

不等流を遡る波の波高変化に関する基礎的研究*

A BASIC STUDY ON THE CHANGES IN HEIGHT OF WAVES ON OPPOSING NON-UNIFORM CURRENTS

佐藤 道郎**
By Michio SATO

1. ま え が き

表面重力波に流れの作用が加わると波の性質が流れのないところのものとは異なってくる。この流れによる表面波の変形は、河口のような流れのある水域での波の推算、河口閉塞、海浜変形、空気防波堤の消波機構などに関連する基礎的な問題の一つと考えられ研究されてきた。なかでも、波が流れの上を伝播する過程で流速の変化がある場合の波高変化と関連する波のエネルギーについては興味深いものがあり、Unna¹⁾は波のエネルギー流束が不変であるとして波高変化を説明したが、後にLonguet-HigginsとStewart²⁾は不等流上では波のエネルギーが保存されず、波と流れの相互作用によってエネルギーの授受が生じることを示した。これらの理論は流れの深さ方向の速度分布の効果、水面勾配、乱れなどの属性を捨象し、流速分布を一様として単純化した流れに関するものであり、波に及ぼす流れの効果の最も基本的な関係を与えるものである。一方、前述のような流れの属性の波に及ぼす効果について、これまでに深さ方向に種々の速度分布を有する流れを伝播する波の計算がなされており、せん断流上では十分に深い場合を除いて線型波においても群速度と波エネルギーの速度が一致しないといった興味深い結果も浜田³⁾によって示されており、その他の流れの属性も波の諸性質にどのような影響をもたらすかという点についてはさらに検討の余地があるものと考えられるとともに、さらにそれらが流れを伝播する表面波の波高変化にどのように影響するかということも評価しておく必要があると思われる。そこで本研究では、流れの速度分布、水面勾配、乱れの応力などを考慮

したときの二次元不等流上を伝播する波のエネルギーの収支を求め、その結果を具体的に評価するためにここでは滑面の対数分布則に従う流れについて計算を行い、それらの流れの属性が流れを遡る波の波高変化にどのように影響するかという点を明らかにすることを試みた。

2. 流水表面を伝播する波エネルギー収支

運動は二次元とし、図-1に示すように流れの表面を波が伝播するときの波エネルギー収支を考える。x軸を平均水面にとり、y軸をそれと垂直上向きにとる。そのとき運動方程式と連続方程式は次となる。

$$\frac{\partial u}{\partial t} + (U+u)\frac{\partial(U+u)}{\partial x} + (V+v)\frac{\partial(U+u)}{\partial y} = g \sin \theta - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} \right) \dots (1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + (U+u)\frac{\partial(V+v)}{\partial x} + (V+v)\frac{\partial(V+v)}{\partial y} = -g \cos \theta - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} \right) \dots (2)$$

$$\frac{\partial(U+u)}{\partial x} + \frac{\partial(V+v)}{\partial y} = 0 \dots (3)$$

また、水面および水底の条件は次のように表わされる。

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + (U+u)_\eta \frac{\partial \eta}{\partial x} = (V+v)_\eta \dots (4)$$

$$(V+v)_{-h} = -(U+u)_{-h} \frac{dh}{dx} \dots (5)$$

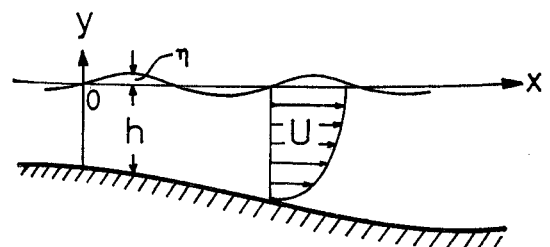


図-1 座標系

* 本論文の内容は部分的に第20回海岸工学講演会論文集および第29回年次学術講演会概要集で報告したものをまとめて詳述したものである。

** 正会員 工博 鹿児島大学助教授 工学部海洋土木開発工学科

ここに、 h は水深、 η は平均水面よりの水位変化、 (u, v) は波による速度成分、 (U, V) は流れの速度成分、 θ は x 軸の水平に対する角度、 ρ は水の密度、 g は重力加速度、 P は圧力、 $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}, \tau_{yx}$ は応力成分*を表わす。

式 (1) に $\rho(U+u)$ 、式 (2) に $\rho(V+v)$ を乗じて加え、底から水面まで y について積分し、式 (3)、(4)、(5) を用いて変形の後、波周期について平均して上付きの横線で示せば波と流れによるエネルギーの収支関係が次のように得られる。

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \int_{-h}^{\eta} \left[\frac{\rho}{2} \{ (U+u)^2 + (V+v)^2 \} + \rho g \cos \theta (y-H_L) \right] dy \\ & + \frac{\partial}{\partial x} \int_{-h}^{\eta} \left[\frac{\rho}{2} \{ (U+u)^2 + (V+v)^2 \} + P + \rho g \cos \theta \cdot (y-H_L) \right] (U+u) dy \\ & = \int_{-h}^{\eta} (U+u) \left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} \right) dy + \int_{-h}^{\eta} (V+v) \left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} \right) dy \dots\dots\dots (6) \end{aligned}$$

ただし、 H_L はポテンシャルエネルギーの水平基準線の高さを表わす。

波エネルギー収支は式 (6) から次のようにして得ることができる。まず式 (6) を次のように表わす。

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \left[\int_{-h}^{\eta} \frac{\rho}{2} (u^2 + v^2) dy + \frac{1}{2} \rho g \cos \theta \cdot \eta^2 \right] + \frac{\partial}{\partial x} \left[\int_{-h}^{\eta} \left\{ \frac{\rho}{2} (u^2 + v^2) + P + \rho g \cos \theta \cdot y \right\} u dy \right. \\ & \left. + \int_{-h}^{\eta} \frac{\rho}{2} (u^2 + v^2) U dy + \frac{1}{2} \rho g \cos \theta \cdot \eta^2 U_\eta \right] = - \frac{\rho}{2} (U^2 + V^2)_\eta \frac{\partial \eta}{\partial t} \\ & - \left[\frac{\partial}{\partial t} \int_{-h}^{\eta} \rho (uU + vV) dy + \frac{\partial}{\partial x} \int_{-h}^{\eta} \{ \rho (U+u)^2 + P \} U dy + \frac{\partial}{\partial x} \int_{-h}^{\eta} \rho (U+u) (V+v) V dy \right] \\ & + \frac{\partial}{\partial x} \int_{-h}^{\eta} \left\{ \frac{\rho}{2} (U^2 + V^2) + \rho g \cos \theta \cdot H_L \right\} (U+u) dy + \frac{1}{2} \rho g \cos \theta \cdot \eta^2 \frac{dU_\eta}{dx} + \rho g \cos \theta \cdot \eta V_\eta \\ & - \rho g \cos \theta \int_{-h}^{\eta} V dy + \int_{-h}^{\eta} (U+u) \left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} \right) dy + \int_{-h}^{\eta} (V+v) \left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} \right) dy \dots\dots\dots (7) \end{aligned}$$

一方、式 (3) に $\rho \left\{ \frac{1}{2} (U^2 + V^2) + g H_L \cos \theta \right\}$ を乗じ、底から水面まで積分して波周期の平均をとれば次式を得る。

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x} \int_{-h}^{\eta} \rho \left\{ \frac{1}{2} (U^2 + V^2) + g H_L \cos \theta \right\} (U+u) dy = \int_{-h}^{\eta} \rho (U+u) U \frac{\partial U}{\partial x} dy + \int_{-h}^{\eta} \rho (U+u) V \frac{\partial V}{\partial x} dy \\ & + \int_{-h}^{\eta} \rho (V+v) U \frac{\partial U}{\partial y} dy + \int_{-h}^{\eta} \rho (V+v) V \frac{\partial V}{\partial y} dy + \rho g \sin \theta \int_{-h}^{\eta} (U+u) dy - \frac{\rho}{2} (U^2 + V^2)_\eta \frac{\partial \eta}{\partial t} \dots\dots\dots (8) \end{aligned}$$

また式 (1) に ρU 、式 (2) に ρV を乗じて加え、同様に次を得る。

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \int_{-h}^{\eta} \rho (uU + vV) dy + \frac{\partial}{\partial x} \int_{-h}^{\eta} \{ \rho (U+u)^2 + P \} U dy + \frac{\partial}{\partial x} \int_{-h}^{\eta} \rho (U+u) (V+v) V dy \\ & = \int_{-h}^{\eta} \rho (U+u)^2 \frac{\partial U}{\partial x} dy + \int_{-h}^{\eta} \rho (U+u) (V+v) \frac{\partial U}{\partial y} dy + \int_{-h}^{\eta} \rho (U+u) (V+v) \frac{\partial V}{\partial x} dy \\ & + \int_{-h}^{\eta} \rho (V+v)^2 \frac{\partial V}{\partial y} dy - \rho (U^2 + V^2)_\eta \frac{\partial \eta}{\partial t} + \rho g \sin \theta \int_{-h}^{\eta} U dy - \rho g \cos \theta \int_{-h}^{\eta} V dy \\ & + \int_{-h}^{\eta} U \left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} \right) dy + \int_{-h}^{\eta} V \left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} \right) dy \dots\dots\dots (9) \end{aligned}$$

式 (7) の右辺に式 (8)、(9) を代入して、波エネルギーの収支に関する次の式を得る。

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \left[\int_{-h}^{\eta} \frac{\rho}{2} (u^2 + v^2) dy + \frac{1}{2} \rho g \cos \theta \cdot \eta^2 \right] + \frac{\partial}{\partial x} \left[\int_{-h}^{\eta} \left\{ \frac{\rho}{2} (u^2 + v^2) + P + \rho g \cos \theta \cdot y \right\} u dy \right. \\ & \left. + \int_{-h}^{\eta} \frac{\rho}{2} (u^2 + v^2) U dy + \frac{1}{2} \rho g \cos \theta \cdot \eta^2 U_\eta \right] = \rho g \sin \theta \int_{-h}^{\eta} u dy + \rho g \cos \theta \cdot \eta \cdot V_\eta + \frac{1}{2} \rho g \cos \theta \cdot \eta^2 \frac{dU_\eta}{dx} \\ & - \int_{-h}^{\eta} \rho (U+u) u \frac{\partial U}{\partial x} dy - \int_{-h}^{\eta} \rho (V+v) v \frac{\partial V}{\partial y} dy - \int_{-h}^{\eta} \rho (U+u) v \frac{\partial V}{\partial x} dy - \int_{-h}^{\eta} \rho (V+v) u \frac{\partial U}{\partial y} dy \\ & + \int_{-h}^{\eta} u \left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} \right) dy + \int_{-h}^{\eta} v \left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} \right) dy \dots\dots\dots (10) \end{aligned}$$

* たとえば $\tau_{yx} = \mu(\partial \bar{u} / \partial y) - \rho \bar{u}'v'$ ($\bar{u} = U+u, \bar{v} = V+v, u', v'$: 乱れ成分) を表わし、 u, v が乱れに対して quasi-steady とみなせる場合には $\rho u'v'$ を時間平均と解せるが、そうでない場合には、同一の初期条件と境界条件のもとでの多数の実験に関する ensemble mean value と考える必要があろう⁹⁾。しかし、単一周期の規則的な波のような場合には、同一地点で、実験開始後同一の時間間隔 (波の周期) での N 個の測定の平均と考えればよい。すなわち、 $\overline{\rho u'v'} = (1/N) \sum_{n=1}^N (\rho u'v')_n$ である^{9), 9)}。

式 (10) の左辺の最初の [...] は波エネルギー密度 E を表わし、二番目は波エネルギー流束 E_f を表わす。右辺には多くの湧出を表わす項が現われており、不等流上を波が伝播する過程で、かなり複雑な流れとの相互干渉作用を伴って波エネルギーが変化するものと推定される。

ここでは、流れは漸変流として、 $\partial\tau_{yx}/\partial y$ に比べ $\partial\sigma_x/\partial x$, $\partial\sigma_y/\partial y$, $\partial\tau_{xy}/\partial x$ を無視できるものとし、 $\partial U/\partial x$ は $\partial U/\partial y$ に比べて無視できるものとする。さらに、 θ は $\cos\theta \approx 1$, $\sin\theta \approx \tan\theta = I_s$ (I_s : 水面勾配)

とおける程度に小さいものとする。

波については二次までの近似について考えることとし、 $y=0$ における諸量をたとえば u_0 のように添字 (0) を用いて表わす。そのとき式 (10) の各項は次のようになる。

$$E = \int_{-h}^0 \frac{\rho}{2} (u^2 + v^2) dy + \frac{1}{2} \rho g \eta^2 \dots\dots\dots (11)$$

$$E_f = \int_{-h}^0 \bar{P} u dy + \int_{-h}^0 \frac{\rho}{2} (u^2 + v^2) U dy + \frac{1}{2} \rho g \eta^2 U_0 \dots\dots\dots (12)$$

$$\text{右辺第1項} \approx \rho g I_s \eta u_0 \dots\dots\dots (13)$$

$$\text{第2項} \approx -\rho g \eta^2 \frac{dU_0}{dx} \dots\dots\dots (14)$$

$$\text{第3項} \approx \frac{1}{2} \rho g \eta^2 \frac{dU_0}{dx} \dots\dots\dots (15)$$

$$\text{第4項} \approx -\rho \eta u_0 \frac{d}{dx} \left(\frac{U_0^2}{2} \right) - \int_{-h}^0 \rho \bar{u}^2 \frac{\partial U}{\partial x} dy \dots\dots\dots (16)$$

$$\text{第5項} \approx \int_{-h}^0 \rho \bar{v}^2 \frac{\partial U}{\partial x} dy \dots\dots\dots (17)$$

$$\text{第6項} \approx 0$$

$$\text{第7項} \approx - \int_{-h}^0 \rho \bar{u} v \frac{\partial U}{\partial y} dy \dots\dots\dots (18)$$

$$\text{第8項} \approx \int_{-h}^0 u \frac{\partial \tau}{\partial y} dy \quad (\tau = \tau_{yx}) \dots\dots\dots (19)$$

$$\text{第9項} \approx 0$$

したがって、式 (10) は次のように近似される。

$$\begin{aligned} \frac{\partial E}{\partial t} + \frac{\partial E_f}{\partial x} = & - \left[\int_{-h}^0 \rho (u^2 - v^2) \frac{\partial U}{\partial x} dy \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} \rho g \eta^2 \frac{dU_0}{dx} \right] + \rho g \eta u_0 \left[I_s - \frac{d}{dx} \left(\frac{U_0^2}{2g} \right) \right] \\ & - \int_{-h}^0 \rho \bar{u} v \frac{\partial U}{\partial y} dy + \int_{-h}^0 u \frac{\partial \tau}{\partial y} dy \dots\dots\dots (20) \end{aligned}$$

まず、右辺の最初 [...] のについて考える。いま、(2) を η から y まで積分して表面条件式 (4) を用い、これまでとられた近似と、 $(\partial U/\partial x)^2$ が十分小さいとして V^2 を無視することにより、波周期に関する平均の後に次の関係を得る。

$$-\rho \bar{v}^2 = \bar{P} + \rho g y \dots\dots\dots (21)$$

これを用いて式 (20) の右辺第1項を変形すれば次のように表わされる。

$$\begin{aligned} & - \left[\int_{-h}^0 (\rho \bar{u}^2 + P) \frac{\partial U}{\partial x} dy + \frac{1}{2} \rho g \eta^2 \frac{dU_0}{dx} \right. \\ & \left. + \int_{-h}^0 \rho g y \frac{\partial U}{\partial x} dy \right] \dots\dots\dots (22) \end{aligned}$$

ところで、式 (22) の初めの二つの項は次の二次までの表現とみることができる。

$$\begin{aligned} & \int_{-h}^{\eta} (\rho u^2 + P) \frac{\partial U}{\partial x} dy \approx \int_{-h}^0 (\rho \bar{u}^2 + \bar{P}) \frac{\partial U}{\partial x} dy \\ & + \frac{1}{2} \rho g \eta^2 \frac{dU_0}{dx} \dots\dots\dots (23) \end{aligned}$$

一方、 $-\rho g y$ は静水圧であるから P_0 で表わす。すると、式 (20) の右辺第1項、すなわち、式 (22) は次で表わされるもの近似的な表現とみることができる。

$$\begin{aligned} & - \left[\int_{-h}^{\eta} (\rho u^2 + P) \frac{\partial U}{\partial x} dy - \int_{-h}^0 P_0 \frac{\partial U}{\partial x} dy \right] \\ & \dots\dots\dots (24) \end{aligned}$$

式 (24) の第1項は波による応力 ρu^2 と圧力 P が流れになす仕事を底から水面まで総和したものの平均量を表わし、第2項は波が無い場合のものに相当する。したがって式 (24) は両者の差であるから波の存在下における余剰分を表わすことになる。

流れが深さ方向に一様な速度分布をもつときは式(24) は次のようになる。

$$- \left[\int_{-h}^{\eta} (\rho u^2 + P) dy - \int_{-h}^0 P_0 dy \right] \frac{dU}{dx}$$

上のかっこ内は Longuet-Higgins と Stewart によって見出された “Radiation Stress” の成分 S_x にほかならず、結局、式 (20) の右辺の最初のは Longuet-Higgins と Stewart の理論で得られた $S_x \cdot \frac{dU}{dx}$ なる項の流速分布が一様でない場合の一つの表現とみることができる。

次に式 (20) の右辺の2番目の項における [...] は流れの摩擦勾配を表わすが、これは符号を逆にとれば流れのエネルギー勾配である。この項は流れがあるエネルギー勾配を有するとき、そこを伝播する波の質量輸送によって水の実質がエネルギーレベルの異なるところへ運ばれることとなり、それに応じて波エネルギーが変化することを示しているものと思われる。

第3項は波の運動に基づくせん断応力の流れになす仕事として波と流れの間にエネルギーの授受が生じることを示している。これは非粘性としての波を考えるととき零となるが、少なくとも波動境界層の存在が無視し得ないときには考慮される必要がある。

第4項は、水表面に働くせん断力を考えず、さらに実在流体では固定境界で滑り速度が無いことから次のように表わされる。

$$\int_{-h}^{\eta} u \frac{\partial \tau}{\partial y} dy = - \int_{-h}^{\eta} \tau \frac{\partial u}{\partial y} dy \dots\dots\dots (25)$$

したがって、これはせん断応力のなす仕事として波エネルギーの逸散を与えるものとなる。

流れの表面を波が伝播する場合には上述のような流れと波の間の相互作用のため波エネルギーは伝播とともに保存されず変化し、波高の変化も E_f が一定とする Unna の考え方や式 (20) の右辺第 1 項に相当するものを考慮した Longuet-Higgins と Stewart の理論に基づくものよりも幾分複雑な様相を呈することが推定される。

流れも波もエネルギーの逸散はなく、深さ方向に流速が一様な分布をするとした場合に式 (20) は Longuet-Higgins と Stewart によって得られた次の関係となる。

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \frac{\partial E_f}{\partial x} = -S_x \frac{dU}{dx} \dots\dots\dots(26)$$

また、式 (10) で U および V を零とおき、粘性に関連する応力成分を無視すれば、水深変化を伴う場合の波エネルギーに関する関係が次のように得られる。

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \left[\int_{-h}^{\eta} \frac{\rho}{2} (u^2 + v^2) dy + \frac{1}{2} \rho g \eta^2 \right] \\ & + \frac{\partial}{\partial x} \int_{-h}^{\eta} \left\{ \frac{\rho}{2} (u^2 + v^2) + P + \rho g y \right\} u dy \\ & = \rho g I_s \int_{-h}^{\eta} u dy \dots\dots\dots(27) \end{aligned}$$

ただし、 $\cos \theta \approx 1$, $\sin \theta \approx \tan \theta = I_s$ としている。 I_s は碎波前あるいは後の波では wave set-down あるいは set-up に関連する。shoaling の問題では Rayleigh の仮定^{2), 8)}、すなわち、波エネルギー流束が波の伝播とともに不変であるという考えに基づいて計算され、これは微小振幅波では妥当な近似であるが、さらに高次の有限振幅波としての扱いにおいては式 (27) の右辺の項を考慮した場合に、波エネルギー流束に基づく扱いにおいても斜面勾配の影響が入ってくることが考えられるが、ここでは立ち入らない。

3. 波のエネルギーおよび波高の変化

以下では波は単一の規則波として扱う。式 (20) の右辺を次のようにおく。

$$2 \alpha^* E_f = - \left[\int_{-h}^0 \rho (u^2 - v^2) \frac{\partial U}{\partial x} dy + \frac{1}{2} \rho g \eta^2 \frac{dU_0}{dx} \right] \dots\dots\dots(28)$$

$$\begin{aligned} 2 \alpha E_f = & -\rho g \eta u_0 \left[I_s - \frac{d}{dx} \left(\frac{U_0^2}{2g} \right) \right] \\ & + \int_{-h}^0 \rho \bar{u} \bar{v} \frac{\partial U}{\partial y} dy + \int_{-h}^0 \bar{\tau} \frac{\partial u}{\partial y} dy \dots\dots\dots(29) \end{aligned}$$

そうすると式 (20) は次のように表わされる。

$$\frac{d}{dx} E_f = 2 \alpha^* E_f - 2 \alpha E_f \dots\dots\dots(30)$$

E_f は波エネルギー密度 E と波エネルギーの輸送される速度 C_E によって、

$$E_f = E \cdot C_E \dots\dots\dots(31)$$

と表わし、式 (30) を積分して $x=0$ における諸量を添字 (0) で表わせば、波エネルギー密度 E の変化は次のようになる。

$$\frac{E}{E_0} = \frac{C_{E0}}{C_E} \exp \left(2 \int_0^x \alpha^* dx \right) \exp \left(-2 \int_0^x \alpha dx \right) \dots\dots\dots(32)$$

また、 E は波高を H として

$$E = (1/8) \rho g H^2 \gamma \dots\dots\dots(33)$$

と式 (32) に代入すると、波高について次の関係を得る。

$$\begin{aligned} \frac{H}{H_0} = & \left(\frac{C_{E0}}{C_E} \frac{\gamma_0}{\gamma} \right)^{1/2} \exp \left(\int_0^x \alpha^* dx \right) \\ & \cdot \exp \left(- \int_0^x \alpha dx \right) \dots\dots\dots(34) \end{aligned}$$

$(C_{E0} \gamma_0 / C_E \gamma)^{1/2}$ は波エネルギー流束が一定としたときの波高変化を与えるもので、 $\exp \left(\int_0^x \alpha^* dx \right)$ は Radiation Stress S_x の効果に相当する。最後の $\exp \left(- \int_0^x \alpha dx \right)$ は、水面勾配などその他の要因が波高変化に及ぼす効果を与える因子で、本研究では特にこの点について調べる。

4. 対数分布の流れの上の波の場合について

式 (34) で与えた二次元不等流上を伝播する場合の波高変化に関する関係において、 α として表わしたものが波高変化にどの程度の影響をもつかという点が問題であるが、以下ではこの点について具体的に評価することを試みる。

流れのモデルとして、ここでは滑面における対数分布則に従うような流速分布を有するものを考えることとし、まず、式 (34) で波高変化を求めるのに必要な諸量を求める。

水深は一樣として、以下では表現の便宜上水底に沿って x 軸をとり、それと垂直上向きに y 軸をとることにする。

波の流速成分 (u, v) は非粘性流速成分 (u_1, v_1) と粘性の効果による補正流速成分 (u_2, v_2) の和として次のように表わされるものとする。

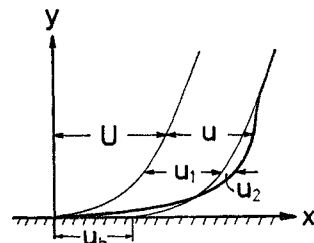


図-2 u_1 および u_2

$$u = u_1 + u_2 \dots \dots \dots (35)$$

$$v = v_1 + v_2 \dots \dots \dots (36)$$

さらに、 u_2, v_2 は底付近でのみ考慮され、それ以外では $|u_1| \gg |u_2|, |v_1| \gg |v_2|$ として無視し得るものと仮定する (図一2)。

(1) u_1, v_1 について

上記の仮定のもとに、主流部において τ は流れに関する τ_c と等しくおくことができ、通常の等流におけると同様に次の関係が成立するものとする。

$$g \sin \theta + \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial \tau_c}{\partial y} = 0 \dots \dots \dots (37)$$

したがって、線型化された波の方程式は $\cos \theta \approx 1$ のもとに次のようになる。

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} + U \frac{\partial u_1}{\partial x} + v_1 \frac{dU}{dy} = -\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial P}{\partial x} \dots \dots \dots (38)$$

$$\frac{\partial v_1}{\partial t} + U \frac{\partial v_1}{\partial x} = -g - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} \dots \dots \dots (39)$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial y} = 0 \dots \dots \dots (40)$$

また、線型化された境界条件は次のとおりである。

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + U_0 \frac{\partial \eta}{\partial x} = v_1 \quad (y=h) \dots \dots \dots (41)$$

$$\frac{\partial P}{\partial t} + U_0 \frac{\partial P}{\partial x} = \rho g v_1 \quad (y=h) \dots \dots \dots (42)$$

$$v_1 = 0 \quad (y=0) \dots \dots \dots (43)$$

ただし、 U_0 は $y=h$ における流れの速度を表わす。

次式で定義される流れ関数 Ψ を導入する。

$$u_1 = -\frac{\partial \Psi}{\partial y} \quad v_1 = \frac{\partial \Psi}{\partial x} \dots \dots \dots (44)$$

式 (38), (39) から P を消去し、式 (44) を用いて次式を得る。ただし、prime は y に関する微分を表わし、 ∇^2 は $\partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$ を表わす。

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x} \right) \nabla^2 \Psi - U'' \frac{\partial \Psi}{\partial x} = 0 \dots \dots \dots (45)$$

単弦進行波を考え Ψ を次のように表わす。

$$\Psi = \phi(y) e^{im(x-ct)} \dots \dots \dots (46)$$

ここに、 c : 波速、 m : 波数 ($=2\pi/L, L$: 波長) である。式 (46) を (45) に代入して、

$$\frac{d^2 \phi}{dy^2} - \left(m^2 + \frac{U''}{U-C} \right) \phi = 0 \dots \dots \dots (47)$$

底の条件 $v_1=0$ より

$$\phi(0) = 0 \dots \dots \dots (48)$$

である。式 (47) を積分することにより次式が得られる。

$$\begin{aligned} \phi(y) = & A \sinh my \\ & + \frac{1}{m} \int_0^y \frac{U''(t) \sinh m(y-t)}{U(t)-C} \cdot \phi(t) dt \end{aligned} \dots \dots \dots (49)$$

これを逐次代入により次のように近似する。

$$\begin{aligned} \phi(y) = & A \left\{ \sinh my + \frac{1}{m} \right. \\ & \left. \cdot \int_0^y \frac{U''(t) \sinh m(y-t) \sinh mt}{U(t)-C} dt \right\} \end{aligned} \dots \dots \dots (50)$$

水面形を次式の実部で表わす。

$$\eta = \frac{H}{2} e^{im(x-ct)} \dots \dots \dots (51)$$

そのとき式 (41) の条件から A は次のように得られる。

$$A = \frac{H}{2} \cdot \frac{U_0 - C}{\Pi_2(h)} \dots \dots \dots (52)$$

$$\begin{aligned} \Pi_2(y) = & \sinh my + \frac{1}{m} \\ & \cdot \int_0^y \frac{U''(t) \sinh m(y-t) \sinh mt}{U(t)-C} dt \end{aligned} \dots \dots \dots (53)$$

流れは二次元乱流とし、底が滑面で流速分布が次式で表わされる場合について考える。

$$U = \begin{cases} \left(5.5 + \frac{1}{\kappa} \ln \frac{U_* y}{\nu} \right) U_* = U_0 + \frac{U_*}{\kappa} \ln \frac{y}{h} & (y_s \leq y \leq h) \dots \dots \dots (54) \\ \frac{U_*^2 y}{\nu} & (0 \leq y \leq y_s) \dots \dots \dots (55) \end{cases}$$

ここに、 κ : カルマン定数 (0.4)、 U_* : 摩擦速度 ($\sqrt{\tau_c/\rho}$)、 ν : 動粘性係数、 y_s : 粘性底層厚 ($11.6\nu/U_*$) を表わす。このとき $\phi(y)$ は次のように表わされる。

$$\phi(y) = \frac{H}{2} (U_0 - C) \frac{\Pi_2(y)}{\Pi_2(h)} \dots \dots \dots (56)$$

$$\begin{aligned} \Pi_2(y) = & \sinh my \\ & + \frac{U_*}{\kappa m} \int_{y_s}^y \frac{\sinh m(y-t) \sinh mt}{\{C - U_0 - (U_*/\kappa) \ln(t/h)\} t^2} dt \end{aligned} \dots \dots \dots (57)$$

式 (44), (56), (57) より u_1, v_1 は次のようになる。

$$u_1 = \frac{H}{2} m (C - U_0) \frac{\Pi_1(y)}{\Pi_2(h)} \cos m(x-ct) \dots \dots \dots (58)$$

$$v_1 = \frac{H}{2} m (C - U_0) \frac{\Pi_2(y)}{\Pi_2(h)} \sin m(x-ct) \dots \dots \dots (59)$$

ここに、 $\Pi_1(y)$ は次のとおりである。

$$\begin{aligned} \Pi_1(y) = & \cosh my \\ & + \frac{U_*}{\kappa m} \int_{y_s}^y \frac{\cosh m(y-t) \sinh mt}{\{C - U_0 - (U_*/\kappa) \ln(t/h)\} t^2} dt \end{aligned} \dots \dots \dots (60)$$

また、波速 C は式 (38) と式 (42) から次のようになる。

$$\begin{aligned} C = & U_0 - \frac{U_*}{2 \kappa m h} \frac{\Pi_2(h)}{\Pi_1(h)} \\ & \pm \sqrt{\left\{ \frac{U_*}{2 \kappa m h} \frac{\Pi_2(h)}{\Pi_1(h)} \right\}^2 + \frac{g}{m} \frac{\Pi_2(h)}{\Pi_1(h)}} \end{aligned} \dots \dots \dots (61)$$

圧力 P は式 (38), (39) より式 (58), (59) を用いて得られ次のように表わされる。

$$P = \rho g (h-y) + \frac{H}{2} \rho \frac{(C-U_0)}{\Pi_2(h)}$$

$$\times \left\{ m(C-U)\Pi_1(y) + \frac{U_*}{\kappa y} \Pi_2(y) \right\} \cos m(x-ct) \dots\dots\dots (62)$$

以上の結果を用いて、式 (11), (12) から波エネルギー密度 E および波エネルギー流束 E_f を求めると次のように得られる。

$$E = \frac{1}{16} \rho H^2 \left\{ \frac{m(C-U_0)}{\Pi_2(h)} \right\}^2 \left\{ \int_{y_s}^h [(\Pi_1(y))^2 + (\Pi_2(y))^2] dy + \frac{\sinh 2my_s}{2m} \right\} + \frac{1}{16} \rho g H^2 \dots\dots\dots (63)$$

$$E_f = \frac{1}{16} \rho H^2 \left[gU_0 + \left\{ \frac{m(C-U_0)}{\Pi_2(h)} \right\}^2 \left\{ \int_{y_s}^h \left[2C(\Pi_2(y))^2 + \frac{U_*}{\kappa m y} \sinh 2my \Pi_1(y)\Pi_2(y) - \{(\Pi_1(y))^2 - (\Pi_2(y))^2\} U \right] dy + \left[\frac{C}{2m} (\sinh 2my_s + 2my_s) + \frac{U_*^2}{\nu} \frac{1}{m^2} \sinh^2 my_s - \frac{U_*^2}{\nu} \frac{y_s^2}{2} \right] \right\} \right] \dots\dots\dots (64)$$

したがって、 E を式 (33) のように表現した場合の r はこのとき次のようになる。

$$r = \frac{1}{2} \left[1 + \frac{1}{g} \left\{ \frac{m(C-U_0)}{\Pi_2(h)} \right\}^2 \left\{ \int_{y_s}^h [(\Pi_1(y))^2 + (\Pi_2(y))^2] dy + \frac{1}{2m} \sinh 2my_s \right\} \right] \dots\dots\dots (65)$$

また E_f を E で割れば波エネルギー輸送速度が得られて次のようになる。

$$C_E = \frac{gU_0 + \left\{ \frac{m(C-U_0)}{\Pi_2(h)} \right\}^2 \left\{ \int_{y_s}^h \left[2C(\Pi_1(y))^2 + \frac{U_*}{\kappa m y} \sinh 2my \Pi_1(y)\Pi_2(y) - \{(\Pi_1(y))^2 - (\Pi_2(y))^2\} U \right] dy + C \left(\frac{\sinh 2my_s}{2m} + y_s \right) + \frac{U_*^2}{\nu m^2} \sinh^2 my_s - \frac{U_*^2 y_s^2}{2\nu} \right\}}{g + \left\{ \frac{m(C-U_0)}{\Pi_2(h)} \right\}^2 \left\{ \int_{y_s}^h [(\Pi_1(y))^2 + (\Pi_2(y))^2] dy + \frac{\sinh 2my_s}{2m} \right\}} \dots\dots\dots (66)$$

静水を伝播する微小振幅波では波エネルギーは次で表わされる群速度で運ばれる。

$$C_G = \frac{d(cm)}{dm} \dots\dots\dots (67)$$

いまの場合の群速度を求めてみると次のように表わされる。

$$C_G = U_0 + (C-U_0) \frac{g + \{2mh \operatorname{cosech} 2mh + F_1(C-U_0) - F_2\} \left\{ g - (C-U_0) \frac{U_*}{\kappa h} \right\}}{g + \{1 + F_1(C-U_0)\} \left\{ g - (C-U_0) \frac{U_*}{\kappa h} \right\}} \dots\dots\dots (68)$$

$$F_1 = \frac{U_*}{\kappa m \Pi_2(h)} \int_{y_s}^h \frac{\sinh m(h-t) \sinh mt}{\{C-U_0 - (U_*/\kappa) \ln(t/h)\}^2 t^2} dt - \frac{U_*}{\kappa m \Pi_1(h)} \int_{y_s}^h \frac{\cosh m(h-t) \sinh mt}{\{C-U_0 - (U_*/\kappa) \ln(t/h)\}^2 t^2} dt \dots\dots\dots (69)$$

$$F_2 = \left\{ \cosh mh + \frac{U_*}{2\kappa \cosh mh} \int_{y_s}^h \frac{t \cosh 2m(h-t) - (h-t) \cosh 2mt + h}{\{C-U_0 - (U_*/\kappa) \ln(t/h)\} t^2} dt \right\} / \Pi_1(h) - \left\{ \sinh mh + \frac{U_*}{2\kappa \sinh mh} \int_{y_s}^h \frac{t \cosh 2m(h-t) + (h-t) \cosh 2mt - h}{\{C-U_0 - (U_*/\kappa) \ln(t/h)\} t^2} dt \right\} / \Pi_2(h) \dots\dots\dots (70)$$

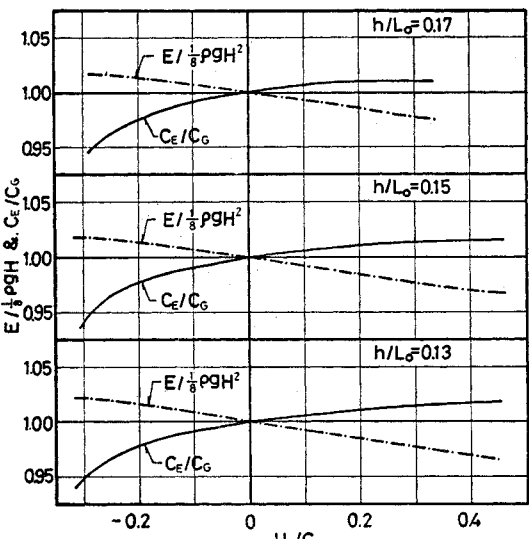


図-3 $r(=E/((1/8) \cdot \rho g H^2))$ と C_E/C_G の流速による変化の例

式 (66) の C_E と式 (68) の C_G は流れが無いときのみ一致し、流れと波が同じ向きでは $C_E > C_G$ で逆向きでは $C_E < C_G$ となる。また r は同じ向きで $r < 1$, 逆向きで $r > 1$ となって E は $(1/8)\rho g H^2$ と幾分異なってくる。計算結果の例を図-3に示す。

(2) u_2, v_2 について

以上では非粘性解を求めたわけであるが、底で滑り速度が零となるように粘性の効果による補正流速 u_2, v_2 を求めなければならない。 u_2, v_2 が問題となるのは底付近の薄い波動境界層内に限られるとすれば線型化された方程式は次のようになる。

$$\frac{\partial u}{\partial t} + U \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{dU}{dy} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_w}{\partial y} \dots\dots\dots (71)$$

これに式 (35), (36) を代入し式 (38) を引けば次式を得る。

$$\frac{\partial u_2}{\partial t} + U \frac{\partial u_2}{\partial x} + v_2 \frac{dU}{dy} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_w}{\partial y} \dots\dots\dots(72)$$

層内での運動はほとんど水平運動とみなされ、 v_2 は十分小さく式(72)の左辺第三項は他の項にくらべて無視しうるものとする。また、 τ に関しては渦動粘性係数 ϵ を用いて次のように表わせるものとする。

$$\tau = \rho \epsilon \frac{\partial(U+u)}{\partial y} = \tau_c + \tau_w \dots\dots\dots(73)$$

τ_c は τ の平均値を示し流れの存在に起因するもので、 τ_w は波によるものを示す。 ϵ をどうとるかという問題があるが、この点について Lundgren⁹⁾は流れだけのものと波だけのもの(平均値で波の位相に無関係な)の和として表わされることを仮定している。その場合、 τ_c は $\rho \epsilon \cdot dU/dy$ で、 τ_w は $\rho \epsilon \cdot \partial u/\partial y$ で表わされることになる。一方、浜田¹⁰⁾は乱れ速度成分のモデルによる計算から、 τ_c と τ_w に関する ϵ は異なることを指摘している。Lundgrenのように考えても波に関する係数が一定値でなく位相とともに変化すると考えた場合には τ_c と τ_w の係数は異なることは考えられるわけだが、波に関する係数の位相による変化についても簡単な関数関係を想定するのは困難と思われる。以上の点に関しては今後さらに検討すべき問題と考えられるが、ここでは ϵ については流れに関するものが支配的であるという仮定のもとに、ここで仮定している流れと一義的に関連する値をとるものとする。粘性底層内では ϵ のかわりに動粘性係数 ν がとられる。したがって、波それ自体では乱流境界層を形成し得ないか、あるいは流れによる乱れに比べて微弱な場合に対する近似的表現ということになる。

以上のような仮定のもとに、層内では $\partial u_1/\partial y \ll \partial u_2/\partial y$ と考えられるので、 τ_w を次のようにおく。

$$\tau_w = \rho \epsilon \frac{\partial u_2}{\partial y} \dots\dots\dots(74)$$

したがって、次式を層内の運動の基本式とする。

$$\frac{\partial u_2}{\partial t} + U \frac{\partial u_2}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\epsilon \frac{\partial u_2}{\partial y} \right) \dots\dots\dots(75)$$

u_2 は次のように表わされるものとする。

$$u_2 = R_e \{ \hat{u}_2 \cdot e^{i(mx - \omega t)} \} \dots\dots\dots(76)$$

ここに、 \hat{u}_2 : u_2 の振幅、 ω : 角振動数(= $2\pi/T$, T : 周期)、 $i = \sqrt{-1}$ を表わし、 R_e はreal partを意味する。式(76)を式(75)に代入することにより次式が得られる。

$$\frac{d}{dy} \left(\epsilon \frac{d\hat{u}_2}{dy} \right) + i\omega \left(1 - \frac{U}{C} \right) \hat{u}_2 = 0 \dots\dots\dots(77)$$

\hat{u}_2 に関しては U_0/C のべき級数により次のようにおく。

$$\hat{u}_2 = \begin{cases} -\frac{\beta_1}{\{D_1(0)\}^2} \left[D_1(y) \int_0^{y_s} (U_L/U_0) D_1(\xi) \sin \beta_1 \xi d\xi + D_1(0) \int_0^{y_s} (U_L/U_0) D_1(\xi) \sin \beta_1 (y_s - \xi) d\xi \right] \hat{u}_b & (0 \leq y \leq y_s) \dots\dots\dots(78) \\ -\beta_1 \frac{H_0^{(1)}(2\beta_2 y_s \sqrt{y/y_s})}{\{D_1(0)\}^2} \int_0^{y_s} (U_L/U_0) D_1(\xi) \sin \beta_1 \xi d\xi - \left[\frac{i\pi\beta_2^2 y_s}{2D_1(0)} \int_{y_s}^y (U_T/U_0) H_0^{(1)}(2\beta_2 y_s \sqrt{\xi/y_s}) \right] \hat{u}_b & (y_s \leq y) \dots\dots\dots(79) \end{cases}$$

$$\hat{u}_2 = \hat{u}_{20} + \hat{u}_{21} \left(\frac{U_0}{C} \right) + \hat{u}_{22} \left(\frac{U_0}{C} \right)^2 + \dots \dots\dots(78)$$

これを式(77)に代入すれば次の方程式が得られる。

$$\left\{ \frac{d}{dy} \left(\epsilon \frac{d\hat{u}_{20}}{dy} \right) + i\omega \hat{u}_{20} = 0 \dots\dots\dots(79) \right.$$

$$\left. \frac{d}{dy} \left(\epsilon \frac{d\hat{u}_{21}}{dy} \right) + i\omega \hat{u}_{21} = i\omega \left(\frac{U}{U_0} \right) \hat{u}_{20} \dots\dots\dots(80) \right.$$

ϵ に関しては前述の仮定のもとに

$$\epsilon = \begin{cases} \kappa U_* y \{ 1 - (y/h) \}, & U_* = \sqrt{\tau_{c0}/\rho} \\ & (y > y_s) \dots\dots\dots(81) \end{cases}$$

$$\nu \quad (y_s \geq y \geq 0) \dots\dots\dots(82)$$

とする。ただし、 τ_{c0} は τ_c の底面での値で、等流では $\tau_{c0} = \rho gh \sin \theta \approx \rho gh I_s \dots\dots\dots(83)$

である。したがって、式(79)、(80)より U_0/C の一次までの近似で、解くべき式は次のようになる。

$$\left\{ \frac{d^2 \hat{u}_{20}}{dy^2} + \frac{i\omega}{\nu} \hat{u}_{20} = 0 \quad (0 \leq y \leq y_s) \dots\dots\dots(84) \right.$$

$$\left. \frac{d^2 \hat{u}_{20}}{dy^2} + \frac{1}{y} \frac{d\hat{u}_{20}}{dy} + \frac{i\omega}{\kappa U_*} \frac{1}{y} \hat{u}_{20} = 0 \quad (y_s \leq y) \dots\dots\dots(85) \right.$$

$$\left\{ \frac{d^2 \hat{u}_{21}}{dy^2} + \frac{i\omega}{\nu} \hat{u}_{21} = \frac{i\omega}{U_0} \frac{U}{y} \hat{u}_{20} \quad (0 \leq y \leq y_s) \dots\dots\dots(86) \right.$$

$$\left. \frac{d^2 \hat{u}_{21}}{dy^2} + \frac{1}{y} \frac{d\hat{u}_{21}}{dy} + \frac{i\omega}{\kappa U_*} \frac{1}{y} \hat{u}_{21} = \frac{i\omega}{\kappa U_*} \frac{1}{y} \frac{U}{U_0} \hat{u}_{20} \quad (y_s \leq y) \dots\dots\dots(87) \right.$$

境界条件は

$$y=0 \quad \text{で} \quad \hat{u}_{20} = -\hat{u}_1(0) = -\hat{u}_b \dots\dots\dots(88)$$

$$\hat{u}_{21} = 0 \dots\dots\dots(89)$$

$$y=y_s \quad \text{で} \quad \hat{u}_{20}, d\hat{u}_{20}/dy \quad \text{と} \quad \hat{u}_{21}, d\hat{u}_{21}/dy \quad \text{がそれぞれ連続} \dots\dots\dots(90)$$

$$y \rightarrow \infty \quad \text{のとき} \quad \hat{u}_{20}, \hat{u}_{21} \rightarrow \infty \dots\dots\dots(91)$$

式(85)は $Z^2 = 4\beta^2 y$, $\beta = \sqrt{i\omega/\kappa U_*} = \sqrt{\omega/\kappa} U_* e^{i\pi/4}$ なる変数変換によって次のように0次のBesselの微分方程式となる。

$$\frac{d^2 \hat{u}_{20}}{dz^2} + \frac{1}{z} \frac{d\hat{u}_{20}}{dz} + \hat{u}_{20} = 0 \dots\dots\dots(92)$$

式(84)から式(87)を解くことにより $\hat{u}_{20}, \hat{u}_{21}$ は次のように得られる。

$$\hat{u}_{20} = \begin{cases} -\frac{D_1(y)}{D_1(0)} \hat{u}_b \quad (0 \leq y \leq y_s) \dots\dots\dots(93) \end{cases}$$

$$\left. -\frac{H_0^{(1)}(2\beta_2 y_s \sqrt{y/y_s})}{D_1(0)} \hat{u}_b \quad (y_s \leq y) \dots\dots\dots(94) \right.$$

$$\hat{u}_{21} = \begin{cases} -\frac{\beta_1}{\{D_1(0)\}^2} \left[D_1(y) \int_0^{y_s} (U_L/U_0) D_1(\xi) \sin \beta_1 \xi d\xi + D_1(0) \int_0^{y_s} (U_L/U_0) D_1(\xi) \sin \beta_1 (y_s - \xi) d\xi \right] \hat{u}_b & (0 \leq y \leq y_s) \dots\dots\dots(95) \\ -\beta_1 \frac{H_0^{(1)}(2\beta_2 y_s \sqrt{y/y_s})}{\{D_1(0)\}^2} \int_0^{y_s} (U_L/U_0) D_1(\xi) \sin \beta_1 \xi d\xi - \left[\frac{i\pi\beta_2^2 y_s}{2D_1(0)} \int_{y_s}^y (U_T/U_0) H_0^{(1)}(2\beta_2 y_s \sqrt{\xi/y_s}) \right] \hat{u}_b & (y_s \leq y) \dots\dots\dots(96) \end{cases}$$

$$\left. \begin{aligned} & \times \{H_0^{(1)}(2\beta_2 y_s \sqrt{y/y_s}) H_0^{(2)}(2\beta_2 y_s \sqrt{y/y_s}) + H_0^{(2)}(2\beta_2 y_s \sqrt{y/y_s}) H_0^{(1)}(2\beta_2 y_s \sqrt{\xi/y_s})\} d\xi \Big] \hat{u}_b \\ & (y_s \leq y) \dots \dots \dots (96) \end{aligned} \right\}$$

ただし, $H_0^{(1)}(z)$, $H_0^{(2)}(z)$ はそれぞれ 0 次の第 1 種および第 2 種の Hankel 関数を表わす。また, $\beta_1, \beta_2, D_1(y)$ は次のとおりである。

$$\beta_1 = \sqrt{\omega/\nu} \cdot e^{i\frac{\pi}{4}} \quad \beta_2 = \sqrt{\omega/\kappa U_* y_s} \cdot e^{i\frac{\pi}{4}} \dots \dots \dots (97)$$

$$D_1(y) = H_0^{(1)}(2\beta_2 y_s) \cos \beta_1(y_s - y) + (\beta_2/\beta_1) H_1^{(1)}(2\beta_2 y_s) \sin \beta_1(y_s - y) \dots \dots \dots (98)$$

この \hat{u}_{21} , \hat{u}_{22} と式 (76), (78) から u_2 は次のように表わすことができる。

$$u_2 = R_e[\{\hat{u}_{20} + (U_0/C)\hat{u}_{21}\}e^{i(mx-\omega t)}] = -\hat{u}_0 R_e\{f(y)e^{i(mx-\omega t)}\} = -\hat{u}_1 \Phi_1(y) \cos(mx-\omega t + \epsilon_1(y)) \dots \dots \dots (99)$$

ここに,

$$\Phi_1(y) = \sqrt{\{f_R(y)\}^2 + \{f_I(y)\}^2} \dots \dots \dots (100)$$

$$\epsilon_1(y) = \tan^{-1}\{f_I(y)/f_R(y)\} \dots \dots \dots (101)$$

ただし, f_R, f_I はそれぞれ $f(y)$ の実部と虚部を表わす。また, $f(y)$ は次のように与えられる。

$$f(y) = \left\{ \chi_1 \left(1 + \beta_1 \frac{I_1(0)}{D_1(0)} \right) - \chi_2 \right\} / D_1(0) \dots \dots \dots (102)$$

$$\chi_1 = \begin{cases} D_1(y) & (0 \leq y \leq y_s) \dots \dots \dots (103) \\ H_0^{(1)}(2\beta_1 y_s \sqrt{y/y_s}) & (y_s \leq y) \dots \dots \dots (104) \end{cases}$$

$$\chi_2 = \begin{cases} \beta_1 I_1(y) & (0 \leq y \leq y_s) \dots \dots \dots (105) \\ (i\pi\beta_2^2 y_s/2) I_2(y) & (y_s \leq y) \dots \dots \dots (106) \end{cases}$$

$$I_1(y) = \int_y^{y_s} (U_L/C) D_1(\xi) \sin \beta_1(y - \xi) d\xi \dots \dots \dots (107)$$

$$I_2(y) = \int_{y_s}^y (U_T/C) \{H_0^{(1)}(2\beta_2 y_s \sqrt{y/y_s}) H_0^{(2)}(2\beta_2 y_s \sqrt{\xi/y_s}) - H_0^{(2)}(2\beta_2 y_s \sqrt{y/y_s}) \cdot H_0^{(1)}(2\beta_2 y_s \sqrt{\xi/y_s})\} H_0^{(1)}(2\beta_2 y_s \sqrt{\xi/y_s}) d\xi \dots \dots \dots (108)$$

U_L, U_T はそれぞれ式 (54), (55) と対応する。

境界層内の運動を水平運動で近似することにより u_2 を求めてきたが, u_2 が周期性をもち一様でないためにそれを補う鉛直流速 v_2 が生じる。 v_2 は連続方程式を満たすものとして次のように得られる。

$$\begin{aligned} v_2 &= -\int_0^y \frac{\partial u_2}{\partial x} dy = -m\hat{u}_b \left\{ \left(\int_0^y f_I(\xi) d\xi \right) \cos(mx-\omega t) + \left(\int_0^y f_R(\xi) d\xi \right) \sin(mx-\omega t) \right\} \\ &= -\hat{u}_1 \Phi_2(y) \sin(mx-\omega t + \epsilon_2(y)) \dots \dots \dots (109) \end{aligned}$$

ここに,

$$\Phi_2(y) = m\sqrt{\left\{ \int_0^y f_R(\xi) d\xi \right\}^2 + \left\{ \int_0^y f_I(\xi) d\xi \right\}^2} \dots \dots \dots (110)$$

$$\epsilon_2(y) = \tan^{-1} \left\{ \int_0^y f_I(\xi) d\xi / \int_0^y f_R(\xi) d\xi \right\} \dots \dots \dots (111)$$

$\int_0^y f(\xi) d\xi$ は次のように表わされる。

$$\int_0^y f(\xi) d\xi = \left\{ \chi_3 \left(1 + \beta_1 \frac{I_1(0)}{D_1(0)} \right) - \chi_4 \right\} / D_1(0) \dots \dots \dots (112)$$

$$\chi_3 = \begin{cases} \{D_2(y) - D_2(0)\} / \beta_1 & (0 \leq y \leq y_s) \dots \dots \dots (113) \\ \{(\beta_1/\beta_2)y_s \cdot D_2(y) - D_2(0) - (\beta_2/\beta_1)H_1^{(1)}(2\beta_2 y_s)\} / \beta_1 & (y_s \leq y) \dots \dots \dots (114) \end{cases}$$

$$\chi_4 = \begin{cases} I_3(0) - I_3(y) - I_4(y) & (0 \leq y \leq y_s) \dots \dots \dots (115) \\ (i\pi\beta_2^2 y_s) \sqrt{y/y_s} \cdot I_5(y) - I_6(y) - I_3(0) - I_3(y_s) & (y_s \leq y) \dots \dots \dots (116) \end{cases}$$

$$D_2(y) = H_0^{(1)}(2\beta_2 y_s) \sin \beta_1(y_s - y) - (\beta_2/\beta_1) H_1^{(1)}(2\beta_2 y_s) \cos \beta_1(y_s - y) \dots \dots \dots (117)$$

$$D_3(y) = \sqrt{y} H_1^{(1)}(2\beta_2 y_s \sqrt{y/y_s}) - \sqrt{y_s} H_1^{(1)}(2\beta_2 y_s) \dots \dots \dots (118)$$

$$I_3(y) = \int_y^{y_s} (U_L/C) D_1(\xi) \cos \beta_1(y - \xi) d\xi \dots \dots \dots (119)$$

$$I_4(y) = \int_0^y (U_L/C) D_1(\xi) d\xi \dots \dots \dots (120)$$

$$I_5(y) = \int_{y_s}^y (U_T/C) \{H_0^{(1)}(2\beta_2 y_s \sqrt{y/y_s}) H_0^{(2)}(2\beta_2 y_s \sqrt{\xi/y_s})$$

$$\left[\begin{aligned} & -H_0^{(1)}(2\beta_2 y_s \sqrt{\xi/y_s}) \cdot H_1^{(2)}(2\beta_2 y_s \sqrt{\xi/y_s}) \cdot H_0^{(1)}(2\beta_2 y_s \sqrt{\xi/y_s}) d\xi \dots\dots\dots(121) \\ I_0(y) = & \int_{y_s}^y (U_T/C) H_0^{(1)}(2\beta_2 y_s \sqrt{\xi/y_s}) d\xi \dots\dots\dots(122) \end{aligned} \right.$$

(3) α^* , α について

これまでの計算結果に基づいて式 (28), (29) の α^* , α について考える。

まず, 式 (28) より α^* は次のようになる。

$$\begin{aligned} \alpha^* &= -\frac{1}{2E_f} \left[\int_0^h \rho(u^2 - v^2) \frac{\partial U}{\partial x} dy + \frac{1}{2} \rho g \bar{\eta}^2 \frac{dU_0}{dx} \right] \\ &= -\frac{1}{4C_{ER}} \left[\frac{2}{g} \left\{ \frac{m(C-U_0)}{\Pi_2(h)} \right\}^2 \int_0^h \{(\Pi_1(y))^2 - (\Pi_2(y))^2\} \frac{\partial U}{\partial x} dy + \frac{dU_0}{dx} \right] \dots\dots\dots(123) \end{aligned}$$

また, α は式 (29) より

$$\alpha = -\frac{\rho g \bar{\eta} u_0}{2E_f} \left[I_s - \frac{d}{dx} \left(\frac{U_0^2}{2g} \right) \right] + \frac{1}{2E_f} \int_0^h \rho u v \frac{\partial U}{\partial y} dy + \frac{1}{2E_f} \int_0^h \tau \frac{\partial u}{\partial y} dy = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \dots\dots\dots(124)$$

と $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ に分けて考える。まず, α_1 についてみるならば, [...] は等流勾配と等しくおかれ, U_*^2/gh とおける。したがって α_1 は次のようになる。

$$\alpha_1 = -\frac{m(C-U_0)}{2C_{ER}} \cdot \frac{\Pi_1(h)}{\Pi_2(h)} \cdot \frac{U_*^2}{gh} \dots\dots\dots(125)$$

α_2 は次のようになる。

$$\begin{aligned} \alpha_2 &= \frac{1}{2gC_{ER}} \left\{ \frac{m(C-U_0)}{\Pi_2(h)} \right\}^2 \int_0^h \{ \Pi_1(y) \Phi_2(y) \sin \epsilon_2(y) \\ &\quad - \Pi_2(y) \Phi_1(y) \sin \epsilon_1(y) + \Phi_1(y) \Phi_2(y) \sin(\epsilon_1(y) - \epsilon_2(y)) \} \frac{dU}{dy} dy \dots\dots\dots(126) \end{aligned}$$

α_3 は次のように α_{3I} と α_{3B} とに分ける。

$$\alpha_3 = \frac{1}{2E_f} \int_0^h \rho \epsilon \left(\frac{\partial u_1}{\partial y} \right)^2 dy + \frac{1}{2E_f} \int_0^\delta \rho \epsilon \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 dy = \alpha_{3I} + \alpha_{3B} \dots\dots\dots(127)$$

δ は波動境界層厚さで, $y > \delta$ では u は u_1 とおかれるが, $y < \delta$ では $u = u_1 + u_2$ を考えなければならない。 u_1 は底に近くなると y による変化は小さくなると考えられるから α_{3I} の積分範囲 $\delta \sim h$ を $y_s \sim h$ で近似する。そのとき α_{3I} は次のようになる。

$$\alpha_{3I} = \frac{U_*^3}{2\pi g h C_{ER}} \left\{ \frac{m(C-U_1)}{\Pi_1(h)} \right\}^2 \int_{y_s}^h (h-y) y \left[\frac{\sinh my}{m\{C-U_1 - (U_*^2/\kappa) \ln(y/h)\} y^2} + \frac{\kappa m}{U_*} \Pi_2(y) \right]^2 dy \dots\dots\dots(128)$$

また, α_{3B} は次のように変形される。

$$\alpha_{3B} = \frac{1}{2E_f} \left[u \left(\rho \epsilon \frac{\partial u}{\partial y} \right) \Big|_0^\delta - \int_0^\delta u \frac{\partial}{\partial y} \left(\rho \epsilon \frac{\partial u}{\partial y} \right) dy \right]$$

$u|_{y=0} = 0, \partial u/\partial y|_{y=\delta} \approx \partial u_1/\partial y|_{y=\delta} \approx 0, \partial u_1/\partial y \ll \partial u_2/\partial y$ として

$$\begin{aligned} &= -\frac{1}{2E_f} \int_0^\delta u \frac{\partial}{\partial y} \left(\rho \epsilon \frac{\partial u_2}{\partial y} \right) dy \\ &= -\frac{1}{2E_f} \left[\int_0^\delta u_1 \frac{\partial}{\partial y} \left(\rho \epsilon \frac{\partial u_2}{\partial y} \right) dy + \int_0^\delta u_2 \frac{\partial}{\partial y} \left(\rho \epsilon \frac{\partial u_2}{\partial y} \right) dy \right] \end{aligned}$$

第2項は式 (75) を考慮すれば周期性から消え, 第1項を部分積分すると

$$= -\frac{1}{2E_f} \left[u_1 \rho \epsilon \frac{\partial u_2}{\partial y} \Big|_0^\delta - \int_0^\delta \rho \epsilon \frac{\partial u_2}{\partial y} \frac{\partial u_1}{\partial y} dy \right]$$

$\partial u_1/\partial y \approx 0$ として第2項を無視し, $\partial u_2/\partial y|_{y=\delta} \approx 0$ として α_{3B} は最終的に次のように表わされる。

$$\alpha_{3B} = \frac{\rho \nu}{2E_f} u_1 \frac{\partial u_2}{\partial y} \Big|_{y=0} = \frac{\nu}{2gC_{ER}} \left\{ \frac{m(C-U_0)}{\Pi_2(h)} \right\}^2 Re \left[\frac{\beta_1}{D_1(0)} \left\{ D_2(0) - \frac{\beta_1}{D_1(0)} \int_0^{y_s} \left(\frac{U_L}{C} \right) \{ D_1(\xi) \}^2 d\xi \right\} \right] \dots\dots(129)$$

5. 波高変化に及ぼす α の効果

これまでに流れを伝播する波の波高変化を式 (34) に基づいて計算するために必要な諸量を, 流れが滑面の対数則に従うという一つのモデルについて求めてきた。波

高変化には様々な因子が効いてくるわけであるが, 式 (34) の右辺に含まれる $(C_{E0} r_0 / C_{ER})^{1/2}$ と $\exp\left(\int_0^x \alpha^* dx\right)$ は基本的には Longuet-Higgins と Stewart²⁾ の理論に含まれているものであり, ここでは特に $\exp\left(-\int_0^x \alpha dx\right)$ で示されたものの波高変化に及ぼす影響について若干の考察を行う。

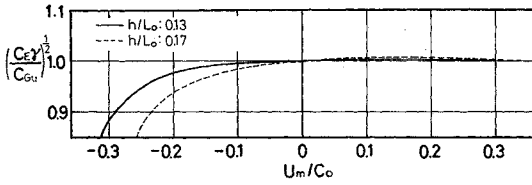


図-4 $K=(C_{ET}/C_{G_u})^{1/2}$ の変化の例

それに先立って、他の二つの因子について少し触れておくことにする。波高変化に及ぼす因子のうち最も基本となるものは $(C_{E_0}r_0/C_{ET})^{1/2}$ である。これは波エネルギー-流束が波の伝播とともに変化しないとしたときの波高変化を与えるもので、流速分布が一樣のときは $C_E = C_G$, $r=1$ となり、このときの計算結果は植木¹¹⁾によって示されている。また、流れが深さとともに変化する場合には、流速が深さとともに直線的に変化し底で零となる場合について富永¹²⁾の計算、放物線分布の場合の浜田¹³⁾の計算がある。いずれも深い流れの無いところから浅い向かい流れのあるところに侵入した波は、同じ平均流速をもつ流れについては一樣分布とした場合よりも大きな侵入波高となることが示されている。いま対数分布の場合についてみるならば、平均流速を同じとした一樣分布の場合の群速度を C_{G_u} として、 $H \propto (C_{ET})^{-1/2}$ であるから

$$(C_{ET})^{1/2} = K \cdot (C_{G_u})^{1/2} \quad K = (C_{ET}/C_{G_u})^{1/2} \quad \dots\dots\dots (130)$$

とすると、侵入波高は一樣分布の場合の $1/K$ となる。 K について計算例を示すと図-4 のようになり、向かい流れでは $K < 1$ となって、この場合もいくぶん大きな波高を与えることとなる。図中 U_m は断面平均流速を表わす。

また、 $\exp\left(\int_0^x \alpha^* dx\right)$ についてみると、 α^* は一樣分布の場合には次のように表わされる。

$$\alpha^* = -\frac{1}{2C_{G_u}} \left(\frac{2mh}{\sinh 2mh} + \frac{1}{2} \right) \frac{dU}{dx} \quad \dots\dots (131)$$

この α^* と式(123)で与えたものとの比較は難しいが、波高変化に及ぼす役割は前述の因子に対する補正的なもので、 α^* として式(123)としても式(131)としても波高変化に対してはあまり大きな差異はないと思われる。この因子は、向かい流れで流速が次第に増すところを遡る場合や波と同じ向きで流速が次第に減ずる流れを伝播する場合には波高をより増大させるように働く。

次に、 α で表わされるものが波高変化に対してどのような影響をもつかについて調べてみることにする。まず α について計算例を示せば図-5 (1), (2), (3) のようになる。ただし、水深、周期、動粘性係数を一定として流速を変化させた場合のものである。先に、 α を $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ に分けたが、まず α_1 についてみるならば、波と流れ

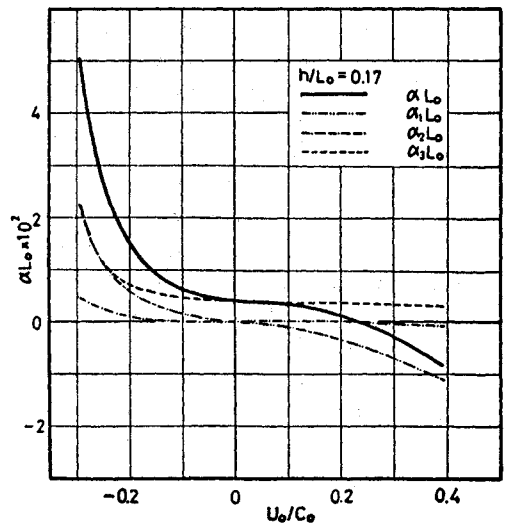
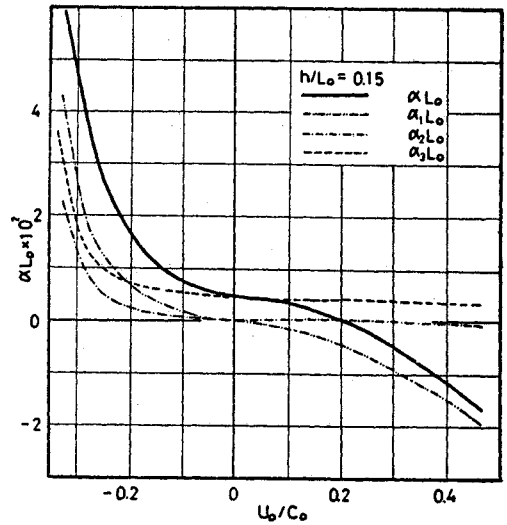
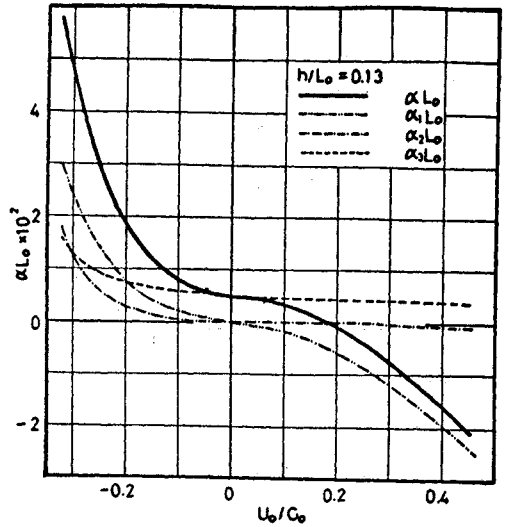


図-5 α の流速による変化の計算例

の向きが同じでも逆の場合でも流速が大きいと波高変化に与える影響は大きく、逆向きでは波高を減衰させ、同じ向きでは波高を増大させるように作用する。 α_2 については、同じ向きの流れに対してはほとんど無視しうる役割しかないが、向かい流れが速くなると波エネルギーを逸散させるように効いてくる。すなわちエネルギーが波から流れに移行しているものと考えられる。 h/L_0 が大きくなるとこの α_2 は小さくなる。次に、 α_3 であるが、これは U_0/C_0 の全範囲にわたり α の基底をなしており、向かい流れの場合には流速が大きくなるにつれて大きくなるが、同じ向きの流れではあまり変化がない。向かい流れにおいては、流速の増大に伴う α_3 の増大の仕方が h/L_0 の大きいほど大きい。 α_3 を境界層内と層外に分けて計算して α_{3B} 、 α_{3I} としたが、この α_{3B} 、 α_{3I} の計算例を示すと図-6のようになり、境界層内の摩擦による α_{3B} は流速による変化は小さく、一方、 α_{3I} は流速の小さい範囲ではほとんど無視できるが、向かい流れが速くなると大きくなって α_3 の変化を支配している。

以上から、 α を構成する各要因が流れと波の条件によって複雑に絡み合っているわけだが、向かい流れではいずれも波高を減衰させるように作用し、その効果は流速が大きいほど著しくなる。また、同じ向きの流れでは α_1 と α_3 によって支配され、この計算例に見られるような条件のもとでは、両者が打ち消し合うように働く U_0/C が0.2前後を境にして、それより大きくなると α_1 の効果が卓越して波高は伝播とともに大きくなるように働くという結果を与える。水深が十分大きく深水波とみなされるようになると α_1 と α_{3I} が α を支配する要因となる。

以上に述べた α の性質に関して実験的に調べてみた。実験は長さ20m、幅0.8m、高さ0.5mの可傾斜循環流式水路で下流端にプランジャー型造波機を設置した装置を用いた。したがって、実験は波と流れが逆向きの場合のものである。流速測定は光電管式プロペラ流速計により、波高測定は抵抗線式波高計によった。

等流の場合に式(34)は

$$H/H_0 = \exp(-\alpha x) \dots\dots (132)$$

となるので、 α は伝播距離 x と波高比 H/H_0 を測定して得られることになる。そこで、水深10~15cm、流速6~30cm/secの流れを上流に向かって進む周期0.85~1.25sec、造波装置から4m離

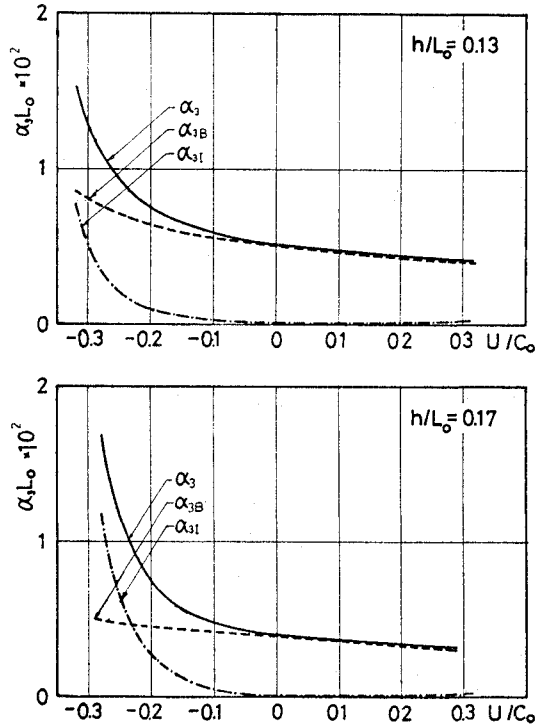


図-6 α_3 に対する α_{3I} と α_{3B} の寄与

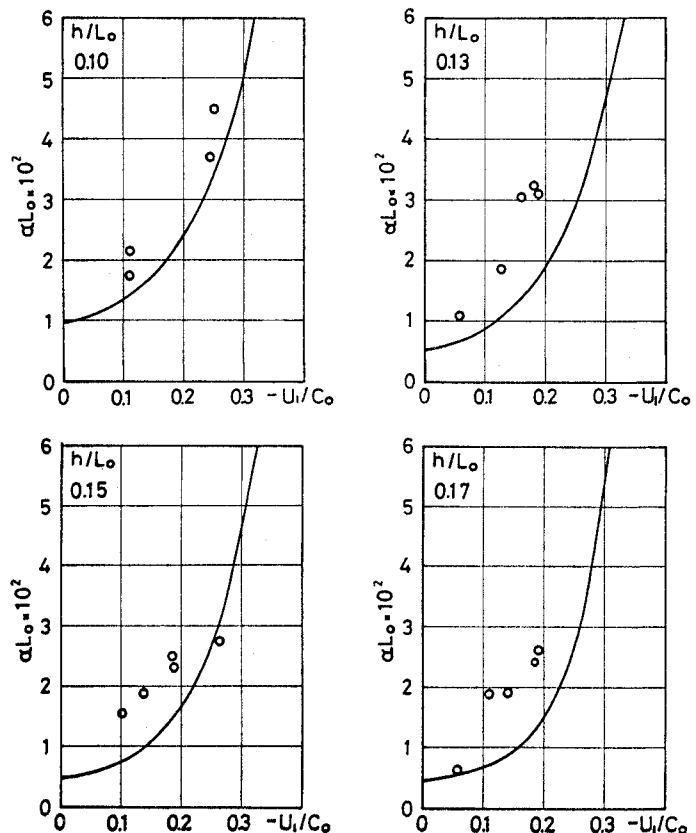


図-7 α の計算値(実線)と実験値(○)の比較

れたところの波高 H_0 が 1~4 cm の波の波高を上流に 10 m の区間にわたって 0.5 m あるいは 1 m の間隔で測定し、最小自乗法で α を求めた。その結果は 図-7 に示すようであった。実線は計算によるもの、丸印は実験値である。 α の変化の傾向はほぼ一致しているものとみることができると思われる。しかし、全般的に実験値は計算値よりも大きくなっている。この原因については、まず考えられるのは水路壁の影響であろう。これがどの程度であるかを評価するのは困難であるが、岩垣・土屋・陳¹⁴⁾は流れの無い場合について波高減衰に及ぼす水路壁の影響を調べており、その実験結果によれば水深と水路幅の比が大きくなると波高減衰率が大きくなること示されている。本実験の場合、水深と水路幅の比が約 0.13~0.2 程度であるので、流れが無ければ幅が十分大きく側壁の影響が無いときの 1.5~2 倍程度になると考えられる条件でのものであり、計算値と実験値の差の主要な部分は水路壁の影響によることが考えられる。さらに理論の精度を上げるためには、今後渦動粘性係数の仮定についてもさらに検討する必要がある。また、松田^{15), 16)}の発電所放水路で行った流速測定によれば、同一断面で深さの異なる二点での流速変化には位相のずれがあり、深さとともに位相のずれが大きくなること示されている。この結果は乱れた流れを波が伝播する際に、単に底面近くだけでなく、かなり水面近くまで波の運動が渦粘性の影響を強く受けることを示唆しており、 $\bar{u}\bar{v}$ も本論文の扱いによるものとはいく分異なったものとなり得ることを示している。その場合には底面近傍についてのみ粘性解を求めるという本論文の扱いでは不十分なことも考えられ、理論的な扱いはかなり困難になると考えられる。しかし、この点については実験的にも実態を明確にしていく必要がある。

う場合を一つのモデルとして波高変化をもたらす各因子について、特にこれまであまり検討されていない式(29)の α で表わされるものについて、考察してきた。

ところで、この α を含む因子が不等流上の波高変化に

図-7は8つのサブプロットで構成され、それぞれ異なる流速比 i (1/20, 1/50, 1/100, 1/200, 1/500, 1/1000) を示している。各サブプロットは4つの周期 T (4 sec, 5 sec, 6 sec, 7 sec) の波高変化を示している。縦軸は波高比 H/H_0 (0.5から1.5) と横軸は距離 x (m) を示している。実線は計算値、丸印は実験値を示している。計算値は実験値よりも一般的に高くなる傾向がある。

6. 不等流を遡る波の波高変化

これまでで不等流上を伝播する波の波高変化について式 (34) で表わされる関係を示し、流れが滑面乱流の対数則に従

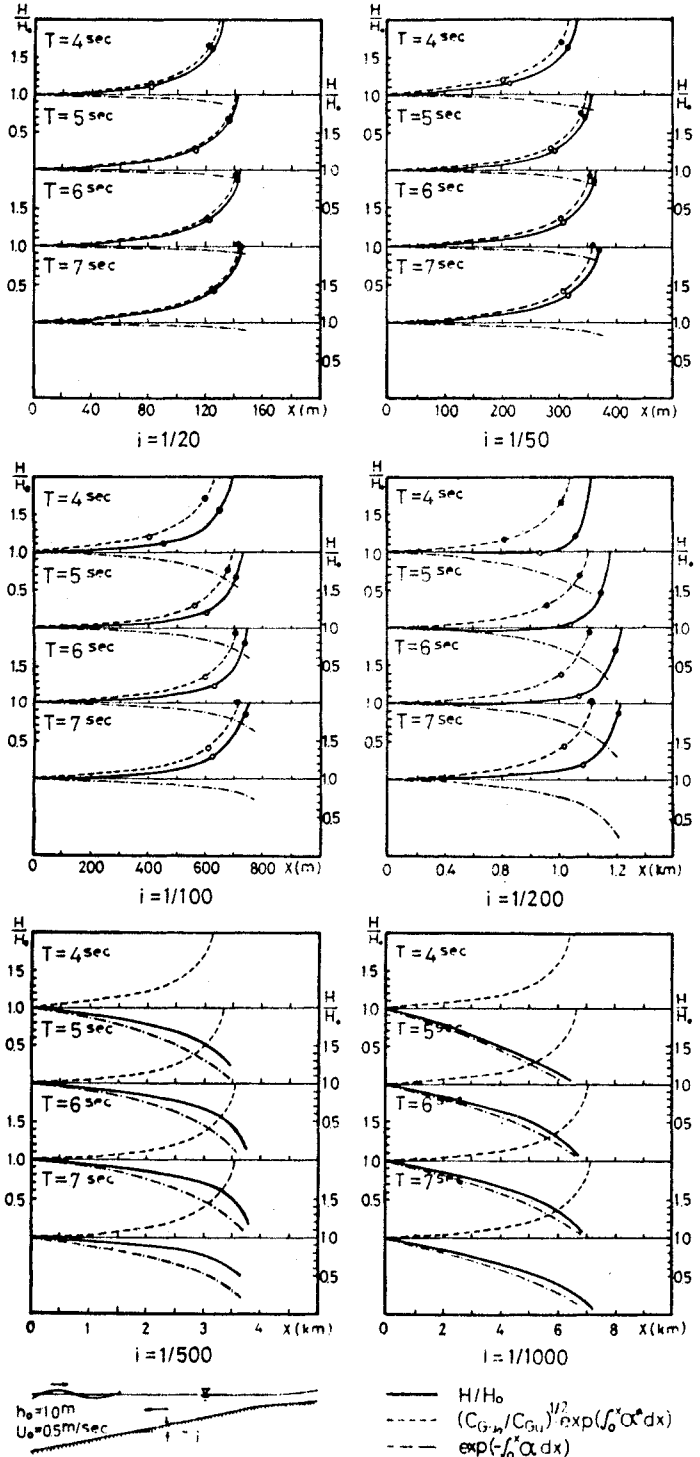


図-8 水深・流速の変化する流れを遡る波の波高変化の計算例

対してどの程度効いてくるかという点について直截的に見るために、河口から侵入した波が河川上流にさかのぼっていく過程で水深が次第に浅くなり、流速が増すような場合を想定して若干の計算を行ってみた。本論文におけるこれまでの計算が滑面の対数則に従う流れという場合のものであって、実際の河口付近の流れに対して適用するには粗面としての扱いが必要と思われるが、定性的な質性は表わせるものと思われる。

計算にあたっては式(34)を用いればよいのだが、波の種々の量の表現式の複雑さのため流速分布を考慮した表現を用いるのは実際的ではない。また、ここで想定しているようなモデルでも、流れは断面平均流速で考える方が実際的であろう。そこで、式(34)の計算に必要な量を、たとえば、 C_{ET} を補正係数 K を用いて一様流速分布の流れに対する表現と対応させ、 α については波と流れの種々の条件について計算しておき、図表化して用いるといった方法が実用上は必要であろう。その点については今後の課題として、ここでは α の役割を知るといった観点から、 C_{ET} を C_{G_u} で近似し、 α^* を式(131)で求め、 α についてはこれまでの計算に基づいて算出して計算を行った。したがって、この計算結果はLonguet-HigginsとStewartの不等流上の波高変化を表わす関係に、 α の効果を考慮したものとなる。

計算方法は次のとおりである。まず式(34)を次のように近似する。

$$\frac{H}{H_0} = \left(\frac{C_{G_{u0}}}{C_{G_u}}\right)^{1/2} e^{\int_0^x \alpha^* dx} \cdot e^{-\int_0^x \alpha dx} \dots\dots\dots (133)$$

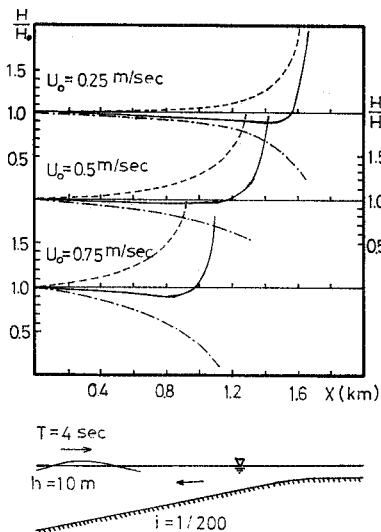


図9 流量の相違に対する波高変化の計算例

この式に含まれる積分を、波高を追跡すべき区間を n 等分して、台形公式で次のように近似する。

$$e^{\int_0^x \alpha^* dx} = e^{\frac{1}{2}(\alpha_0^* + 2\alpha_1^* + \dots + \alpha_n^*) dx} \\ = e^{\frac{1}{2}(\alpha_0^* + \alpha_1^*) dx} \cdot e^{\frac{1}{2}(\alpha_1^* + \alpha_2^*) dx} \dots \\ \cdot e^{\frac{1}{2}(\alpha_{n-1}^* + \alpha_n^*) dx} \\ e^{-\int_0^x \alpha dx} = e^{-\frac{1}{2}(\alpha_0 + \alpha_1) dx} \cdot e^{-\frac{1}{2}(\alpha_1 + \alpha_2) dx} \dots \\ \cdot e^{-\frac{1}{2}(\alpha_{n-1} + \alpha_n) dx}$$

方、

$$\left(\frac{C_{G_{u0}}}{C_{G_{un}}}\right)^{1/2} = \left(\frac{C_{G_{u0}}}{C_{G_{u1}}}\right)^{1/2} \left(\frac{C_{G_{u1}}}{C_{G_{u2}}}\right)^{1/2} \dots \left(\frac{C_{G_{un-1}}}{C_{G_{un}}}\right)^{1/2} \\ \frac{H_n}{H_0} = \frac{H_1}{H_0} \cdot \frac{H_2}{H_1} \dots \frac{H_n}{H_{n-1}} \\ \text{と表わされるから式(133)は次のように近似される。} \\ \frac{H_n}{H_0} = \prod_{i=0}^{n-1} \frac{H_{i+1}}{H_i} = \prod_{i=0}^{n-1} \left(\frac{C_{G_{ui}}}{C_{G_{ui+1}}}\right)^{1/2} \\ \cdot e^{\frac{1}{2}(\alpha_i^* + \alpha_{i+1}^*) dx} \cdot e^{-\frac{1}{2}(\alpha_i + \alpha_{i+1}) dx} \dots\dots (134)$$

そこで、波高を追跡すべき区間を n 分割して、不等流計

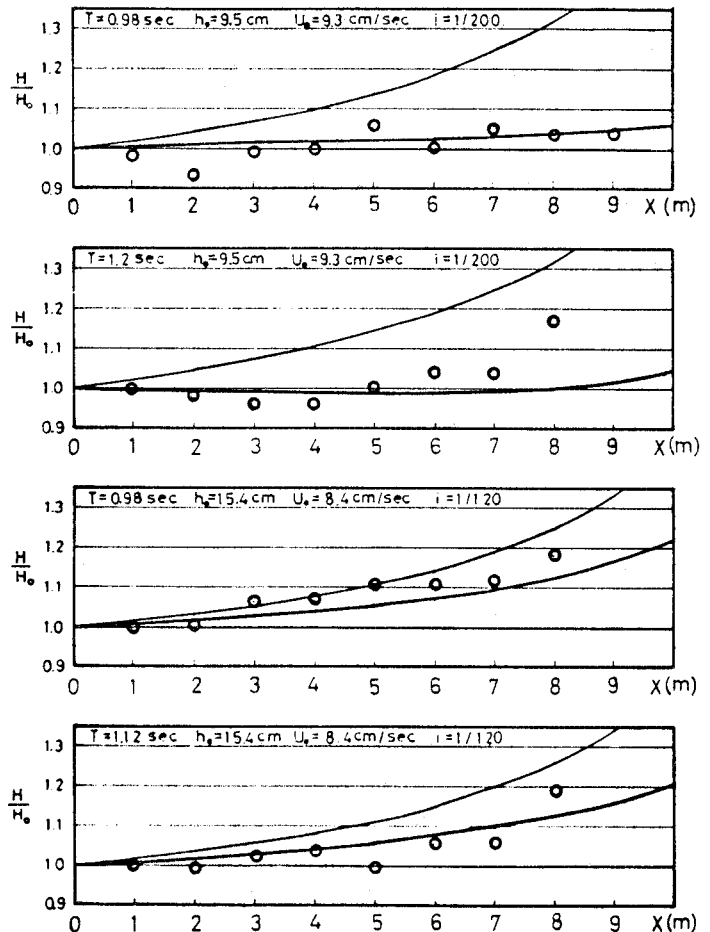


図10 実験との比較 (○印：実験値，太線：計算値，細線：Longuet-Higgins 他理論による計算値)

算により各点での水深，流速および流れ方向の流速変化 dU/dx を求め，各点において次の計算をして波高変化の概略を求めた。

$$\frac{H_{i+1}}{H_i} = \left(\frac{C_{G_{ui}}}{C_{G_{ui+1}}} \right)^{1/2} \cdot e^{1/2(\alpha_i^* + \alpha_{i+1}^*)\Delta x} \cdot e^{-1/2(\alpha_i + \alpha_{i+1})\Delta x} \dots\dots\dots(135)$$

なお， C_{G_u} は次式で求めた。

$$C_{G_u} = U + \frac{(C-U)}{2} \left\{ 1 + \frac{2mh}{\sinh 2mh} \right\} \dots\dots(136)$$

$$(C-U)^2 = (g/m) \tanh mh \dots\dots\dots(137)$$

α^* は式 (131) により， α はその点における平均流速を与えるような対数分布則に従う流れについて計算して求めた。

計算は次のような条件のもとで行った。幅は深さに比べて十分に大きく 2次元運動とみなせる。下流端 ($x=0$) で水深 $h_0=10$ m，単位幅当りの流量 $q=5$ m³/sec/m (流速 $U_{x=0}=0.5$ m/sec) とし，この流れを周期 4 秒～7 秒の波が遡るものとする。底勾配は 1/20, 1/50, 1/100, 1/200, 1/500, 1/1 000 の場合について計算した。ただし，限界水深に達する前に 1/1 000 の勾配に変わり波の遡上する範囲で跳水は生じないものとする。

計算結果は 図—8 に示した。図中の実線がこの計算による波高変化を表わし，点線は Longuet-Higgins と Stewart の理論による波高変化を表わす。一点鎖線は $\exp\left(-\int_0^x \alpha dx\right)$ を表わし，点線の値にこれを乗じたものが実線となる。波は上流に向かって流速が増し水深が減少するので波長が短くなり，波高がかなり減衰する場合以外は波形勾配が大きくなって碎波することが予想される。そこで，一つの目安として，初期波高 H_0 が 1 m, 2 m のとき，碎波に関する次の関係が適用されるものとしたときの碎波点を推定して図中に示した。

$$(H/L)_b = 0.142 \tanh(2\pi h/L)_b \dots\dots\dots(138)$$

添字 b は碎波点における値を示す。これは各点における H/L と $0.142 \tanh(2\pi h/L)$ を計算し，それぞれを結ぶ線の交点として得られる。

計算例から，底勾配が大きく流速変化が大きいときには α の影響は小さく，波高は上流に向かってほぼ Longuet-Higgins と Stewart の理論に従って増幅していくが，底勾配が小さくなって，流速変化が長い距離にわたってゆるやかになされるようになってくると α による減衰効果が効いてきて，やがては上流に向かって波高は増幅せずに減衰するようになることが推定される。また，底勾配，水深，周期が同じで，流量 q が異なる場合の計算例を 図—9 に示した。

なお，上述のようなモデルに関連して若干の実験を行ってみた。装置などについては前述のとおりである。結果は 図—10 に示す。図中の丸印は測定結果，太線は計算値，細線は Longuet-Higgins と Stewart の理論に

よるものを表わす。 i は底勾配， T は波周期， h_0, U_0 は $x=0$ における水深と流速である。この測定例 (特に $i=1/200$) のような場合には α の効果を考慮した計算による波高変化のほうがより実際の波高変化に近い結果を与えることを示している。

7. あとがき

本文では，波の伝播とともに水深や流速が変化する場合に波高が変化する機構において，流れの速度分布，水面勾配，乱れ応力などがどのように影響するかという点を明らかにすることを試みた。まず，流れの上記の性質を考慮した場合の波エネルギーの関係を求め，それらの要素が波高変化におよぼす影響を，流れが滑面に従う場合を一つのモデルとして計算し考察した。さらに不等流上を遡る波の波高変化に対してどのように効いてくるかという点について，いくつかのモデルについて示した。その結果，ポテンシャル理論では考慮されていない副次的とも考えられる流れに関する上記の要素が，特に流れの変化がゆるやかであるような場合には波高変化を考える上で，必ずしも無視し得るものではなく重要な要素になり得ることが示された。また実験的にも定性的には理論を裏付けているが， α の値に両者の間でいくぶんの差異があり，実験における側壁の効果によるところが大であろうと推定されるが，理論的には粘性解が波動境界層的な扱いによるもので十分なかどうかという点，さらに渦粘性係数の設定の仕方などにも詳細に検討の余地がある。なお現実的な問題との関連では，本文では滑面对数則に従う流れに関するものであるが，粗度を考えた取り扱が必要とされよう。また波高減衰率 α も種々の波や流れの条件下のものを求め図表化あるいは簡単な式化する必要がある。さらに，一般に流速分布が簡単な形状の場合を除いて波の諸量の表現が非常に煩雑になるため，それらを一様分布としたときのポテンシャル解と係数を用いて関連させるといったことが望まれる。これらの点については今後の課題としたい。

本研究を行うにあたり終始懇切なるご指導と多大なご支援を賜りました東北大学 岩崎敏夫教授に深甚の謝意を表します。

参 考 文 献

- 1) Unna, P.J. : Waves and tidal streams. Nature. Vol. 149, 1942.
- 2) Longuet-Higgins, M.S. & Stewart, R.W. : The changes in amplitude of short gravity waves on steady non-uniform currents. Jour. Fluid Mech. 10, 1961.
- 3) 浜田徳一：せん断流の中の表面波の性質について，第 18 回海岸工学講演会論文集，1971.
- 4) Hinze, J.O. : Turbulence. McGraw-Hill. 1959 pp. 4.
- 5) 日野幹雄・大西亮一：浅水表面波の粗底上の乱流構造，

- 第18回海岸工学講演会論文集, 1971.
- 6) 日野幹雄: 流体力学, 朝倉書店, 1974, pp. 155.
 - 7) Ippen, A.T.: Estuary and coastline hydrodynamics. McGraw-Hill. 1966, pp. 64.
 - 8) Rayleigh, J.W.S., Lord.: On progressive waves, Proc. Lond. Math. Soc., 9, 1877.
 - 9) Lundgren, H.: Turbulent currents in the presence of waves. Proc. 13th. Coastal Eng. Conf.
 - 10) 浜田徳一: 表面波による乱流境界層について, 第19回海岸工学講演会論文集, 1972.
 - 11) 榎木 亨: 河口閉そく機構に関する基礎的研究(第1報), 第12回海岸工学講演会講演集, 1965.
 - 12) 富永政英: 波と流れについて [河口に侵入してくる波および流れのある海域に発生する風波について], 海岸災害ニュース, 海岸災害総合研究班, 第6号, 1967.
 - 13) 浜田徳一・加藤 始: 流れをさかのぼる波についての一計算, 第8回海岸工学講演会講演集, 1961.
 - 14) 岩垣雄一・土屋義人・陳 活雄: 海底摩擦による波高減衰の基礎的研究(3)——層流境界層方程式の非線型項の影響について——, 第12回海岸工学講演会講演集, 1965.
 - 15) 松田義弘・深瀬恒康: 波の水粒子速度の位相のずれ, 昭和44年度日本海洋学会春季大会講演予稿集, 1969.
 - 16) 松田義弘: 振動流における位相のずれ, 第2報, 昭和46年度日本海洋学会秋季大会講演予稿集, 1971.

(1974.12.9・受付)
