾性域においては、1 つの帯板要素の分割数  $n=10$  で十分な精度

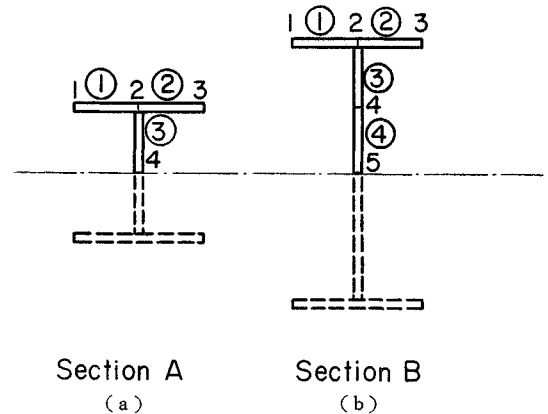


図-8 計算に用いた H 型断面の分割

が得られることがわかった。

したがって、以後の数値計算においては、図-8 (a) および (b) に示すように、フランジは2要素に、ウェブの半分を Section A では1要素に、Section B では2要素に分割し、非弾性域を有する要素では、要素の幅の分割を  $n=20$  で行うことにした。

(2) 各 Model 間の弾性座屈の関係

図-9 は Model I のフランジの各種の拘束に対する座屈強度を、縦軸に座屈係数、横軸に板の基準幅  $b_0$  (フランジの幅の半分) に対する板の長さをとって示したものである。曲線①は1つの側辺(非載荷辺)が固定、他の側辺が自由の場合、曲線②は1つの側辺が単純支持、他の側辺が自由の場合、曲線③、④はおおの図-7 に示す Section A, B のウェブの拘束効果を考慮したものである。通常のH型鋼では、1つの側辺が単純支持のものに近いが、かなりの拘束効果を持っていることがわかる。

図-10 および 11 には、図-7 に示す Section A および B の各 Model 間の座屈係数の比較を示している。縦軸には座屈係数、横軸には板の基準幅  $b_0$  に対する長さがある。曲線①はフランジの1つの側辺が固定で、他の側辺が自由の場合、曲線②は1つの側辺が単純支持で、他の側辺が自由の場合、曲線③はウェブによりフランジが弾性的に拘束されていると考えた場合、曲線④はウェブの両側辺が固定の場合、曲線⑤はウェブの両側辺が単純支持の場合、曲線⑥はウェブ

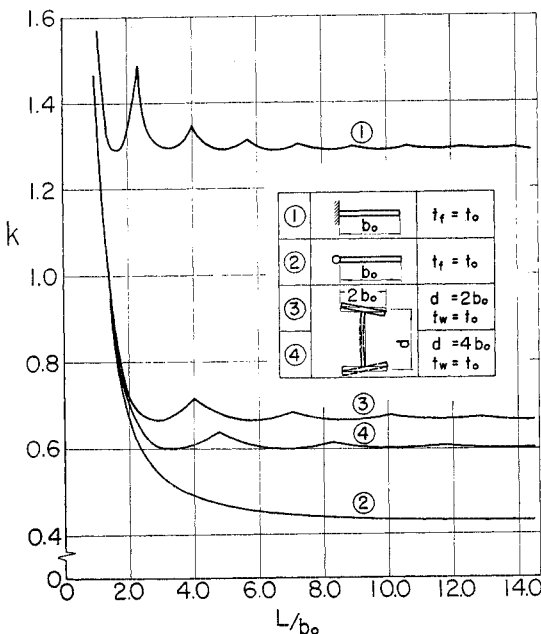


図-9 弾性的に拘束されたフランジの座屈曲線

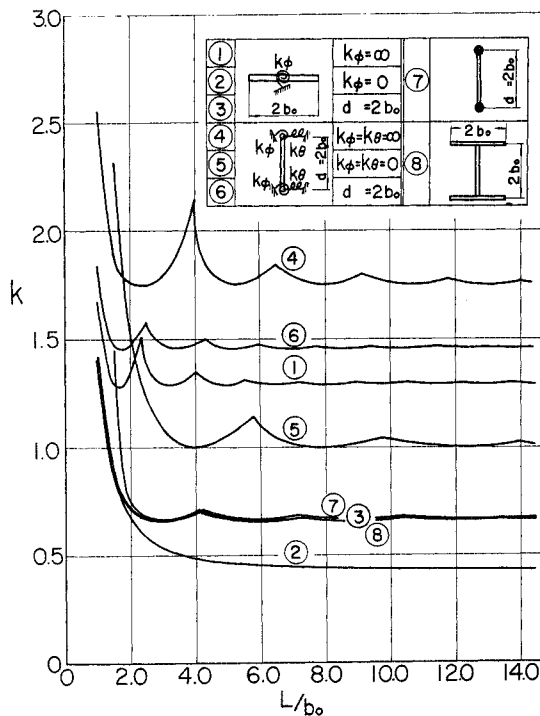


図-10 各種モデルの座屈曲線 (Section A)

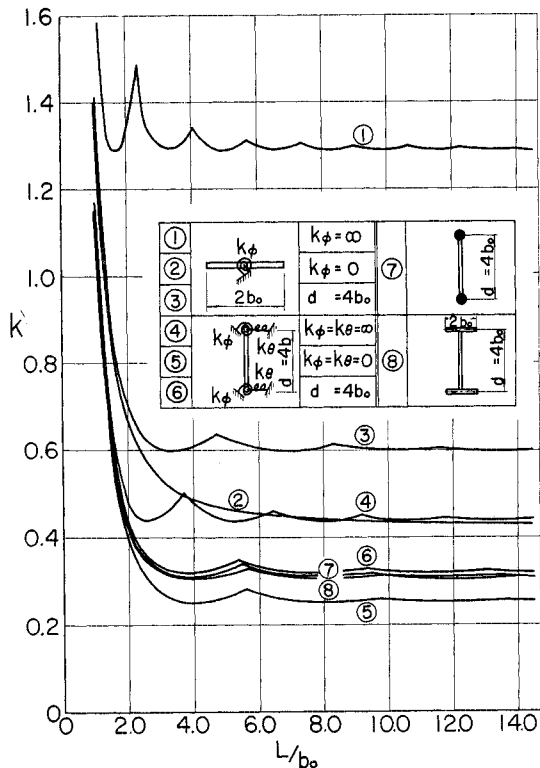


図-11 各種モデルの座屈曲線 (Section B)

の両側辺がフランジによって弾性的に拘束されている場合、曲線⑦はウェブが断面の形状の変化しない補剛材（フランジ）を両側辺に有すると考えた場合、曲線⑧はフランジおよびウェブの連成を考慮し、H型断面全体を同時に解析した場合をそれぞれ示している。

Section A (図-10) の場合は、フランジの座屈強度 (Model I, 曲線③) はウェブの座屈強度 (Model II, 曲線⑥) よりも小さく、フランジの座屈が先行することがわかる。Model I (曲線③) は、Model III (曲線⑦) および Model V (曲線⑧) とほぼ同一の強度を示す。Model III (曲線⑦) と Model V (曲線⑧) の差がほとんど認められないのはフランジの断面の形状変化の影響が無視できることを示している。Section A の場合、Model I で十分H型断面の座屈強度を知ることができる。

Section B (図-11) の場合は、ウェブの座屈強度 (Model II, 曲線⑥) はフランジの座屈強度 (Model I, 曲線③) よりも小さく、Section A の場合とは逆にウェブの座屈が先行することがわかる。Model III (曲線⑦) と Model V (曲線⑧) の差はほとんど認められないが、Model II (曲線⑥) との差が認められる。これは、ウェブの両側辺がフランジによって弾性的に拘束されていると考えた場合とフランジ自身にも応力が作用し、座屈に寄与すると考えた場合の相違と考えられる。

Section A および B ともに、残留応力を考慮しない場合は Model III と V の相違はほとんど認められず、フランジの座屈が先行する場合は Model I で、ウェブの座屈が先行する場合は Model II で近似的に座屈強度を知ることができる。

(3) 残留応力の影響

図-12 は Section A に対する残留応力の影響を Model I, III, IV および V に対して比較したものである。縦軸および横軸は 図-10 および 11 と同様にとってある。 $\sigma_{rc} = -\sigma_{rt} = 0.3\sigma_y$  および  $0.5\sigma_y$  に対して、 $\lambda = \sqrt{\sigma_y/E} \cdot (b_0/t_0) = 0.5$  および  $1.0$  の 2つの値について、各 Model の計算結果を、残留応力が存在しない場合と比較して示されている。

図-10 にも示したとおり、残留応力が存在しない場合の Model I, III および V の間の相違はきわめて小さいが、残留応力が大きい場合、または板の幅厚比に関するパラメーター  $\lambda$  が大きくなると Model III と Model I, IV および V の間の相違が著しくなる。Model III は残留応力および  $\lambda$  の値によって Model I, IV および V ほど影響を受けない。これは、Model III はフランジの残留応力および変形を無視しているためで、Section

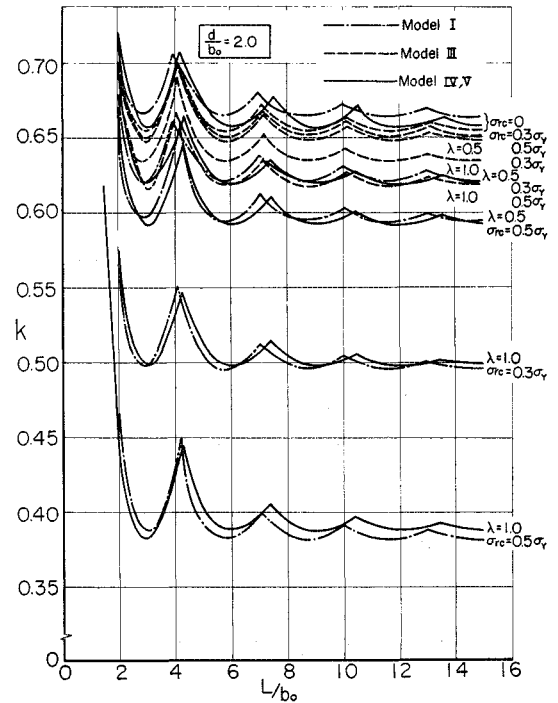


図-12 各種モデルの座屈曲線 (残留応力の影響) (Section A)

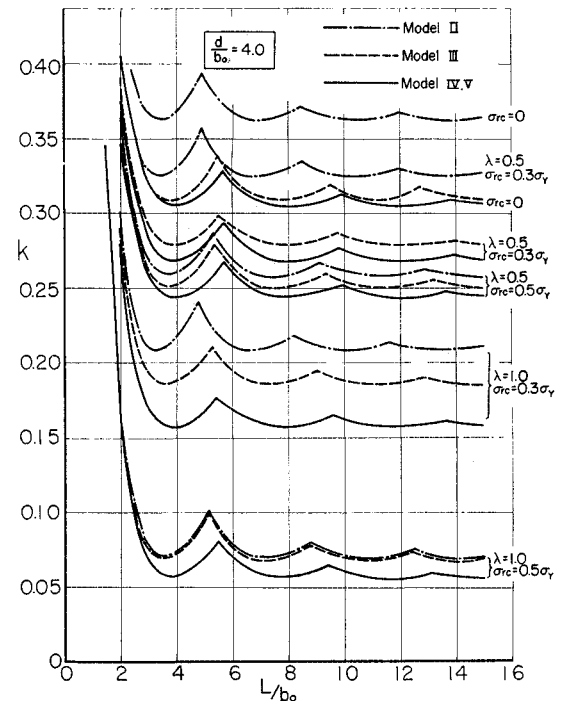


図-13 各種モデルの座屈曲線 (残留応力の影響) (Section B)

A のようにフランジの座屈が先行する場合は、Model I の方がよい近似値を与えることがわかる。また、Model IV と V の間にはほとんど相違が認められない。

図-13 は 図-12 と同様の結果を Section B に対して示したものである。ただし、Section B ではウェブの座屈が先行するので、Model II, III, IV および V の間での比較を行った。残留応力が存在しない場合については 図-11 にすでに示した。残留応力が大きい場合はウェブの座屈が支配的となり、各 Model 間の相違は小さくなる。特に  $\sigma_{rc} = -\sigma_{rt} = 0.5\sigma_Y$ ,  $\lambda = 1.0$  の場合、Model II と III はほとんど一致するが、Model IV および V とは多少の相違が見られる。 $\sigma_{rc} = -\sigma_{rt} = 0.3\sigma_Y$  の場合の各 Model 間の相違がかなり認められるが、いずれの場合も Model II, III, IV および V の順に座屈強度が小さくなっている。Section B においても、Model IV と V の間の相違はほとんど認められない。

(4) 局部座屈と曲げ座屈の相関性

中心軸圧縮力を受けるH型鋼柱は上述の局部座屈の外に、曲げ座屈およびねじり座屈が生ずることをすでに述べたが、通常のH型鋼柱では、弱軸まわりの曲げ座屈、強軸まわりの曲げ座屈およびねじり座屈のうち、弱軸まわりの曲げ座屈が先行する。

非常に短い柱の局部座屈は、その長さを座屈の半波長とする1次のモードであるが、長さが長くなるとともに2次、3次……と座屈波形が増加するが、長さがある値以上に長くなると再び1次のモードが現われる。この1次のモードに対する座屈はもはや局部座屈に対するものではなく、断面形状が変化するとともに、断面全体が横方向に移動する曲げ座屈である。

図-14 および 15 は、Section A および B に対するこれらの関係を示したものである。縦軸および横軸は、これまでと同様それぞれ座屈係数  $k$  と基準幅に対する柱の長さ  $L/b_0$  がとられている。残留応力を有しない局部座屈においては、座屈係数  $k$  は  $\lambda = \sqrt{\sigma_Y/E} \cdot (b_0/t_0)$  に無関係であったが、曲げ座屈では  $\lambda$  によって変化する。図-14 および 15 では  $\sigma_{rc} = -\sigma_{rt} = 0.3\sigma_Y$  および  $0.5\sigma_Y$  に対して、 $\lambda = 0.5, 0.75$  および  $1.0$  の3つの値に

ついでの計算結果を、それぞれ、Section A および B について示している。曲げ座屈が生ずる程度の長さの柱に対しては、局部座屈強度はその断面の最小値に一致する。一方、曲げ座屈応力は

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E}{(L/r)^2} \dots\dots\dots(20)$$

にて与えられる。ここに、 $r$  は断面の弱軸まわりの断面2次半径である。図-6 に示す断面の記号を用いて座屈係数  $k$  は

$$k = \frac{16(1-\nu^2)}{\left(\frac{t_f}{b_0}\right)^2 \left\{ 4 + \left(\frac{t_w}{t_f}\right) \left(\frac{d}{b_0}\right) \right\}} \left(\frac{b_0}{L}\right)^2 \dots\dots(21)$$

にて表わされる。

式 (21) より計算した曲げ座屈係数  $k$  と断面変形および残留応力を考慮した Model V の計算結果とはき

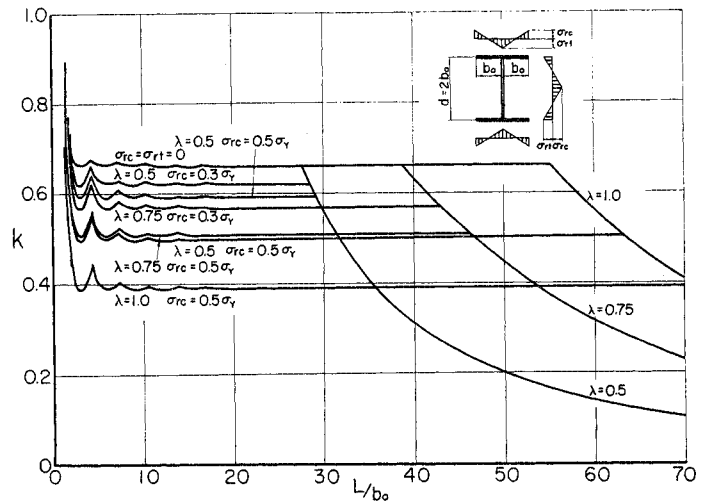


図-14 局部座屈と曲げ座屈の関係 (Section A)

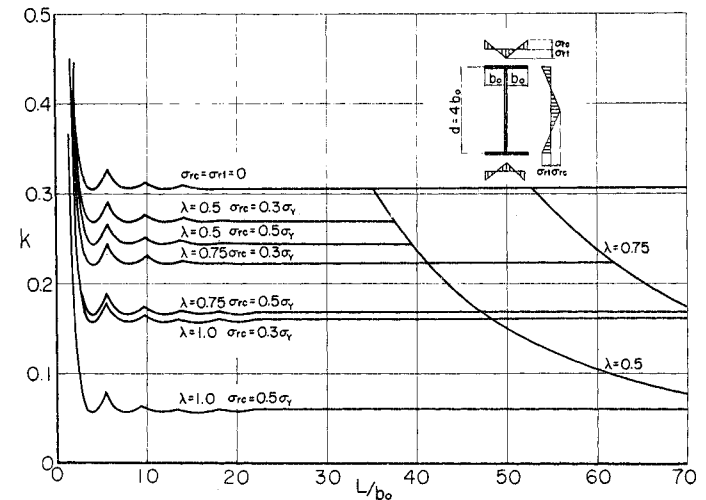


図-15 局部座屈と曲げ座屈の関係 (Section B)



わめてよく一致し、曲げ座屈強度におよぼす断面形状の変化および残留応力の影響がきわめて小さいことがわかる。

局部座屈曲線と曲げ座屈曲線の交点より、2つの座屈が同時に生ずる柱の長さや座屈強度を決定することができる。この2つの座屈曲線の交点は残留応力の大きさと $\lambda$ の値によって大きく変化することがわかる。

(5) 柱の非弾性局部座屈強度

前項において、柱の長さが長くなると、局部座屈のモードは1次から2次へ、2次から3次へと座屈波形が増加すると同時に座屈曲線は次第に偏平になり、柱の両端が座屈変形に対して単純支持の場合、1次のモードの最小値へと漸近することを示した。したがって、一般に柱の局部座屈強度は、この1次のモードの最小座屈値、すなわち、無限大の長さの柱の局部座屈強度を知られば十分である。これより、柱の局部座屈強度は、柱の断面の構成薄板の幅厚比と降伏応力に関するパラメーターを用いて表わすことができる。図-16は無限大の長さを持つSection A および B の柱の局部座屈強度を縦軸に一様圧縮座屈荷重  $P_{cr}$  と降伏軸圧縮力  $P_Y$  の比を、横軸に  $\lambda = \sqrt{\sigma_Y/E} \cdot (b_0/t_0)$  をとって示したものである。断面には残留応力が存在しない場合と、 $\sigma_{rc}/\sigma_Y = -\sigma_{rt}/\sigma_Y = 0.3\sigma_Y$  および  $0.5\sigma_Y$  の3つの場合について、非弾性計算を行った。また、ひずみ硬化に対する定数として、ひずみ硬化の始まるひずみ  $\epsilon_{st}$  を降伏ひずみ  $\epsilon_Y$  の10倍とし、ひずみ硬化率  $E_{st}$  として縦弾性係数  $E$  の40分の1を用いた。図中、実線はH型鋼断面全体の形状の変化を考慮したModel V に対するものであり、破線はH型鋼

のフランジの断面形状の変化を無視した Model IV の計算結果である。

図-16 より以下のことが推論できる。

① 残留応力を有しない断面においては、Model IV と V はほぼ同じ値を示し、フランジの断面形状の変化の影響は無視できる。

② 残留応力を有する断面においては、 $\lambda$  の大きい範囲では、Model IV と V の相違は認められないが、 $\lambda$  の値が減少し、特に非弾性域においては Model IV と V の間には差異が生じ、Model V の値が小さい値を示す。これは、フランジの断面形状の変化の影響を示すもので、残留応力が大きい場合および非弾性域が大きい場合に著しい。

③ フランジの断面形状の変化の影響は、Section A に対するものが Section B のものより大きい。これは、Section A の局部座屈はフランジの座屈が優先し、Section B のものはウェブ座屈が優先することによっている。

④ ひずみ硬化域における Model IV と V の相違はほとんど認められない。また、残留応力の影響も消失する。

4. 結 語

本研究においては、一様圧縮力を受けるH型鋼柱の強度に関し、フランジおよびウェブの局部座屈とこれに連成する断面全体の形状変化を伴う座屈およびこれらの座屈と柱の曲げ座屈の関連性について論じた。

まず、H型断面をフランジおよびウェブの断面の各構

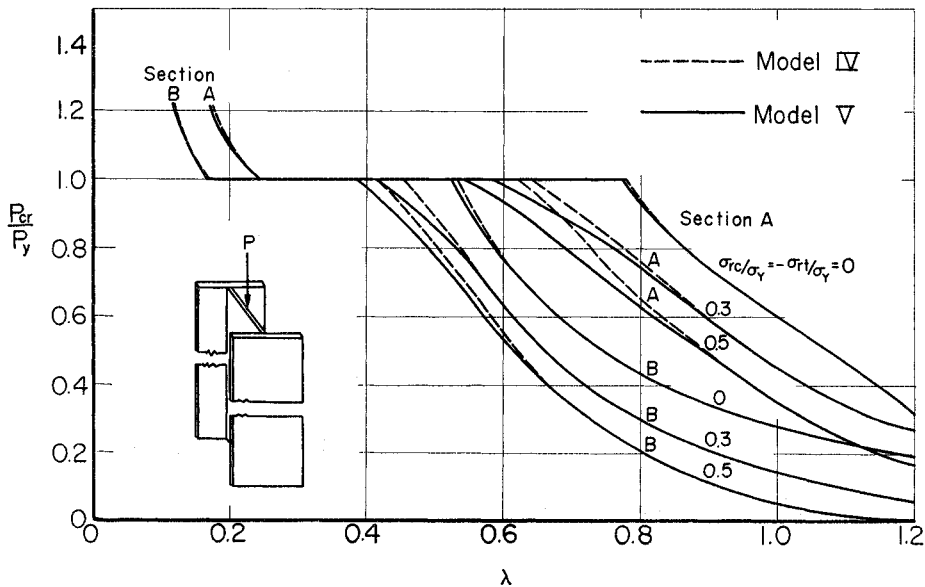


図-16 H型断面柱の座屈強度曲線 ( $P_{cr}/P_Y-\lambda$ )

成薄板に分解し、フランジはウェブによって弾性的に拘束されていると考え、また、ウェブはフランジによって弾性的に拘束されていると考えた場合、ウェブの両側辺には断面形状の変化しない補剛材が取付けられており、この補剛材には残留応力が存在しないと考えた場合および補剛材の残留応力を考慮した場合、さらに、フランジおよびウェブの断面全体の形状の変化を考慮した場合について、局部座屈強度（または連成座屈強度）を各種の残留応力の大きさおよび板の幅厚比をパラメーターにとって比較した。また、H型断面柱の代表的断面形状として、フランジの座屈が優先する Section A とウェブの座屈が優先する Section B に対し、これら両者の比較検討を行った。

これらの数値計算結果より得られた主な結論は以下のようである。

(1) 残留応力を有しないH型断面の局部座屈強度は、フランジがウェブによって弾性的に拘束されていると考えたフランジの座屈強度とウェブがフランジによって弾性的に拘束されていると考えた場合のウェブの座屈強度の小さい値と考えてよい。

(2) 残留応力を有するH型断面の弾性局部座屈強度は、フランジを補剛材と考え、補剛材の残留応力分布を考慮して得られる座屈強度と考えてよい。

(3) 残留応力を有するH型断面の非弾性局部座屈強度は、フランジおよびウェブとも、断面形状の変化を考慮した断面全体の解析が必要である。

(4) H型断面の局部座屈と柱の曲げ座屈が同時に生ずる場合の柱の長さは、断面の幅厚比と残留応力の大きさによって大きく変化する。曲げ座屈におよぼす断面形状の変化の影響は認められない。

本研究にあたり、東京大学大型電子計算機センターの HITAC 8800/8700、名古屋大学大型電子計算機センターの FACOM 230-60 および金沢大学電子計算機室の FACOM 230-35 を使用した。また、計算結果の整理、図面のトレースには金沢大学工学部構造力学研究室の細川豊君、北田晴子嬢にお世話になった。非弾性域の計算にあたっては大学院学生前川幸次君の助力を得た。

## 【付 録】

### (1) 帯板要素の剛性マトリックスおよび安定係数マトリックス

図—4 に示す帯板要素の幅を  $b$ 、厚さを  $t$ 、長さを  $l$  とし、基準板幅および板厚を  $b_0$  および  $t_0$  として、次の無次元量を用いる。

$$\zeta = \frac{b}{b_0}, \quad \xi = \frac{t}{t_0}, \quad \beta = \frac{l}{b_0}, \quad r = \frac{b_0}{t_0}, \quad \eta = \frac{y}{b} \quad \dots\dots\dots(22)$$

a) 剛性マトリックス 剛性マトリックスを次のように無次元化して表わす。

$$[k] = \frac{D_0 \pi^4}{b_0^3 \beta^2} [a] \quad \dots\dots\dots(23)$$

ここに、 $D_0 = Et_0^3/12(1-\nu^2)$  である。節線力ベクトルおよび節線変位ベクトルを式 (8) のように表わすと、 $[k]$  および  $[a]$  は 8 行 8 列のマトリックスである。帯板要素の載荷辺のひずみは載荷辺に沿って任意に変化するもので、式 (1) の  $[e]$  および式 (6) の  $[d_p]$  マトリックスの各要素は  $y$  の関数となる。 $[a]$  の各要素は次のように表わされる。定義されない要素は 0 である。

$$\begin{aligned} a_{11} &= \frac{\zeta^3 \xi^3}{\beta^2} \int_0^1 \kappa_1 (\eta^2 - 4\eta^3 + 6\eta^4 - 4\eta^5 + \eta^6) d\eta \\ &\quad + \frac{4\zeta \xi^3}{\pi^2} \int_0^1 \{ \kappa_4 (1 - 8\eta + 22\eta^2 - 24\eta^3 + 9\eta^4) \\ &\quad + \kappa_2 (2\eta - 7\eta^2 + 8\eta^3 - 3\eta^4) \} d\eta \\ &\quad + \frac{4}{\pi^4} \frac{\xi^3 \beta^2}{\zeta} \int_0^1 \kappa_3 (4 - 12\eta + 9\eta^2) d\eta \\ a_{12} &= \frac{\zeta^2 \xi^3}{\beta^2} \int_0^1 \kappa_1 (\eta - 2\eta^2 - 2\eta^3 + 8\eta^4 - 7\eta^5 + 2\eta^6) d\eta \\ &\quad + \frac{4\zeta \xi^3}{\pi^2} \int_0^1 \{ 6\kappa_4 (-\eta + 5\eta^2 - 7\eta^3 + 3\eta^4) \\ &\quad + \kappa_2 (1 - 9\eta^2 + 14\eta^3 - 6\eta^4) \} d\eta \\ &\quad + \frac{12}{\pi^4} \frac{\xi^3 \beta^2}{\zeta^2} \int_0^1 \kappa_3 (2 - 7\eta + 6\eta^2) d\eta \\ a_{15} &= \frac{\zeta^3 \xi^3}{\beta^2} \int_0^1 \kappa_1 (-\eta^3 + 3\eta^4 - 3\eta^5 + \eta^6) d\eta \\ &\quad + \frac{2}{\pi^2} \zeta \xi^3 \int_0^1 \{ 2\kappa_4 (-2\eta + 11\eta^2 - 18\eta^3 + 9\eta^4) \\ &\quad + \kappa_2 (\eta - 7\eta^2 + 12\eta^3 - 6\eta^4) \} d\eta \\ &\quad + \frac{4}{\pi^4} \frac{\xi^3 \beta^2}{\zeta} \int_0^1 \kappa_3 (2 - 9\eta + 9\eta^2) d\eta \\ a_{16} &= \frac{\zeta^2 \xi^3}{\beta^2} \int_0^1 \kappa_1 (3\eta^3 - 8\eta^4 + 7\eta^5 - 2\eta^6) d\eta \\ &\quad - \frac{2}{\pi^2} \zeta^3 \int_0^1 \{ 12\kappa_4 (-\eta + 5\eta^2 - 7\eta^3 + 3\eta^4) \\ &\quad - \kappa_2 (-3\eta + 18\eta^2 - 28\eta^3 + 12\eta^4) \} d\eta \\ &\quad - \frac{12}{\pi^4} \frac{\xi^3 \beta^2}{\zeta^2} \int_0^1 \kappa_3 (2 - 7\eta + 6\eta^2) d\eta \\ a_{22} &= \frac{\zeta \xi^3}{\beta^2} \int_0^1 \kappa_1 (1 - 6\eta^2 + 4\eta^3 + 9\eta^4 - 12\eta^5 + 4\eta^6) d\eta \\ &\quad + \frac{12}{\pi^2} \frac{\xi^3}{\zeta} \int_0^1 \{ 12\kappa_4 (\eta^2 - 2\eta^3 + \eta^4) \\ &\quad + \kappa_2 (1 - 2\eta - 3\eta^2 + 8\eta^3 - 4\eta^4) \} d\eta \\ &\quad + \frac{36}{\pi^4} \frac{\xi^3 \beta^2}{\zeta^3} \int_0^1 \kappa_3 (1 - 4\eta + 4\eta^2) d\eta \\ a_{25} &= \frac{\zeta^2 \xi^3}{\beta^2} \int_0^1 \kappa_1 (-\eta^2 + \eta^3 + 3\eta^4 - 5\eta^5 + 2\eta^6) d\eta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{2}{\pi^2} \xi^3 \int_0^1 \{12 \kappa_4 (2 \eta^2 - 5 \eta^3 + 3 \eta^4) \\
 & + \kappa_2 (1 - 3 \eta - 6 \eta^2 + 20 \eta^3 - 12 \eta^4)\} d\eta \\
 & + \frac{12}{\pi^4} \frac{\xi \beta^2}{\zeta^2} \int_0^1 \kappa_3 (1 - 5 \eta + 6 \eta^2) d\eta \\
 a_{26} = & \frac{\zeta \xi^3}{\beta^2} \int_0^1 \kappa_1 (3 \eta^2 - 2 \eta^3 - 9 \eta^4 + 12 \eta^5 - 4 \eta^6) d\eta \\
 & - \frac{6}{\pi^2} \frac{\xi^3}{\zeta} \int_0^1 \{24 \kappa_4 (\eta^2 - 2 \eta^3 + \eta^4) \\
 & - \kappa_2 (-1 + 2 \eta + 6 \eta^2 - 16 \eta^3 + 8 \eta^4)\} d\eta \\
 & - \frac{36}{\pi^4} \frac{\xi^3 \beta^2}{\zeta^3} \int_0^1 \kappa_3 (1 - 4 \eta + 4 \eta^2) d\eta \\
 a_{33} = & \frac{12}{\pi^2} \zeta \xi \gamma^2 \int_0^1 d_4 (1 - 2 \eta + \eta^2) d\eta + \frac{12}{\pi^4} \frac{\xi \beta^2 \gamma^2}{\zeta} \int_0^1 d_3 d\eta \\
 a_{34} = & \frac{12}{\pi^3} \xi \beta \gamma^2 \int_0^1 \{d_4 (-1 + \eta) - d_2 (-1 + \eta)\} d\eta \\
 a_{37} = & \frac{12}{\pi^2} \zeta \xi \gamma^2 \int_0^1 d_4 (\eta - \eta^2) d\eta - \frac{12}{\pi^4} \frac{\xi \beta^2 \gamma^2}{\zeta} \int_0^1 d_3 d\eta \\
 a_{38} = & - \frac{12}{\pi^3} \xi \beta \gamma^2 \int_0^1 \{d_4 (-1 + \eta) - d_2 \eta\} d\eta \\
 a_{44} = & \frac{12}{\pi^2} \zeta \xi \gamma^2 \int_0^1 d_1 (1 - 2 \eta + \eta^2) d\eta + \frac{12}{\pi^4} \frac{\xi \beta^2 \gamma^2}{\zeta} \int_0^1 d_4 d\eta \\
 a_{47} = & - \frac{12}{\pi^3} \xi \beta \gamma^2 \int_0^1 \{d_4 \eta - d_2 (-1 + \eta)\} d\eta \\
 a_{48} = & \frac{12}{\pi^2} \xi \gamma^2 \int_0^1 d_1 (\eta - \eta^2) d\eta - \frac{12}{\pi^4} \frac{\xi \beta^2 \gamma^2}{\zeta} \int_0^1 d_4 d\eta \\
 a_{55} = & \frac{\zeta^3 \xi^3}{\beta^2} \int_0^1 \kappa_1 (\eta^4 - 2 \eta^5 + \eta^6) d\eta \\
 & + \frac{4}{\pi^2} \zeta \xi^3 \int_0^1 \{\kappa_4 (4 \eta^2 - 12 \eta^3 + 9 \eta^4) \\
 & + \kappa_2 (-\eta^2 + 4 \eta^3 - 3 \eta^4)\} d\eta \\
 & + \frac{4}{\pi^4} \int_0^1 \kappa_3 (1 - 6 \eta + 9 \eta^2) d\eta \\
 a_{56} = & \frac{\zeta^2 \xi^3}{\beta^2} \int_0^1 \kappa_1 (-3 \eta^4 + 5 \eta^5 - 2 \eta^6) d\eta \\
 & - \frac{4}{\pi^2} \xi^3 \int_0^1 \{6 \kappa_4 (2 \eta^2 - 5 \eta^3 + 3 \eta^4) \\
 & - \kappa_2 (3 \eta^2 - 10 \eta^3 + 6 \eta^4)\} d\eta \\
 & - \frac{12}{\pi^4} \frac{\xi^3 \beta^2}{\zeta^2} \int_0^1 \kappa_3 (1 - 5 \eta + 6 \eta^2) d\eta \\
 a_{66} = & \frac{\zeta \xi^3}{\beta^2} \int_0^1 \kappa_1 (9 \eta^4 - 12 \eta^5 + 4 \eta^6) d\eta \\
 & + \frac{12}{\pi^2} \frac{\xi^3}{\zeta} \int_0^1 \{12 \kappa_4 (\eta^2 - 2 \eta^3 + \eta^4) \\
 & + \kappa_2 (-3 \eta^2 + 8 \eta^3 - 4 \eta^4)\} d\eta \\
 & + \frac{36}{\pi^4} \frac{\xi \beta^2 \gamma^2}{\zeta} \int_0^1 \kappa_3 (1 - 4 \eta + 4 \eta^2) d\eta \\
 a_{77} = & \frac{12}{\pi^2} \zeta \xi \gamma^2 \int_0^1 d_4 \eta^2 d\eta + \frac{12}{\pi^4} \frac{\xi \beta^2 \gamma^2}{\zeta} \int_0^1 \kappa_3 d\eta \\
 a_{78} = & \frac{12}{\pi^3} \xi \beta \gamma^2 \int_0^1 (d_4 - d_2) \eta d\eta \\
 a_{88} = & \frac{12}{\pi^2} \zeta \xi \gamma^2 \int_0^1 d_1 \eta^2 d\eta + \frac{12}{\pi^4} \frac{\xi \beta^2 \gamma^2}{\zeta} \int_0^1 d_4 d\eta
 \end{aligned}$$

b) 安定係数マトリックス 安定係数マトリックスは次のように無次元化して表わす。

$$[k'] = \frac{D_0 \pi^4}{b_0^3 \beta^2} \cdot \frac{\sigma_Y}{\sigma_e} [a'] \dots\dots\dots(24)$$

ここに、

$$\sigma_Y / \sigma_e = 12(1 - \nu^2) \varepsilon_Y / \pi^2 \cdot (b_0 / t_0)^2 = 12(1 - \nu^2) / \pi^2 \cdot \lambda^2$$

である。節線力ベクトル および 節線変位ベクトルを式(8)のように表わすと、 $[k']$  および  $[a']$  は 8 行 8 列のマトリックスである。帯板要素の載荷辺の応力は載荷辺に沿って任意に変化するので  $y$  の関数となる。 $[a']$  の各要素は次のように表わされる。定義されない要素は 0 である。

$$\begin{aligned}
 a_{11}' = & \zeta^3 \xi \int_0^1 \frac{\sigma}{\sigma_Y} (\eta^2 - 4 \eta^3 + 6 \eta^4 - 4 \eta^5 + \eta^6) d\eta \\
 a_{12}' = & \zeta^2 \xi \int_0^1 \frac{\sigma}{\sigma_Y} (\eta - 2 \eta^2 - 2 \eta^3 + 8 \eta^4 - 7 \eta^5 + 2 \eta^6) d\eta \\
 a_{15}' = & \zeta^3 \xi \int_0^1 \frac{\sigma}{\sigma_Y} (-\eta^3 + 3 \eta^4 - 3 \eta^5 + \eta^6) d\eta \\
 a_{16}' = & \zeta^2 \xi \int_0^1 \frac{\sigma}{\sigma_Y} (3 \eta^3 - 8 \eta^4 + 7 \eta^5 - 2 \eta^6) d\eta \\
 a_{22}' = & \zeta \xi \int_0^1 \frac{\sigma}{\sigma_Y} (1 - 6 \eta^2 + 4 \eta^3 + 9 \eta^4 - 12 \eta^5 + 4 \eta^6) d\eta \\
 a_{25}' = & \zeta^2 \xi \int_0^1 \frac{\sigma}{\sigma_Y} (-\eta^2 + \eta^3 + 3 \eta^4 - 5 \eta^5 + 2 \eta^6) d\eta \\
 a_{26}' = & \zeta \xi \int_0^1 \frac{\sigma}{\sigma_Y} (3 \eta^2 - 2 \eta^3 - 9 \eta^4 + 12 \eta^5 - 4 \eta^6) d\eta \\
 a_{33}' = & \zeta \xi \int_0^1 \frac{\sigma}{\sigma_Y} (1 - 2 \eta + \eta^2) d\eta \\
 a_{37}' = & \zeta \xi \int_0^1 \frac{\sigma}{\sigma_Y} (\eta - \eta^2) d\eta \\
 a_{44}' = & \zeta \xi \int_0^1 \frac{\sigma}{\sigma_Y} (1 - 2 \eta + \eta^2) d\eta \\
 a_{48}' = & \zeta \xi \int_0^1 \frac{\sigma}{\sigma_Y} (\eta - \eta^2) d\eta \\
 a_{55}' = & \zeta^3 \xi \int_0^1 \frac{\sigma}{\sigma_Y} (\eta^4 - 2 \eta^5 + \eta^6) d\eta \\
 a_{56}' = & \zeta^2 \xi \int_0^1 \frac{\sigma}{\sigma_Y} (-3 \eta^4 + 5 \eta^5 - 2 \eta^6) d\eta \\
 a_{66}' = & \zeta \xi \int_0^1 \frac{\sigma}{\sigma_Y} (9 \eta^4 - 12 \eta^5 + 4 \eta^6) d\eta \\
 a_{77}' = & \zeta \xi \int_0^1 \frac{\sigma}{\sigma_Y} d\eta \\
 a_{88}' = & \zeta \xi \int_0^1 \frac{\sigma}{\sigma_r} \eta^2 d\eta
 \end{aligned}$$

(2) 補剛材の剛性マトリックスおよび安定係数マトリックス

非弾性座屈計算において、座屈時の補剛材の剛性を求めるのに、接線弾性係数理論を用いる。補剛材は 図-17 (a) に示す残留応力分布を有するものとする、非弾性域においては、補剛材の両端から補剛材の一部が降

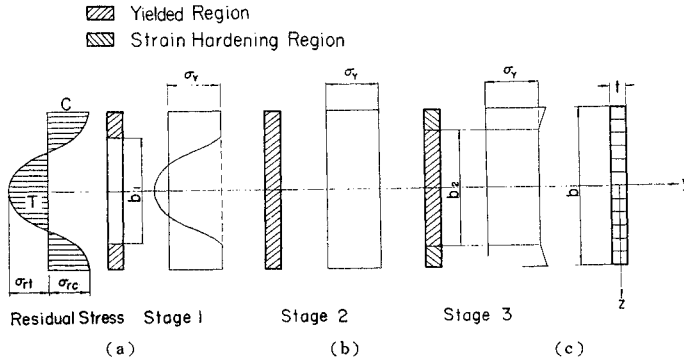


図-17 補剛材の残留応力と非弾形領域

表-2 非弾性域における剛性の通減率

剛度	Stage		
	1	2	3
$EA$	$(b_1/b)$	0	$E_{st}/E \cdot (1 - (b_2/b))$
$EI_y$	$(b_1/b)^3$	0	$E_{st}/E \cdot (1 - (b_2/b)^3)$
$EI_z$	$(b_1/b)$	0	$E_{st}/E \cdot (1 - b_2/b)$
$EI_w$	$(b_1/b)^3$	0	$E_{st}/E \cdot (1 - (b_2/b)^3)$

伏する Stage 1, 全断面が降伏している Stage 2, 補剛材の両端から補剛材の一部がひずみ硬化領域に入り, 他の部分が降伏している Stage 3 に分けることができる。非弾性域における各 Stage の剛性は, 弾性域における剛性, すなわち, 軸方向の剛性  $EA$ ,  $y$  および  $z$  軸まわりの曲げ剛性  $EI_y$ , および  $EI_z$ , 曲げねじり剛性  $EI_w$  に表-2 に示す通減率を掛けて得ることができる。ただし,  $b_1$  は補剛材の Stage 1 における弾性域の幅を,  $b_2$  は Stage 3 における降伏域の幅であり,  $E_{st}$  はひずみ硬化率である。

Bijlaard の塑性変形理論によれば, 非弾性域におけるせん断弾性係数  $G_t$  は

$$G_t = \frac{E}{2+2\nu'+3e} \dots\dots\dots(25)$$

にて与えられる。ここに,  $e$  は塑性ひずみ  $\epsilon_p$  の降伏ひずみ  $\epsilon_Y$  に対する比を示しており,  $e=0$  のときの  $G_t$  は弾性域の値に一致する。したがって, 非弾性域における St. Venant のねじり剛性は, 弾性域の値  $GK_T$  に  $(2+2\nu) \int_A (2+2\nu'+3e) dA$  をかけて得ることができる。

補剛材の幅を  $b$ , 厚さを  $t$  とし, 式 (22) の外に次の無次元量を用いる。

$$\alpha = \frac{A}{b_0 t_0}, \mu_1 = \frac{EI_z}{D_0 b_0}, \mu_2 = \frac{EI_y}{D_0 b_0},$$

$$\mu_3 = \frac{EI_w}{D_0 b_0^3}, \mu_4 = \frac{GK_T}{D_0 b_0},$$

$$x = \frac{z}{b} \dots\dots\dots(26)$$

a) 剛性マトリックス 剛性マトリックス  $[k_s]$  を次のように無次元化して表わす。

$$[k_s] = \frac{D_0 \pi^4}{b_0^3 \beta^2} [a_s] \dots\dots\dots(27)$$

節線力ベクトルおよび節線変位ベクトルを式 (13) のように表わすと,  $[k_s]$  および  $[a_s]$  は 4 行 4 列の対角マトリックスとなる。 $[a_s]$  の各要素は次のように表わされる。

$$a_{s11} = \frac{\mu_3}{\beta^2} + \frac{\mu_4}{\pi^2}$$

$$a_{s22} = \frac{\mu_2}{\beta^2}$$

$$a_{s33} = \frac{\mu_1}{\beta^2}$$

$$a_{s44} = 12(1-\nu^2) \frac{\alpha \gamma^2}{\pi^2}$$

b) 安定係数マトリックス 安定係数マトリックス  $[k_s']$  は次のように無次元化して表わす。

$$[k_s'] = \frac{D_0 \pi^2}{b_0^3 \beta^2} \cdot \frac{\sigma_Y}{\sigma_e} [a_s'] \dots\dots\dots(28)$$

節線力ベクトルおよび節線変位ベクトルを式 (13) のように表わすと,  $[k_s']$  および  $[a_s']$  は 4 行 4 列の対角マトリックスとなる。補剛材の載荷辺の応力は載荷辺に沿って任意に変化するのて,  $z$  の関数となる。 $[a_s']$  の各要素は次のように表わされる。

$$a_{s11}' = -2 \zeta^3 \xi \int_0^{1/2} \frac{\sigma}{\sigma_Y} x^2 dx - \frac{1}{6} \frac{\zeta \xi^3}{\gamma^2} \int_0^{1/2} \frac{\sigma}{\sigma_Y} dx$$

$$a_{s22}' = -2 \pi^2 \frac{\zeta^3 \xi}{\beta^2} \int_0^{1/2} \frac{\sigma}{\sigma_Y} x^2 dx - 2 \zeta \xi \int_0^{1/2} \frac{\sigma}{\sigma_Y} dx$$

$$a_{s33}' = - \left( \pi^2 \frac{\zeta \xi^3}{6 \beta^2 \gamma^2} + 2 \zeta \xi \right) \int_0^{1/2} \frac{\sigma}{\sigma_Y} dx$$

$$a_{s44}' = -2 \zeta \xi \int_0^{1/2} \frac{\sigma}{\sigma_Y} dx$$

用いた記号

- $A$ : フランジの断面積
- $[a], [a']$ : 帯板要素の無次元化された剛性マトリックスおよび安定係数マトリックス
- $[a_s], [a_s']$ : 補剛材の無次元化された剛性マトリックスおよび安定係数マトリックス
- $b$ : 帯板要素の幅, フランジ幅
- $b_0$ : 板の基準幅
- $D$ : ウェブの板の曲げ剛度  
( $= Et_w^3/12(1-\nu^2)$ )
- $D_0$ : 基準板厚の板の曲げ剛度  
( $= Et_0^3/12(1-\nu^2)$ )
- $d$ : フランジ中心間の距離
- $[d_p]$ : 塑性応力-ひずみマトリックス
- $E$ : 縦弾性係数
- $E_{st}$ : ひずみ硬化率

- $E_t$ : 接線弾性係数  
 $EI_y, EI_z, EI_w$ : 補剛材の  $y$  および  $z$  軸まわりの曲げ剛性および曲げねじり剛性  
 $e$ : 降伏ひずみに対するひずみの塑性成分の比 ( $=\varepsilon_p/\varepsilon_Y$ )  
 $[f], [f_s]$ : 帯板要素および補剛材の節線力ベクトル  
 $G_t$ : 非弾性域におけるせん断弾性係数  
 $GK_T$ : 補剛材の St. Venant のねじり剛性  
 $[k], [k']$ : 帯板要素の剛性マトリックスおよび安定係数マトリックス  
 $[k_s], [k_s']$ : 補剛材の剛性マトリックスおよび安定係数マトリックス  
 $k_\phi$ : ウェブによるフランジの弾性拘束ばね定数  
 $L$ : 柱の長さ  
 $l$ : 座屈半波長  
 $M_x, M_y, M_{xy}$ :  $x, y$  軸に関する曲げモーメントおよびねじりモーメント  
 $M_i, M_j, M_p$ : 節線  $i, j$  および  $p$  に沿う曲げモーメント  
 $\bar{M}_i, \bar{M}_j, \bar{M}_p$ : 節線  $i, j$  および  $p$  の最大曲げモーメント  
 $N_i, N_j, N_p$ : 節線  $i, j$  および  $p$  に沿う  $y$  方向の面内力  
 $\bar{N}_i, \bar{N}_j, \bar{N}_p$ : 節線  $i, j$  および  $p$  の  $y$  方向の最大面内力  
 $n$ : 非弾性帯板の数値積分の分割数  
 $P_{cr}$ : 座屈圧縮力  
 $P_Y$ : 降伏圧縮力  
 $r$ : H型断面の弱軸まわりの断面2次半径  
 $S_i, S_j, S_p$ : 節線  $i, j$  および  $p$  に沿う  $x$  方向の面内力  
 $\bar{S}_i, \bar{S}_j, \bar{S}_p$ : 節線  $i, j$  および  $p$  の  $x$  方向の最大面内力  
 $t$ : 板厚  
 $t_0$ : 基準板厚  
 $t_f, t_w$ : フランジおよびウェブの板厚  
 $u$ :  $x$  方向の面内変位  
 $u_i, u_j, u_p$ : 節線  $i, j$  および  $p$  に沿う  $x$  方向の面内変位  
 $\bar{u}_i, \bar{u}_j, \bar{u}_p$ : 節線  $i, j$  および  $p$  の  $x$  方向の最大面内変位  
 $\{u\}, \{u_s\}$ : 帯板要素および補剛材の節線変位ベクトル  
 $V_i, V_j, V_p$ : 節線  $i, j$  および  $p$  に沿うせん断力  
 $\bar{V}_i, \bar{V}_j, \bar{V}_p$ : 節線  $i, j$  および  $p$  の最大せん断力  
 $v$ :  $y$  方向の面内変位  
 $v_i, v_j, v_p$ : 節線  $i, j$  および  $p$  に沿う  $y$  方向の面内変位  
 $\bar{v}_i, \bar{v}_j, \bar{v}_p$ : 節線  $i, j$  および  $p$  の  $y$  方向の最大面内変位  
 $w$ :  $z$  方向の面外変位  
 $w_i, w_j, w_p$ : 節線  $i, j$  および  $p$  に沿う  $z$  方向の面外変位  
 $\bar{w}_i, \bar{w}_j, \bar{w}_p$ : 節線  $i, j$  および  $p$  の  $z$  方向の最大面外変位  
 $\alpha$ :  $A/b_0 t_0$   
 $\beta$ :  $l/b_0$   
 $\tau$ :  $b_0/t_0$   
 $\varepsilon$ : ひずみ  
 $\varepsilon_p$ : ひずみの塑性成分  
 $\varepsilon_{st}$ : ひずみ硬化の始まる点のひずみ  
 $\varepsilon_Y$ : 降伏ひずみ  
 $\zeta$ :  $b/b_0$   
 $\eta$ :  $y/b$   
 $\theta$ :  $x$  軸まわりのたわみ角  
 $\theta_i, \theta_j, \theta_p$ : 節線  $i, j$  および  $p$  に沿う  $x$  軸まわりのたわみ角  
 $\bar{\theta}_i, \bar{\theta}_j, \bar{\theta}_p$ : 節線  $i, j$  および  $p$  の  $x$  軸まわりの最大たわみ角  
 $[\kappa]$ : 曲げモーメントおよびねじりモーメントと曲率を関係づけるマトリックス  
 $\lambda$ :  $\sqrt{\sigma_Y/E} \cdot (b_0/t_0) = \sqrt{\varepsilon_Y} \cdot (b_0/t_0)$   
 $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4$ : 無次元化された補剛材の  $z$  および  $y$  軸まわりの曲げ剛性, 曲げねじり剛性および St. Venant のねじり剛性  
 $\nu, \nu'$ : ポアソン比 (弾性域  $\nu=0.3$ , 非弾性域  $\nu'=0.5$ )  
 $\xi$ :  $t/t_0$   
 $\pi, \pi_s$ : 帯板要素および補剛材の全ポテンシャル  
 $\sigma$ : 応力 (圧縮を正とする)  
 $\sigma_{rc}, \sigma_{rt}$ : 残留圧縮および引張応力  
 $\sigma_{cr}$ : 座屈応力  
 $\sigma_Y$ : 降伏応力  
 $\tau$ :  $E_t/E$   
 $\tau_{xy}$ : せん断応力  
 $\chi$ :  $z/b$   
 $[x]$ : 曲率およびねじり率のベクトル  
 $\omega$ : ゆがみ関数

## 参 考 文 献

- 1) Bijlaard, P.P.: Theory of Plastic Stability! of Thin Plates, IABSE, Publications, Zürich, Vol. 6, 1940.

- 2) Cheung Y.K. : Finite Strip Method of Analysis of Elastic Slabs, Proc. of ASCE, Vol. 94, No. EM 6, 1968, pp. 1365~1378.
- 3) 福本嘯士・伊藤義則 : フランジの局部座屈強度とフランジ幅厚比制限, 土木学会論文集, No. 160, 昭和 43 年 12 月, pp. 27~38.
- 4) Fukumoto, Y., Usami, T. and Okamoto, Y. : Ultimate Compressive Strength of Stiffened Plates, ASCE Special Conference on Metal Bridges, Nov., 1974.
- 5) Haaijer, G. and Thürliman B. : On Inelastic Buckling in Steel, Proc. of ASCE, Vol. 84, No. EM 2, April, 1958, pp. 1581~48.
- 6) 長谷川彰夫・大田孝二・西野文雄 : 補剛された板要素の座屈強度に関する二, 三の考察, 土木学会論文報告集, No. 232, 昭和 49 年 12 月, pp. 1~15.
- 7) Lay, M.G. : Flange Local Buckling in Wide-Flange Shapes, Proc. of ASCE, Vol. 91, No. ST 6, Dec., 1965, pp. 95~116.
- 8) 日本鋼構造協会 : 残留応力と座屈, JSSC, Vol. 3, No. 16, 1967, pp. 3~68.
- 9) Nishino, F. : Buckling Strength of Columns and Their Component Plate, Ph. D. Dissertation, Lehigh University, 1964.
- 10) Nishino, F., Tall, L. and Okumura, T. : Residual Stress and Torsional Buckling Strength of H and Cruciform Columns, Transactions of The Japan Society of Civil Engineers, No. 160, Dec., 1968, pp. 75~87.
- 11) Nishino, F. and Tall, L. : Residual Stress and Local Buckling Strength of Steel Columns, Proc. of Japan Society of Civil Engineers, No. 172, Dec., 1969, pp. 79~96.
- 12) Ostapenko, A : Local Buckling, in Structural Steel Design, Tall, L. ed., The Ronald Press, New York, 1964, pp. 517~555.
- 13) Przemienicki, J.S. : Matrix Analysis of Local Instability in Plates, Stiffened Panels and Columns, International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 5, 1972, pp. 209~216.
- 14) 高梨晃一 : H 形鋼圧縮フランジの塑性座屈, 第 16 回橋梁・構造工学研究発表会, 昭和 44 年 12 月, pp. 15~20
- 15) Ueda, Y. : Elastic, Elastic-Plastic and Plastic Buckling of Plates with Residual Stresses, Ph. D. Dissertation, Lehigh University, 1961.
- 16) 宇佐美勉 : 補剛材つき板の弾性ならびに非弾性圧縮座屈強度, 土木学会論文報告集, No. 228, 昭和 49 年 8 月, pp. 13~28.
- 17) 吉田宏一郎 : 帯板要素による平板構造の座屈解析, 日本造船学会論文集, No. 130, 1972, pp. 161~171.

(1975.2.14・受付)