

成層密度流の界面現象(1)

HYDRODYNAMIC BEHAVIOUR OF INTERFACES IN STRATIFIED FLOWS (1)

水理委員会密度流研究小委員会
*Task Committee on the Stratified Flows (Committee
 on Hydraulics and Hydraulic Engineering, JSCE)*

まえがき

水理学は治水、水力、港湾、水道などの工学上の要請に応じて発展してきたが、今日、水資源、沿岸開発、環境保全など多面的かつ高度の問題に対処することが必要とされるようになってきた。したがってたとえ従来のようなベルヌーイの定理に代表される1次元取扱いによつては解決できない問題が継起し、2次元以上の多次元時空間による処理を必要としており、したがって水理学の構成は基礎的な視点に立戻つて流体力学となら異ならないものとなりつつあると考えられる。しかもその場合、従来取扱われてきた力学機構は、これを運動量輸送と解釈することにより、物質や熱の輸送と相通じる輸送現象と理解される。ここに砂や空気などを輸送する混相流や塩分、熱、さらには化学物質の混合拡散を取扱う不等質の流れに対処する新しい水理学の基本的立場が生じてくる。

このような趨勢から土木学会水理委員会では「移動床流れの抵抗と河床形状研究小委員会」のあとを受けて「密度流研究小委員会」を設けた。

そこでこの小委員会は1972年度、1973年度の2ヵ年にわたり、次に記した4分科会を設けて調査活動を行った。密度流は塩分、熱などにより水の密度がオイラー的に異なった流れなので概念としては相当広いが、本小委員会では成層流界面における諸現象に問題を限定した。もちろんその場合、乱れ、混合、拡散、熱輻射、伝熱などの現象に故意に目をそらすのではなく、これらを視野の中に入れた上で基礎的現象に話題を絞る、かつ実用的立場をも考慮したものである。本論文は次の4編よりなっている。

第1編は密度差に伴う成層界面の安定問題について、水工学に関連の深い主題を中心に理論的發展と実験的成果の両面につき本小委員会、界面安定・不安定研究分科

会が行った研究を玉井幹事が取纏めたものである。

第2編は成層界面に作用する流体抵抗の実用的立場よりする評価と、これに関連する層流より乱れ拡散にいたる各種の界面状態での理論機構につき本小委員会界面抵抗研究分科会が行った研究を岩崎主査が取纏めたものである。

第3編は成層流界面や密度量のある場でのジェット・プルームの形状や挙動ならびにこれらに影響を与える流れ、地形の効果、さらには連行機構などにつき本小委員会界面形状研究分科会が行った研究を和田幹事が取纏めたものである。

第4編は地下密度流の中で比較的土木工学に関連の深い現象および基礎的に重要な現象に関する解析手法につき本小委員会地下水密度流研究分科会が行った研究を故嶋主査が取纏めたものである。

第1編と第2編は相互に関係が深いので本号に掲載し、第3編と第4編は次号にまわすこととした。

水理委員会密度流研究小委員会構成

委員長：岩崎 敏夫

第1分科会 界面安定・不安定

主査：岩佐 義朗

委員：椎貝 博美 玉井 信行（幹事）
板倉 忠興

第2分科会 界面抵抗

主査：岩崎 敏夫

委員：栗谷 陽一 金子 安雄
須賀 堯三 阿部 至雄（幹事）

第3分科会 界面形状

主査：室田 明

委員：柏村 正和 南 勲
和田 明（幹事）

第4分科会 地下水密度流

主査：嶋 祐之

委員：上田年比古 崎山 正常

(付記) 故嶋祐之氏は第4部門主査のほか、に当時水理委員会委員長として本小委員会の研究活動全般について御指導をいただいております、本論文第4編は先生の御遺稿となった。ここに記して御冥福をお祈りする次第である。また先生の御原稿は 埼玉大 佐藤邦明氏に 清書していただいた。

(委員長 岩崎敏夫・記)

第1編 界面安定・不安定

1. 問題の設定

われわれが対象とする物質は気相、液相、固相のいずれかである。これらの各相の物質の物理的性質は、あらゆる点においてあまりにも異なるため、各相の物質が混りあうことなく別々に存在し、各相の物質間にいわゆる界面が生ずることが多い。また、たとえ同一相の物質であっても、物理的性質の相違により混合せず界面を作っている場合もある。

気相と液相との界面、実際的には空気と水との界面は自由表面であり、その安定・不安定は風波の発達と砕波として取扱われている。同様に、砂漣や移動床の力学は、気相と固相あるいは液相と固相の相互関係を解析するものである。一方、貯水池・湖沼・河口部・沿岸海域における温度躍層や内部波などは、物理的性質の異なる二つの液体の界面現象である。これらの全体を取扱うと膨大となり、かつ質的に異なる問題も含まれるので、ここでは液体内における密度差に伴う界面現象を取扱う。

現実の世界におこるさまざまな自然現象の説明を主体とする海洋学、気象学などの自然科学はこれらの問題を早くから取り上げ、より忠実な解析とそれによる現象の説明を目指して努力してきた。しかし、土木工学においては現象の説明よりも、むしろ現象がおこる場の量的利用を目的とすることが多く、その質的影響が量的利用に関係するような高度の技術体系が望まれるようになってはじめて、研究課題としてクローズアップされることとなったといっても過言ではなからう。感潮域における取水、沿岸域における取放水、揚水式発電に伴う貯水池の取放水などは、界面現象を伴う現実の問題の例である。

一方、同じ研究分野であっても異なるアプローチにはまたそれぞれの特色がある。より現実には忠実な答を得たいという立場に立てば、まず観測から始め、各種の物理的シミュレーションを加えて、得られた資料を徹底的に

分析するという実験・実測の方法が重視される。一方、現象を支配する法則性を明らかにしたいという、より一般的な立場よりすれば、類似の現象に共通した抽象化を行い、理論的に説明する方法がとられることになる。本来これらの両者の方法は対立するものではなく相補的なものであるから、等しい発展が望まれる。ここでもそのような観点から、界面の安定・不安定に関する理論とその実験的検証という両面よりの考察が加えられている。

まず、現実の界面はどのようにモデリングされるかが大きな問題である。普通には、界面を含む流れは流体力学的方法により表わされ、界面の安定・不安定は界面に加えられた微小な攪乱が時間とともに指数的に増加するかしないかという考え方と、ある一定の攪乱を流れに与えるとき、攪乱のエネルギーが増加するか減少するかという二つの考えに基づいて解析される。さらにまた、もし界面が不安定であると判断された場合、その不安定はどのような物理的変化を伴うかが問題となる。この場合もただちに乱れが発生するわけではなく、安定した内部波が発生したり、弱い混合が生じて平衡に達する場合もある。ここでは、流体力学的安定論における数学モデル、その成層流への適用、ならびに実験的研究にわけて説明する。

2. 数学モデルの作成

(1) 不均質流体の線型化方程式

対象とする流体が不均質であり、非圧縮性とする。また明記されない限り拡散の作用は無視でき、Boussinesqの近似(不均質性は慣性項には影響を与えない)が成立する、と考えれば基礎式は次のようになる。

$$\text{連続式: } \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (1)$$

$$\text{質量保存: } \frac{D\rho}{Dt} = 0 \quad (2)$$

$$\text{運動量保存: } \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -\frac{1}{\rho_0} \nabla p + \frac{\nu}{\rho_0} \nabla^2 \mathbf{u} \quad (3)$$

ここに、 $\mathbf{u}=(u, v, w)$: 速度ベクトル、 ∇ : gradient operator、 D/Dt : 流体粒子の運動に従っての微分、 ρ_0 : 基準密度、 \mathbf{g} : 重力ベクトル、 ρ : 密度、 p : 圧力、 ν : 動粘性係数である。いま、対象とする界面に沿い、流れの方向に x 軸、鉛直上向きに z 軸、これらの面に直角に y 軸をとると、重力ベクトル、速度ベクトル、流体密度、圧力、およびその定常状態におけるつり合いはそれぞれ次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{g} &= (0, 0, -g) \\ \mathbf{u} &= \bar{\mathbf{u}}(z) + \mathbf{u}' \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} \bar{u}(z) &= (\bar{u}(z), 0, 0) \\ \rho &= \rho_0(z) + \rho'(r, t) \\ p &= p_0(z) + p'(r, t) \\ \nabla p_0 &= \rho_0 g \\ r &: \text{位置ベクトル} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (4)$$

これらの式を基礎式 (1)~(3) に代入し、線型化すれば次式のようになる。

$$\nabla \cdot \mathbf{u}' = 0 \dots\dots\dots (5)$$

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \rho'}{\partial x} + w' \frac{\partial \rho_0}{\partial z} = 0 \dots\dots\dots (6)$$

$$\frac{\partial u'}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial u'}{\partial x} + w' \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p'}{\partial x} + \nu \nabla^2 u' \dots\dots\dots (7)$$

$$\frac{\partial v'}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial v'}{\partial x} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p'}{\partial y} + \nu \nabla^2 v' \dots\dots\dots (8)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial w'}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial w'}{\partial x} &= -\frac{\rho'}{\rho_0} g - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p'}{\partial z} + \nu \nabla^2 w' \\ &+ \frac{T}{\rho_0} \left[\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) z_s \right] \cdot \delta(z - z_s) \dots\dots (9) \end{aligned}$$

ここに式 (9) の最終項は、界面での表面張力を考えたときの表示であり、 z_s : 定常状態の界面、 T : 表面張力、 δ : Dirac の delta 関数である。

定常状態では関係する物理量は深さ方向にのみ変る。微小攪乱による摂動項の一次項がそれぞれ独立の波数成分に分離でき、その各成分が線型化された基礎方程式、境界条件を満足すると考える。

$$\left. \begin{aligned} u' &= \hat{u}(z) \exp[i(\alpha x + \gamma y - \alpha ct)] \\ \rho' &= \hat{\rho}(z) \exp[i(\alpha x + \gamma y - \alpha ct)] \\ p' &= \hat{p}(z) \exp[i(\alpha x + \gamma y - \alpha ct)] \\ z_s'(x, y, t) &= \hat{z}_s \exp[i(\alpha x + \gamma y - \alpha ct)] \end{aligned} \right\} \dots\dots (10)$$

ここに α, γ は実数の波数、 $c = c_r + ic_i$ は複素波速である。 $\alpha c_i > 0$ であれば、攪乱は指数的に増大し不安定になるといわれる。これらの各式を (5)~(9) に代入すると、次の常微分方程式系が得られる。

$$i\alpha \hat{u} + i\gamma \hat{v} + \frac{d\hat{w}}{dz} = 0 \dots\dots\dots (11)$$

$$i\alpha(\bar{u} - c)\hat{\rho} + \frac{d\hat{\rho}_0}{dz} \cdot \hat{w} = 0 \dots\dots\dots (12)$$

$$\begin{aligned} i\alpha(\bar{u} - c)\hat{u} + \frac{d\hat{u}}{dz} \cdot \hat{w} \\ = -i\alpha \hat{p} - \nu(\alpha^2 + \gamma^2)\hat{u} + \nu \frac{d^2 \hat{u}}{dz^2} \dots\dots\dots (13) \end{aligned}$$

$$i\alpha(\bar{u} - c)\hat{v} = -i\gamma \hat{p} - \nu(\alpha^2 + \gamma^2)\hat{v} + \nu \frac{d^2 \hat{v}}{dz^2} \dots\dots (14)$$

$$\begin{aligned} i\alpha(\bar{u} - c)\hat{w} &= -g\hat{\rho} - \frac{d\hat{p}}{dz} - \nu(\alpha^2 + \gamma^2)\hat{w} \\ &+ \nu \frac{d^2 \hat{w}}{dz^2} - T(\alpha^2 + \gamma^2)\hat{z}_s \delta(z - z_s) \dots\dots (15) \end{aligned}$$

物理的性質の異なる 2 流体間の界面の安定・不安定論では、流体は非圧縮性・非粘性であると考えてよい場合が多い。この場合には基礎方程式群において、粘性係数

のかかる項は省略され、式 (11)~(14) を $\hat{u}, \hat{v}, \hat{p}, \hat{w}$ について解き、式 (15) に代入すると \hat{w} についての次の方程式が得られる。

$$\begin{aligned} \alpha(\bar{u} - c) \left[\frac{d^2}{dz^2} - (\alpha^2 + \gamma^2) \right] \hat{w} - \alpha \frac{d^2 \bar{u}}{dz^2} \hat{w} \\ - \frac{g}{\rho_0} \frac{d\rho_0}{dz} \cdot \frac{\alpha^2 + \gamma^2}{\alpha(\bar{u} - c)} \hat{w} + \frac{1}{\rho_0} \frac{d\rho_0}{dz} \\ \cdot \left[\alpha(\bar{u} - c) \frac{d\bar{w}}{dz} - \alpha \frac{d\bar{u}}{dz} \hat{w} \right] + i \frac{(\alpha^2 + \gamma^2)^2}{\rho_0} \\ \cdot T \cdot \hat{z}_s \delta(z - z_s) = 0 \dots\dots\dots (16) \end{aligned}$$

一方、界面における境界条件は 2 つのものが考えられる。まず運動学的条件より

$$\hat{z}_s = \left[\frac{\hat{w}}{i\alpha(\bar{u} - c)} \right]_s = -i \left[\frac{\hat{w}}{\alpha(\bar{u} - c)} \right]_s$$

を式 (16) に代入し、界面上での極限操作により次式を得る。

$$\begin{aligned} d_s \left[\alpha \rho_0 (\bar{u} - c) \frac{d\hat{w}}{dz} - \alpha \rho_0 \frac{d\bar{u}}{dz} \hat{w} \right] \\ = -\frac{g(\alpha^2 + \gamma^2)}{\alpha} \left(\frac{\hat{w}}{\bar{u} - c} \right)_s \left[d_s \rho_0 - (\alpha^2 + \gamma^2) \frac{T}{g} \right] \dots\dots\dots (17) \end{aligned}$$

ここに

$$d_s f = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} (f_{z_s + \epsilon} - f_{z_s - \epsilon})$$

である。さらに、上下二層の流体について

$$\left| \frac{\hat{w}_u}{\alpha(\bar{u} - c)} \right|_s = \left| \frac{\hat{w}_l}{\alpha(\bar{u} - c)} \right|_s \dots\dots\dots (18)$$

である。添字の u および l はそれぞれ上・下層における値を表わしている。

(2) 流れ関数を用いたモデル

Squire¹⁾ は、均質流体においては三次元の不安定成分のおおののに対し、より急速に不安定へ発達する二次元の成分が存在することを示した。Squire の定理は、速度および密度が変化する場における非圧縮性流体の並行流れの場合にも Yih²⁾ により拡張され、二次元の問題が不安定限界の下限を与えることになる。二次元攪乱に対する安定論は、流れ関数を用いて統一的に記述できる。

$$\psi'(x, z, t) = \varphi(z) \exp[i\alpha(x - ct)] \dots\dots\dots (19)$$

を流れ関数とすると

$$u' = \frac{\partial \psi'}{\partial z}, \quad w' = -\frac{\partial \psi'}{\partial x} \dots\dots\dots (20)$$

であるから、式 (11) は積分でき

$$\hat{u} = \frac{d\varphi}{dz} = D\varphi, \quad \hat{w} = -i\alpha\varphi \dots\dots\dots (21)$$

となる。 $D = d/dz$ である。特性速度 U 、特性長さ L で次式に示す無次元化を行い基礎式を書き直す。

$$\left. \begin{aligned} U^* &= \frac{\bar{u}}{U}, \quad \varphi^* = \frac{\varphi}{LU}, \quad c^* = \frac{c}{U} = c_r^* + ic_i^* \\ z^* &= \frac{z}{L}, \quad \alpha^* = L\alpha, \quad D^* = d/dz^* \end{aligned} \right\} \dots\dots (22)$$

一様な粘性流体内においては表面張力項は無視でき、いま $\rho = \rho_0 = \text{一定}$ という場合の基礎式は二次元擾乱に対しては Orr-Sommerfeld の式であり、

$$(U^* - c^*)(D^{*2} - \alpha^{*2})\varphi^* - (D^{*2}U^*)\varphi^* = \frac{1}{i\alpha^*R_e}(D^{*2} - \alpha^{*2})^2\varphi^* \dots\dots\dots (23)$$

ここに、 $R_e = UL/\nu$ は Reynolds 数である。

非粘性流体で密度変化がある場合には、

$$(U^* - c^*)(D^{*2} - \alpha^{*2})\varphi^* - (D^{*2}U^*)\varphi^* + J \frac{\varphi^*}{U^* - c^*} (D^*\varphi^*)^2 - K[(U^* - c^*)D^{*2}\varphi^* - (D^{*2}U^*)\varphi^*] = 0 \dots\dots\dots (24)$$

ここに

$$J = -g \frac{\partial \rho_0}{\partial z} \left/ \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \right/ \rho_0 \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \right)^2, K = -Ld\rho_0/\rho_0 dz \dots\dots (25)$$

であり、 J は局所的 Richardson 数で浮力と慣性力との比を表わし、一方、 K は密度変化による慣性力の変化分と慣性力との比を表わしている。Froude 数 F は

$$F^2 = U^2/gL = K/J \dots\dots\dots (26)$$

で与えられる。一様な非粘性流体と考えられる場合には、式 (24) の最後の 2 項が無視でき、Rayleigh の安定条件式となる。

$$(U^* - c^*)(D^{*2} - \alpha^{*2})\varphi^* - (D^{*2}U^*)\varphi^* = 0 \dots\dots (27)$$

3. せん断流れの場における安定論

(1) 不安定性の分類

前章で示した各種の数学モデルを用いた安定論の問題は、対象とする問題に課せられた境界条件より決まる固有値問題である。従来より多くの理論的研究が行われているが、その詳細は成書^{3), 4), 5)}を参照されたい。ここでは個々の例について述べる前に不安定の生ずる物理的な機構について述べる。

われわれが関心をもつのは、その両側に速度差が存在する密度境界面の問題である。Benjamin⁶⁾ はこうした場合に生ずる不安定性を 3 つに分類した。第 1 は、平板に沿う境界層の層流不安定を論じる際の Tollmien-Schlichting 波と同様な粘性不安定によるものである。限界状態において発生した擾乱が成長するためには、壁面から critical layer へ運動量が輸送されることが必要である。Taylor⁷⁾ は、この運動量輸送は粘性の存在によってのみ可能であり、非粘性流体に対する Rayleigh の条件からは安定と判定される流れであっても、粘性流体では不安定な場合がありうることを示唆した。第 2 は、Miles が風波の発生理論で論じたような、混合しない不連続成層に関するせん断応力分布が支配的な場合である。この場合には、critical height において風速分布

の曲率が負であれば、運動量とエネルギーが平均流から供給され、さらに下の界面に輸送される。この形式においては、粘性は常に擾乱の発達を抑制するように作用する。第 3 の Kelvin-Helmholtz 型の不安定性は、上記の二つの形式の波が波速および波長ともに一致した場合に生ずるものである。これは境界面の上下運動と圧力変動の位相が一致し、これが重力の復原力を越えると生ずるもので、vortex sheet の不安定性で説明され、粘性の影響は無視できる。

Benjamin は密度差が小さい場合には、T-S 不安定は K-H 不安定に必要な速度差の $1/\sqrt{2}$ 倍で生ずることを示した。しかし、後者の不安定性の発達率ははるかに速く、界面不安定は非粘性の前提の下で取扱ってよいことを示唆した。

(2) Kelvin-Helmholtz 型の安定理論

非圧縮性・非粘性の二流体が不連続界面をなして独立に運動するとき、その界面の安定理論は非回転運動のものと解析されており⁸⁾、実験的にも検証されている。

図-1 に示す流れの条件や記号を用いると、上・下層境界壁で鉛直方向の速度成分は 0 となり、式 (16) より得られる関係に基づく安定条件は、 $\alpha^2 + r^2 = k^2$ とおき次のように示される。

$$(U_1 - U_2)^2 \leq \frac{[\rho_1 \coth(kh_1) - \rho_2 \coth(kh_2)][g(\rho_2 - \rho_1) + Tk^2]}{-k\rho_1\rho_2 \coth(kh_1) \coth(kh_2)} \dots\dots\dots (28)$$

この関係より、種々の波数 k 、上・下層の厚さ h_1, h_2 に対する安定性の吟味が行われるが、その大要は次のようである。

- ① 2 次元擾乱に対しては、流れと直角方向のものは界面は常に安定で、流れの方向のものが安定理論を決定づける。
- ② 式 (28) の右辺の最小値がすべての波数の擾乱に対する安定条件となる。
- ③ 波数に逆比例して安定度は増す。

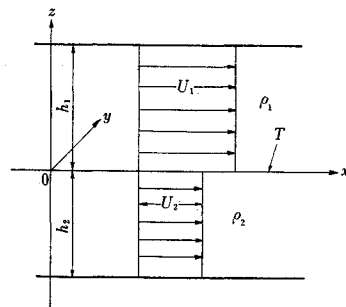
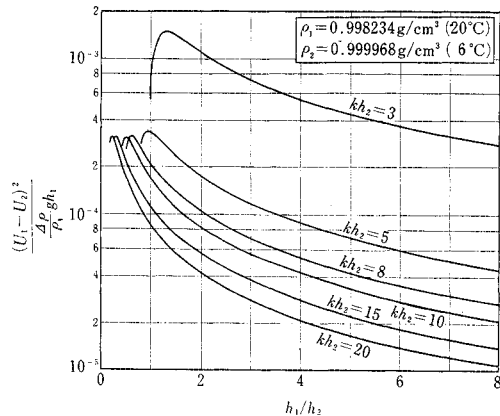


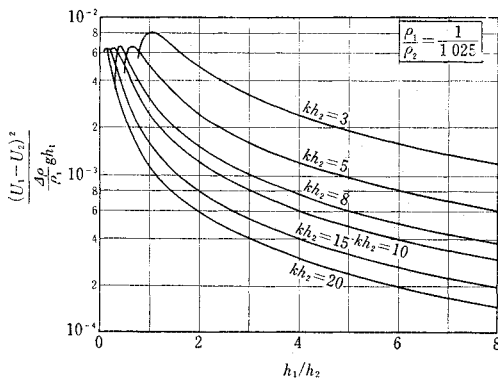
図-1 不連続界面の模式図

④ 上・下層の厚さを種々変化させると、図-2 に示すように安定に関する種々の条件が与えられる。

上述の議論は、線型理論に基づく結果であり、不安定性の発達初期の状態のみを記述するにとどまる点については、留意する必要がある。極限状態として、密度差のない渦層を考え、非線型効果を考慮した解析を Rosenhead⁹⁾ が行っており、微小な正弦波形が発達してゆく様子が図-3 に示されている (図中 U_s は上層および下層の流速の大きさに矢印で示されており、また λ は



(a)



(b)

図-2 Kelvin-Helmholtz 型不安定の中立曲線

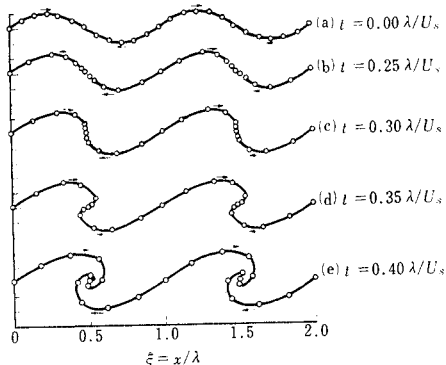


図-3 非線型効果による渦層の変形 (Rosenhead による)

渦波形の波長である)。

(3) 有限厚さの境界面の安定理論

Taylor¹⁰⁾ と Goldstein¹¹⁾ はこうした K-H 不安定性を、現実的な速度分布と密度分布に対して拡張した。Taylor は図-4 に示すような密度や速度の条件の下に安定性を理論的に取扱い、(a) の場合には図-5 の結果を得た。この場合には、どのような Richardson 数に対しても中間層の特定の波数の攪乱が不安定になる。しかし、波長が短くなるにしたがい再び安定な領域に入ることが、不連続界面の場合との大きな差である。(b) の場合には中立条件は

$$R_i = \frac{g \frac{\Delta \rho}{\rho_3} \frac{1}{h}}{\alpha^2} = \frac{1}{2} \dots \dots \dots (29)$$

になることを得た。

ここに R_i は中間層の平均 Richardson 数であり、 $\Delta \rho = \rho_2 - \rho_1$ で他の記号は図-4 に示されている。また、(c) のように速度と密度の分布が連続的に変化する場合には

$$R_i = - \frac{g}{\rho_0} \left(\frac{d\rho_0}{dz} \right) \left/ \left(\frac{dU_0}{dz} \right)^2 \right. = \frac{1}{4} \dots \dots \dots (30)$$

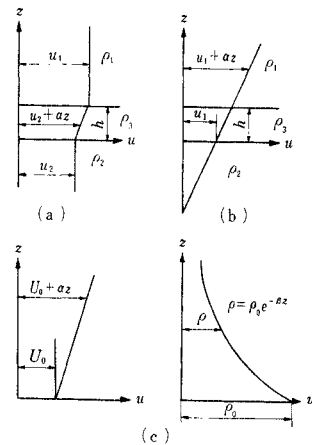
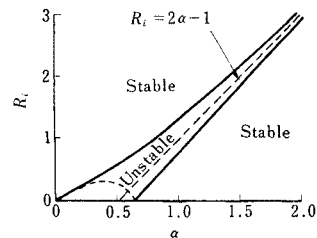


図-4 Taylor の解析における速度および密度の変化条件



$R_i = g(\Delta \rho / \rho) h / (\Delta U)^2$, $\alpha = 1/2 \cdot kh$ であり、 ρ は中間層の密度、 $\Delta \rho$, ΔU はそれぞれ中間層内での密度と速度の変化分である。

図-5 Taylor の case (a) における安定図

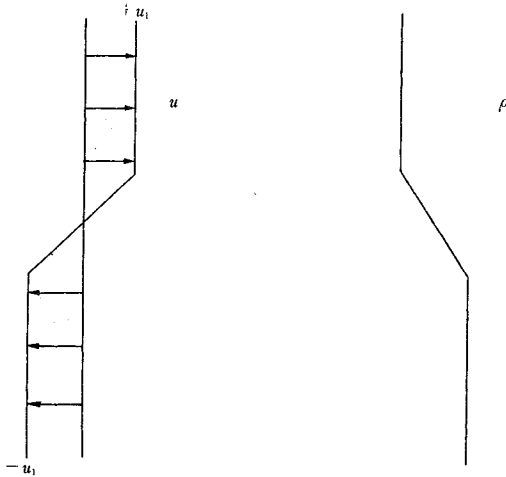


図-6 安定理論に用いられた速度および密度分布 (Goldstein の case 4)

を得た。

基礎となる数学モデルは、式 (16) を出発点とし、鉛直方向の二次元微小攪乱成分が深さとともに指数的に増加するという仮定を加え、各項のオーダーを比較して得られた近似式であり、得られた解のうち境界条件を満たすものから Richardson 数が求められる。この場合も粘性の影響は表面上は考慮されず、速度分布を通じて間接的に考慮されている。

Goldstein により近似的に計算された図-5 の場合は、その後 Miles and Howard⁽¹²⁾ により解決された。それによれば (この場合 R_i と J は同一である)、 $R_i \geq 1/4$ ではすべての波数の攪乱が安定であることが示された。彼らは不安定域における攪乱の成長率も算定している。密度および速度が滑らかに変化する場合については、主として、数値解による種々の研究がなされている^{(13), (14), (15)}。

安定論の基礎方程式からは、速度と密度の分布形を指定せずとも、安定限界について一般的な結果を得ることができるので、二、三の性質につき次に述べる⁵⁾。式 (24) において現実的には K は小さく R_i が 1 のオーダーであるので、出発点となる基礎式は

$$(U^* - c^*)(D^{*2} - \alpha^{*2})\varphi^* - (D^{*2}U^*)\varphi^* + R_i(D^*U^*)^2\varphi^*/(U^* - c^*) = 0 \quad \dots\dots\dots(31)$$

であり、外部境界としては固定壁を考えることにすればそこで $\varphi^* = 0$ である。不安定の場合 ($c_i > 0$) を考えるものとし、 $W \equiv U^* - c^*$ 、 $H \equiv W^{n-1}\varphi^*$ とおいて式 (31) を変形し、 H の共役複素関数を乗じて境界壁面の間で積分すると次式を得る。

$$\int_{h_1^*}^{h_2^*} W^{2(1-n)} \{ |D^*H|^2 + \alpha^{*2}|H|^2 \} + nW^{1-2n}(D^{*2}U^*)|H|^2 + W^{-2n}\{ n(1-n) \cdot (D^*U^*)^2 - R_i(D^*U^*)^2 \} |H|^2 dz^* = 0 \quad \dots\dots\dots(32)$$

ここに、 h_1^* 、 h_2^* は下部と上部の壁面位置の無次元表示である。これは Howard⁽¹⁶⁾ により得られた結果で、 n の値により統一的に以下の結果を得ることができる。

a) $n=1$ の場合

この場合には式 (32) の虚数部を考えることにより、考えている領域内で

$$D^{*2}U^* = 2(U^* - c_r^*)R_i(D^*U^*)^2 / \{ (U^* - c_r^*)^2 + c_i^{*2} \} \quad \dots\dots\dots(33)$$

が成立する。もし $D^{*2}U^* \equiv 0$ であれば、さらに

$$c_i^* \leq |W| \leq \max \{ (U^* - c_r^*)R_i(D^*U^*)^2 / |W| |D^{*2}U^*| \} \leq \max |2R_i(D^*U^*)^2 / D^{*2}U^*| \quad \dots\dots\dots(34)$$

である。式 (33)、(34) は Synge⁽¹⁷⁾ による結果であり、 $R_i=0$ の場合には Rayleigh の不安定性の必要条件、すなわち、領域内で $D^{*2}U^*=0$ の点が存在することを示している。

b) $n=0$ の場合

$H = \varphi^*/W$ であるから

$$\int_{h_1^*}^{h_2^*} (U^* - c^*)^2 (|D^*H|^2 + \alpha^{*2}|H|^2) - R_i(D^*U^*)^2 |H|^2 dz^* = 0 \quad \dots\dots\dots(35)$$

であり、この式より均質流体の場合と同じく半円定理が証明できる。領域内のすべての点で $R_i \geq 0$ であれば、均質流体に比べ条件を緩和する傾向に作用する。すなわち、 $c_i^* > 0$ 、 $R_i(z^*) \geq 0$ である場合は

$$\left\{ c_r^* - \frac{1}{2}(U_{\min}^* + U_{\max}^*) \right\}^2 + c_i^{*2} \leq \left\{ \frac{1}{2}(U_{\max}^* - U_{\min}^*) \right\}^2 \quad \dots\dots\dots(36)$$

が成立する。これは Howard⁽¹⁸⁾ により導かれた結果である。流体内のいずれかの領域で $R_i < 0$ の場合には、 $U_{\min}^* < c_r^* < U_{\max}^*$ となる。あらゆる点で $R_i(z^*) \leq 0$ の場合には、式 (35) には非特異型の中立モードは存在しない、という結果になる。しかしながら、流体内のどこかに $R_i(z^*) > 0$ という領域が存在し、かつ c_r^* が $[U_{\min}^*, U_{\max}^*]$ の領域外の値を取るなら非特異型の中立モードが存在しうる。内部波の場合には、こうした孤立した中立のモードが実際に生ずるのである。

c) $n=1/2$ の場合

この場合には式 (32) の虚数部は次式で表わされる。

$$-c_i^* \int_{h_1^*}^{h_2^*} |D^*H|^2 + \alpha^{*2}|H|^2 + |W|^{-2} \cdot \left\{ R_i - \frac{1}{4} \right\} (D^*U^*)^2 |H|^2 dz^* = 0 \quad \dots\dots\dots(37)$$

ゆえに $c_i^* > 0$ の場合には次式を得る。

$$0 > - \int_{h_1^*}^{h_2^*} |D^*H|^2 dz^* = \int_{h_1^*}^{h_2^*} \left[\alpha^{*2} + \left\{ R_i - \frac{1}{4} \right\} (D^*U^*)^2 / |W|^2 \right] |H|^2 dz^* \quad \dots\dots\dots(38)$$

したがって、不安定であれば流体内のいずれかの点で $R_i(z^*) < 1/4$ のはずである。これは至るところで次式が成立しなければならない、という Miles¹⁸⁾ の安定十分条件を与えるものである。

$$R_i - 1/4 \geq 0 \quad \dots\dots\dots (39)$$

日本における最近の研究では、浜田の一連の論文がある。第1論文¹⁹⁾においては、粘性減衰までを含めて論じられたが、一般流のある場合の解とか、安定限界の波数を求めるまでには至らなかった。しかし、第2論文²⁰⁾においては K-H 不安定を詳細に調べ、一般流より摂動流への力学的エネルギーの輸送機構は、界面の上側でこれに沿って波の進行方向に働く Reynolds 応力と、界面の下側でこれに沿って波の進行方向と逆向きに働く Reynolds 応力によってなされる仕事となり、それが界面波エネルギーの増幅率と一致するし、また界面動揺のなす仕事とも解される、と述べている。また、界面波の碎波についても論じ、有限振幅波の表示を得ている。第3論文²¹⁾、第4論文²²⁾では層流線型安定理論が適用され、前者では Heisenberg の解法、後者では三層モデルを Miles の手法によって取扱った。岩崎・日下²³⁾はさらに実験値と対比できる流速分布のモデルによって浜田の第3論文の解法を精密化し、固有値的な解法を採用して計算した。浜田や岩崎・日下の結果によれば K-H 問題では増幅率および位相速度ともに実験とかけ離れた値を示し、ことに界面流速、界面付近の速度分布が重要な影響を与えることが示されている。

(4) 安定限界を示すパラメーター

境界面に関する問題に対して、粘性の影響までを考慮した解析を行うことは非常に難しい。乱れの発生、あるいは乱流への遷移については、さらに成層流体の界面付近の乱れについて詳細な知識を必要とするためである。

そこでここでは安定限界を示すパラメーターについて述べることにする。まず、周知の Keulegan 数は

$$\theta = \left(\nu g \frac{\Delta \rho}{\rho} \right)^{1/3} / U \quad \dots\dots\dots (40)$$

である。ここに U は下層静止の場合の上層の平均流速、 ν は下層流体の動粘性係数、 $\Delta \rho$ は上・下層の密度差である²⁴⁾。実験的に得られた安定限界は、

$$\left. \begin{array}{l} R_e < 450 \text{ では層流で } \theta_c = 0.127 \\ R_e > 450 \text{ では乱流で } \theta_c = 0.178 \end{array} \right\} \quad \dots\dots\dots (41)$$

である。ここに $R_e = UR/\nu$ でいずれも上層の値、かつ R は径深である。

Turner²⁵⁾ は、この Keulegan 数に新しい解釈を施した。2層接触点より x の距離までに生ずる境界層厚さを、

$\delta = \sqrt{\frac{\nu x}{U}}$ によって表わし、これによって

$$\theta^{-3} = \frac{U^2}{\frac{\Delta \rho}{\rho} g \delta} \left(\frac{Ux}{\nu} \right)^{1/2} \quad \dots\dots\dots (42)$$

と表わした。 $U^2 / \frac{\Delta \rho}{\rho} g \delta$ は平均 Richardson 数の逆数であり、安定限界はせん断流れの境界層厚さに基づく Richardson 数が決定しているといえる。そして式 (42) の形に書いた場合には粘性は支配的な役割を果たすのではなく、付加的に安定限界に関与すると考えられる。

玉井²⁶⁾は、式 (40) の形、すなわち $\theta = (R_i/R_e)^{1/3}$ を基礎に考えると、Keulegan の与えた安定限界値 θ_c から算定される限界 Richardson 数が、通常実験室で見られる $R_e = 5000$ 程度に対し不合理に大きな約 30 になり、 R_e 数への依存度が大きすぎることを指摘した。式 (42) を用いて、この点を検討してみよう。Ippen and Harleman²⁷⁾ の文献に掲げられている Keulegan の実験値で最大の R_e 数は約 10000 でそれに対する θ_c は約 0.2 である (Keulegan 自身の論文には $R_e \sim 3000$ までしか示されていない)。鉛直スケールを用いた R_e 数と、水平スケールを用いた R_e 数がほぼ等しいと考えると、限界の平均 Richardson 数は

$$R_{i,c} = \theta_c^3 \left(\frac{Ux}{\nu} \right)^{1/2} = 0.8$$

となり、式 (42) は妥当な形式と考えられる。さらに、Turner は、乱流の場合の方が限界の θ が大きいことは、この場合に境界付近での密度勾配が大きくなるためであると考え、この点も非粘性流体における解析結果と一致することを指摘している。したがって、実験室で通常用いられる程度の小さな R_e 数に対しては、Keulegan の立論ほどには粘性の影響は現われず、非粘性流体に対する解析は有力な目安となり得ることを示している。

しかしながら、Keulegan が述べているように不安定開始点を与える θ_c が一定であると、特に乱流域の場合 R_e 数によって限界 R_i 数が変わることになり、境界状態の実験的判定が非常に難しいことを示唆する。Ippen and Harleman²⁷⁾ は、層流域については

$$\theta_c^3 = \frac{1}{R_e} \quad (R_e < 450) \quad \dots\dots\dots (43)$$

とした。

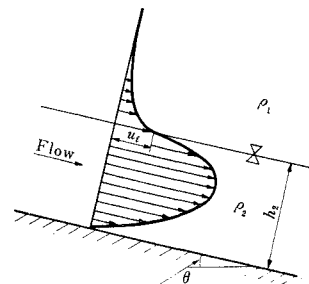


図-7 下層流モデル

図-7 のような斜面勾配 θ 上の下層流れでは Ippen and Harleman による無次元数が与えられているが、これは次の形に表わされる (H は原論文の J の逆数; 88 ページ式 (31) 参照)。

$$H = R_e \cdot R_i \tan \theta = R_e \sin \theta / F_i^2 \dots\dots\dots (44)$$

ここに

$$F_i = \bar{u} \left/ \left(\frac{d\rho}{\rho} gh \right)^{1/2} \right., \quad R_i = \frac{d\rho}{\rho} gh \cos \theta / \bar{u}^2 \dots\dots (45)$$

で、 \bar{u} は下層平均流速、 F_i は内部フルード数であり、平均 Richardson 数は勾配の影響を明示するため掲げられている。88 ページに示すように、 u_i/\bar{u} が Lock²⁸⁾ が理論的に示した値 (0.59) に近く、ほぼ一定であるならば H は一定値となり、 R_e 数と F_i 数の両者が現象に関係するように見えても、もし勾配が決まれば式 (44) の関係をとおして、そのうちの一つのみが独立であることになる。

さらに Turner は、ある長さのスケールが基本的に重要で、かつ密度差により速度場が決定されている場合、すなわち、境界の影響を受ける現象では支配パラメーターとして Grashof 数

$$G_r = \frac{d\rho}{\rho} gh^3 / \nu^2 = R_e^2 / F_i^2 \dots\dots\dots (46)$$

を選ぶべきであると主張している。これは長さのスケール h を含み、速度差を除いている形であって、斜面に沿った重力の作用により流れ下る層流には G_r 数を用いるのが合理的であろう。一方、境界面を隔てて速度差があり、外部境界の影響がない場合には Keulegan 数 (θ または $\psi = \theta^{-3} = R_e (F_i)^2$) が適したパラメーターであろう。

4. 界面の安定条件に関する実験的研究

界面の安定・不安定に関する実験はいまだ模索の段階にあるといえる。それは不安定に遷移する初期状態の確認が困難なのと、関連する要素の制御が高度の技術を必要とするためである。すでに前節に限界条件を判定しようとするいくつかの研究をあげたが、ここには安定限界を内部フルード数で表わした諸例をまとめて表-1 に示

表-1 実験による安定限界

研究者	安定限界	年代	備考
Kelvin, Helmholtz 等	$F_i \leq 1$	1800年代	下層が動く、上層深は大
Harleman ²⁷⁾ 等	$F_i \leq 1$		
椎 貝 ²⁹⁾	$F_i \leq 0.4$		上層が動く、連行係数の概念あり
和田・片野 ³⁰⁾	$F_i \leq 0.8$		連行係数によって定義
日 野 ³¹⁾	$F_i \leq 0.4 \sim 0.6$		回転流、 $h_1/h_2 = 5$ 上層のみ運動
Thorpe ³²⁾	$F_i \leq 1$		非定常流、上・下層とも運動
岩 崎 ²³⁾	$F_i \leq 0.33$		上層のみ動く $h_1/h_2 = 1$

す。しかし、初期不安定と、それに対応する攪乱については、さらに粘性を考慮して Keulegan 数で表わした岸³³⁾らの例もあるようになお今後の検討を必要とする。

こうしたなかにあって、実験条件を注意深く制御して行われた実験の内容に触れておくのは意味があることといえよう。Scotti and Corcos³⁴⁾ (Turner の p. 102 参照) は、壁面での熱の授受を遮断できるよう設計した風洞内に、熱による二層流を作り、風洞入口で密度流的に超波速の条件をつくり、すべての攪乱が下流に伝播するようにして実験を行った。縮流部での圧力勾配により軽い流体の方がより加速されるので、界面をはさんで速度差がわずかながら生じ、下流側でもこの状態は一定に保たれる。界面は熱と温度の拡散により次第に厚みを増すが、Richardson 数の分布は相似形を保つことがわかった。界面の中央部で細い針金を決められた周波数で振動させて微小攪乱を生じさせ、下流方向への振幅の変化を測定し、時間的な攪乱の増幅率を求めた。 $R_{imin} < 1/4$ では R_{imin} と波数に依存する増幅率で攪乱は発達し、 $R_i > 1/4$ の場合には、攪乱は R_i とは無関係の割合で減衰した。 $R_{imin} = 0.07$ の場合の増幅率の測定値と、同一の条件に対し Hazel¹⁵⁾ が非粘性解に基づいて計算した結果とを比較するとよく一致することが確かめられた。

Thorpe は長方形断面をもつ閉管路に二層系をつくり、管を水平から急激に傾けることによってせん断流れを発生させ、混合しない流体³⁵⁾と混合する流体を用いた場合³²⁾の両者の実験を行った。加速流の流速分布は密度分布と密接な関連があり、粘性の影響までを考慮し理論的に求められる。管の端部で生じた段波が中央部に達するまでは流れは平行流であり、理論解析の前提を満足している。ここでは食塩水が下層で淡水が上層に用いられた混合する流体の場合につき触れる³²⁾。

最初、明瞭に分離した界面を作り、一定時間放置する。この間に分子拡散によって生じた界面付近の密度勾配は、算定可能である。管を水平から急激にある角度だけ傾けると、数秒後に規則的な波の列が急に界面に現われる。二層の層厚が等しい場合にはこの波は停止しており、発達する。一秒もすると界面波は、図-3 に示されている Rosenhead⁹⁾ によって得られた渦層の形状に似た巻き波の形状を呈する。巻き波形状に達した界面波はその後完全に碎波し、境界面がひとつの層にまで厚みを増すことが観測された。この実験では、渦波形の波長 λ および界面形が出現する際の上・下層の速度差 Δu は、非粘性の加速流に対する理論解析と一致することが確かめられた。また、測定された攪乱の増幅率も、Taylor や Goldstein と同様な解析を、分布形の測定値を用いて行えばよく予測できることを示し、こうした実験の範囲内では非粘性流体の K-H 不安定性で現象がよく説明

された。 R_e 数は、最大速度差とせん断流領域の運動量厚さに基づいて定義され、100 程度までが観測された。彼の不安定の定義は界面波の発生をもってしており、表一1 においても安定限界は K-H 不安定と同一の意味である。

最後に界面が不安定となって生ずる内部波や乱れについては関連するところも多いが、第2編にゆずることとする。

参 考 文 献

- 1) Squire, H.B. : On the stability of the three-dimensional disturbances of viscous flow between parallel walls, *Proc. Roy. Soc. A* **142**, pp. 621-628, 1933.
- 2) Yih, C-S. : Stability of two-dimensional parallel flows for three-dimensional disturbances, *Quart. Appl. Math.* **12**, pp. 434-435, 1955.
- 3) Chandrasekhar, S. : *Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability*, Oxford : Clarendon Press, 1961.
- 4) Yih, C-S. : *Dynamics of Nonhomogeneous Fluids*, Macmillan, 1965.
- 5) Drazin, P.G. and L.N. Howard : Hydrodynamic stability of parallel flow of inviscid fluid, *Advances in Appl. Mech.* **9**, pp. 1-89, 1966.
- 6) Benjamin, T.B. : The threefold classification of unstable disturbances in flexible surfaces bounding inviscid flows, *J. Fluid Mech.* **16**, pp. 436-450, 1963.
- 7) Taylor, G.I. : Eddy motion in the atmosphere, *Phil. Trans. Roy. Soc. A* **215**, pp. 1-26, 1915.
- 8) Lamb, H. : *Hydrodynamics*, 6th edition, Cambridge, pp. 373-374, 1963.
- 9) Rosenhead, L. : The formation of vortices from a surface of discontinuity, *Proc. Roy. Soc. A* **134**, pp. 170-192, 1931.
- 10) Taylor, G.I. : Effect of variation of density on the stability of superposed streams of fluid, *Proc. Roy. Soc. A* **132**, pp. 499-523, 1931.
- 11) Goldstein, S. : On the stability of superposed streams of fluids of different densities, *Proc. Roy. Soc. A* **132**, pp. 524-548, 1931.
- 12) Miles, J.W. and L.N. Howard : Note on a heterogeneous shear flow, *J. Fluid Mech.* **20**, pp. 331-336, 1964.
- 13) Drazin, P.G. : The stability of a shearlayer in an unbounded heterogeneous inviscid fluid, *J. Fluid Mech.* **4**, pp. 214-224, 1958.
- 14) Drazin, P.G. and L.N. Howard : Stability in a continuously stratified fluid, *J. Eng'ng Mech. Div., Proc. ASCE* **87**, EM 6, pp. 101-116, 1961.
- 15) Hazel, P. : Numerical studies of the stability of inviscid stratified shear flows, *J. Fluid Mech.* **51**, pp. 39-61, 1972.
- 16) Howard, L.N. : Note on a paper of John W. Miles, *J. Fluid Mech.* **10**, pp. 509-512, 1961.
- 17) Synge, J.L. : The stability of heterogeneous liquid, *Trans. Roy. Soc. Canada* **27**, No. 1, pp. 1-18, 1933.
- 18) Miles, J.W. : On the stability of heterogeneous shear flow, *J. Fluid Mech.* **10**, pp. 496-508, 1961.
- 19) 浜田徳一 : 密度流の問題 (1), 第13回海岸工学講演会講演集, pp. 259-262, 1966.
- 20) 浜田徳一 : 密度流の問題 (2), 第14回海講講演集, pp. 214-221, 1967.
- 21) 浜田徳一 : 密度流の問題 (3), 第15回海講講演集, pp. 180-184, 1968.
- 22) 浜田徳一 : 密度流の問題 (4), 第16回海講講演集, pp. 153-156, 1969.
- 23) 岩崎敏夫・日下一理 : 湍流二層流界面における内部波の発達に関する研究, 土木学会第26回年次学術講演会講演集第II部, pp. 129-132, 1971.
- 24) Keulegan, G.H. : Interfacial instability and mixing in stratified flows, *J. of Research, Nat. Bureau of Standards*, **43**, pp. 487-500, 1949.
- 25) Turner, J.S. : *Buoyancy Effects in Fluids*, Cambridge Univ. Press, pp. 107-112, 1973.
- 26) Tamai, N. : Unified view of diffusion and dispersion in coastline waters, *J. Faculty of Eng., Univ. of Tokyo* **31**, No. 4, pp. 614-615, 1972.
- 27) Ippen, A.T. and D.R.F. Harleman : Steady-state characteristics of subsurface flow, *Nat. Bureau of Stands., Circulation No. 521*, pp. 79-93, 1951.
- 28) Lock, R.C. : The velocity distribution in the laminar boundary layer between parallel streams, *Quart. J. Mech. and Appl. Math.* **4**, pp. 42-63, 1951.
- 29) 嶋 祐之・椎貝博美 : 躍層の安定に関する研究, 第16回年講講演集, 土木学会, pp. 21-22, 1961.
- 30) 和田 明・片野尚明 : 冷却水の表層放出に伴う下層水加入現象, 土木学会第23回年講講演集, pp. 275-278, 1968.
- 31) 日野幹雄・谷 順一 : 二層密度流に関する一実験, 土木学会第24回年講講演集, pp. 183-184, 1969.
- 32) Thorpe, S.A. : Experiments on the instability of stratified shear flows; miscible fluids, *J. Fluid Mech.* **46**, pp. 299-319, 1971.
- 32) 岸 力・加藤正進・小野正二 : 吹送流の乱流速度分布と二層流の混合に関する研究, 土木学会第22回年講講演集, II-187, 1967.
- 34) Scotti, R.S. and G.M. Corcos : Measurements on the growth of small disturbances in a stratified shear layer, *Radio Science*, **4**, pp. 1309-1313, 1969.
- 35) Thorpe, S.A. : Experiments on the instability of stratified shear flows; immiscible fluids, *J. Fluid Mech.* **39**, pp. 25-48, 1969.

第2編 界面抵抗

1. はしがき

2層流の定常不等流の1次元運動方程式は Schijf と Schönfeld¹⁾ によって、水深方向に平均化した流速・密度の量を用いて与えられ、塩水くさび、内部ジャンプを含めて従来ひろく界面の形状を求めるのに実用的とされているのであるが²⁾、その場合、界面抵抗の大きさを正しく評価することが必要である。第2分科会ではこの点について、従来の研究結果を引用しつつ再検討を行い、今後の研究の進展を期待することを目的としてこの編をまとめた。

まず界面抵抗を検討する立場として次の2種類を設定した。

(1) 実用的立場

(2) 物理的立場

弱混合型の感潮域における塩水くさびなど、2層が比較的明瞭な境界面を形成しつつ流れる場合の界面形状は、しばしば技術上の問題となる。その場合内部機構に関する詳細かつ精密な検討はともかく、実用上十分な精度を有する界面抵抗の評価の方法を得ようとする立場を実用的立場と称することにする。

定常2層流の基本方程式として次の諸式を用いる(図-1)。

$$-i_0 + \frac{dh_1}{dx} + \frac{dh_2}{dx} + \frac{u_1}{g} \frac{du_1}{dx} + \frac{\tau_i}{\rho_1 g h_1} = 0 \dots (1)$$

$$-i_0 + (1-\epsilon) \frac{dh_1}{dx} + \frac{dh_2}{dx} + \frac{u_2}{g} \frac{du_2}{dx} + \frac{\tau_b - \tau_i}{\rho_2 g h_2} = 0 \dots (2)$$

$$\tau_i = \rho_1 \frac{f_i}{2} (u_1 - u_2) |u_1 - u_2| \dots (3)$$

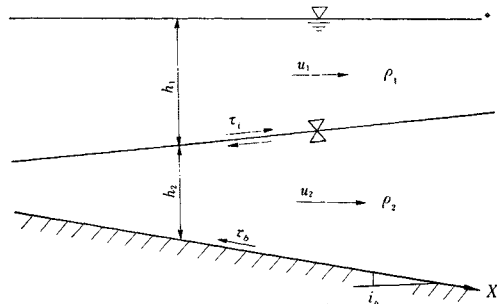


図-1 河口密度流

$$\tau_b = \rho_2 \frac{f_b}{2} u_2 |u_2| \dots (4)$$

$$\frac{d}{dx} (u_1 h_1) = 0 \dots (5)$$

$$\frac{d}{dx} (u_2 h_2) = 0 \dots (6)$$

$$\epsilon = \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_2} \approx \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_1} \dots (7)$$

ここに、 i_0 は底勾配、 h , u , ρ はそれぞれ各層の深さ、平均流速、密度、添字 1, 2 は上層、下層に対するものであり、 τ , f はせん断抵抗と抵抗係数で、添字 i , b は界面および底面に対するものである。実用的立場における抵抗係数とは、このように定義された場合の界面抵抗係数 f_i をさす。

物理的立場とは、レイノルズ応力をも含めた局所せん断応力を界面において論じたり、あるいは運動量交換率を評価したりするものとする。この中でも現象のモデル化が実在とかけ離れてしまっても、界面抵抗の本質に迫るものとの純理論的立場を貫こうとするものと、実験あるいは実測に裏づけられることを常に期待した実証的立場とがある。

以下にはこれら相互の立場を区別しつつ記述することとする。

2. 実用的立場における界面抵抗

1949 年 Keulegan¹⁹⁾ は 10 年にわたる 2 成層流の不安定と混合に関する研究結果を発表し、界面に生ずる種々の現象を説明した。この中で彼は界面波の粘性損失を上層流体のみについて計算し、波長 2 cm、振幅 0.2 cm、動粘性係数 $\nu = 0.01 \text{ cm}^2/\text{sec}$ 、不安定限界相対速度差 $U_c = 10 \text{ cm}$ より $f_i = 0.0010$ をえている (なお上層厚は 14.25 cm、水路幅は 11.3 cm であった)。

この頃、後述する層流の場合の抵抗係数の成果を取入れて、Ippen と Harleman (1951)²⁾ が上層静止、下層流動の場合の平均抵抗係数を求めているが、塩水くさびの場合は上層流動であり、かつ乱流と考えられるので利用されていない。

大坪・福島 (1959)³⁾ は、石狩川河口について塩水くさびの観測を行い、界面抵抗を求めた。すなわち式 (1) より式 (2) を差引き、 $u_2 = 0$ としてうる次の式

$$\epsilon g \frac{dh_1}{dx} + u_1 \frac{du_1}{dx} + \frac{\rho_1}{2} f_i u_1^2 \left(\frac{1}{\rho_1 h_1} + \frac{1}{\rho_2 h_2} \right) = 0 \dots (8)$$

を若干の仮定により修正し、水深、密度、流速の実測値より f_i の値を求め、その結果が場所によって異なった値を示すので、塩水くさびの形状を求めるのは困難と述べている。

いま式 (1) に式 (3) を代入し, f_i について解くと,

$$f_i = -\frac{gh_1}{\Delta u|\Delta u|} \left\{ -i_0 + \frac{dH}{dx} + \frac{d}{dx} \left(\frac{u_1^2}{2g} \right) \right\} \quad \dots\dots\dots (9)$$

同様に式 (2) より,

$$f_i = \frac{\rho_2}{\rho_1} \cdot \frac{gh_2}{\Delta u|\Delta u|} \left\{ -i_0 + \frac{dH}{dx} - \frac{dh_1}{dx} + \frac{d}{dx} \left(\frac{u_2^2}{2g} \right) + f_b \frac{u_2|u_2|}{gh_2} \right\} \quad \dots\dots\dots (10)$$

ここに, $H=h_1+h_2$, $\Delta u=u_1-u_2$ である。

さらに式 (9) に $\frac{\Delta u|\Delta u|}{gh_1}$, 式 (10) に $\frac{\rho_1}{\rho_2} \cdot \frac{\Delta u|\Delta u|}{gh_2}$ をかけて加えることにより,

$$f_i = -\frac{\frac{dh_1}{dx} + \frac{d}{dx} \left(\frac{u_1^2}{2g\varepsilon} \right) - \frac{d}{dx} \left(\frac{u_2^2}{2g\varepsilon} \right) - f_b \frac{u_2|u_2|}{\varepsilon gh_2}}{\frac{\Delta u|\Delta u|}{\varepsilon gh_1} \left(1 + \frac{\rho_1}{\rho_2} \cdot \frac{h_1}{h_2} \right)} \quad \dots\dots\dots (11)$$

いま, 2層間で流体の混合がないものとし, 各層ごとに成立する連続方程式 $u_1 h_1 = \text{const.}$, $u_2 h_2 = \text{const.}$ を用いると, 式 (11) は

$$f_i = -\frac{\left(1 - \frac{u_1^2}{\varepsilon gh_1} \right) \frac{dh_1}{dx} + \frac{u_2^2}{\varepsilon gh_2} \frac{dh_2}{dx} - f_b \frac{u_2|u_2|}{\varepsilon gh_2}}{\frac{\Delta u|\Delta u|}{\varepsilon gh_1} \left(1 + \frac{\rho_1}{\rho_2} \cdot \frac{h_1}{h_2} \right)} \quad \dots\dots\dots (12)$$

浜田・堀口 (1960)⁴⁾ は式 (12) で $u_2=0$, $\rho_1 \neq \rho_2$, また $h_1+h_2=H=\text{一定}$ として

$$f_i = -\frac{\left(1 - \frac{u_1^2}{\varepsilon gh_1} \right)}{\frac{u_1^2}{\varepsilon gh_1} \cdot \frac{H}{H-h_1}} \cdot \frac{dh_1}{dx} \quad \dots\dots\dots (13)$$

とし, 幅 0.6 m の実験水路で塩水くさびの実験を行い, f_i はレイノルズ数 $R_e = u_1 h_1 / \nu_1$, 内部フルード数 $F_i' = u_1 / \sqrt{\varepsilon gh_1}$ の増大につれていずれも減少するが, 塩水くさびの勾配が増すほど増大するという結果をえた。

以後のわが国での界面抵抗係数の計算はほとんど式 (12) または式 (13) によっている。

岩崎 (1962)⁵⁾ は下層静止で上層流動の 2 次元ジェットについて, 幅 15 cm の水路で式 (13) を用いてえた結果より, 次の実験式

$$f_i = 7.880 \psi^{-0.8536} \quad \dots\dots\dots (14)$$

$$\psi = R_e \cdot (F_i')^2 \quad \dots\dots\dots (15)$$

(ただし R_e , F_i' は式 (13) の下で定義したレイノルズ数および内部フルード数) を提案し, 大坪・福島や浜田・堀口の測定値もあわせて示しうとした。

式 (14) は f_i と ψ 値との間に関数関係が存在することを始めて提案したもので, これはその後の実験・実測によっていずれも認められた。しかし係数およびべき数については相互に相違し, さらに実験・実測値の著し

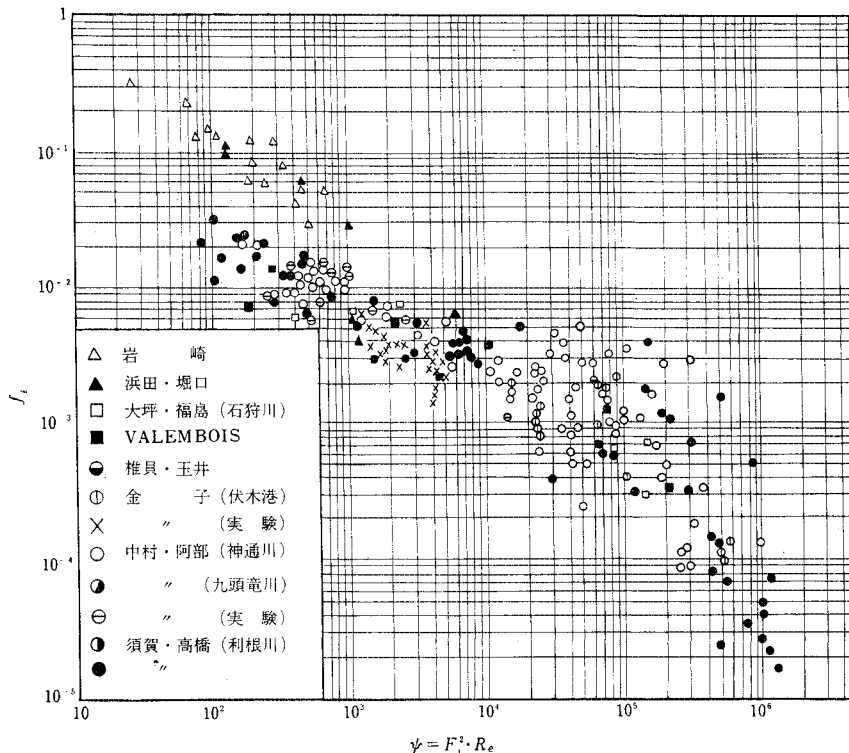


図-2 界面抵抗係数と ψ 値との関係

表一 界面抵抗係数に関する既往の研究例

著者	発表年	a	n	流況	記事
岩崎	1962 ⁵⁾ 1963 ⁶⁾	7.880	0.8356	ジェット 幅 15 cm	実験
椎貝	1965 ⁷⁾	12.0	1.0	塩水くさび $10^2 < \psi < 10^3$	実験 Valembois ¹¹⁾ も利用
金子	1966 ⁸⁾	0.2	0.5	塩水くさび $10^2 < \psi < 10^5$	実験実測 伏木港
中村・ 稲松	1966 ⁹⁾	4.228	0.7117	塩水くさび $10^4 < \psi < 10^6$	実測 神通川
中村	1970 ¹⁰⁾	0.136	0.434	塩水くさび $10^4 < \psi < 10^6$	実測 九頭竜川
須賀・ 高橋	1971 ¹¹⁾	0.35	0.5	塩水くさび $10^2 < \psi < 10^5$	実験
		1.29	2/3	塩水くさび $3 \times 10^4 < \psi$	実測 利根川
		0.13	0.415	塩水くさび $10^2 < \psi < 10^4$	塩水くさび長より算出

い散乱が報告されるにおよんで、十分な検討が要望されるにいたっている。

いま式 (16) のように f_i を表わして、定数 a およびべき数 n についてその後の研究結果を示すと、表一のようになる。

図-2 にデータを示す。

$$f_i = a\psi^{-n} \dots\dots\dots (16)$$

3. 実用的界面抵抗係数の問題点

界面にせん断力が作用するならば、下層でも流速分布を生じるはずであり、岩崎は界面せん断力による流速分布形を求めている¹²⁾。したがって $u_2=0$ の場合には、式 (10) を用いて得た式 (12) で f_i を求めることに疑問が生じる。事実式 (9), (10), (11) の示す抵抗係数の値を異なったものと考え、添字 1, 2 および無添字で示すと、

$$f_i = \frac{1}{1+r} f_{i1} + \frac{r}{1+r} f_{i2}, \quad r = \frac{\rho_1 h_1}{\rho_2 h_2} \dots\dots\dots (17)$$

しかるに $u_2=0$, $-i_0 + \frac{dH}{dx} = 0$ のとき

$$f_{i1} = \frac{dh_1}{dx} \dots\dots\dots (17 \cdot a)$$

$$f_{i2} = -\frac{1}{r(F_i')^2} \frac{dh_1}{dx} \dots\dots\dots (17 \cdot b)$$

これを式 (17) に入れたと式 (13) に相当する次の式

$$f_i = \frac{1}{1+r} \left(1 - \frac{1}{(F_i')^2} \right) \frac{dh_1}{dx} \dots\dots\dots (18)$$

をうる。通常の塩水くさびの実験では上層流動で下層静止であるから、 $u_2=0$ はいかにも合理的な仮定のようなであるが、界面せん断力が作用する場合 $dh_1/dx < 0$ で式 (17・a) より f_{i1} は常に負の値を示す。これを補うものとして式 (17・b) があり、これによって式 (18) は一見合理的な f_i の値を与えてきたものである。

ψ 値の等しい水路について f_{i2} と f_{i1} との比は (17・a), (17・b) より、

$$\left| \frac{f_{i2}}{f_{i1}} \right| = \frac{1}{r(F_i')^2} = \frac{R_e}{r \cdot \psi} \dots\dots\dots (19)$$

すなわち f_{i2} と f_{i1} の f_i に対する貢献度は $R_e = u_1 h_1 / \nu_1$ に比例する (r は式 (17) によって、ウェイトとして相殺される)。一般に水路が大きくなるほどレイノルズ数が大になるから f_{i2} の効果が大きくなることが示される。

その効果はみかけ上式 (18) より推察される。同じ F_i' および dh_1/dx の値を観測した場合、 r が小さいほど f_i の値は大きくなる。したがってあくまでも式 (13) によって f_i を評価しようとする場合には r の値によるパラメータ表示する必要がある。表一においてジェット

と塩水くさびについて実験値が著しく異なるのはそのためである。

椎貝, Valembois¹⁴⁾・Lofquist¹³⁾, 金子, 浜田, 大坪らの実験, 実測値をよく表わすのは金子の係数で、通常の塩水くさびの形状を求めるのに用いてよい。同じく須賀が塩水くさび長より算出した $a=0.13$, $n=0.415$ は $10^2 < \psi < 10^4$ の範囲において金子の式とほとんど変らない。

側壁粗度の効果は 10~20% 程度である。

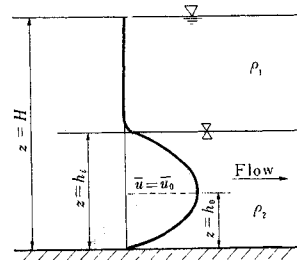


図-3 Lofquist のモデル

界面抵抗の算出は上述のような問題点があるが、Lofquist (1960)¹³⁾ は下層流動の場合に次のような方法を用いた。すなわち $\partial \bar{u} / \partial z$ が 0 になる高さを h_0 、界面の高さを h_i として

$$\tau_i = \int_{h_i}^{h_0} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\tau_w}{b} + \rho \frac{D\bar{u}}{Dt} \right) dz \dots\dots\dots (20)$$

ここに、 τ_w は側壁のせん断抵抗、 b は水路半幅であり、かつ $\rho \frac{D\bar{u}}{Dt}$ は $\frac{1}{2b} \int_{-b}^b \rho \frac{Du}{Dt} dy$ すなわち横幅方向の加速度平均値である。また、

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \rho_1 g \frac{\partial H}{\partial x} + g \int_z^H \frac{\partial \rho}{\partial x} dz \approx g \frac{\partial h}{\partial x} (\rho - \rho_1) \dots\dots (21)$$

$$\tau_w = 5.11 \times 10^{-3} \rho \bar{u}^2 \cdot \left(\frac{b \bar{u}_0}{\nu} \times 10^{-3} \right)^{-1/4} \dots\dots\dots (22)$$

$$\frac{D\bar{u}}{Dt} = -\frac{\bar{u}^2}{h} \cdot \frac{\partial h}{\partial x} - W_e \cdot \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \dots\dots\dots (23)$$

ここに、 \bar{u}_0 は横方向平均流速 \bar{u} の最大値、 W_e は界面を通しての淡水の混入速度で、 $W_e = -\frac{\partial}{\partial t} (H-h)$ とな

る。したがって図-3に示すような速度分布と、密度分布および界面勾配とその変化量が測定されると、式(19)によって界面抵抗を求めることができる。

本節の始めに述べたような問題点を考慮すると界面抵抗の大きさの決定には、Lofquistの方法に準じた取扱いが精密な評価をすることができるという点で望ましい方法と考えられる。

4. 界面抵抗の物理的意義

流体内のせん断抵抗は局所的に粘性抵抗またはレイノルズ応力としてエネルギーを消散させるものであるから、物理的に考えると、式(4)の表現は検討を要する。2層の界面は固体面でないから界面流速 u_i が存在し、開水路1次元定常流の取扱いにならうにしても、

$$\tau_i = f_i' \frac{\rho}{2} (u_1 - u_i) |u_1 - u_i| \dots\dots\dots (24)$$

のようにせねばならない。下層においては底面摩擦をうけるので、 τ_i と $(u_2 - u_i)$ 、 τ_b と u_2 との関係を別個に求めることはできない。すなわち前者の関係は下層の境界条件に密接に関連し、これと式(24)とより u_i を消去してえられる式(3)の f_i は、2層の流体的性質のみでなく、界面の性質にも依存することとなる。

次に界面は

- a) 安定な層流
- b) 規則波を伴う層流
- c) 非碎波の界面波を伴う流れ
- d) 碎波による拡散を伴う流れ
- e) 乱流

のように大別される。a)よりe)へ移るにしたがって界面の定義はしだいに困難さを増してくると同時に、界面流速の意味も曖昧さを加えてくる。さらに界面近傍の損失は、造波抵抗、拡散損失、乱れ損失が加わり非常に複雑となる。

2層が接触を開始してから、界面の存在の影響が主流におよぶ範囲を境界層と通常よんでいるが、固体壁近傍

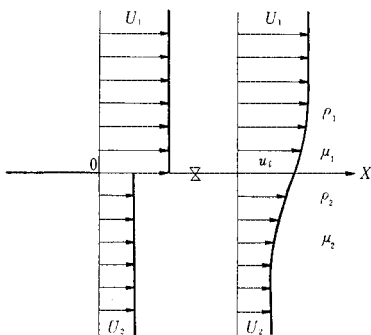


図-4 Lock のモデル

の境界層と異なった性質をもつので、中間層とよんだほうがよいという意見もある。自由噴流の場合と同じく、接触開始点よりの流程によって、形成領域 (Zone of flow establishment) および確立領域 (Zone of established flow) が存在するとされ、境界層の発達程度が異なり、したがって界面の性質が接触開始点よりの流程によって異なる。

以下にはこれらの諸点について具体的に説明を加えない。

5. 層流の界面抵抗

まず層流においては界面は平滑であり、混合現象は存在しない。

図-4のように密度、粘性係数、流速がそれぞれ ρ_1 , ρ_2 ; μ_1 , μ_2 ; U_1 , U_2 なる非圧縮性流体が $x=0$ で接触を開始するとき、上述の境界層は Blasius の層流境界層と同じ取扱いができるとし、Lock (1951)¹⁵⁾ は下記の基礎方程式を用いた。

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial z} = \nu_j \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \quad (j=1, 2) \dots\dots\dots (25)$$

ここに $j=1, 2$ は上下層を表わす。

図-4の境界条件を満足する数値解は u_i および界面抵抗

$$\tau_i = \mu_1 \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)_{z=0+} = \mu_2 \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)_{z=0-} \dots\dots\dots (26)$$

に対して表-2で与えられる。ここに $R_x = U_1 x / \nu_1$ である。 $\rho_2 \mu_2 / \rho_1 \mu_1 = 5.965 \times 10^4$ は空気と水の場合で、Blasius のえた $c_f = 0.332$ に近い。また $\rho_2 \mu_2 / \rho_1 \mu_1 = 1$ はほぼ淡水の場合で $u_i / U_1 = 0.587$, $c_{\tau_i} = 0.1996$ とかなり小さくなっている。Lock の速度分布の表によると $u / U_1 = 0.995$ に対し、境界層厚 $\delta_i = 3.913 x / R_x^{1/2}$ であって、境界層厚は x の平方根に比例して厚くなる。単位幅あたりの抗力は

$$D = \int_0^l \tau_i(x) dx = \frac{0.3992}{R_l^{1/2}} \cdot \rho U_1^2 l = c_f \rho U_1^2 l$$

とおけば、

$$c_f = \frac{0.3992}{R_l^{1/2}} \quad \text{ただし} \quad R_l = \frac{U_1 l}{\nu_1} \dots\dots\dots (27)$$

表-2 Lock の解析結果

$\frac{U_2}{U_1}$	$\frac{\rho_2 \mu_2}{\rho_1 \mu_1}$	$\frac{u_i}{U_1}$	$C_{\tau_i} = \frac{\tau_i}{\rho_i U_i^2} (R_x)^{1/2}$
0	5.965×10^4	0.0211	0.3319
0	100	0.1727	0.3183
0	10	0.3828	0.2815
0	1	0.5873	0.1996
0.501	1	0.7657	0.1219
0.25	1	0.7657	0.1219
0.75	1	0.7657	0.1219

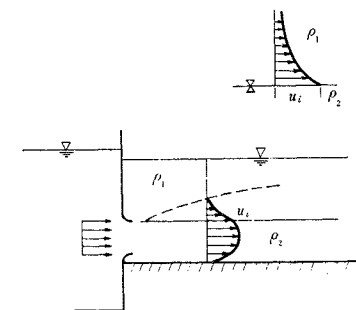


図-5 Bata のモデル

すなわち平均抵抗係数は R_i の平方根に逆比例することとなる。

このようにして、2層の厚さを無限大に考えた場合の界面抵抗は局所的にも距離平均的にも境界層の発達とともに小さくなってゆく。

Bata (1959)¹⁶⁾ は図-5 のように静止した上層が界面流速 u_i のために流速分布を生ずるとして式 (25) の数値解として

$$c_{\tau_i} = \frac{\tau_i}{\rho_1 u_i^2} \left(\frac{u_i x}{\nu_1} \right)^{1/2} = 0.4435 \quad \dots\dots\dots (28)$$

をえた。また平均の抵抗係数は

$$c_f = \frac{0.887}{R_i^{1/2}} \quad \text{ただし} \quad R_i = \frac{u_i l}{\nu} \quad \dots\dots\dots (29)$$

図-5 のように下層が有限水深 h_2 、平均流速 \bar{u}_2 で流れているとして、界面流速 u_i をえているわけであるが、下層内では、界面及び底面のせん断応力を τ_i , τ_b 、上下層密度差を $\Delta\rho$ 、抵抗勾配を i とし、 $\tau_i = \alpha\tau_b$ とおけば

$$\tau_b = \frac{\Delta\rho \cdot g h_2 i}{1 + \alpha} = c_f \frac{1}{2} \rho \bar{u}_2^2 \quad \dots\dots\dots (30)$$

いま

$$J = \frac{\nu_2 \bar{u}_2}{\rho_1 u_i^2}, \quad R_2 = \frac{\bar{u}_2 h_2}{\nu_2} \quad \dots\dots\dots (31)$$

とおけば式 (30) より

$$\frac{1}{c_f} = 0.5(1 + \alpha) J R_2 \quad \dots\dots\dots (32)$$

u_i/\bar{u}_2 も J の関数なので J は Couette の流れと、

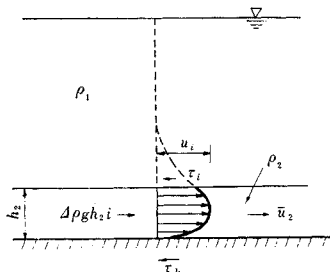


図-6 下層流のモデル

Hagen-Poiseulle の流れの界面でのせん断力の比に関係する量である。また u_i/\bar{u}_2 の値がわかっていると、 J , α の値が計算できることは図-6 に徴して理解されよう。底面せん断係数 c_f はしたがって下層レイノルズ数に逆比例する。

Ippen と Harleman (1951)¹⁷⁾ は表-2 より $u_i/\bar{u}_2 = 0.59$ において、 $J = 0.139$, $\alpha = 0.64$, $c_f^{-1} = 0.114 R_2$ をえているが表-2 のえられた条件は図-6 と異なるので修正を要するはずである。しかし、実験的には十分裏づけられていると考えてよいようである。

6. 界面波の粘性損失

ある流体部分における粘性によるエネルギー損失は一般に

$$\bar{\epsilon} = \mu \iiint_V (2a^2 + 2b^2 + 2c^2 + f^2 + g^2 + h^2) \delta_x \delta_y \delta_z \quad \dots\dots\dots (33)$$

で表わせる¹⁸⁾。ここに $a = \frac{\partial u}{\partial x}$, $b = \frac{\partial v}{\partial y}$, $c = \frac{\partial w}{\partial z}$, $f = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}$, $g = \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}$, $h = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}$ で V は考える流体部分の体積を示す。あるいは式 (33) を書直すと

$$\bar{\epsilon} = \mu \left\{ \iiint_V w^2 \cdot dV - \iint_S \frac{\partial q^2}{\partial n} dS + 2 \iint_S \begin{vmatrix} l & m & n \\ \xi & \eta & \zeta \\ u & v & w \end{vmatrix} dS \right\} \quad \dots\dots\dots (34)$$

ここに、 $w^2 = \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2$ (渦度), $q^2 = u^2 + v^2 + w^2$, また S は V の表面上で、法線内向き方向を $n(l, m, n)$ とする。

界面波の粘性損失は結局これらの式を計算して求められ、 U を基準速度にとった場合

$$\bar{\epsilon} = \tau_i U = f_i \frac{1}{2} \rho U^3 \quad \therefore f_i = \frac{2\bar{\epsilon}}{\rho U^3} \quad \dots\dots\dots (35)$$

として抵抗係数 f_i を求めるというのが通例の手法である。

式 (33) より知られるように粘性流体では $a, b, c = 0$, $f, g, h = 0$ である場合すなわち伸縮もひずみもなく、回転のみに場合にエネルギー損失がない。あるいは (34) より、 $\xi, \eta, \zeta = 0$ すなわち無渦運動でも、第2項が残存してエネルギー損失が評価される。したがって速度ポテンシャルを求めて式 (34) より得られる次の式

$$\bar{\epsilon} = -\mu \iint_S \frac{\partial q^2}{\partial n} dS \quad \dots\dots\dots (36)$$

を計算することが行われる。

Keulegan (1949)¹⁹⁾ は、深海面波の粘性損失 $\bar{\epsilon} = 2\mu k^3 \omega^2 a^2$ (Lamb p. 624) [ただし k は波数, ω は伝播速度, a は振幅] において相対速度差 U によって発

生ずる最小波長の波の伝播速度 $\omega = U/2$ を上式に入れて損失を求めた。したがって界面の安定・不安定の評価は界面抵抗の計算においても重要なことがわかる。椎貝 (1965) はさらに最小波長の波数 $k = 2\epsilon g/U^2$ をも $\bar{\epsilon}$ に入れ、式 (35) を書直して

$$f_i = 8\pi^2 \left(\frac{a}{\lambda}\right)^2 \cdot \psi^{-1} \dots\dots\dots (37)$$

を得た。表-1 に示された椎貝の係数は実験値にあうように a/λ の値をきめたものである。

しかし以上の計算は椎貝、嶋²⁰⁾の論文で知れるように界面で速度差の存在を許容し (したがって2流体の滑りを許容し) かつ、下層流体の粘性を無視したものである。そこで浜田²¹⁾は界面で速度が連続しており、かつ上下層の粘性係数がほぼ等しい場合の界面波の式として次式を導いた。

$$\left. \begin{aligned} \eta &= D e^{-\alpha t} \cos(kx - n_0 - \alpha t) \\ n_0 &= \sqrt{\frac{g'k}{2}}, \quad \alpha = n_0^{1/2} \frac{\sqrt{2\rho_1\rho_2}k}{(\rho_1 + \rho_2) \left(\frac{1}{\sqrt{\nu_1}} + \frac{1}{\sqrt{\nu_2}} \right)} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (38)$$

(ただし $\rho \approx \rho_1 \approx \rho_2$, $g' = \epsilon g$)

式 (38) より界面波のエネルギーは

$$\left. \begin{aligned} E &= \frac{1}{2} (\rho_2 - \rho_1) g D^2 e^{-2\alpha t} \\ \therefore \frac{dE}{dt} &= -n_0 \cdot \frac{\sqrt{2}\mu}{\sqrt{\nu_1} + \sqrt{\nu_2}} D^2 e^{-2\alpha t} \\ &\quad \div -n_0^{5/2} \frac{\mu}{\sqrt{2}\sqrt{\nu}} D^{1/2} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (39)$$

(ただし $D' = D e^{-\alpha t}$ とおいた)

式 (39) を $\bar{\epsilon}$ として式 (35) に入れ界面波の波速を式 (38) より $n_0/k = (g'/2k)^{1/2} = CU$ と仮定し、簡単な演算を行うと、

$$f_i = \frac{1}{2} (kD)^2 C^{3/2} \cdot \psi^{-1/2} \dots\dots\dots (40)$$

をうる。 kD は式 (37) の a/λ に対応しているが、 ψ のべき数は -0.5 となっており金子の値と一致している。

さらに浜田は界面付近の中間層 (境界層) における渦度を求め、浜田のモデルにおける渦度が著しく従来のモデルにおける渦度より大であることを指摘し、中間層内でも大きいレイノルズ数では乱流に遷移する可能性のあることを推論している。

一般流よりせつ動流への力学的エネルギーの輸送機構はレイノルズ応力のなす仕事と解され、これによって界面波は増幅する。他方上に述べたように界面波の粘性によって減衰する。したがって内部レイノルズ数、あるいはフルード数によって与えられる一般流の条件によって、増幅も減衰もしない界面波が理論的に規定できるのか、あるいはいったん発生した界面波が成長して砕波する機構はどうか、といった問題を、界面流速や界面

付近の流速分布と関連して解明せねばならない。この点については第1編で紹介したように、浜田 (第1編文献21), 22), 岩崎・日下 (同23) があるが、いまだ十分解決されたわけではない。

7. 混合による付加摩擦力

界面波が砕波して拡散混合を生じている場合の付加摩擦力を Keulegan は

$$\tau_a = \rho U_m U = \frac{1}{2} f_{ia} \rho U^2 \dots\dots\dots (41)$$

とおいた。ここに U_m は下層よりの平均混入速度で、これより、

$$f_{ia} = 2 U_m / U \dots\dots\dots (42)$$

Ellison (1959)²²⁾らは連行係数 E を次式で定義した。

$$\frac{d}{dx} (Uh) = EU \dots\dots\dots (43)$$

式 (41) における U_m はしたがって EU とおける。これを式 (42) に入れると

$$f_{ia} = 2 E \dots\dots\dots (44)$$

これは Pedersen (1972)²³⁾ がえた結果でもある。

次に連行係数 E の研究結果を示す。

$$\text{Keulegan : } E = \frac{U_m}{U} = K \left(1 - 1.15 \frac{U_c}{U} \right) \dots\dots (45)$$

U_c : 混入開始速度

K : $3.5 \times 10^{-4} \sim 2.14$ (Keulegan)

: 河川流量、河口からの距離によって変わる [大坪・福島 (1959)]

: ψ 値によって小さくなる [中村・稲松 (1966)] (図-7)

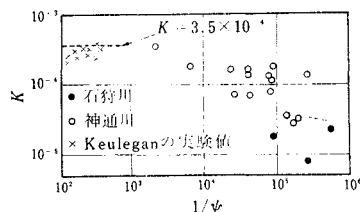


図-7 混合量係数 K と ψ 値との関係

岸・加藤 (1967)²⁴⁾ :

$$E = 3.5 \times 10^{-3} R_i^{-1} \left(\frac{U_r}{U} - \frac{U_{rc}}{U} \right) \dots\dots (46)$$

U_r : 界面付近の流速

U_{rc} : 限界流速

R_i : リチャードソン数

以上は連行係数に関するものであるが、Ellison と Turner (1959), 和田 (1968)²⁵⁾の結果によれば、図-8 に示すように連行係数はリチャードソン数によって小さくはなるが、相当散乱している。

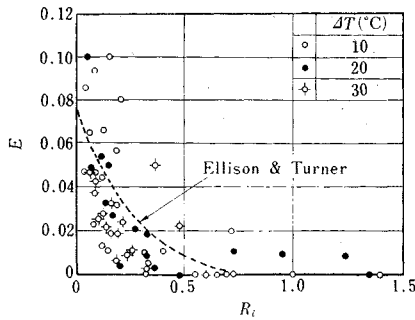


図-8 進行係数とリチャードソン数との関係

8. 成層せん断乱流における渦動粘性と渦動拡散

流れが十分乱れており、レイノルズ数が高い場合に、水平方向には一様であると仮定した場合には単位質量あたりの乱れ運動エネルギーは、N-S 方程式より次のようになる。

$$\frac{1}{2} \frac{\partial q^2}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z} \left[\left(\frac{q^2}{2} + \frac{p'}{\bar{\rho}} \right) w' \right] + \overline{u'w'} \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{g}{\bar{\rho}} \cdot \overline{\rho'w'} + \varepsilon_0 = 0 \quad (47)$$

$$q^2 = \overline{u'^2} + \overline{v'^2} + \overline{w'^2}$$

ここに (47) 左辺第2項は乱れエネルギーの z 方向乱れ w' による移流拡散、第3項はせん断応力 $-\overline{u'w'}$ を通じて平均流 u より供給される乱れエネルギー、第4項は浮力に抗する仕事、 ε_0 はエネルギーの消散項である。

定常状態でかつ拡散の寄与が小さいとすれば式 (47) より、

$$\tau \frac{\partial u}{\partial z} = -\overline{u'w'} \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{g}{\bar{\rho}} \overline{\rho'w'} + \varepsilon_0 \quad (48)$$

また z 方向の乱れ拡散方程式より、

$$\frac{1}{2} \frac{\partial \overline{\rho'^2}}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial \overline{\rho'^2 w'}}{\partial z} + \overline{\rho'w'} \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial z} - \kappa \overline{\rho'^2 \rho'} = 0 \quad (49)$$

ここに κ は拡散係数である。式 (48) に対応する方程式の形は、左辺第1, 2項を省略し、第4項を χ とおくことによって、

$$\overline{\rho'w'} \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial z} + \chi = 0 \quad (50)$$

ε_0 , χ の評価によってこの場合の構造を知ることができる。Townsend (1958)²⁶⁾ は式 (47) の左辺第3項 (エネルギー生成項) に対する第4, 5項 (消散項) の比を乱れ強さ q の関数として図-9 をえた。ここに浮力効果は第4項に示されるものである。浮力効果が大きいほど乱れの消散の程度が著しいことが知れる。また、図中・印

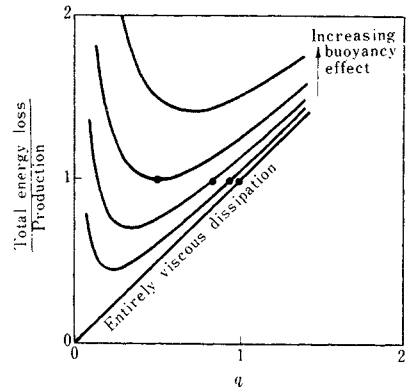


図-9 全エネルギー損失と乱れの生成率との比の乱れ強度による変化 (Townsend 1958 による)

は可能な乱れ平衡状態を示すが、浮力効果が強くなると最小値ですら1を越えてしまい乱れは減衰してしまう。

Ellison (1957)²⁷⁾ は

$$\varepsilon_0 = q^2 / T_2, \quad \chi = \overline{\rho'^2} / T_1 \quad (51)$$

と仮定し、さらに密度フラックスの変化について次の式を導びいた。

$$\overline{w'^2} \frac{d\bar{\rho}}{dz} + \frac{\overline{\rho'^2} g}{\bar{\rho}} + \frac{\overline{w'\rho'}}{T_3} = 0 \quad (52)$$

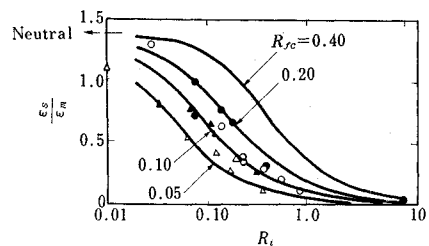
ここに T_3 は $\overline{w'\rho'}$ の減衰に関する時間のファクターである。

フラックス・リチャードソン数 R_f は浮力によるエネルギー損失率と乱れ生成率との比を示すもので、次式で表わされる。

$$R_f = \frac{\varepsilon_s}{\varepsilon_m} \cdot R_i = \frac{g \overline{\rho'w'}}{-\overline{u'w'} \frac{\partial u}{\partial z}} \quad (53)$$

ここに ε_s は渦動拡散係数、 ε_m は運動量拡散係数すなわち渦動粘性係数である。また R_i はリチャードソン数である。式 (48), (50) および (52) より (51) を利用して、

$$\begin{aligned} \frac{R_f}{R_i} &= \frac{\varepsilon_s}{\varepsilon_m} = \frac{q^2 \overline{w'^2}}{(\overline{u'w'})^2} \cdot \frac{1}{\left(\frac{T_2}{T_3} \right)} \\ &\cdot \frac{\left[1 - R_f \left(1 + \frac{q^2}{\overline{w'^2}} \cdot \frac{T_1}{T_2} \right) \right]}{(1 - R_f)^2} = b \cdot \frac{1 - R_f}{(1 - R_f)^2} \quad (54) \end{aligned}$$

図-10 $\varepsilon_s/\varepsilon_m$ と R_i との関係 ($d=1.4$)

そこでもし $T_i \approx T_e$, かつ $q^2/\overline{w'^2}$ が中立状態の測定値約 5.5 の程度の場合には, $R_f = R_{fcrit} = 0.15$ で $\varepsilon_s/\varepsilon_m \rightarrow 0$ となる。これが R_f の下限を与え, 乱れがあっても拡散が起らないこととなる。その際 R_i にはなんら制限がなく非常に大きい値をとり得る。Monin²⁸⁾ はさらに詳細な研究を行っている。図-10 は式 (54) で中立の値 b を 1.4 とし, R_{fc} をパラメーターとして求めた理論曲線と, Ellison と Turner の実験値とを示したものである²⁹⁾。

以上成層せん断乱流における渦動粘性と渦動拡散についてごく基本的な考え方を紹介した。大気や海洋においては早くからかつ詳細な研究が行われており, Monin と Yaglom の大著²⁸⁾ のほかに, Pasquill³⁰⁾ の著書も参考になる。海洋乱流の観測によれば乱れのエネルギースペクトルは,

$$E(k) = ACN^2 k^{-3} \dots\dots\dots (55)$$

であらわされる。ここに N は浮力振動数 (Brunt-Väisälä 振動数) で,

$$N = \left(-\frac{g}{\rho_s} \cdot \frac{\partial \rho}{\partial z} \right)^{1/2} \dots\dots\dots (56)$$

で定義され, -3 乗則という。その上限波数 k_b は

$$k_b = CN^{3/2} \varepsilon_0^{-1/2} \dots\dots\dots (57)$$

ここに ε_0 エネルギー逸散量である。 $k \gg k_b$ ではコルモゴロフの慣性小領域の $-5/3$ 乗則が成立し,

$$E(k) = A \varepsilon_0^{2/3} k^{-5/3}, \quad A = 1.44 \pm 0.07 \dots\dots\dots (58)$$

さて淡塩二層流の界面については椿 (1969)³¹⁾, 日野・谷 (1969)³²⁾, 岩佐・井上 (1969)³³⁾ が内部波のエネルギー・スペクトルについて観測結果を報告している。椿は -3 乗則を, 日野らは非混合型に対し高周波域で -5 乗則, 低周波域で $-11/5$ 乗則を, 混合型に対し, -3 乗則を提案し, 岩佐らはべき数が ψ -値の関数となることを示した。岩崎・阿部は淡塩 2 層が接触を開始してから, 次第に不安定となり碎波を行って乱れ拡散を生ずる過程において, 界面波の濃度変動, 速度変動, 相関係数, 構造関数など詳細な検討を行った³⁴⁾。その結果噴流の形成領域および確立領域における変位スペクトル・乱れスペクトル, および混合特性についての知見が, 玉井・西村³⁵⁾, 阿部³⁶⁾ によってえられている。概していえば形成領域では非混合型, 確立領域では混合型であり, 乱れ拡散により生ずる密度勾配が乱れの減衰に顕著な役割を果たしているということが示された。

これらの研究結果を今後界面抵抗と関連づけていくことが課題であるといえよう。

参 考 文 献

- 1) Schijf, J.B. and Schönfeld J.C. : Theoretical consideration on the motion of salt and fresh water, Proc. Minnesota International Hydraulic Convention. p. 321, IAHR & ASCE, Sept. 1953.

- 2) Ippen, A.T. and D.R.F. Harleman : Steady state characteristics of subsurface flow, Nat. Bur. Standards, Circulation Vol. 521, 1951.
- 3) Otsubo, K. and H. Fukushima : Density currents in a river mouth with a small tidal range, Proc. 8th Int. Congress I.A.H.R. Vol. 3, 1959.
- 4) 浜田徳一・堀口孝男 : 塩水楔の性質について, 第7回海岸工学講演会講演集, 1960.
- 5) 岩崎敏夫・岸田州生・富岡亮一 : 二成層流における密度混合について, 土木学会第 17 回 年次学術講演会講演概要, 第 II 部, 1962.
- 6) 岩崎敏夫・斎藤 晃 : 二成層流の密度混合について (第 2 報), 土木学会第 18 回 年次学術講演会講演概要, 第 II 部, 1963.
- 7) Shi-igai, H. : On the resistance coefficient at the interface between salt and fresh water, 土木学会論文集 No. 123, 1965.
- 8) 金子安雄 : 2 層流境界面抵抗係数の一例, 第 13 回海岸工学講演会講演集, 1966.
- 9) 中村 宏・稲松敏夫 : 神通川河口の塩水くさびについて, 第 13 回海岸工学講演会講演集, 1966.
- 10) 中村 宏 : 河口密度流に関する二, 三の問題, 第 17 回海岸工学講演会論文集, 1970.
- 11) 須賀堯三・高橋 晃 : 塩水くさびに関する大型水路実験による二, 三の考察, 土木学会第 27 回 年次学術講演会講演概要, 第 II 部, 1971.
- 12) Iwasaki, T. : On the shear stress at the interface and its effects in the stratified flow, Proc. 9th Int. Conf. on Coastal Engineering, Lisbon 1964.
- 13) Lofquist, K. : Flow and stress near an interface between stratified liquids, The Physics of Fluids, Vol. 3, 1960.
- 14) Valemlois, J. : Courants de densité ension tangentielle à l'intertace. Essai d'interprétation des résultats de Lofquist. Bulletin du C.R.E.C. No. 5, 1963.
- 15) Lock, R.C. : The velocity distributions in the laminar boundary layer between parallel streams, Quart. Jour. Mech. and Applied Math., Vol. 1951.
- 16) Bata, G. : Frictional resistance at the interface of density currents., Proc. 8th Int. Cong. I.A.H.R. Vol. 2, 1959.
- 17) Ippen and Harleman : 前出の書 2).
- 18) Lamb : Hydrodynamics, p. 580, 6th ed. Cambridge 1932.
- 19) Keulegan, G.H. : Interfacial instability and mixing in stratified flows, Jour. Research of Nat. Bur. Standards. Vol. 43, 1949.
- 20) 嶋 祐之 : 密度流論, 水工学シリーズ 65-11, 水理委員会, 1965.
- 21) 浜田徳一 : 密度流の問題 (1), 第 13 回海岸工学講演会講演集, 1966.
- 22) Ellison, T.H. and J.S. Turner : Turbulent entrainment in stratified flows, Jour. Fluid Mech., Vol. 6, 1959.
- 23) Pedersen, F.B. : Gradually varying two-layer stratified flow, Proc. A.S.C.E., HY 1, 1972.
- 24) 岸 力・加藤正進 : 二層流の風による混合に関する研究, 第 14 回海岸工学講演会講演集, 1967.
- 25) 和田 明・片野尚明 : 工業用水の取放水問題, 第 15 回海岸工学講演会講演集, 1968.
- 26) Townsend, A.A. : The effects of radiative transfer on turbulent flow of a stratified fluid., Jour. Fluid Mech., 4, 1958.

- 27) Ellison, T.H. : Turbulent transport of heat and momentum from an infinite rough plane, Jour. Fluid Mech., 2, 1957.
- 28) Monin, A.S. and A.M. Yaglom : Statistical Fluid Mechanics : Mechanics of Turbulence, Vol. 1, The MIT Press 1971.
- 29) Ellison, T.H. and J.S. Turner : Mixing of dense fluid in a turbulent pipe flow, Jour. of Fluid Mech., Vol. 8, 1960.
- 30) Pasquill, F. : Atmospheric Diffusion. 2nd Ed. Ellis Horwood, 1974.
- 31) Tsubaki, T., M. Hamamura and M. Hashimoto : On the statistical properties of internal waves formed at the interface of arrested saline wedges, Proc. 13th I.A.H.R. Vol. 3, 1969.
- 32) 日野幹雄・谷 順一 : 二層密度流に関する一実験, 土木学会第 24 回年講第 2 部, 1969.
- 33) 岩佐義朗・井上和也 : 二成層流の内部波について, 土木学会第 24 回年講第 2 部 1969.
- 34) Iwasaki, T. and T. Abe : Turbulence in the weakly mixing zone of the interface, Coastal Eng. in Japan, Vol. 15, 1972.
- 35) 玉井信行・西村 司 : 成層流境界面における内部波及び混合の特性に関する一考察, 土木学会第 17 回水講, 1973.
- 36) 阿部至雄 : 淡塩二層流の混合特性に関する一考察, 土木学会第 29 回年講第 2 部, 1974.

(1975.5.22・受付)
