

周波数伝達関数を用いた振動および

粘弾性問題の有限要素解法

FINITE ELEMENT ANALYSIS OF VISCO-ELASTIC AND
DYNAMIC PROBLEMS BY FREQUENCY TRANSFER MATRIX

岩 崎 峯 夫*

By Mineo IWASAKI

1. ま え が き

一般の有限要素法による振動，粘弾性問題の解析では，時間関数を含む剛性マトリックスを微小時間間隔ごとに逐次的に解き解を追跡する直接積分法^{1),2)}が取られている。振動問題では，上述の手法のほかに，任意の運動は，固有振動形を適当な割合で重ね合せたものとするモーダルアナリシスの手法がある³⁾。本研究での手法は，上述の手法と異なり，高速フーリエ変換（FFT）と，構造物の周波数伝達関数による解法である。高速フーリエ変換を用いた構造物の地震応答解析法³⁾が，伊藤・山原により研究されている。ここでは，一質点系の問題が取扱われていて，正弦状波の実数表現により解析が行われている。他方，構造物の周波数伝達関数に関しては，山田により，粘弾性体の周波数応答の研究⁴⁾がされており，この周波数応答計算は，周波数伝達関数の計算と同じである。周波数伝達関数は，複素数表現された入力と出力の正弦状波の関係を示すもので，複素数で表わされる。本研究は，任意の実数時間関数は，フーリエ変換により，複素数表現された正弦状波の和で表わされることと，周波数伝達関数を用いることにより，任意多入力の応答計算を簡明に処理できることを示し，これを多入出力をあつかう有限要素法応答解析に応用したものである。

本手法は，前二手法と次のような相違点を有している。直接積分法では，要素の粘弾性モデルに内部節点を多く有する場合は，未知数が増加するか，高階の微分方程式となる¹⁾。モーダルアナリシスの手法では，疑静的問題（クリープ問題など）を解くことはできず，要素に任意の粘弾性モデルを与え，振動問題として解くことは，一般的には難しい。本手法は，疑静的問題，振動問

題の解析をまったく同じ手法で解く方法であり，要素の粘弾性モデルに，内部節点を多く有していても，未知数は増加することなく，いろいろな粘弾性モデルに対しても，基本プログラムを修正することなく解く汎用性を有している。しかし，直接積分法では，非線形問題にも適用できるが，本手法は，適用できない欠点も持っている。また特殊な粘弾性問題の解析に，ラプラス変換した剛性マトリックスを解く手法もあり，有効な手法であるが，一般的な場合は，現時点では，その数値計算は，かなり難しいとされている。本手法は，この計算を行う一手法とも考えられる。

2. 複素正弦状波とフーリエ変換

(1) 実数正弦状波と複素正弦状波

一般に，実数正弦状波は次のように表わされる。

$$y(\omega t) = A \cos(\omega t + \phi) \dots\dots\dots (1)$$

ここであらたに，正弦状波の複素数表現として，次式のように定義し，複素正弦状波とよぶことにする。

$$Y(j\omega t) = Ae^{j(\omega t + \phi)} = R(j\omega)e^{j\omega t} \dots\dots\dots (2)$$

複素正弦状波の振幅 A ，位相ずれ ϕ は次式で示される。

$$\left. \begin{aligned} A &= |R(j\omega)| = \sqrt{R_e[R(j\omega)]^2 + I_m[R(j\omega)]^2} \\ \phi &= \angle R(j\omega) = \tan^{-1}(I_m[R(j\omega)]/R_e[R(j\omega)]) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (3)$$

式(2)は， $e^{j\omega t}$ の単位複素正弦状波が $R(j\omega)$ の振幅，位相変化を受けていると考えられ，振幅，位相ずれは，係数として処理できる利点もっている。

(2) 周波数伝達関数とフーリエ変換

伝達関数は，入力 $y(t)$ と出力 $x(t)$ のラプラス変換の比で表わされる⁴⁾。ここで $y(t)$ ， $x(t)$ は， $t \geq 0$ で定義される時間関数である。たとえば，1入力，1出力で

* 正会員 工修 運輸省第三港湾建設局 神戸機械整備事務所 建設専門官

ある地震応答計算の一質点系の運動方程式では、次のようになる³⁾。

$$M \frac{d^2x}{dt^2} + C \frac{dx}{dt} + Kx = -M \frac{d^2y}{dt^2} \dots\dots(4)$$

ラプラス変換すると次式となる。

$$(Ms^2 + Cs + K)X(s) = -Ms^2Y(s) \dots\dots(5)$$

ここで、 $X(s)$ 、 $Y(s)$ は、 $x(t)$ 、 $y(t)$ のラプラス変換である。伝達関数 $Q(s)$ は次式となる。

$$Q(s) = X(s)/Y(s) = -Ms^2/(Ms^2 + Cs + K) \dots\dots(6)$$

s は複素数であり、その一つの値である $j\omega$ を代入すると次式を得る。

$$X(j\omega) = Q(j\omega)Y(j\omega) \dots\dots(7)$$

$x(t)=0$ 、 $y(t)=0(t<0)$ である場合は、 s に $j\omega$ を代入することにより、フーリエ変換となり、 $X(j\omega)$ 、 $Y(j\omega)$ は、周波数スペクトルとなる。

結局、出力 $x(t)$ を求めるには、 $y(t)$ をフーリエ変換し、 $Y(j\omega)$ を求め、 $Q(j\omega)$ を乗じ、 $X(j\omega)$ を求め逆変換すればよい。すなわち次式によればよい。

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} Q(j\omega) Y(j\omega) e^{j\omega t} d\omega \dots\dots(8)$$

式(8)からわかるように、フーリエ変換により、実数時間関数は、その周波数スペクトルに $1/2\pi$ を乗じた係数をもつ複素正弦波の和に分解される。また、式(7)は、係数 $Y(j\omega)$ をもつ角周波数 ω の一つの複素正弦波が入力されると係数 $X(j\omega)$ をもつ複素正弦波が出力することを示し、 $Q(j\omega)$ は、周波数伝達関数である⁴⁾。

以上のことをまとめると次のようになる。任意の時間実数関数が、周波数伝達関数の既知な要素に入力され、その出力の時間関数を求めるには、入力の実数関数を複素正弦波の和に分解する。各複素正弦波を要素に入力すると、各複素正弦波は、振幅と位相変化を受ける。この出力の各複素正弦波を加え合わせることで、出力の時間関数を求めることができる。

3. 有限要素法での周波数伝達関数

有限要素法では、多入力、多出力であるが、同様に入力と出力の関係は、伝達関数で与えられる。まず、要素の動的コンプライアンス(要素のひずみと応力間の周波数伝達関数)は、次のように計算される。たとえば図-1に示す応力-ひずみ関係の場合は、次のようにして求められる。節点 ik 間のせん断粘弾性率 $G(s)$ を求めるには、中間節点 j を消去しても得られるが、節点 jk 間では、 G_2 と Cs は並列であるので、 $G_2 + Cs$ となる。また、 G_1 と $G_2 + Cs$ は、直列であるので次式とな

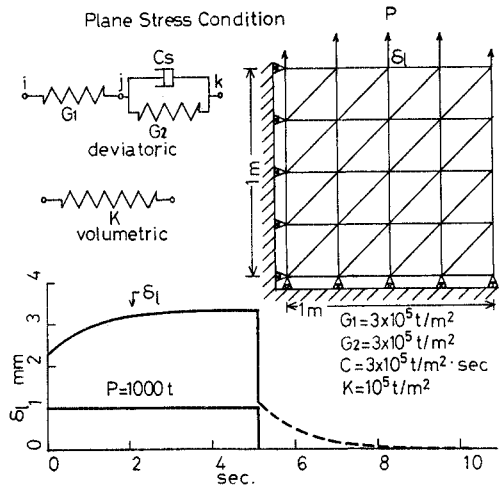


図-1 擬静的問題

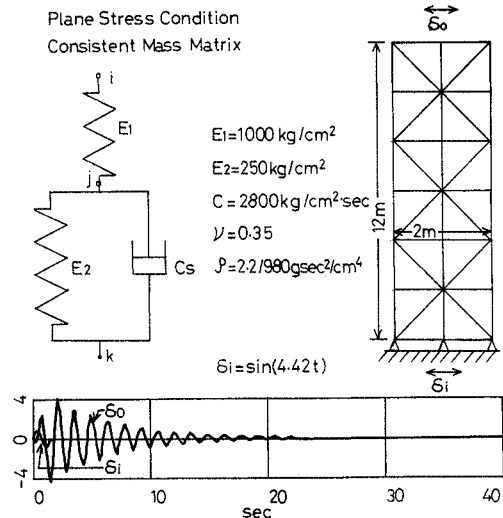


図-2 振動粘弾性問題

る。

$$\frac{1}{G(s)} = \frac{1}{G_1} + \frac{1}{G_2 + Cs} \dots\dots(9)$$

s に $j\omega$ を代入すれば、複素せん断弾性率 $G(j\omega)$ が求められる。複素体積弾性率 $K(j\omega)$ は、例題では、時間に無関係としているので K となる。また、図-2で示す応力-ひずみ関係の場合は、同様に、複素ヤング率 $E(j\omega)$ は、ここでは次式となる。

$$\frac{1}{E(j\omega)} = \frac{1}{E_1} + \frac{1}{C_j\omega + E_2} \dots\dots(10)$$

また、複素ポアソン比 $\nu(j\omega)$ は、ここでは、 ν である。

要素の動的コンプライアンス $[D_e(j\omega)]$ は、いわゆる応力マトリックスに、複素弾性率を代入することにより得られる⁵⁾。たとえば、平面ひずみ状態では、次式とな

る。

$$[D_e(j\omega)] = \begin{bmatrix} K(j\omega) + \frac{4}{3}G(j\omega) & K(j\omega) - \frac{2}{3}G(j\omega) & 0 \\ K(j\omega) - \frac{2}{3}G(j\omega) & K(j\omega) + \frac{4}{3}G(j\omega) & 0 \\ 0 & 0 & G(j\omega) \end{bmatrix} \dots\dots\dots(11)$$

要素のひずみスペクトル $\{\epsilon_e(j\omega)\}$ と応力スペクトル $\{\sigma_e(j\omega)\}$ は次の関係となる。

$$\{\sigma_e(j\omega)\} = [D_e(j\omega)]\{\epsilon_e(j\omega)\} \dots\dots\dots(12)$$

ただし、

$$\{\sigma_e(j\omega)\} = \begin{Bmatrix} \sigma_x(j\omega) \\ \sigma_y(j\omega) \\ \tau_{xy}(j\omega) \end{Bmatrix}, \quad \{\epsilon_e(j\omega)\} = \begin{Bmatrix} \epsilon_x(j\omega) \\ \epsilon_y(j\omega) \\ \tau_{xy}(j\omega) \end{Bmatrix}$$

である。

要素の変位-力の周波数伝達関数は、いわゆる要素の剛性マトリックス計算式の応力マトリックスの代わりに、 $D_e(j\omega)$ を代入することにより得られ、次のようになる⁸⁾。

$$[K_e(j\omega)] = [B_e]^T [D_e(j\omega)] [B_e] t d \dots\dots\dots(13)$$

ここで、 t は、要素の厚さ、 d は、要素の面積、 $[B_e]$ は、要素の頂点の変位と要素のひずみの関係を表わすマトリックスで、時間に無関係の定数であり、伝達関数でもある。構造全体の周波数伝達関数は、要素の周波数伝達関数を重ね合わせるにより求められ、疑静的問題の周波数伝達関数が求められる⁸⁾。

振動問題では、要素の質量を考える必要がある。

Lumped Mass マトリックスであろうと、Consistent Mass マトリックスであろうと、構造物の節点変位 $\{\delta(s)\}$ と、質量により生ずる力 $\{P_m(s)\}$ との関係は、次式で示される。

$$s^2[M]\{\delta(s)\} = \{P_m(s)\} \dots\dots\dots(14)$$

ただし、 $[M]$ は、Mass マトリックスである。

s に $j\omega$ を代入して、質量を考慮した周波数伝達関数が求められる。

$$(j\omega)^2[M]\{\delta(j\omega)\} = \{P_m(j\omega)\} \dots\dots\dots(15)$$

疑静的問題の周波数伝達関数に $(j\omega)^2[M]$ を加えることにより、振動問題の周波数伝達関数が求められ、節点変位スペクトル $\{\delta(j\omega)\}$ と節点力スペクトル $\{P(j\omega)\}$ の関係は、次式で示される。

$$[K(j\omega)]\{\delta(j\omega)\} = \{P(j\omega)\} \dots\dots\dots(16)$$

各要素のひずみスペクトルは、次式により求められる。

$$\{\epsilon_e(j\omega)\} = [B_e]\{\delta_e(j\omega)\} \dots\dots\dots(17)$$

ここで、 $\{\delta_e(j\omega)\}$ は、要素の頂点変位スペクトルであり、要素の応力スペクトルは、式 (12) により求められる。

以上の過程により、既知の節点変位、力のスペクトルを与えれば、未知の節点変位、力、要素の応力、ひずみの各スペクトルが求められ、フーリエ逆変換することにより、各未知量の時間関数が求められる。

4. 本手法に関連した計算技術

(1) 入力が多ケースある場合の計算

構造物の応答計算を入力を変えて、行いたい場合がある。本手法は、線形問題の解法であるので、次の条件がある場合はその利点が利用される。

既知節点変位、力が互いに伝達関数(定数を含む)で関係づけられるなら、2回目から計算は簡単になる。たとえば、既知節点変位と力のラプラス変換を $\delta_i(s)$ ($i=1, \dots, k$)、 $P_l(s)$ ($l=k+1, \dots, n$) とする。このうちのひとつを基準入力と考える。たとえば、 $\delta_j(s)$ をとったとすると次の関係となる。

$$\delta_i(s) = Q_i(s)\delta_j(s) \quad (i=1, \dots, k) \dots\dots\dots(18)$$

$$P_l(s) = Q_l(s)\delta_j(s) \quad (l=k+1, \dots, n) \dots\dots\dots(19)$$

ここで、 $s=j\omega$ 、 $\delta_j(j\omega)=1$ とすると次式となる。

$$\delta_i(j\omega) = Q_i(j\omega) \quad (i=1, \dots, k) \dots\dots\dots(20)$$

$$P_l(j\omega) = Q_l(j\omega) \quad (l=k+1, \dots, n) \dots\dots\dots(21)$$

このようにして、未知スペクトルを求めこれを構造物の基準スペクトルとすると、各未知量のスペクトルは、基準スペクトルに基準入力スペクトル $\delta_j(j\omega)$ を乗じれば求められる。以上の手法により、異なる基準入力が何ケースもある場合は、一度構造物の基準スペクトルを求めておくだけでよい。この基準スペクトルは、基準入力と、各未知量のスペクトル間の周波数伝達関数であり、構造物の周波数特性を表わして、これにより、固有振動数、振動モードがわかる。各既知スペクトルを関係づける伝達関数の例として、次のような伝達関数がある。節点 l の変位または、力の入力が、節点 j の変位または、力の入力とパターンは、同じで、大きさが B 倍で、時間 L 遅く入力する場合は、次の伝達関数となる⁹⁾。

$$Q(s) = B e^{-Ls} \dots\dots\dots(22)$$

もし、節点 l の変位が零(固定)または、力が零の場合は、 $B=0$ である。

(2) 変位-速度-加速度の変換

地震応答計算では、入力を加速度で与えられる場合が多い。この場合は、次の2種の方法で計算することができる。第1の手法は、加速度を変位に変換して入力する手法であり、理論的には、次式により変換される。

$$\delta_i(s) = \frac{1}{s^2} A_i(s) \dots\dots\dots(23)$$

ここで、 $A_i(s)$ は、節点 i の加速度であり、 $1/s^2$ は、2 重積分の伝達関数である。 s に $j\omega$ を代入し、各スペクトル間の関係が次式により表わされる。

$$\delta_i(j\omega) = \frac{1}{(j\omega)^2} A_i(j\omega) \dots\dots\dots(24)$$

また、同様に速度で与えられる場合は次式となる。

$$\delta_i(j\omega) = \frac{1}{j\omega} V_i(j\omega) \dots\dots\dots(25)$$

ここで、 $V_i(j\omega)$ は、節点 i の速度スペクトルである。 $\delta_i(j\omega)$ は、 ω が零か零に近いときに、 $A_i(j\omega)$ が零か非常に小さい値でない限り、発散するか大きな値となる。一般には、加速度の $\omega=0$ の成分は、零であり、低周波数にノイズを含んでいる。このため、ある周波数以下をカットする次のフィルタが用いられる^{3),7)}。

$$\left. \begin{aligned} \delta_i(j\omega) &= 0 \quad (\omega=0), \quad F(j\omega) = 0 \quad (\omega < \omega_c), \\ F(j\omega) &= 1 \quad (\omega > \omega_c) \end{aligned} \right\} \dots\dots(26)$$

一般に、フィルタは各 ω についての周波数伝達関数値を任意に与えることができるので、任意のフィルタを作ることができ、ゲインの補正、また、複素数を用いることにより位相の補正もできる。はりの理論と等価であるとして、地震加速度を積分する手法¹⁰⁾は、次のフィルタを用いた場合とほぼ等価であると思われる。

$$F(j\omega) = 1 - \frac{\lambda}{(j\omega)^4 + \lambda} = \frac{\omega^4}{\omega^4 + \lambda} \dots\dots\dots(27)$$

ここで、 λ はフィルタの特性を与える定数である。このフィルタは、虚数部をもたないので、位相の変化を与えず、低周波数のゲインを落す働きがある。

結局フィルタ処理されると次式のようになる。

$$\left. \begin{aligned} \delta_i(j\omega) &= \frac{F(j\omega)}{(j\omega)^2} A_i(j\omega) \\ \delta_i(j\omega) &= 0 \quad (\omega=0) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(28)$$

式 (27) のフィルタを用いた場合は、式 (28) からわかるように、 ω が零か零に近くても、安定なフィルタと考えられる。

第 2 の手法は、変位-加速度の変換を構造全体の周波数伝達関数に含め、加速度-力の関係として解く手法である。これは、入出力を常に加速度で扱いたいとき有利な手法である。加速度-力の周波数伝達関数は、式 (28) を式 (16) に代入することにより得られ次式となる。

$$[K_A(j\omega)]\{A(j\omega)\} = \{P(j\omega)\} \dots\dots\dots(29)$$

ここで、 $\{A(j\omega)\}$ は、節点の加速度スペクトルであり、 $[K_A(j\omega)]$ は、次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} [K_A(j\omega)] &= \frac{F(j\omega)}{(j\omega)^2} [K(j\omega)] \\ [K_A(j\omega)] &= 0 \quad (\omega=0) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(30)$$

構造物自身がフィルタの作用のある場合、すなわち、 $[K(j\omega)]$ が低周波数でゲインが低い場合は、 $F(j\omega)=1$ として計算できる。

また、式 (16) より得られた、節点変位スペクトルを、速度スペクトル、加速度スペクトルに変換するには、式 (24), (25) により変換され、節点の速度、加速度の時間関数も容易に得られる。

5. 数値計算の問題点

(1) フーリエ変換

ここで扱ってきたのは、非周期波のフーリエ変換であるが、その数値計算は難しい。そこで、次の条件のある場合には、周期波のフーリエ変換（フーリエ級数）により、近似的に計算される。すなわち、入出力とも、区間 ($t=0, T$) 内で、零に収束する場合である。

地震波と、その応答のように、ある時間内に零に収束する場合は、問題はないが、ステップ入力の場合は、図-1 に示すように、出力が収束する時間の 2 倍を区間としてとらなければならない。

周期波のフーリエ変換の数値計算は次のように行われる。区間 ($t=0, T$) で定義される実数時間関数を $x(t)$ とすると、 $x(t)$ は複素正弦波の和で表わされる。

$$\begin{aligned} x(t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} (a_n + jb_n) e^{jn\omega_0 t} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{jn\omega_0 t} \dots\dots\dots(31) \end{aligned}$$

ただし、 $\omega_0 = 2\pi/T$

$$\left. \begin{aligned} a_n &= \frac{1}{T} \int_0^T x(t) \cos n\omega_0 t dt \\ b_n &= \frac{-1}{T} \int_0^T x(t) \sin n\omega_0 t dt \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(32)$$

さて、この逆変換は次のようになる。

$$\begin{aligned} C_n &= (a_n + jb_n) = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) (\cos n\omega_0 t - j \sin n\omega_0 t) dt \\ &= \frac{1}{T} \int_0^T x(t) e^{-jn\omega_0 t} dt \dots\dots\dots(33) \end{aligned}$$

ここで、区間 ($t=0, T$) 間のサンプル数を N 、サンプル間隔を Δt 、 i 番目のサンプル値を x_i とすると式 (31), (33) は、近似的に次式となる。

$$\begin{aligned} X_i &= \sum_{n=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}} C_n e^{jn(2\pi/N)i} \quad (i=0, \dots, N-1) \dots\dots(34) \\ C_n &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N-1} X_i e^{-jn(2\pi/N)i} \quad \left(n = -\frac{N}{2} + 1, \dots, \frac{N}{2} \right) \\ &\dots\dots\dots(35) \end{aligned}$$

ただし、 C_n は、離散化されたために周期性をもつ。すなわち、式 (35) において、 $2\pi i$ 位相ずらしても、値は変わらず、次の関係がある。 n が負の場合は次式を用いる。

$$\begin{aligned} e^{-jn(2\pi/N)i} &= e^{-j(n+N)(2\pi/N)i}, \quad C_n = C_{n+N} \quad (n < 0) \\ &\dots\dots\dots(36) \end{aligned}$$

ここで、注意しなければならないことは、このように計算されると、 $C_n(N/2 < n < N)$ の値は C_{n-N} の値であり、負の角周波数 $(n-N)\omega_0$ の複素正弦状波の係数であることである。結局、この変換により、式 (34), (35) は次式となる。

$$X_i = \sum_{n=1}^{N-1} C_n e^{jn(2\pi/N)i} \quad (i=0, \dots, N-1) \dots\dots (37)$$

$$C_n = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N-1} X_i e^{-jn(2\pi/N)i} \quad (n=0, \dots, N-1) \dots\dots (38)$$

ここで、 C_n は、フーリエ係数であり、複素正弦状波の振幅、位相ずれを示す係数である。なお、式 (37), (38) は、サンプル数を 2 のべき乗で与えると、FFT 算法¹²⁾ により高速に計算される。計算時間は、 N が千数百で数秒のオーダーである⁵⁾。

さて、周波数伝達関数は、非周期波の周波数スペクトルに関してのみならず、フーリエ係数に関しても成り立つので、実際の計算は、フーリエ係数を用いて計算される。

(2) 構造物の定常応答の計算

未知の節点変位スペクトルを求めるには、すなわち、角周波数 $n\omega_0$ ($-N/2+1 \leq n \leq N/2$) でのフーリエ係数を求めるには、各角周波数ごとに、構造物の周波数伝達関数と、既知のフーリエ係数を用いて、定常応答計算をすればよい。

しかし、式 (31), (32) からわかるように、 $n\omega_0$ と $-n\omega_0$ の複素正弦状波の係数は、互いに共役複素数であり、それらの複素正弦状波は、共役複素正弦状波となる。

式 (7) において、入力 $Y(j\omega)e^{j\omega t}$ の共役複素正弦状波 $Y(-j\omega)e^{-j\omega t}$ が入力した場合の出力は次のようになり、

$$X(-j\omega)e^{-j\omega t} = Q(-j\omega)Y(-j\omega)e^{-j\omega t} \dots\dots (39)$$

出力もやはり、 $X(j\omega)e^{j\omega t}$ の共役複素正弦状波となる。よって、このような場合は、どちらか一方計算するだけで十分である。

有限複素フーリエ変換では、時間実数関数は区間 ($t=0, T$) のサンプル数 N とすれば、 N 個の複素正弦状波の和で近似される。しかし式 (34), (35) において、 $n=0, n=N/2$ 以外の複素正弦状波は、共役複素正弦状波をもっている。そのため、定常応答は、一方の複素正弦状波についてのみ計算される。結局 ($N/2+1$) 個の複素正弦状波の定常応答計算をすれば十分である。 $N=1024$ の場合は、513 回連立方程式の係数を組立て、解がなければならない。そのため、係数組立、解法をいかに速くするかが問題となる。ここでの例題では、係数組立に関しては、SF 法⁹⁾を用いている。この手法は、係数

組立のための重ね合わせの場を必要とせず、非零の各係数と、連立方程式を直接法で解く場合に消去分解過程で発生する非零の係数のための記憶場所とを、順次求める手法である。各周波数での定常応答計算の繰り返し計算では、複素弾性率が繰り返すたびに変化するだけであるから、各係数を求めるには各係数計算に関係し、繰り返すたびに変わらない数値をシーケンシャルに内部記憶に入れておき、順次係数を作る手法を取っている。式 (16) の連立方程式を解く場合は、一般に、実数部と虚数部に分けて解かれ⁹⁾、元数が 2 倍の連立方程式を解くこととなり、係数の記憶が 2 倍となる。これは、複素数演算をすることにより、すなわち $[K(j\omega)]$, $\{\delta(j\omega)\}$ と $\{P(j\omega)\}$ を複素数で定義することによりさけられ、実数演算と同じ手法で解くことができ、対称性も利用できる。連立方程式解法は、反復法と直接法が考えられるが、反復法では、複素演算での収束が悪いように思われる。疑静的問題において、ある周波数より大きい周波数の周波数特性がほとんど変化しない場合は、有効であるが、一般の場合は、直接法が良いと思われる。

また、連立方程式を多数回解くことをさけるため、次の手法が考えられる。疑静的問題では、周波数特性の起伏が少ないので、スペクトルを数個おきに求め、その間のスペクトルを内挿する方法が考えられる。また、振動粘弾性問題では、いくつかの固有振動数を中心としたある幅だけについてスペクトルを求め、他を無視するモーダルアナリシスの手法が考えられる。

6. 例 題

本手法を用いて図-1, 2 に示す例題を解いた。計算機は、TOSBAC-3400 である。

図-1 は、疑静的問題の例で、平面応力状態としている。これは、一様応力場であるので、ラプラス変換表からも解析的に計算できる。時系列のサンプル数 512 とし、連立方程式を 257 回解き、節点変位スペクトルを求め、逆変換して変位を求めた。本手法による結果は、解析解とほぼ完全に一致した。連立方程式の解法は、反復法で行い、計算時間は約 15 分であった。また、本手法はこの種の問題、すなわち、時間依存の場の問題 (time dependent field problem)²⁾、たとえば、熱伝導、浸透流、圧密問題にも同様に適用可能であろう。この種の問題は、直接積分法でも十分できるし、この手法では、あらかじめ時間の区間を設定しなければならない欠点がある。しかし、この手法は線形性を利用しているので、入力が複数ケースある場合に特に有効であろう。

図-2 は、振動粘弾性問題の例で、平面応力状態とし、Consistent Mass マトリックスを用いて計算した。

入力は、第一次固有振動数 $\omega \doteq 4.42$ の単位正弦波一周期を地盤変位として与えた。サンプル数は、1024 で連立方程式を直接法で 513 回解き、計算時間は約 25 分であった。このように、要素に粘弾性モデルを与えた振動問題は、一般には非比例減衰をもつ多自由度系の振動問題となり、従来のモーダルアナリシスは用いることができなく¹³⁾、一般には直接積分法で解かれている。このような問題を直接法で解く場合と、本手法で解く場合との計算時間に関しては、いずれも多数回の連立方程式を解かなければならず、どちらが計算時間に関して優れているかは一概にはいえない。特に、地震応答計算のように、入力が多ケースある場合は、4.(1)の手法により、各ケースごとに、もはや連立方程式を解く必要がないので、本手法は、有効と考えられる。また、本手法は構造物の定常周波数応答計算が含まれているので、構造物の周波数特性を知ることができる利点がある。

7. 結 論

本論文では、有限要素法による線形粘弾性体の擬静的問題、振動問題をフーリエ変換、周波数伝達関数を用いて解く手法を示した。特に、FFT を用いることによって、本手法に実用的価値が増すものと期待される。本手法は、粘弾性体の周波数応答計算と FFT を組み合わせることにより、生まれた手法であるといえる。

本手法は、次のような特色をもっている。

(1) 線形粘弾性体の擬静的問題、振動問題とも、同じ汎用プログラムを利用できる。

(2) 要素ごとに任意の粘弾性モデルを適用でき、粘弾性モデルが内部節点を多く有していても特に問題なく、基本プログラムを修正せずに利用できる。

(3) Mass マトリックスが Lumped Mass であろうと、Consistent Mass であろうと、ほとんど計算時間は変わらない。

(4) 普通の場合は入力が複数ケースあっても、一度構造物の周波数伝達関数を求めて解けばよく、2 ケース目からは非常に速く計算される。

(5) 周波数応答計算が含まれているので、構造物の周波数特性がわかる。

(6) 計算においてすぐれた安定性がある。

(7) 変位-速度-加速度の相互変換は容易である。

(8) 節点加速度を入力として直接計算できる。

(9) 非比例減衰をもつ多自由度系の振動解析ができる。

(10) 連立方程式を多数回解かなければならない。

(11) 非線形粘弾性体は解析できない。

参 考 文 献

- 堀井健一郎・川原陸人：有限要素法による粘弾性体の解析法，土木学会論文報告集，No. 179, 1970-7, pp. 23~35.
- ツェンキーヴィッツ・O.C. & チューン・Y.K. 原著：マトリックス有限要素法，邦訳培風館，昭和45年.
- 伊藤哲次・山原 浩：フーリエ級数展開による構造物の地震応答解析法，日本建築学会論文報告集，No. 190, 1971-12, pp. 35~41.
- 増淵正美：自動制御基礎理論，コロナ社，昭和39年.
- 桑島 進・永井康平：任意個数試料のFFT算法とそのスペクトル解析への応用，港湾技研資料，No. 155, 1973-3, p. 33.
- 岩崎肇夫：有限要素法における剛性マトリックス組立の有効なプログラム法，土木学会昭和48年度全国大会講演概要集，I-40, pp. 84~85.
- 坪 考：FFTを用いた帯域濾波の一方について，生産研究，Vol. 12, No. 12, 1970-12, pp. 553~555.
- 山田嘉昭：塑性・粘弾性，コンピュータによる構造工学講座 II-2-A, 培風館，昭和47年.
- 渡辺啓行：有限要素法による粘弾性体の振動解析，土木学会論文報告集，No. 198, 1972-2, pp. 21~35.
- 吉田 裕・岡山和生：地震加速度記録の積分における濾波計算のアルゴリズム，土木学会論文報告集，No. 221, 1974-1, pp. 25~38.
- 畑野 正・渡辺啓行：粘土，砂，碎石の動的，静的粘弾性常数ならびにポアソン比について，土木学会論文報告集，No. 184, 1970-12, pp. 105~112.
- 斎藤正徳：時系列解析用のサブルーチン，地質工学，No. 9, 1974-7, pp. 27~39.
- 山田善一・後藤洋三：非比例減衰をもつ多自由度系の振動解析，JSCC, 第5回大会研究集会マトリックス構造解析法研究発表論文集，1971-6, pp. 346~353.
- 赤木知之・大野大明・色部 誠：有限要素法による格納容器の粘弾性解析，土木学会論文報告集，No. 214, 1973-6, pp. 1~8.

(1974.7.15・受付)