

層表面にせん断力を受ける多層弾性体の応力解析

STRESS ANALYSIS OF MULTI-LAYERED ELASTIC SYSTEMS SUBJECTED TO ASYMMETRIC SURFACE SHEAR

松岡 健一*・能町 純雄**

By Kenichi MATSUOKA and Sumio NOMACHI

1. はじめに

多層弾性体の弾性問題の研究は、基礎地盤の変形・応力問題に関連して古くから2次元および3次元応力問題として数多く行われている。特に軸対称問題については、水平2層および3層弾性体に対するBurmister^{1),2)}の研究が良く知られている。Burmisterは主に2層弾性体について数多くの数値計算を行っているが、これらの問題に対する詳細な数値計算は、K.R. Peattie³⁾, A. Jones⁴⁾や植下⁵⁾らがを行っている。K.R. Peattie, A. Jonesは3層体に対して各層境界の応力の値を図および表に示し、植下は表面変位に対して詳細な検討を加えている。

また、非軸対称問題については、半無限弾性体に対して、I.N. Sneddon⁶⁾が軸対称問題で行ったHankel変換を応用した牟岐^{7),8)}の研究がある。牟岐はこのなかで、非軸対称スタンプの問題や表面にせん断力が作用する場合の解を求め数値計算を行っている。さらにWestmann⁹⁾や木村¹⁰⁾は、これを2層体に応用し表面にせん断力が作用する場合について若干の計算例をあげている。この問題の多層弾性体への応用はその後しばらく行われなかったようであるが、最近Bufler¹¹⁾が力のつり合い式と、応力とひずみの関係を表わすHookeの法則を組み合わせ、Fourier-Hankel変換を用いて無限厚板を遷移行列表示し、行列演算によって解析する解法を示しているが数値計算は行われていない。またごく最近Chan¹²⁾らは、2層体の内部に任意の集中力が作用する場合の解を求め、これを級数展開し、近似的に閉じた形にした解による数値計算も行っている。

著者らはこれまで、円柱座標における3次元応力問題を有限Fourier-Hankel変換を用いて解析している^{13)~15)}

が、標題の問題に対しても、これを利用して、Buflerらとは異なる解法を導き発表した¹⁶⁾。本論では、これを簡単な形にまとめBuflerの解より有利な無限厚板に関する遷移行列を導き、主に3層弾性体について表面にせん断力が作用する場合の数値計算を行った。

これらの問題は、舗装体および路盤を弾性体と考えたときの高速道路や空港の滑走路における車輪の制動荷重の影響の問題などに応用される。

2. 無限厚板の有限 Fourier-Hankel 変換による解

いま、図-1のように円柱座標 r, θ, z をとり、その変位成分を u, v, w とし、各応力成分を $\sigma_r, \sigma_\theta, \sigma_z, \tau_{r\theta}, \tau_{\theta z}, \tau_{zr}$ とすると円柱座標における力のつり

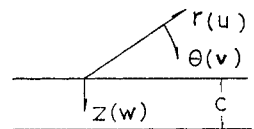


図-1 無限厚板

合い式は

$$\begin{aligned}
 & \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} & -\frac{1}{r} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{r\partial\theta} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_r \\ \sigma_\theta \\ \sigma_z \end{bmatrix} \\
 & + \begin{bmatrix} \frac{\partial}{r\partial\theta} & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial r} + \frac{2}{r} & \frac{\partial}{\partial z} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{r\partial\theta} & \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tau_{r\theta} \\ \tau_{\theta z} \\ \tau_{zr} \end{bmatrix} \\
 & = \begin{bmatrix} K_r \\ K_\theta \\ K_z \end{bmatrix} \dots\dots\dots (1)
 \end{aligned}$$

* 正会員 工修 室蘭工業大学助教授 工学部土木工学科
** 正会員 工博 北海道大学教授 工学部土木工学科

ただし、 K_r, K_θ, K_z は物体力の各方向成分である。

また、Hooke の法則は

$$\begin{bmatrix} \sigma_r \\ \sigma_\theta \\ \sigma_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (2\mu + \lambda) \frac{\partial}{\partial r} + \lambda \frac{1}{r} & \lambda \frac{\partial}{r\partial\theta} & \lambda \frac{\partial}{\partial z} \\ \lambda \frac{\partial}{\partial r} + (2\mu + \lambda) \frac{1}{r} & (2\mu + \lambda) \frac{\partial}{r\partial\theta} & \lambda \frac{\partial}{\partial z} \\ \lambda \left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} \right) & \lambda \frac{\partial}{r\partial\theta} & (2\mu + \lambda) \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} \quad (2)$$

$$\begin{bmatrix} \tau_{r\theta} \\ \tau_{\theta z} \\ \tau_{zr} \end{bmatrix} = \mu \begin{bmatrix} \frac{\partial}{r\partial\theta} & \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{r\partial\theta} \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} \quad (3)$$

式 (2), (3) の μ, λ は Lamé の弾性定数である。

無限厚板の一般解は式 (1) を境界条件を満足するように解くことにより与えられ、牟岐⁷⁾や Bufler¹¹⁾ によっても求められている。牟岐は I.N. Sneddon が行った軸対称問題の Hankel 変換による解法を、拡張された Mihell の応力関数を用いて、非軸対称問題に拡張し、無限厚板の一般解を得ているが、多層体の問題へ適用するには、積分定数の決定に多少の複雑さがある。一方 Bufler は力のつり合い式 (1) と Hooke の法則の式 (2), (3) を組合せ、3 つの変位成分 u, v, w と 3 つの応力成分 $\sigma_z, \tau_{zr}, \tau_{z\theta}$ に関して z についての一階の偏微分方程式にまとめ、これを θ 方向に有限 Fourier 変換、 r 方向に Hankel 変換し、最終的にそれぞれについて z の一階常微分方程式に変換し、これを解いている。この解は、 $z=0$ における $u, v, w, \sigma_z, \tau_{zr}, \tau_{z\theta}$ の値を積分定数として与えられるので、多層体に応用したとき境界条件の適用が容易になる。Bufler はこれを遷移行列にまとめ連立方程式の元数を減少させている。

著者らはすでに有限 Fourier-Hankel 変換を応用した円柱座標における 3 次元応力問題の一般解法を公表しているが¹⁵⁾、無限厚板の一般解はこの特別の例として導くことができる。すなわち本解法は、力のつり合い式 (1) を Hooke の法則の式 (2), (3) を考慮しつつ、 r 方向に Hankel 変換、 θ および z 方向に有限 Fourier 変換し、各変位の像関数を求めこれの逆変換により解を与えるもので、多少先の論文と重複するが解の誘導の過程を述べる。

板の厚さを c とし、式 (1) に対して

$$L = \{X_1(r) \cos m\theta \cos Nz \quad X_2(r) \sin m\theta \cos Nz \quad X_3(r) \cos m\theta \sin Nz\}^T$$

を核とする積分変換を r に対して無限区間、 θ に対して $0 \leq \theta \leq 2\pi$ 、 z に対して $0 \leq z \leq c$ の範囲で行う。

このとき Hooke の法則を考慮すると、

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty \left[(2\mu + \lambda) \left(\frac{\partial^2 X_1}{\partial r^2} - \frac{\partial X_1}{r\partial r} \right) - \mu \left(\frac{m^2}{r^2} + N^2 \right) X_1 \right] \\ & \times C_m C_n [u] - m \left\{ (\mu + \lambda) \frac{\partial X_1}{r\partial r} + 2\mu \frac{X_1}{r^2} \right\} \\ & \times S_m C_n [v] - (\mu + \lambda) N \frac{\partial X_1}{r\partial r} C_m S_n [w] \Big] dr \\ & = \int_0^\infty \left[\lambda \frac{\partial X_1}{\partial r} C_m [w] \cos Nz - X_1 C_m [\tau_{rz}] \right. \\ & \left. \cdot \cos Nz \right]_0^c dr + \int_0^\infty X_1 C_m C_n [K_r] dr \dots (4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty \left[m \left\{ (\mu + \lambda) \frac{\partial X_2}{r\partial r} - 2(2\mu + \lambda) \frac{X_2}{r} \right\} C_m C_n [u] \right. \\ & \left. + \left\{ \mu \left(\frac{\partial^2 X_2}{\partial r^2} - \frac{\partial X_2}{r\partial r} \right) - m^2 (2\mu + \lambda) \frac{X_2}{r^2} \right. \right. \\ & \left. \left. - \mu N^2 X_2 \right\} S_m C_n [v] - mN(\mu + \lambda) \frac{X_2}{r^2} \right. \\ & \left. \times C_m S_n [w] \right] dr \\ & = \int_0^\infty \left[m\lambda \frac{X_2}{r} C_m [w] - X_2 S_m [\tau_{z\theta}] \right] \\ & \left. \cdot \cos Nz \right]_0^c dr + \int_0^\infty X_2 S_m C_n [K_\theta] dr \dots (5) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty \left[N(\mu + \lambda) \left(\frac{\partial X_3}{\partial r} - \frac{X_3}{r} \right) C_m C_n [u] \right. \\ & \left. - mN(\mu + \lambda) \frac{X_3}{r} S_m C_n [v] \right. \\ & \left. + \left\{ \mu \left(\frac{\partial^2 X_3}{\partial r^2} - \frac{\partial X_3}{r\partial r} + \frac{X_3}{r^2} - m^2 \frac{X_3}{r^2} \right) \right. \right. \\ & \left. \left. - N^2 (2\mu + \lambda) X_3 \right\} C_m S_n [w] \right] dr \\ & = \int_0^\infty \left[N(2\mu + \lambda) X_3 C_m [w] \cos Nz \right]_0^c dr \\ & \left. + \int_0^\infty X_3 C_m S_n [K_z] dr \dots (6) \end{aligned}$$

ここで、 $N = n\pi/c$, $n=1, 2, 3, \dots$ である。

次に

$$a_{mrs} = C_m [u] + S_m [v], \quad b_{mrs} = C_m [u] - S_m [v] \quad (7)$$

$$g_{mrs} = C_m [\tau_{rz}] + S_m [\tau_{z\theta}], \quad h_{mrs} = C_m [\tau_{rz}] - S_m [\tau_{z\theta}] \quad (8)$$

として、式 (4), (5) に代入し $X_1 = X_2 = rJ_{m+1}(\xi r)$ とおき辺々相加えると

$$\begin{aligned} & \{ (3\mu + \lambda) \xi^2 + 2\mu N^2 \} J_{m+1} C_m [a_{mrs}] \\ & - (\mu + \lambda) \xi^2 J_{m-1} C_n [b_{mrs}] \\ & + (\mu + \lambda) \xi N J_m C_m S_m [w] \\ & = \left[\{ J_{m+1} [g_{mrs}] - \lambda \xi J_m C_m [w] \} \cos Nz \right]_0^c \\ & + J_{m+1} C_m C_n [K_r] + J_{m+1} S_m C_n [K_\theta] \dots (9) \end{aligned}$$

また同様に $X_1 = X_2 = rJ_{m-1}(\xi r)$ とおき辺々相減すれば

$$\begin{aligned} & -(\mu + \lambda)\xi^2 J_{m+1} C_n [a_{mrz}] + \{(3\mu + \lambda)\xi^2 \\ & + 2\mu N^2\} J_{m-1} C_n [b_{mrz}] \\ & + (\mu + \lambda)\xi N J_m C_m S_n [w] \\ & = \left[\{J_{m+1} [h_{mrz}] + \lambda \xi J_m C_m [w]\} \cos Nz \right]_0^c \\ & + J_{m-1} C_m C_n [K_r] - J_{m-1} S_m C_n [K_\theta] \dots (10) \end{aligned}$$

さらに式 (6) に対しても式 (7), (8) の関係を代入し, $X_3 = rJ_m(\xi r)$ として積分変換を続けければ

$$\begin{aligned} & (\mu + \lambda)\xi N \{J_{m+1} C_n [a_{mrz}] - J_{m-1} C_n [b_{mrz}]\} \\ & + \{\mu \xi^2 + (2\mu + \lambda)N^2\} J_m C_m S_n [w] \\ & = - \left[(2\mu + \lambda)N J_m C_m [w] \cdot \cos Nz \right]_0^c \\ & + J_m C_m S_n [K_z] \dots (11) \end{aligned}$$

上式中

$$\begin{aligned} C_m[f] &= \int_0^{2\pi} f \cos m\theta d\theta \\ S_m[f] &= \int_0^{2\pi} f \sin m\theta d\theta \\ C_n[f] &= \int_0^c f \cos Nz dz \\ S_n[f] &= \int_0^c f \sin Nz dz \\ J_i[f] &= \int_0^\infty f r J_i(\xi r) dr, \quad i = m-1, m, m+1 \end{aligned}$$

であり, $J_i(x)$ は i 次の第 1 種 Bessel 関数である。

式 (9)~(11) は, 式 (1) のつり合い式を積分変換してえられる各変位成分の像関数に関する連立方程式であるから, これを解き, 逆変換することにより無限厚板の各変位成分の一般解を求めることができる。

すなわち一般解は, 物体力を無視すると,

$$u = \frac{1}{\pi} \sum_m e_m \int_0^\infty \xi \{A_{m\xi z} J_{m+1}(\xi r) + B_{m\xi z} J_{m-1}(\xi r)\} d\xi \cos m\theta \dots (12)$$

$$v = \frac{1}{\pi} \sum_m \int_0^\infty \xi \{A_{m\xi z} J_{m+1}(\xi r) - B_{m\xi z} J_{m-1}(\xi r)\} d\xi \sin m\theta \dots (13)$$

$$\begin{aligned} w &= \frac{1}{\pi} \sum_m e_m \int_0^\infty \xi J_m(\xi r) \sum_{k=1}^2 \left[\left\{ Q^{(k)}(\xi z) \right. \right. \\ & + \left. \left. \frac{\mu + \lambda}{2\mu + \lambda} P^{(k)}(\xi z) \right\} D_{m\xi k} \right. \\ & + \left. \frac{\mu + \lambda}{2\mu(2\mu + \lambda)} P^{(k)}(\xi z) (\tau_{m\xi k} - \delta_{m\xi k}) \right] d\xi \\ & \dots (14) \end{aligned}$$

ただし $e_0 = 1/2, e_m = 1 (m \neq 0)$

$$\begin{aligned} A_{m\xi z} &= J_{m+1} [a_{mrz}] = \sum_{k=1}^2 \left[- \left\{ \frac{3\mu + \lambda}{2\mu(2\mu + \lambda)} \phi^{(k)}(\xi z) \right. \right. \\ & + \left. \left. \frac{\mu + \lambda}{4\mu(2\mu + \lambda)} (\phi^{(k)}(\xi z) - \psi^{(k)}(\xi z)) \right\} \tau_{m\xi k} \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & - \frac{\mu + \lambda}{4\mu(2\mu + \lambda)} (\phi^{(k)}(\xi z) + \psi^{(k)}(\xi z)) \delta_{m\xi k} \\ & + \frac{1}{2} \left\{ \frac{\lambda}{2\mu + \lambda} \phi^{(k)}(\xi z) \right. \\ & \left. - \frac{\mu + \lambda}{2\mu + \lambda} (\phi^{(k)}(\xi z) - \psi^{(k)}(\xi z)) \right\} D_{m\xi k} \left. \right] \dots (15) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B_{m\xi z} &= J_{m-1} [b_{mrz}] = \sum_{k=1}^2 \left[- \frac{\mu + \lambda}{4\mu(2\mu + \lambda)} \right. \\ & \times (\phi^{(k)}(\xi z) + \psi^{(k)}(\xi z)) \tau_{m\xi k} \\ & - \left\{ \frac{3\mu + \lambda}{2\mu(2\mu + \lambda)} \phi^{(k)}(\xi z) + \frac{\mu + \lambda}{4\mu(2\mu + \lambda)} \right. \\ & \times (\phi^{(k)}(\xi z) - \psi^{(k)}(\xi z)) \left. \right\} \delta_{m\xi k} \\ & - \frac{1}{2} \left\{ \frac{\lambda}{2\mu + \lambda} \phi^{(k)}(\xi z) - \frac{\mu + \lambda}{2\mu + \lambda} \right. \\ & \left. \times (\phi^{(k)}(\xi z) - \psi^{(k)}(\xi z)) \right\} D_{m\xi k} \left. \right] \dots (16) \end{aligned}$$

ここで, D, τ, δ は

$$D_{m\xi 1} = J_m C_m [w]_{z=0}, \quad D_{m\xi 2} = J_m C_m [w]_{z=c} \dots (17)$$

$$\tau_{m\xi 1} = J_{m+1} [g_{mrz}]_{z=0/\xi}, \quad \tau_{m\xi 2} = J_{m+1} [g_{mrz}]_{z=c/\xi} \dots (18)$$

$$\delta_{m\xi 1} = J_{m-1} [h_{mrz}]_{z=0/\xi}, \quad \delta_{m\xi 2} = J_{m-1} [h_{mrz}]_{z=c/\xi} \dots (19)$$

また, 式 (14)~(16) に含まれる関数 $P^{(k)}(\xi z), Q^{(k)}(\xi z), \phi^{(k)}(\xi z), \psi^{(k)}(\xi z)$ は Fourier 級数の無限和で次のように表わせる。

$$\left. \begin{aligned} Q^{(1)}(\xi z) &= \frac{\text{sh } \xi(c-z)}{\text{sh } \xi c}, & Q^{(2)}(\xi z) &= \frac{\text{sh } \xi z}{\text{sh } \xi c} \\ \phi^{(1)}(\xi z) &= \frac{\text{ch } \xi(c-z)}{\text{sh } \xi c}, & \phi^{(2)}(\xi z) &= \frac{\text{ch } \xi z}{\text{sh } \xi c} \\ P^{(k)}(\xi z) &= \xi z \phi^{(k)}(\xi z) - \xi c Q^{(2)}(\xi z) \phi^{(k)}(\xi c) \\ \psi^{(k)}(\xi z) &= \xi z Q^{(k)}(\xi z) - \xi c \phi^{(2)}(\xi z) \phi^{(k)}(\xi c) \\ \text{sh } x &= \sinh x, \quad \text{ch } x = \cosh x, \quad k=1, 2 \end{aligned} \right\} \dots (20)$$

次に応力成分の一般式は式 (12)~(16) を式 (2), (3) に代入して,

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \frac{1}{\pi} \sum_m e_m \int_0^\infty \left[\xi^2 J_m(\xi r) \{ \lambda d + 2\mu(A_{m\xi z} - B_{m\xi z}) \right. \\ & - 2\mu \frac{\xi}{r} \{(m+1)A_{m\xi z} J_{m+1}(\xi r) \\ & \left. - (m-1)B_{m\xi z} J_{m-1}(\xi r)\} \right] d\xi \cos m\theta \dots (21) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_\theta &= \frac{1}{\pi} \sum_m e_m \int_0^\infty \left[\xi^2 J_m(\xi r) \cdot \lambda d \right. \\ & + 2\mu \frac{\xi}{r} \{(m+1)A_{m\xi z} J_{m+1}(\xi r) \\ & \left. - (m-1)B_{m\xi z} J_{m-1}(\xi r)\} \right] d\xi \cos m\theta \dots (22) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_z = & \frac{1}{\pi} \sum_m e_m \int_0^\infty \xi^2 J_m(\xi r) \sum_{k=1}^2 \left[-\frac{2\mu(\mu+\lambda)}{2\mu+\lambda} \right. \\ & \times \{ \phi^{(k)}(\xi z) + \psi^{(k)}(\xi z) \} D_{m\xi k} \\ & - \left\{ \frac{\lambda}{2\mu+\lambda} \phi^{(k)}(\xi z) - \frac{\mu+\lambda}{2\mu+\lambda} (\phi^{(k)}(\xi z) \right. \\ & \left. \left. - \psi^{(k)}(\xi z)) \right\} (\gamma_{m\xi k} - \delta_{m\xi k}) \right] d\xi \cos m\theta \\ & \dots\dots\dots (23) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tau_{r\theta} = & \frac{1}{\pi} \sum_m \int_0^\infty \mu \left[\xi^2 J_m(\xi r) (A_{m\xi z} - B_{m\xi z}) \right. \\ & - \frac{2\xi}{r} \{ (m+1) A_{m\xi z} J_{m+1}(\xi r) \\ & \left. + (m-1) B_{m\xi z} J_{m-1}(\xi r) \} \right] d\xi \sin m\theta \dots (24) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tau_{\theta z} = & \frac{1}{\pi} \sum_m \int_0^\infty \xi^2 [L_{m\xi z} J_{m+1}(\xi r) \\ & - T_{m\xi z} J_{m-1}(\xi r)] d\xi \sin m\theta \dots\dots\dots (25) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tau_{zr} = & \frac{1}{\pi} \sum_m e_m \int_0^\infty \xi^2 [L_{m\xi z} J_{m+1}(\xi r) \\ & + T_{m\xi z} J_{m-1}(\xi r)] d\xi \cos m\theta \dots\dots\dots (26) \end{aligned}$$

となる。ただし

$$\begin{aligned} A = & - \sum_{k=1}^2 \phi^{(k)}(\xi z) \left\{ \frac{1}{2\mu+\lambda} (\gamma_{m\xi k} - \delta_{m\xi k}) \right. \\ & \left. + \frac{2\mu}{2\mu+\lambda} D_{m\xi k} \right\} \dots\dots\dots (27) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L_{m\xi z} = & \sum_{k=1}^2 \left[Q^{(k)}(\xi z) \gamma_{m\xi k} - \frac{\mu+\lambda}{2\mu+\lambda} P^{(k)}(\xi z) \right. \\ & \left. \times \left\{ \frac{1}{2} (\gamma_{m\xi k} - \delta_{m\xi k}) + \mu D_{m\xi k} \right\} \right] \dots\dots (28) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T_{m\xi z} = & \sum_{k=1}^2 \left[Q^{(k)}(\xi z) \delta_{m\xi k} + \frac{\mu+\lambda}{2\mu+\lambda} P^{(k)}(\xi z) \right. \\ & \left. \times \left\{ \frac{1}{2} (\gamma_{m\xi k} - \delta_{m\xi k}) + \mu D_{m\xi k} \right\} \right] \dots\dots (29) \end{aligned}$$

以上が無限厚板の有限 Fourier-Hankel 変換による変位および応力成分の一般解である。上式中の $D_{m\xi k}$, $\gamma_{m\xi k}$, $\delta_{m\xi k}$ は式 (17)~(19) に示すように、厚板境界の変位および応力で与えられるので、Büfeler の解と形は異なるが、やはり積分定数が境界値で与えられることになる。積分定数は境界条件を満足するように決定されるが、この場合境界条件の取扱いも簡単になる。また上の解は厚板のみを対象とする場合にも Büfeler の解より境界条件の取扱いが容易になる。式 (12)~(16) および式 (20)~(29) において厚板 c を無限大とすれば半無限体の解となり、 $m=0$ とおけば軸対称厚板問題の解となる。

3. 境界の変位および応力の遷移行列表示

境界の変位および応力で与えられた解を変形して、 $z=0$ における変位 u, v, w および応力 $\sigma_z, \tau_{zr}, \tau_{z\theta}$ で、 $z=c$ におけるこれらの値を与えることができる。すな

わち、境界の各変位および応力の遷移行列表示を行うことができる。解析を進めるにあたり次の記号を設ける。

$$\begin{aligned} \epsilon_{m\xi 1} = & \int_0^{2\pi} \int_0^\infty \sigma_z|_{z=0} r J_m(\xi r) \cos m\theta dr d\theta \\ \epsilon_{m\xi 2} = & \int_0^{2\pi} \int_0^\infty \sigma_z|_{z=c} r J_m(\xi r) \cos m\theta dr d\theta \\ E_{m\xi 1} = & (A_{m\xi z} - B_{m\xi z})|_{z=0} \\ E_{m\xi 2} = & (A_{m\xi z} - B_{m\xi z})|_{z=c} \\ F_{m\xi 1} = & (A_{m\xi z} + B_{m\xi z})|_{z=0} \\ F_{m\xi 2} = & (A_{m\xi z} + B_{m\xi z})|_{z=c} \\ \alpha_{m\xi k} = & \gamma_{m\xi k} - \delta_{m\xi k}, \quad \beta_{m\xi k} = \gamma_{m\xi k} + \delta_{m\xi k} \end{aligned}$$

また式 (20) から $\phi^{(1)}(\xi c) = -\phi^{(2)}(0)$, $\phi^{(2)}(\xi c) = -\phi^{(1)}(0)$, $\psi^{(1)}(\xi c) = -\psi^{(2)}(0)$, $\psi^{(2)}(\xi c) = -\psi^{(1)}(0)$ であるから、これらを簡単に次のようにおく。

$$\left. \begin{aligned} \phi_k = & \phi^{(k)}(0), \quad \psi_k = \psi^{(k)}(0) \\ \Phi_k = & \phi_k + \psi_k, \quad \Psi_k = \phi_k - \psi_k \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (30)$$

(1) 境界にせん断力がない場合

この場合 $\tau = \delta = 0$ であるから式 (23), (30) から

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \epsilon_{m\xi 1} \\ \epsilon_{m\xi 2} \end{bmatrix} = & -\frac{2\mu(\mu+\lambda)}{2\mu+\lambda} \begin{bmatrix} \Phi_1 & \Phi_2 \\ -\Phi_2 & -\Phi_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_{m\xi 1} \\ D_{m\xi 2} \end{bmatrix} \\ & \dots\dots\dots (31) \end{aligned}$$

となるが、これを変形すると

$$B_c = K_b \cdot B_0 \dots\dots\dots (32)$$

$$B_c = \{D_{m\xi 2} \quad \epsilon_{m\xi 2}\}^T, \quad B_0 = \{D_{m\xi 1} \quad \epsilon_{m\xi 1}\}^T \dots (33)$$

$$K_b = -\frac{1}{\Phi_2} \begin{bmatrix} \Phi_1 & \frac{\mu+\lambda}{2\mu(\mu+\lambda)} \\ \frac{2\mu(\mu+\lambda)}{\mu+\lambda} (\Phi_1^2 - \Phi_2^2) & \Phi_1 \end{bmatrix} \dots\dots\dots (34)$$

(2) 境界にせん断力が作用する場合

式 (15) から式 (16) を減ずると

$$\begin{aligned} A_{m\xi z} - B_{m\xi z} = & \sum_{k=1}^2 \left[-\left\{ \frac{1}{2\mu+\lambda} \phi^{(k)}(\xi z) \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{\mu+\lambda}{2\mu(2\mu+\lambda)} (\phi^{(k)}(\xi z) + \psi^{(k)}(\xi z)) \right\} \alpha_{m\xi k} \right. \\ & \left. + \left\{ \frac{\lambda}{2\mu+\lambda} \phi^{(k)}(\xi z) - \frac{\mu+\lambda}{2\mu+\lambda} (\phi^{(k)}(\xi z) \right. \right. \\ & \left. \left. - \psi^{(k)}(\xi z)) \right\} D_{m\xi k} \right] \dots\dots\dots (35) \end{aligned}$$

式 (15) と式 (16) を加えさせると

$$A_{m\xi z} + B_{m\xi z} = -\sum_{k=1}^2 \frac{1}{\mu} \phi^{(k)}(\xi z) \beta_{m\xi k} \dots\dots\dots (36)$$

式 (36), (30) から

$$\begin{bmatrix} F_{m\xi 1} \\ F_{m\xi 2} \end{bmatrix} = -\frac{1}{\mu} \begin{bmatrix} \phi_1 & \phi_2 \\ -\phi_2 & -\phi_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_{m\xi 1} \\ \beta_{m\xi 2} \end{bmatrix} \dots\dots\dots (37)$$

これを変形すると

$$F_c = K_f \cdot F_0 \dots\dots\dots (38)$$

$$F_c = \{F_{m\xi 2} \beta_{m\xi 2}\}^T, F_0 = \{F_{m\xi 1} \beta_{m\xi 1}\}^T \dots (39)$$

$$K_f = -\frac{1}{\phi_2} \begin{bmatrix} \phi_1 & \mu \\ \frac{1}{\mu}(\phi_1^2 - \phi_2^2) & \phi_1 \end{bmatrix} \dots (40)$$

また式 (23), (30), (35) から

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{m\xi 1} \\ \varepsilon_{m\xi 2} \\ E_{m\xi 1} \\ E_{m\xi 2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_{m\xi 1} \\ D_{m\xi 2} \\ \alpha_{m\xi 1} \\ \alpha_{m\xi 2} \end{bmatrix} \dots (41)$$

$$a_{11} = -a_{22} = -\frac{2\mu(\mu+\lambda)}{2\mu+\lambda}\phi_1$$

$$a_{12} = -a_{21} = -\frac{2\mu(\mu+\lambda)}{2\mu+\lambda}\phi_2 \nearrow$$

$$K_d = \frac{1}{\phi_2} \begin{bmatrix} \phi_1\phi_2 + \frac{\mu+\lambda}{2\mu+\lambda}(\phi_2\psi_1 - \phi_1\psi_2) & -\frac{\lambda}{2\mu+\lambda}\phi_2 + \frac{\mu+\lambda}{2\mu+\lambda}\psi_2 \\ \frac{\mu}{2\mu+\lambda}\phi_2(\phi_1^2 + \phi_2^2) - \frac{\mu+\lambda}{2\mu+\lambda} \times (2\phi_1\phi_2\psi_1 - \phi_1^2\psi_2 + \phi_2^2\psi_2) & \phi_1\phi_2 - \frac{\mu+\lambda}{2\mu+\lambda}(\phi_2\psi_1 - \phi_1\psi_2) \\ -\frac{2\mu(\mu+\lambda)}{2\mu+\lambda}(\phi_2\psi_1 - \phi_1\psi_2) & \frac{2\mu(\mu+\lambda)}{2\mu+\lambda}\phi_2 \\ \frac{2\mu(\mu+\lambda)}{2\mu+\lambda}\{\phi_2(\phi_1^2 + \phi_2^2) + \phi_1(2\phi_1\psi_1 - \phi_1\psi_2)\} & \frac{2\mu(\mu+\lambda)}{2\mu+\lambda}(\phi_2\psi_1 - \phi_1\psi_2) \\ \frac{\mu+\lambda}{2\mu(2\mu+\lambda)}(\phi_2\psi_1 - \phi_1\psi_2) & \frac{1}{2\mu+\lambda}\phi_2 + \frac{\mu+\lambda}{2\mu(2\mu+\lambda)}\psi_2 \\ \frac{3\mu+\lambda}{2\mu(2\mu+\lambda)}\phi_2(\phi_1^2 + \phi_2^2) - \frac{\mu+\lambda}{2\mu(2\mu+\lambda)} \times (2\phi_1\phi_2\psi_1 - \phi_1^2\psi_2 + \phi_2^2\psi_2) & -\frac{\mu+\lambda}{2\mu(2\mu+\lambda)}(\phi_2\psi_1 - \phi_1\psi_2) \\ \phi_1\phi_2 - \frac{\mu+\lambda}{2\mu+\lambda}(\phi_2\psi_1 - \phi_1\psi_2) & \frac{\lambda}{2\mu+\lambda}\phi_2 - \frac{\mu+\lambda}{2\mu+\lambda}\psi_2 \\ -\frac{\mu}{2\mu+\lambda}\phi_2(\phi_1^2 + \phi_2^2) + \frac{\mu+\lambda}{2\mu+\lambda} \times (2\phi_1\phi_2\psi_1 - \phi_1^2\psi_2 + \phi_2^2\psi_2) & \phi_1\phi_2 + \frac{\mu+\lambda}{2\mu+\lambda}(\phi_2\psi_1 - \phi_1\psi_2) \end{bmatrix} \dots (44)$$

以上式 (38) と (42) が境界にせん断が作用するときの境界値の遷移行列であるが、この場合境界値の変位および応力を F, β の2つのものと $D, E, \alpha, \varepsilon$ の4つのものに分離することができる。したがって変位 u, v, w 応力 $\sigma_z, \tau_{xz}, \tau_{z\theta}$ をそのまま遷移行列表示する Butler の方法に比較し行列の大きさを減少させることになる。

4. 多層弾性体の解法

多層弾性体は無限厚板を各層境界の境界条件を満足するように重ね合わせるにより解析することができる。いま多層弾性体を 図-2 に示すように、層境界を表面から数えて、 $0, 1, \dots, i, \dots, n-1$ とし、 z 座標は各層で局所座標をとる。 $i-1, i$ 間の層厚、弾性定数、変位お

$$a_{13} = -a_{31} = -a_{24} = a_{42} = -\frac{\lambda}{2\mu+\lambda}\phi_1 + \frac{\mu+\lambda}{2\mu+\lambda}\psi_1$$

$$a_{14} = a_{41} = -a_{23} = -a_{32} = -\frac{\lambda}{2\mu+\lambda}\phi_2 + \frac{\mu+\lambda}{2\mu+\lambda}\psi_2$$

$$a_{33} = -a_{44} = -\frac{1}{2\mu+\lambda}\phi_1 + \frac{\mu+\lambda}{2\mu(2\mu+\lambda)}\phi_1$$

$$a_{34} = -a_{43} = -\frac{1}{2\mu+\lambda}\phi_2 + \frac{\mu+\lambda}{2\mu(2\mu+\lambda)}\phi_2$$

式 (41) を変形すると

$$D_c = K_d \cdot D_0 \dots (42)$$

$$\left. \begin{aligned} D_c &= \{D_{m\xi 2} \ E_{m\xi 2} \ \alpha_{m\xi 2} \ \varepsilon_{m\xi 2}\}^T \\ D_0 &= \{D_{m\xi 1} \ E_{m\xi 1} \ \alpha_{m\xi 1} \ \varepsilon_{m\xi 1}\}^T \end{aligned} \right\} \dots (43)$$

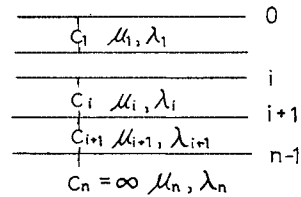


図-2 多層弾性体

よび応力をサフィックス i を付して表わし、式中の関数などもサフィックス i を付するものとする。

(1) 層境界にせん断力のない場合

層境界にせん断力はないが、変位 w および応力 σ_z は連続であるとすれば、このときの境界条件は

$$w_i)_{z=c_i} = w_{i+1})_{z=0}, \sigma_z)_{z=c_i} = \sigma_z)_{i+1})_{z=0} \dots (45)$$

$$\therefore B_{c,i} = B_{0,i+1} \dots\dots\dots (45)$$

式 (32) から

$$B_{c,i} = K_{b,i} \cdot B_{c,i-1}, \quad B_{c,1} = K_{b,1} \cdot B_{0,1} \dots\dots (46)$$

$$\therefore B_{c,n-1} = K_{b,n-1} \dots K_{b,2} \cdot K_{b,1} \cdot B_{0,1} = K_{b,T} \cdot B_{0,1} \dots\dots (46)'$$

層表面における境界条件は

$$\sigma_{z,i} z=0 = p(r, \theta), \quad \therefore \varepsilon_{m\xi i} |_{\xi=1} = J_m C_m [p(r, \theta)] \dots\dots (47)$$

ただし、 $p(r, \theta)$ は層表面に作用する直応力である。

さらに n 層は半無限体であるとするれば、式 (23) から

$$R_b \cdot B_{0,n} = R_b \cdot B_{c,n-1} = 0 \dots\dots (48)$$

$$R_b = \left\{ \begin{array}{l} \frac{2\mu_n(\mu_n + \lambda_n)}{2\mu_n + \lambda_n} \phi_{1,n} \quad 1 \\ \frac{\lambda_n}{2\mu_n + \lambda_n} \phi_{1,n} - \frac{\mu_n + \lambda_n}{2\mu_n(2\mu_n + \lambda_n)} \psi_{1,n} \quad 0 \end{array} \right\} \dots\dots (49)$$

式 (46)', (48) から

$$R_b \cdot K_{b,T} \cdot B_{0,1} = 0 \dots\dots (50)$$

となり、式 (47) を用いて式 (50) から未知量 $D_{m\xi i} |_{\xi=1}$ が容易に求まり、各境界値が求まるので 2. で求めた一般式から各層の変位・応力を求めることができる。

(2) 層境界にせん断力がある場合

このとき各境界で変位および応力が連続しているものとする

$$\left. \begin{array}{l} u_i |_{z=c_i} = u_{i+1} |_{z=0}, \quad v_i |_{z=c_i} = v_{i+1} |_{z=0} \\ w_i |_{z=c_i} = w_{i+1} |_{z=0}, \quad \tau_{\theta z i} |_{z=c_i} = \tau_{\theta z, i+1} |_{z=0} \\ \tau_{zr, i} |_{z=c_i} = \tau_{zr, i+1} |_{z=0}, \quad \sigma_{z, i} |_{z=c_i} = \sigma_{z, i+1} |_{z=0} \end{array} \right\} \dots\dots (51)$$

$$\therefore D_{c,i} = D_{0,i+1}, \quad F_{c,i} = F_{0,i+1} \dots\dots (51)'$$

式 (38) および式 (42) から

$$F_{c,i} = K_{f,i} \cdot F_{c,i-1}, \quad F_{c,1} = K_{f,1} \cdot F_{0,1} \dots\dots (52)$$

$$D_{c,i} = K_{d,i} \cdot D_{c,i-1}, \quad D_{c,1} = K_{d,1} \cdot D_{0,1} \dots\dots (53)$$

$$F_{c,n-1} = K_{f,n-1} \dots K_{f,2} K_{f,1} \cdot F_{0,1} = K_{f,T} \cdot F_{0,1} \dots\dots (54)$$

$$D_{c,n-1} = K_{d,n-1} \dots K_{d,2} K_{d,1} \cdot D_{0,1} = K_{d,T} \cdot D_{0,1} \dots\dots (55)$$

層表面における境界条件は式 (47) および

$$\left. \begin{array}{l} \tau_{rz, i} |_{z=0} = q_{rz}(r, \theta), \quad \tau_{\theta z, i} |_{z=0} = q_{\theta z}(r, \theta) \\ \therefore r_{m\xi i} |_{\xi=1} = J_{m+1} [C_m [q_{rz}] + S_m [q_{\theta z}]] / \xi \\ \delta_{m\xi i} |_{\xi=1} = J_{m-1} [C_m [q_{rz}] - S_m [q_{\theta z}]] / \xi \end{array} \right\} \dots\dots (56)$$

ただし q_{rz} , $q_{\theta z}$ は表面に作用するせん断力である。

また n 層は半無限体であるとするれば、式 (23), (35) および式 (36) から

$$\left. \begin{array}{l} R_d \cdot D_{0,n} = R_d \cdot D_{c,n-1} = 0 \\ R_f \cdot F_{0,n} = R_f \cdot F_{c,n-1} = 0 \end{array} \right\} \dots\dots (57)$$

$$R_d = \left[\begin{array}{ll} \frac{2\mu_n(\mu_n + \lambda_n)}{2\mu_n + \lambda_n} \phi_{1,n} & 0 \\ -\frac{\lambda_n}{2\mu_n + \lambda_n} \phi_{1,n} + \frac{\mu_n + \lambda_n}{2\mu_n + \lambda_n} \psi_{1,n} & 1 \end{array} \right]$$

$$\left[\begin{array}{ll} \frac{\lambda_n}{2\mu_n + \lambda_n} \phi_{1,n} - \frac{\mu_n + \lambda_n}{2\mu_n + \lambda_n} \psi_{1,n} & 1 \\ \frac{1}{2\mu_n + \lambda_n} \phi_{1,n} - \frac{\mu_n + \lambda_n}{2\mu_n(2\mu_n + \lambda_n)} \psi_{1,n} & 0 \end{array} \right] \dots\dots (58)$$

$$R_f = \{1 \quad \phi_{1,n} / \mu_n\} \dots\dots (59)$$

式 (54), (55) を式 (57) に代入し式 (47), (56) の条件を用いて D, E については 2 元連立方程式, F についてはただちに求められる。またもし各層境界にせん断力は存在しても表面におけるせん断力 q_{rz} , $q_{\theta z}$ が零であれば F は存在せず D のみとなり解析は簡単になる。各層における変位・応力は 2. で求めた一般式から計算される。

以上有限 Fourier-Hankel 変換による無限厚板の一般解から導かれた遷移行列を用いた多層弾性体の解法を示したが、本解法では、境界における変位・応力を組合せることにより行列の元数を減少させることができ、特別な場合 (各境界にせん断力がない場合、表面のみせん断力がない場合など) の取扱いも容易になる。

5. 数値計算

数値計算は 2 層および 3 層体に対して行った。表層面にはせん断力のみ作用するものとし、各層の境界では変位・応力とも連続であるとする (4. (2) の場合)。表層面に作用するせん断力の Fourier-Hankel 変換は

a) 半径 a の円内に一方向に一樣なせん断力が作用するとき：分布は次のようになる

$$\tau_{zr} = -q \cos \theta, \quad \tau_{z\theta} = q \sin \theta$$

したがって式 (56) から

$$r_{m\xi i} |_{\xi=1} = 0, \quad \delta_{m\xi i} |_{\xi=1} = -\pi a q J_1(\xi a) / \xi^2, \quad (m=1); 0, (m \neq 1) \dots (60)$$

b) 半径 a の円内に一方向に変化するせん断力が作用するとき：分布を次のように仮定する

$$\left. \begin{array}{l} \tau_{zr} = -q \sqrt{1-r^2/a^2} \cos \theta, \quad \tau_{z\theta} = q \sqrt{1-r^2/a^2} \sin \theta \\ \therefore r_{m\xi i} |_{\xi=1} = 0, \quad \delta_{m\xi i} |_{\xi=1} = -\pi \sqrt{2\pi a} / \xi q J_{3/2}(\xi a) / \xi^2, \\ (m=1); 0, (m \neq 1) \dots\dots (61) \end{array} \right\}$$

c) 中心に集中せん断力が作用するとき：

$$r_{m\xi i} |_{\xi=1} = 0, \quad \delta_{m\xi i} |_{\xi=1} = -Q / \xi, \quad (m=1); 0, (m \neq 1) \dots\dots (62)$$

(1) 2 層体の表面に円形に等分布せん断力が作用する場合

この場合についてはすでに Westmann⁹⁾ や木村¹⁰⁾ が解析しているが数値計算例はあまり多くなく、Westmann の計算は表面における w と基層境界面における τ_{zr} の値のみであり、木村はせん断応力 $\tau_{z\theta}$, τ_{zr} のみを対象と

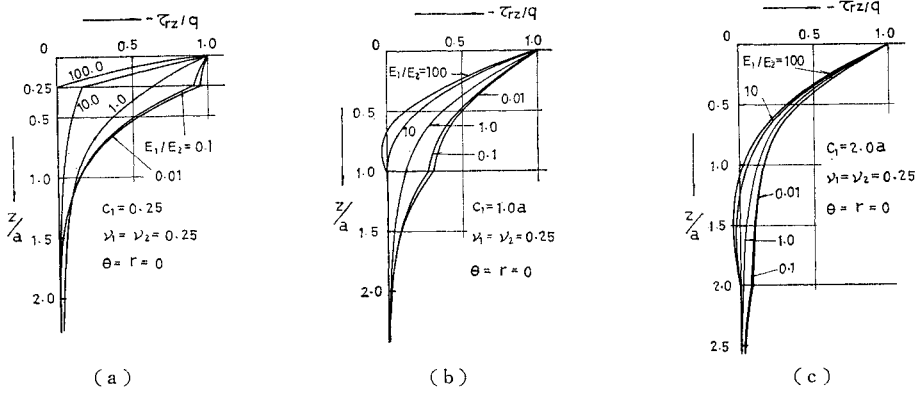


図-3 τ_{rz} の z 方向の分布 (2層体)

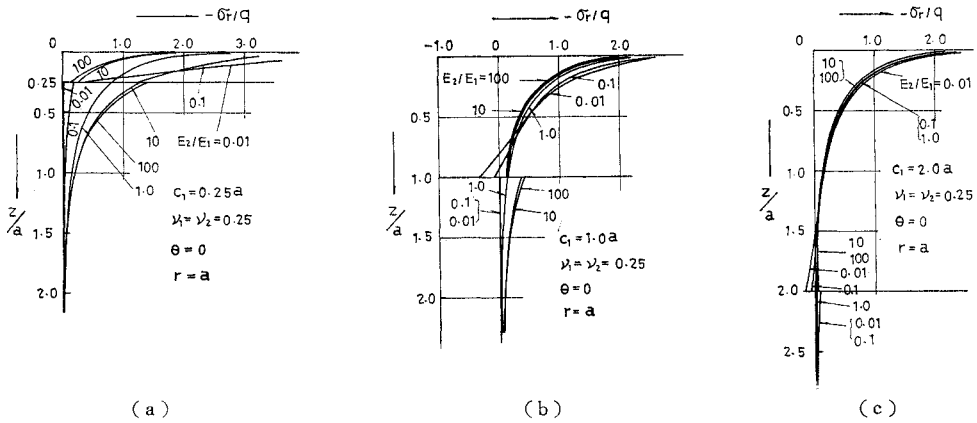


図-4 σ_r の z 方向の分布 (2層体)

している。これらの値は他の変位や応力に比べ小さな値で、むしろこの場合には外力方向の変位や半径方向応力が大きな値となるので、これらも考慮して解析する。数値計算は、表層の厚さと弾性定数を種々変化させて行った。

図-3は荷重中心におけるせん断応力の z 方向の分布を示したものである。図-3 (a) に示すように表層の弾性係数が大きいときは層厚が薄い場合でもせん断力は表層で吸収されている。また表層厚が荷重直径と等しく ($c_1 = 2a$) ならば半無限体 ($E_1 = E_2$) の場合と比較してそれほど差がなくなる (図-3 (c) 参照)。

図-4には $r=a, \theta=0$ における σ_r の分布を示した。いずれも $z=0$ では半無限体と同様無限大となるが、特に表層が薄く弾性係数の大きな場合は表層中で急激に減少し、基層にはほとんど応力を生じない。しかし表層の弾性係数の小さな場合は表層中では同じように急激に減少するが、基層面で外力のせん断力と同じ位の応力を生じている。また図-4 (b), (c) のように σ_r は表層厚が厚くなれば、その分布が半無限体の場合と同じになり、 $c_1 = a$ 位でも境界付近で多少差があるもののほとんど半無

限体と一致している。 τ_{rz} と σ_r を比較するとどちらもほぼ同じ傾向であるが、表層の弾性係数の小さな場合には基層表面で σ_r は τ_{rz} の 1.5 倍位になっている。

図-5には表面の荷重中心における外力方向の変位を弾性係数比、表層厚およびポアソン比を変化させて示したが、いずれの弾性係数比でも層厚とともに急激に収束している。すなわち、ポアソン比 $\nu = 0.25$ のとき、 $E_2/E_1 = 0.01$ では、 $c_1 = 0$ の値は図には示されていないが当然 $c_1 = \infty$ の値の 100 倍であり、 $c_1 = 0.5a$ では約 4 倍、 $E_2/E_1 = 10$ では $c_1 = 0$ の 0.1 倍から $c_1 = 0.5a$ で約 0.55 倍となっている。他の場合も同様であり、ポアソン比

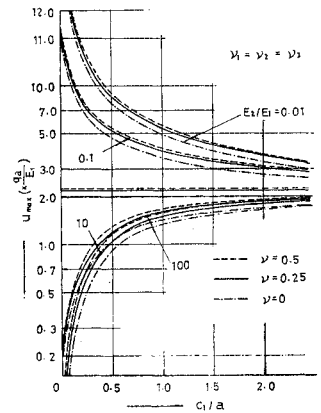


図-5 u_{max} と表層厚の関係

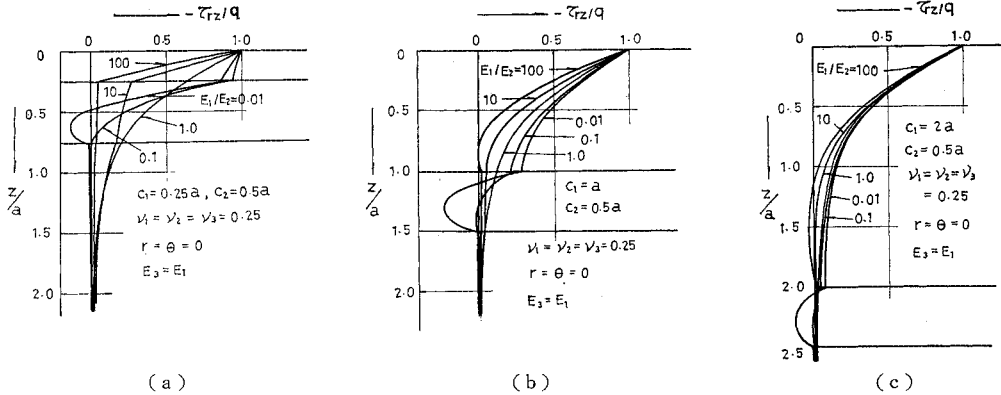


図-6 τ_{rz} の z 方向の分布 (3層体)

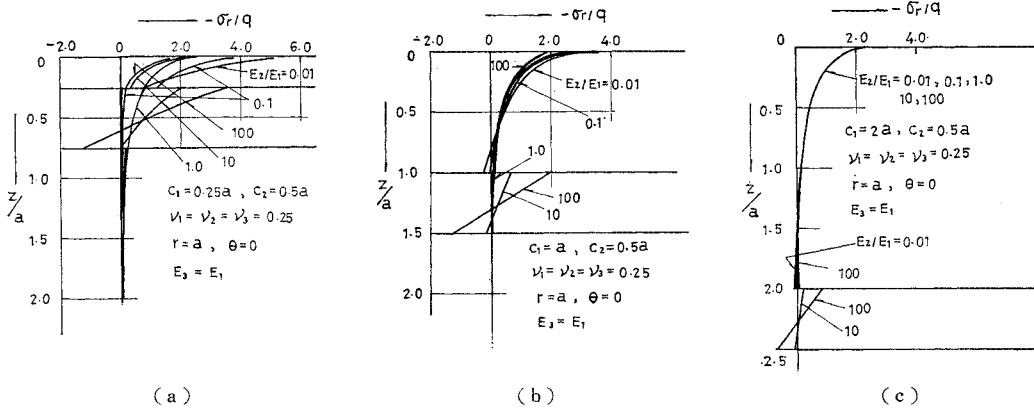


図-7 σ_r の z 方向の分布 (3層体)

の違いによる差はわずかである。

(2) 3層体の表面に円形に等分布せん断力が作用する場合

半無限体中に層厚が一定で弾性係数の異なる層が任意の深さにある場合を、弾性係数比および深さを変化させ3層体として計算した。表面の載荷中心におけるせん断応力 τ_{rz} を図-6 に示したが、異質な層の位置が深くなれば、全体として2層体の場合と大差ないが、第2層の弾性係数が大となれば、この層でかなり大きな逆向きのせん断応力 ($c_1=2a$ で約 $0.13q$) が生じている。 c_1 が小さいときは第2層の弾性係数にかなり影響をうけ、 E_1/E_2 が大であればせん断力は表層で、小であれば第2層で吸収される。いずれも基層への影響は小さい。

半径方向応力 σ_r は図-7 に示すように、第2層の弾性係数の大きい時に特徴がある。第2層の位置に関係なく曲げを受ける板のような分布をし、この傾向は表層が薄いほど強く、 $E_2/E_1=100$ のとき $c_1=0.25a$ で $\sigma_{r,max} \approx -3.5q$ 、 $c_1=2a$ で $\sigma_{r,max} \approx -0.85q$ となっている。

図-8~10 に各断面における τ_{rz} 、 σ_r 、 σ_z の半径方向

の分布を示した。 $c_1=c_2=0.5a$ 、 $\nu_1=\nu_2=\nu_3=0.25$ で $E_2/E_1=100$ および 0.01 の場合であるが、 $E_2/E_1=0.01$ のとき τ_{rz} は前述のように断面が深くなるほど応力は急激に減少し、第2層以下ではほとんど零となるが、第1層での r 方向の分布はわりあいゆるやかである。また σ_r

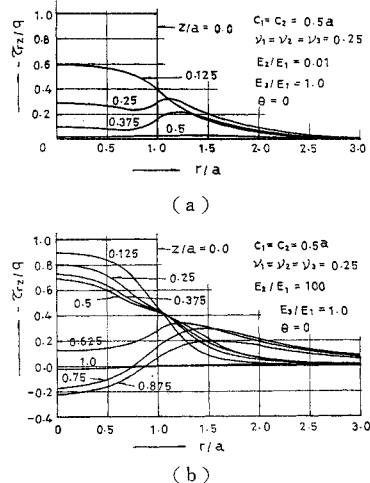
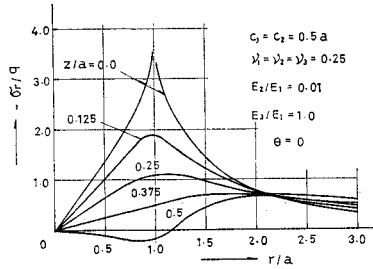
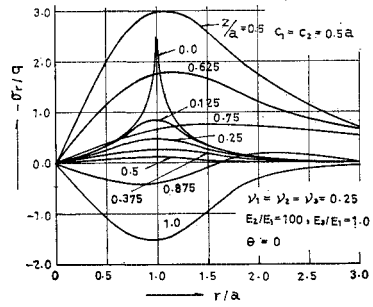


図-8 τ_{rz} の r 方向の分布

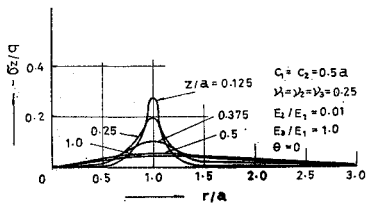


(a)

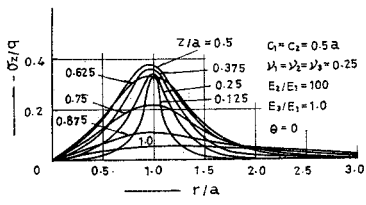


(b)

図-9 σ_r の r 方向の分布



(a)



(b)

図-10 σ_z の r 方向の分布

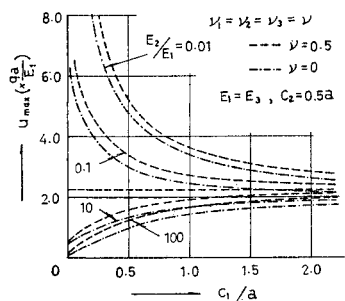


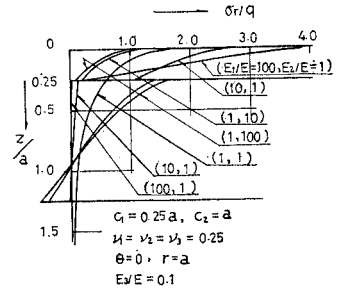
図-11 u_{max} と異質な層の深さとの関係

はやはり第2層以下ではほとんど零となり、表層での r 方向の分布はかなり広範囲である。一方 σ_z は一般に小さく、表層での r 方向の分布はかなり局部的である。 $E_2/E_1=100$ のときは τ_{rz} の分布は第2層でも部分的にかなり大きく ($z=0.625a, r=1.25a$ で $\tau_{rz} \approx 0.35q$) 複雑な分布をしている。 σ_r, σ_z については、第2層でもかなり大きな値を示し r 方向の分布もかなり広範囲である。

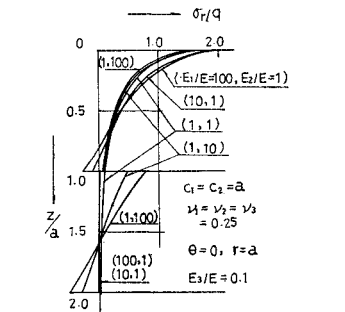
図-11 には第2層の位置および弾性係数比と外力方向変位 u の最大値の関係を示した。結果はポアソン比 0 と 0.5 に対するものであるがどちらもほぼ同じ傾向である。すなわち、この場合には第2層の厚さが一定であるから、 c_1 の変化とともに第1層の厚さが $0.5a$ の2層体における値から半無限体の値に変化し、 $c_1=2a$ では2層体と同様かなり半無限体の値に近い。

(3) 3層体の表面に変化するせん断力が作用する場合

(1) および (2) では、多層体の表面にせん断力をうけるとき一般的な影響を検討するため、円形等分布せん断力を取扱ったが、この場合表面における半径方向応力 σ_r は外力の作用境界 ($r=a$) で半無限体と同様無限大となり、多層体の実際的な応用として考えられる舗装体などにおける車輪の制動荷重などの影響を検討するためには、等分布せん断力を仮定することは不都合と思われる。そのためここではせん断力の向きは一定で半径方向に変化するせん断力が作用する場合について計算する。せん断力の分布は、前に述べた (b) の分布を仮定し、 $c_2 = a, E_3 = 0.1E$ として c_1, E_1, E_2 を種々変化させた。



(a)



(b)

図-12 は $r=a, \theta=0$ における σ_r の z 方向の分布を示したものである。図-12 (a) は $c_1=0.25a$ の場合であるが σ_r の最大値は弾性係数の大きな層に生じている。しかも第1層の弾性係数が大きいときかなり大

図-12 σ_r の z 方向の分布

きな応力を生ずる。すなわち $E_2 = E$, $E_1 = 100 E$ で $\sigma_{r,\max} \approx -3.8 q$, $E_2 = E$, $E_1 = 10 E$ で $\sigma_{r,\max} \approx -2.7 q$ である。 $E_2 > E_1$ のときは、最大値は第2層に生じている。図-12 (b) は $c_1 = a$ の場合でこの時は σ_r の最大値は $z=0$ に生じ $\sigma_r = -1.5 \sim -2.0 q$ になり、半無限体の場合とそれほど差はない。半無限体に同様のせん断力が作用するとき σ_r の最大値は牟岐⁷⁾によれば $-(1/2 + \nu/8)\pi q$ であるが、多層体の場合には、表面に近い層の厚さと弾性係数に大きな影響をうけることを示している。車輪の制動時に生ずる摩擦係数は、0.8位である¹⁷⁾とされているが、とすれば8tの車輪重のとき $q \approx 9.5 \text{ kg/cm}^2$ となる。この時の舗装体の応力状態を推測すると、コンクリート舗装では $c_1 \approx c_2 \approx a$, $E_1/E_2 > 1000$, $E_3/E_2 = 0.1$ 位であるので $\sigma_r > 2.0 q \approx 19 \text{ kg/cm}^2$ となる。この応力は正負交互に起こり、舗装体に疲労を起こすことになる。図-13に $r=0$, $\theta=0$ における半径方向変位 u の z 方向の変化を示したが、応力の分布とは逆に弾性係数の小さな層で大きな変化を示し、多層体の影響はかなり深いところまでおよんでいる。

以上の計算は無限積分を数値積分してえた値であるが半無限体の場合には牟岐の値、2層体の場合は Westmann の同じ条件による値とほとんど一致していること

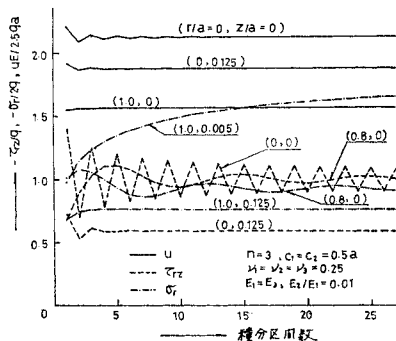


図-14 数値積分の収束の状態

を確認している。数値積分は Gauss の 8 分点法で行ったがその収束状態を 図-14 に示した。図は 3 層体で $c_1 = c_2 = 0.5 a$, $E_1 = E_3$, $E_2 = 100 E_1$, $\nu = 0.25$ の条件のものであるが、 ξ に対して $J_1(\xi a) = 0$ の根ごとに区間をとり、この各区間を Gauss の 8 分点法で積分した。区間数は最大 48 区間 $\xi \approx 151$ まで行ったが図には 27 区間までの状態を示してある。表面における応力のみは収束が遅く、特に $z=0$, $r=0$ のせん断応力は 48 区間でも約 $\pm 5\%$ の誤差がある。しかしこの値は 2 区間を平均すれば正解値になるし境界における外力と同じであるからあまり問題はない。その他の応力および変位は 10 区間位でもほとんど 100% 収束している。

6. む す び

多層体の応力解析を Fourier-Hankel 変換による厚板の解を利用して解析する方法を示し、2 層体および 3 層体に対して数値計算を行った。本方法では遷移行列を用い、層境界にせん断力がない場合は連立方程式を解くことなく行列演算のみで、せん断力が作用するときは 2 元の連立方程式となりこれを解き、行列演算により各境界値を求め数値積分により値を計算することになる。

本論での数値計算の結果から次のことがいえる。

- (1) せん断力は弾性係数の大きな層で吸収される。
- (2) 半径方向応力 σ_r は等分布せん断力のとき表面で無限大となり、半径方向に変化する場合でも何んらかの応力集中が起こる、特に弾性係数の大きな層では層全体が曲げを受ける板のような挙動を示し、応力の変化が大きく応力集中の程度も大きくなる。
- (3) 変位は応力とは逆に弾性係数の小さな層で変化が大きく、表層の弾性係数の小さなものほど変位は大きくなる傾向にある。
- (4) 一般に応力は 2 層体でも 3 層体でも表層の厚さが載荷直径以上大きくなれば、ほぼ半無限体における場合と等しくなる。変位も表層の厚さとともに半無限体の値に収束するが、応力に比べて収束が遅い。

多層体としてはこのほか種々の場合が考えられるが、層厚が極端薄くならなければあまり大きな変化はないと考えられる。

また多層体の非軸対称圧入問題も基礎地盤との関連で興味のある点であるが、これについては別に発表予定である。

なお本論の数値計算は室蘭工業大学情報処理教育センターの MELCOM-9 100 で行った。

参 考 文 献

- 1) Burmister, D.M.: Theory of Stresses and Displacements in Layered Systems and Application to the Design of Airport Runways, Proc. Highw. Res. Bd.,

- Vol. 23, pp. 126-148, 1943.
- 2) Burmister, D.M. : The General Theory of Stresses and Displacements in Layered Systems, J. Appl. Phys., Vol. 16, pp. 89-94, 126-128, 296-302, 1945.
 - 3) Peattie, K.R. : Stress and Strain Factors for Three-Layer Elastic Systems, Bull. Highw. Res. Bd., No. 342, pp. 215-253, 1962.
 - 4) Jones, A. : Tables of Stresses in Three-Layer Elastic Systems, Bull. Highw. Res. Bd., No. 342, pp. 176-214, 1962.
 - 5) 植上 協・マイヤホフ, G.G. : 多層地盤における弾性変位について, 土木学会論文集, 第 144 号, pp. 20-26, 1967.
 - 6) Sneddon, I.N. : Fourier Transforms, 1st Ed., pp. 450-455, McGraw-Hill, 1951.
 - 7) 牟岐鹿楼 : 表面の一部が剛体で圧縮された半無限弾性体の三次元応力問題, 機械学会論文集, 第 21 巻, 第 111 号, pp. 767-773, 1955.
 - 8) 牟岐鹿楼 : 表面にせん断荷重を受ける半無限弾性体の三次元応力問題, 機械学会論文集, 第 22 巻, 第 119 号, pp. 468-474, 1956.
 - 9) Westmann, R.A. : Layered Systems Subjected to Asymmetric Surface Shears, Proc. Roy. Soc. Edinburgh, Vol. 66, pp. 140-149, 1964.
 - 10) 木村 孟 : せん断力を受ける舗装の応力について, 土木学会論文集, 第 133 号, pp. 21-28, 1966.
 - 11) Bufler, H. : Elastisches Mehrschichtsystem unter asymmetrischer Belastung, Z.A.M.M., Vol. 54, pp. 103-118, 1974.
 - 12) Chan, K.S., Karasudhi, P. and Lee, S.L. : Force at a Point in the Interior of Layered Elastic Half Space, Int. J. Solids and Structures, Vol. 10, pp. 1179-1199, 1974.
 - 13) Nomachi, S.G. : On one Method of Solving Stress Problems in Cylindrical Co-ordinates by Means of Finite Fourier Hankel Transforms, Memoris of Muroran Institute of Tech., Vol. 3, pp. 91-115, 128-138, 1960.
 - 14) Matsuoka, K.G. and Nomachi, S.G. : On a 3-Dimensional Stress Analysis of an Annular Cylindrical Body by Means of Fourier-Hankel Transforms, Theoretical and Applied Mechanics, Vol. 22, pp. 199-209, 1974.
 - 15) 松岡健一・能町純雄 : 無限体中の円孔に部分分布荷重が作用するときの 3 次元応力解析, 土木学会論文報告集, 第 229 号, pp. 11-20, 1974.
 - 16) 能町純雄・松岡健一 : 層表面にせん断力を受ける多層体の応力分布について, 第 29 回年次講演概要集第 1 部, pp. 14-15, 1974.
 - 17) 土質工学会編 : 土質工学ハンドブック, p. 787, 技報堂, 1965.

(1974.12.4・受付)