

# 横方向群杭効果の理論的考察

## A THEORETICAL ANALYSIS OF THE LATERAL RESISTANCE OF PILE-GROUPS

小坪 清真\*・高西 照彦\*\*

By Seima KOTSUBO and Teruhiko TAKANISHI

### 1. ま え が き

多柱基礎を構成する群杭が、横方向荷重をうけたときの挙動に関する実験的研究はいろいろ行われてきており、群杭効果を求める実験式もいくつか提案されている<sup>1)~3)</sup>。これに反して、群杭効果に関する理論的研究はその数が少ない。加えて現在までに発表されたこれらの理論はすべて Mindlin の第Ⅱ解を利用して群杭効果を求めている<sup>4)~6)</sup>。しかし Penzien ら<sup>4)</sup>および杉村<sup>5)</sup>の理論解においては、地盤中の各杭の曲げ剛性がまったく無視されており、また各杭の荷重分担率についても考慮がなされておらず、したがって後章に示すように、その理論解によれば群杭効果  $e_n$  が過小に評価されることになる。Poulos<sup>6)</sup>は各杭をいくつかに区分し、その各部分について地盤と杭の変位の連続の条件から杭の変形を求めて群杭効果を算出する数値解法を示した。その際杭に対する地盤反力は、杭の各部分では等分布をなすという仮定が用いられている。この Poulos の解もやはり多少群杭効果  $e_n$  を過小に見積る結果を与えている。

著者らは本論において、① まず上層地盤中に打設された単杭が水平荷重を受ける場合について、杭および上層地盤を一体とした厳密な弾性理論による解析解を求め、この解を利用して群杭効果を算出する理論を示した。② 玉置らの砂地盤に対する実験結果<sup>7)</sup>および Prakash らの粘性土地盤に対する実験結果<sup>8)</sup>と著者らの理論解とを対比して、2, 3 の検討を行い、著者らの理論の有用性を示した。③ Poulos の理論解および Penzien らの理論解と著者らの理論解とを比較し、さらに前述の実験結果を考え合わせれば、前二者の解はいずれも群杭効果  $e_n$  を過小に評価していることを示した。④ 最後に、種々の杭配置について著者らの理論解に対する数値計算を行って、その結果を図示し、群杭効果に影響を与える2, 3のパラメーターについて論じた。

群杭効果を表わすのに、一般に次に示すような種々の表現式が用いられている。すなわち、

① 単杭および群杭に単位の変位を生じさせるのに必要な力をそれぞれ  $Q_0, Q_n$  とし、群杭の本数を  $n$  とすれば、群杭効果  $e_n$  は

$$e_n = \frac{Q_n}{nQ_0} \dots\dots\dots(1)$$

と表わされる。

② 杭に単位の力を与えたときの単杭と群杭のそれぞれの変位を  $\delta_0, \delta_n$  とすれば

$$e_n = \frac{\delta_0}{n\delta_n} \dots\dots\dots(2)$$

Poulos は上式の逆数で群杭効果を定義している。

③ 単杭と群杭の地盤反力係数  $k_0, k_n$  を求めて、

$$e_n = k_n / (nk_0) \dots\dots\dots(3)$$

によって群杭効果を表わす。Penzien らおよび杉村は上式の定義に従っている。

以上の3つの式は、表現は異なっているが、弾性論的にはいずれも同値な定義式である。本論では式(1)による定義式を採用した。したがって、単杭に対しては  $e_1=1$  であり、群杭の場合には  $e_n$  は必ず1より小さい値 ( $0 < e_n < 1$ ) と取る。

### 2. 単杭-地盤系の変形理論

図一1に示すように、剛な基盤上にある弾性上層地盤中に杭が打設されているような単杭-地盤系モデルを考えて、この杭がその頭部に水平荷重  $Q$  を受けたとき、杭および上層地盤の厳密な弾性変形解を導く。

#### (1) 解析上の仮定および諸条件

解析上の仮定および諸条件を列挙すれば、次のとおりである。

a) 上層地盤中においては、上下方向の変位は小さく、したがってそれは無視できる。

b) 地盤変形については、地表面においてせん断応力

\* 正会員 工博 九州大学教授 工学部土木工学科

\*\* 正会員 九州工業大学助教授 開発土木工学科

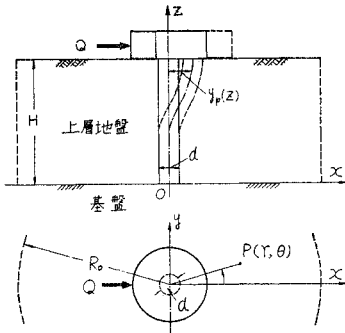


図-1 単杭-地盤系モデル

$\tau_{zr}, \tau_{z\theta}$  のみが0となる解を導く。

c) 杭は直径  $d$  の円形断面をもち、長さは地盤厚  $H$  に等しく、またその曲げ剛性  $E_p I_p$  は深さ方向に対して一定である。

d) 杭は頭部回転拘束、下端ヒンジとし、水平方向にのみ変位する。

(2) 地盤の弾性方程式とその一般解

図-1 に示す上層地盤の弾性方程式は、円筒座標を用いて次のように表わせる。

$$\left. \begin{aligned} (\lambda+2\mu) \frac{\partial}{\partial r} \left\{ \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} \right\} \\ - \frac{\mu}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left\{ \frac{v}{r} + \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} \right\} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 \\ (\lambda+2\mu) \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left\{ \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} \right\} \\ + \mu \frac{\partial}{\partial r} \left\{ \frac{v}{r} + \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} \right\} + \mu \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (4)$$

ここに、 $u, v$  は地盤の  $r, \theta$  方向の水平変位、 $\lambda, \mu$  は Lamé の定数である。

地表面で  $\tau_{zr} = \tau_{z\theta} = 0$  となる解は

$$u(r, \theta, z) = \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} U_n(r) \sin \frac{n\pi z}{2H} \cos \theta \dots (5)$$

$$v(r, \theta, z) = \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} V_n(r) \sin \frac{n\pi z}{2H} \sin \theta \dots (6)$$

と表わすことができる。式 (5), (6) を式 (4) に代入し、 $U_n(r), V_n(r)$  を求めると

$$U_n(r) = \frac{1}{\eta_r} [A_n \{I_1(\eta_p a \eta_r) - \eta_p a \eta_r I_0(\eta_p a \eta_r)\} + B_n \{K_1(\eta_p a \eta_r) + \eta_p a \eta_r K_0(\eta_p a \eta_r)\} + C_n I_1(\eta_{sa} \eta_r) + D_n K_1(\eta_{sa} \eta_r)] \dots (7)$$

$$V_n(r) = \frac{1}{\eta_r} [A_n I_1(\eta_p a \eta_r) + B_n K_1(\eta_p a \eta_r) + C_n \{I_1(\eta_{sa} \eta_r) - \eta_{sa} \eta_r I_0(\eta_{sa} \eta_r)\} + D_n \{K_1(\eta_{sa} \eta_r) + \eta_{sa} \eta_r K_0(\eta_{sa} \eta_r)\}] \dots (8)$$

上式において、 $I_n, K_n$  は第  $n$  次変形 Bessel 関数、

$A_n, B_n, C_n, D_n$  は境界条件によって定まる未定係数である。また、上式中の記号は次のとおりである。

$$\left. \begin{aligned} \eta_{pa} = \frac{n\omega g}{V_p} a = \frac{n\pi}{2} \frac{a}{H} \sqrt{\frac{1-2\nu}{2(1-\nu)}} \\ \eta_{sa} = \frac{n\omega g}{V_s} a = \frac{n\pi}{2} \frac{a}{H}, \quad \eta_r = \frac{r}{a} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (9)$$

$V_p, V_s$  はそれぞれ上層地盤の縦波および横波の速度、 $\omega_g$  は上層地盤の第1次の固有円振動数、 $\nu$  は地盤のポアソン比、 $H$  は上層地盤の深さ、 $a$  は杭半径である。

$$V_p^2 = \frac{\lambda+2\mu}{\rho_g} g, \quad V_s^2 = \frac{\mu}{\rho_g} g, \quad \omega_g = \frac{\pi}{2H} V_s \dots\dots\dots (10)$$

$\rho_g$  は上層地盤の単位体積重量、 $g$  は重力の加速度である。上層地盤の応力は、 $u, v$  を用いて

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r = \lambda \left( \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} \right) + 2\mu \frac{\partial u}{\partial r} \\ \tau_{r\theta} = \mu \left( \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} \right) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (11)$$

(3) 杭および地盤の変形曲線

図-1 に示す単杭の水平変位を支配する微分方程式は

$$E_p I_p \frac{d^4 \{y_p(z)\}}{dz^4} = p(z) + q(z) \dots\dots\dots (12)$$

と書くことができる。上式で  $y_p(z)$  は杭の水平変位、 $E_p I_p$  は杭の曲げ剛性、 $p(z)$  は杭側面に働らく単位長さ当り土圧、 $q(z)$  は杭頭の水平荷重である。 $p(z), q(z)$  はそれぞれ次のようにして求めることができる。

$p(z)$  は式 (11) を用いて次式のように表わされる。

$$p(z) = \int_0^{2\pi} [\sigma_r \cos \theta - \tau_{r\theta} \sin \theta]_{r=a} a d\theta \dots (13)$$

式 (11) および式 (5)~(8) を上式に代入して積分を実行すると、 $p(z)$  は結局、

$$\begin{aligned} p(z) = \pi a \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \left[ (\lambda+2\mu) \frac{d}{dr} \{U_n(r)\} + \frac{\lambda+\mu}{r} \{U_n(r) + V_n(r)\} - \mu \frac{d}{dr} \{V_n(r)\} \right]_{r=a} \sin \frac{n\pi z}{2H} \\ = \pi a^2 \frac{\rho_g}{g} \omega_g^2 \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \eta^2 \{-A_n I_1(\eta_p a) - B_n K_1(\eta_p a) + C_n I_1(\eta_{sa}) + D_n K_1(\eta_{sa})\} \sin \frac{n\pi z}{2H} \dots\dots\dots (14) \end{aligned}$$

となる。次に  $q(z)$  は杭頭水平荷重  $Q$  を Fourier 級数に展開すれば、次式のように表現することができる。

$$q(z) = \frac{2Q}{H} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} (-1)^{n-1/2} \sin \frac{n\pi z}{2H} \dots (15)$$

いま杭頭回転拘束、杭下端ヒンジの条件を満たすように、杭の水平変位  $y_p(z)$  を次式に示すように Fourier

級数展開して表わす。

$$y_p(z) = \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} Y_n \sin \frac{n\pi z}{2H} \dots\dots\dots (16)$$

式 (14)~(16) を式 (12) に代入して整理すれば、

$$\alpha n^{-2} \{A_n I_1(\eta_{Pa}) + B_n K_1(\eta_{Pa}) - C_n I_1(\eta_{Sa}) - D_n K_1(\eta_{Sa})\} + Y_n = (-1)^{n-1/2} n^{-4} \beta Q \dots\dots\dots (17)$$

ここに、

$$\left. \begin{aligned} \beta &= \frac{32 H^3}{\pi^4 E_P I_P}, \quad \alpha = \frac{64}{\pi^2} \left(\frac{H}{d}\right)^2 \alpha_0, \\ \alpha_0 &= \frac{\mu}{E_P i_P}, \quad i_P = \frac{I_P}{I_0}, \quad I_0 = \frac{\pi}{64} d^4 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (18)$$

さて杭および地盤の変形曲線を得るためには、与えられた境界条件を満足するように (7), (8), (16) の各式に含まれている未定係数  $A_n, B_n, C_n, D_n, Y_n$  を定めればよい。境界条件は次のように表わすことができる。

杭と上層地盤との変位の連続条件式は

①  $r=a$  において ↗

$$K = \begin{bmatrix} I_1(\eta_{Pa}) - \eta_{Pa} I_0(\eta_{Pa}) & K_1(\eta_{Pa}) + \eta_{Pa} K_0(\eta_{Pa}) & I_1(\eta_{Sa}) & K_1(\eta_{Sa}) & -1 \\ I_1(\eta_{Pa}) & K_1(\eta_{Pa}) & I_1(\eta_{Sa}) - \eta_{Sa} I_0(\eta_{Sa}) & K_1(\eta_{Sa}) + \eta_{Sa} K_0(\eta_{Sa}) & 1 \\ I_1(\eta_{PR}) - \eta_{PR} I_0(\eta_{PR}) & K_1(\eta_{PR}) + \eta_{PR} K_0(\eta_{PR}) & I_1(\eta_{SR}) & K_1(\eta_{SR}) & 0 \\ I_1(\eta_{PR}) & K_1(\eta_{PR}) & I_1(\eta_{SR}) - \eta_{SR} I_0(\eta_{SR}) & K_1(\eta_{SR}) + \eta_{SR} K_0(\eta_{SR}) & 0 \\ \alpha n^{-2} I_1(\eta_{Pa}) & \alpha n^{-2} K_1(\eta_{Pa}) & -\alpha n^{-2} I_1(\eta_{Sa}) & -\alpha n^{-2} K_1(\eta_{Sa}) & 1 \end{bmatrix} \dots\dots\dots (24)$$

$$\hat{X} = \{\tilde{A}_n \tilde{B}_n \tilde{C}_n \tilde{D}_n \tilde{Y}_n\}^T = (-1)^{n-1/2} \frac{1}{\beta Q} \{A_n B_n C_n D_n Y_n\}^T \dots\dots\dots (25)$$

$$C = \{0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1\}^T \quad (T \text{ は転置行列を表わす})$$

また、

$$\eta_{PR} = \frac{n\omega_g}{V_P} R_0 = \frac{n\pi}{2} \frac{R_0}{H} \sqrt{\frac{1-2\nu}{2(1-\nu)}}, \quad \eta_{SR} = \frac{n\omega_g}{V_S} R_0 = \frac{n\pi}{2} \frac{R_0}{H} \dots\dots\dots (26)$$

式 (23) を満たす  $\tilde{A}_n, \sim \tilde{D}_n, \tilde{Y}_n$  を用いれば、杭および地盤の変形曲線は次式のように表わせる。

$$\tilde{y}_p(z) = \beta Q \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} (-1)^{n-1/2} n^{-4} \tilde{Y}_n \sin \frac{n\pi z}{2H} \dots\dots\dots (27)$$

$$\tilde{u}(r, \theta, z) = \beta Q \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} (-1)^{n-1/2} n^{-4} \tilde{U}_n(r) \sin \frac{n\pi z}{2H} \cos \theta \dots\dots\dots (28)$$

$$\tilde{v}(r, \theta, z) = \beta Q \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} (-1)^{n-1/2} n^{-4} \tilde{V}_n(r) \sin \frac{n\pi z}{2H} \sin \theta \dots\dots\dots (29)$$

$$\begin{aligned} \tilde{U}_n(r) &= \frac{1}{\eta_r} [\tilde{A}_n \{I_1(\eta_{Pa}\eta_r) - \eta_{Pa}\eta_r I_0(\eta_{Pa}\eta_r)\} + \tilde{B}_n \{K_1(\eta_{Pa}\eta_r) + \eta_{Pa}\eta_r K_0(\eta_{Pa}\eta_r)\} \\ &\quad + \tilde{C}_n I_1(\eta_{Sa}\eta_r) + \tilde{D}_n K_1(\eta_{Sa}\eta_r)] \dots\dots\dots (30) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{V}_n(r) &= \frac{1}{\eta_r} [\tilde{A}_n I_1(\eta_{Pa}\eta_r) + \tilde{B}_n K_1(\eta_{Pa}\eta_r) + \tilde{C}_n \{I_1(\eta_{Sa}\eta_r) - \eta_{Sa}\eta_r I_0(\eta_{Sa}\eta_r)\} \\ &\quad + \tilde{D}_n \{K_1(\eta_{Sa}\eta_r) + \eta_{Sa}\eta_r K_0(\eta_{Sa}\eta_r)\}] \dots\dots\dots (31) \end{aligned}$$

b) 外側境界が存在しない場合

この場合には条件式 ①, ②, ④ を用いて、a) の場合と同様にして  $B_n, D_n, Y_n$  を定めればよい。これらの係数は簡単に求めることができ、結局杭および地盤の変形曲線は次式のように表わせる。

$$\bar{y}_p(z) = \beta Q \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} (-1)^{n-1/2} n^{-4} \bar{Y}_n \sin \frac{n\pi z}{2H} \dots\dots\dots (32)$$

$$\bar{u}(r, \theta, z) = \beta Q \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} (-1)^{n-1/2} n^{-4} \bar{U}_n(r) \sin \frac{n\pi z}{2H} \cos \theta \dots\dots\dots (33)$$

$$u(a, \theta, z) = y_p(z) \cos \theta \dots\dots\dots (19)$$

②  $r=a$  において

$$v(a, \theta, z) = -y_p(z) \sin \theta \dots\dots\dots (20)$$

また上層地盤が 図-1 に示すような円形外側境界を有する場合には

③  $r=R_0$  において

$$u(R_0, \theta, z) = v(R_0, \theta, z) = 0 \dots\dots\dots (21)$$

上層地盤が水平方向に無限に広がっている場合には

$$\text{④ } A_n = C_n = 0 \dots\dots\dots (22)$$

a) 外側境界が存在する場合

この場合には条件式 ①, ②, ③ を用いればよい。式 (5)~(8) および式 (16) を式 (19)~(21) に代入して得られる 4 個の式と、さらに式 (17) を加えて合計 5 個の関係式から未定係数  $A_n, \sim D_n, Y_n$  を定めることができる。いまその連立方程式を行列表示すれば

$$K \hat{X} = C \dots\dots\dots (23)$$

ここに、

$$\bar{v}(r, \theta, z) = \beta Q \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} (-1)^{n-1/2} n^{-4} \bar{V}_n(r) \sin \frac{n\pi z}{2H} \sin \theta \dots (34)$$

$$\bar{Y}_n = \frac{1}{1 + \alpha n^{-2} \Omega_n} \dots (35)$$

$$\bar{U}_n(r) = \frac{1}{1 + \alpha n^{-2} \Omega_n} \frac{1}{\eta_r} \cdot [K_1(\eta_{Pa}\eta_r) + \eta_{Pa}\eta_r K_0(\eta_{Pa}\eta_r) - \psi_n K_1(\eta_{sa}\eta_r)] \dots (36)$$

$$\bar{V}_n(r) = \frac{1}{1 + \alpha n^{-2} \Omega_n} \frac{1}{\eta_r} \cdot [K_1(\eta_{Pa}\eta_r) - \psi_n \{K_1(\eta_{sa}\eta_r) + \eta_{sa}\eta_r K_0(\eta_{sa}\eta_r)\}] \dots (37)$$

ここに、

$$\left. \begin{aligned} \psi_n &= \frac{2K_1(\eta_{Pa}) + \eta_{Pa}K_0(\eta_{Pa})}{2K_1(\eta_{sa}) + \eta_{sa}K_0(\eta_{sa})} \\ \Gamma_n &= K_1(\eta_{Pa}) + \eta_{Pa}K_0(\eta_{Pa}) - \psi_n K_1(\eta_{sa}) \\ \Omega_n &= \{K_1(\eta_{Pa}) + \psi_n K_1(\eta_{sa})\} / \Gamma_n \end{aligned} \right\} \dots (38)$$

### 3. 群杭効果の理論

頭部を連結，回転拘束された群杭を考えて，図-2に示すように XY 座標を設定する。群杭の行本数を M，列本数を N とし， $N \geq M$  となるように配置し，X 軸は常に行方向にとるものとする。また x, y 軸は局所座標軸でそれぞれ X, Y 軸に平行である。

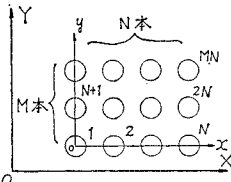


図-2 杭配置と座標系

まず 2 本杭の場合について，群杭効果の理論の基本的な考え方を詳論し，群杭効果の解析解を導く。次に，4 本杭の場合を取上げて，杭配置の対称性を考慮すれば 2 本杭の結果を利用することによって，容易に 4 本杭の群杭効果の解析解を得ることができることを示す。さらに，著者の理論を用いれば，任意の杭配置を有する任意本数の杭から構成された群杭の群杭効果を求めることができることを示す。

#### (1) 2 本杭が x 方向水平荷重をうける場合

図-3 に示すように，杭中心間の距離が l である i, j の 2 本杭 (M=1, N=2) が，局所座標の x 軸に平行に水平荷重を受けた場合，両杭および上層地盤の変形曲線な

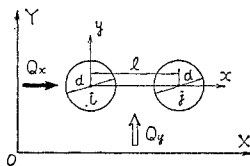


図-3 2 本杭

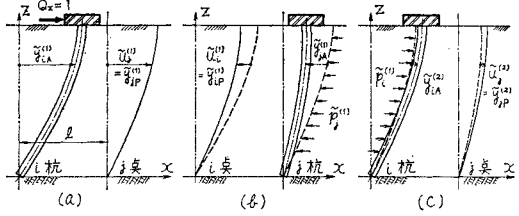


図-4 2 本杭に対する操作手順

らびに群杭効果は，次のように考えればこれを逐次近似的に求めることができる。すなわち 2 本杭の杭頭の連結を断ち，杭頭部を回転拘束した状態にしておいた上で，両杭に以下に述べる操作を順に加える。

① 図-4 (a) に示すように，いま j 杭を削除した状態で i 杭に単位水平荷重を加える。そのときの i 杭の変位を  $\bar{y}_{iA}^{(1)}(z)$ ，j 杭の中心軸上の地盤の変位を  $\bar{u}_j^{(1)}(l, z)$  とする。 $\bar{y}_{iA}^{(1)}(z)$ ， $\bar{y}_{jP}^{(1)}(z) = \bar{u}_j^{(1)}(l, z)$  はそれぞれ i, j 杭の変位の第 1 次近似値である。

② いま，j 点に杭が存在する場合には，杭の有する曲げ剛性のため j 杭の変位は ① の  $\bar{u}_j^{(1)}(l, z)$  より小さくなり，j 杭は地盤が j 杭におよぼす土圧と j 杭の曲げ剛性による反力とがちょうどつり合った位置で静止するはずである。このときの j 杭の変位は次のように考えればこれを求めることができる。すなわち，j 杭を取出して，j 杭に適当な x 方向水平分布荷重  $\bar{p}_j^{(1)}(z)$  を加えて j 杭を強制的に変形させて，そのときの j 杭の変形曲線が ① の j 点の地盤の変位  $\bar{u}_j^{(1)}(l, z)$  に一致するようにした後，j 杭を上層地盤中に設置する。実際には，j 杭には  $\bar{p}_j^{(1)}(z)$  は加わっていないので，今度は図-4 (b) に示すように，i 杭を削除した状態で j 杭に水平分布荷重  $\bar{p}_j^{(1)}(z)$  を逆方向に加えてやる。そのときの j 杭の現時点からの相対変位を  $\bar{y}_{jA}^{(1)}(z)$ ，i 杭の中心軸上の地盤の現時点からの相対変位を  $\bar{u}_i^{(1)}(l, z)$  とする。 $\bar{y}_{iP}^{(1)}(z) = \bar{u}_i^{(1)}(l, z)$  および  $\bar{y}_{jA}^{(1)}(z)$  がそれぞれ第 1 回目の i, j 杭の修正変位である。したがって， $y_i(z) = \bar{y}_{iA}^{(1)}(z) + \bar{y}_{iP}^{(1)}(z)$  および  $y_j(z) = \bar{y}_{jP}^{(1)}(z) + \bar{y}_{jA}^{(1)}(z)$  がそれぞれ i, j 杭の変位の第 2 次近似値となる。

③ 次に，②と同様に考えて，i 点には実際には杭が存在するから，この i 杭の曲げ剛性のために i 杭の変位は ② の  $\bar{u}_i^{(1)}(l, z)$  より小さくなり，i 杭は地盤が i 杭におよぼす土圧と i 杭の曲げ剛性による反力とがちょうどつり合った位置で静止する。このときの i 杭の変位を求めるには次のように考えればよい。すなわち，i 杭を取出して，i 杭に適当な x 方向水平分布荷重  $\bar{p}_i^{(1)}(z)$  を加えて i 杭を強制的に変形させて，i 杭の現時点での変形曲線  $\bar{y}_{iA}^{(1)}(z)$  からの変位が ② の  $\bar{u}_i^{(1)}(l, z)$  に等しくなるようにして，i 杭を上層地盤中に設置する。実際には，i 杭には  $\bar{p}_i^{(1)}(z)$  は加わっていないので，今度は

図-4(c) に示すように、 $j$  杭を取除いた状態で  $i$  杭に水平分布荷重  $\tilde{p}_i^{(1)}(z)$  を逆方向に加えてやる。そのときの  $i$  杭の現時点からの相対変位を  $\tilde{y}_{iA}^{(2)}(z)$ 、 $j$  杭の中心軸上の地盤の現時点からの相対変位を  $\tilde{u}_j^{(2)}(l, z)$  とする。 $\tilde{y}_{iA}^{(2)}(z)$  および  $\tilde{u}_j^{(2)}(l, z)$  がそれぞれ第2回目の  $i, j$  杭の修正変位である。したがって、②の  $y_i(z)$ 、 $y_j(z)$  にそれぞれこの修正変位を加えたものが  $i, j$  杭の変位の第3次近似値となる。

③ 上述の①、②の操作を何回も繰返して行って、両杭の変位に対する修正量  $\tilde{y}_{iA}^{(k)}(z)$ 、 $\tilde{y}_{jA}^{(k)}(z)$  が十分小さくなるようにする。このようにすれば、 $i$  杭に  $x$  方向水平単位荷重を加えたときの  $i, j$  両杭の変位を必要な精度まで厳密に求めることができる。両杭の変位が得られれば、群杭効果を求めることは容易である。

以上が本論における群杭効果の理論の基本的な考え方である。ここで、①~③における  $\tilde{y}_{iA}^{(k)}(z)$ 、 $\tilde{u}_j^{(k)}(l, z)$  などは次のようにして求めることができる。

① 図-4(a) に示すように、 $j$  杭を取除いた状態で  $i$  杭に単位水平荷重を加えたとき、 $i$  杭の変位  $\tilde{y}_{iA}^{(1)}(z)$  および  $j$  杭の中心軸上の地盤の変位  $\tilde{u}_j^{(1)}(l, z)$  は式(27)、(28)を用いて次のように表わされる。

$$\tilde{y}_{iA}^{(1)}(z) = \beta \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} (-1)^{n-1/2} n^{-4} \tilde{Y}_n^{i(1)} \sin \frac{n\pi z}{2H} \dots\dots\dots (39)$$

$$\tilde{u}_j^{(1)}(l, z) = \beta \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} (-1)^{n-1/2} n^{-4} \tilde{U}_n^{i(1)}(l) \cdot \sin \frac{n\pi z}{2H} \dots\dots\dots (40)$$

$$\tilde{U}_n^{i(1)}(l) = \frac{1}{\eta_l} [\tilde{A}_n^{i(1)} \{I_1(\eta_{Pa}\eta_l) - \eta_{Pa}\eta_l I_0(\eta_{Pa}\eta_l)\} + \tilde{B}_n^{i(1)} \{K_1(\eta_{Pa}\eta_l) + \eta_{Pa}\eta_l K_0(\eta_{Pa}\eta_l)\} + \tilde{C}_n^{i(1)} I_1(\eta_{sa}\eta_l) + \tilde{D}_n^{i(1)} K_1(\eta_{sa}\eta_l)] \dots\dots\dots (41)$$

ここに、 $\tilde{A}_n^{i(1)}$ 、 $\tilde{D}_n^{i(1)}$ 、 $\tilde{Y}_n^{i(1)}$  は式(23)から定められる定数であり、この場合  $\tilde{A}_n^{i(1)} = \tilde{A}_n, \dots, \tilde{Y}_n^{i(1)} = \tilde{Y}_n$  および  $\tilde{U}_n^{i(1)}(l) = \tilde{U}_n(l)$  である。よって

$$\tilde{X}^{i(1)} = \tilde{X} \dots\dots\dots (42)$$

②  $j$  杭に適当な  $x$  方向水平分布荷重  $\tilde{p}_j^{(1)}(z)$  を加えて  $j$  杭を強制変形させ、そのときの  $j$  杭の変形曲線  $\tilde{y}_{jP}^{(1)}(z)$  が、①で求めた  $j$  杭の中心軸上の地盤の変形曲線  $\tilde{u}_j^{(1)}(l, z)$  に一致するようにした後、 $j$  杭を上層地盤中に設置する。この時  $\tilde{p}_j^{(1)}(z)$  は、 $\tilde{y}_{jP}^{(1)}(z) = \tilde{u}_j^{(1)}(l, z)$  であることを考慮すれば次式によって求めることができる。

$$\tilde{p}_j^{(1)}(z) = E_P I_P \frac{d^4}{dz^4} \{\tilde{y}_{jP}^{(1)}(z)\} = \frac{2}{H} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} (-1)^{n-1/2} \tilde{U}_n^{i(1)}(l) \sin \frac{n\pi z}{2H} \dots\dots\dots (43)$$

③ 実際には、 $j$  杭には  $\tilde{p}_j^{(1)}(z)$  は加わっていないので、今度は 図-4(b) に示すように、 $i$  杭を取除いた状態で  $j$  杭に水平分布荷重  $\tilde{p}_j^{(1)}(z)$  を②における逆方向に加える。そのときの  $j$  杭の変位  $\tilde{y}_{jA}^{(1)}(z)$  と  $i$  杭の中心軸上の地盤の変位  $\tilde{u}_i^{(1)}(l, z)$  とは次のようにして求めることができる。すなわち、 $j$  杭に  $\tilde{p}_j^{(1)}(z)$  を加えたときの 上層地盤の変形曲線は式(5)~(8)を参照して

$$\tilde{u}_i^{(1)}(r, \theta, z) = \beta \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} (-1)^{n-1/2} n^{-4} \tilde{U}_n^{j(1)}(r) \sin \frac{n\pi z}{2H} \cos \theta \dots\dots\dots (44)$$

$$\tilde{v}_i^{(1)}(r, \theta, z) = \beta \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} (-1)^{n-1/2} n^{-4} \tilde{V}_n^{j(1)}(r) \sin \frac{n\pi z}{2H} \sin \theta \dots\dots\dots (45)$$

ここで、 $\tilde{U}_n^{j(1)}(r)$ 、 $\tilde{V}_n^{j(1)}(r)$  は式(7)、(8)において、 $A_n, \dots, D_n$  の代りに上付添字  $\sim$  と  $j(1)$  とをつけて  $\tilde{A}_n^{j(1)}$ 、 $\tilde{D}_n^{j(1)}$  とおけばよい。他方  $j$  杭に働らく土圧を  $p_j^{(1)}(z)$  とすれば、 $p_j^{(1)}(z)$  は式(14)を参照して

$$p_j^{(1)}(z) = \frac{2}{H} \alpha \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} (-1)^{n-1/2} n^{-2} \{-\tilde{A}_n^{j(1)} I_1(\eta_{Pa}) - \tilde{B}_n^{j(1)} K_1(\eta_{Pa}) + \tilde{C}_n^{j(1)}(\eta_{sa}) + \tilde{D}_n^{j(1)} K_1(\eta_{sa})\} \sin \frac{n\pi z}{2H} \dots\dots\dots (46)$$

と書ける。したがって、荷重  $\tilde{p}_j^{(1)}(z)$  を受ける  $j$  杭の変形を支配する微分方程式は次式のように表わされる。

$$E_P I_P \frac{d^4}{dz^4} \{\tilde{y}_{jA}^{(1)}(z)\} = \tilde{p}_j^{(1)}(z) + p_j^{(1)}(z) \dots\dots\dots (47)$$

いま、

$$\tilde{y}_{jA}^{(1)}(z) = \beta \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} (-1)^{n-1/2} n^{-4} \tilde{Y}_n^{j(1)} \sin \frac{n\pi z}{2H} \dots\dots\dots (48)$$

とおいて式(47)に代入し、式(43)、(46)を考慮して整理すれば、結局次に示すような関係式を得る。

$$\tilde{Y}_n^{j(1)} = \alpha n^{-2} \{-\tilde{A}_n^{j(1)} I_1(\eta_{Pa}) - \tilde{B}_n^{j(1)} K_1(\eta_{Pa}) + \tilde{C}_n^{j(1)} I_1(\eta_{sa}) + \tilde{D}_n^{j(1)} K_1(\eta_{sa}) + \tilde{U}_n^{i(1)}(l)\} \dots\dots\dots (49)$$

ここで、次の境界条件

$$\left. \begin{aligned} r=a \text{ において} \\ \tilde{u}_i^{(1)}(a, \theta, z) = \tilde{y}_{jA}^{(1)}(z) \cos \theta \\ \tilde{v}_i^{(1)}(a, \theta, z) = -\tilde{y}_{jA}^{(1)}(z) \sin \theta \\ r=R_0 \text{ において} \\ \tilde{u}_i^{(1)}(R_0, \theta, z) = \tilde{v}_i^{(1)}(R_0, \theta, z) = 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots (50)$$

および式(49)から未定係数  $\tilde{A}_n^{j(1)}$ 、 $\sim$ 、 $\tilde{Y}_n^{j(1)}$  を決定する方程式が次のように得られる。

$$K \tilde{X}^{j(1)} = \tilde{U}_n^{i(1)}(l) C \dots\dots\dots (51)$$

ここに、

$$\tilde{X}^{j(1)} = \{\tilde{A}_n^{j(1)} \tilde{B}_n^{j(1)} \tilde{C}_n^{j(1)} \tilde{D}_n^{j(1)} \tilde{Y}_n^{j(1)}\}^T$$

上式から定まる定数  $\tilde{A}_n^{j(1)}, \dots, \tilde{Y}_n^{j(1)}$  を用いれば、式 (48) から  $\hat{y}_{jA}^{(1)}(z)$  が、式 (44) において  $r=l, \theta=\pi$  において  $\tilde{a}_i^{(1)}(l, z)$  が求められる。

④ つづいて②と同様にして、 $i$  杭に適当な  $x$  方向水平分布荷重  $\tilde{p}_i^{(1)}(z)$  を加えて  $i$  杭を強制変形させ、 $i$  杭の現時点での変形曲線  $\hat{y}_{iA}^{(1)}(z)$  からの変位が、③で得られた  $\tilde{a}_i^{(1)}(l, z)$  に等しくなるようにして、 $i$  杭を上層地盤中に設置する。このときの  $\tilde{p}_i^{(1)}(z)$  は式 (43) において  $\hat{y}_{jP}^{(1)}(z), \tilde{U}_n^{i(1)}(l)$  の代わりにそれぞれ  $\hat{y}_{iP}^{(1)}(z), \tilde{U}_n^{j(1)}(l)$  とすればよい。

⑤  $i$  杭には、実際には水平分布荷重  $\tilde{p}_i^{(1)}(z)$  は加わっていないので、③と同様に考えて、図-4(c) に示すように、 $j$  杭を取除いた状態で  $i$  杭に④の水平分布荷重  $\tilde{p}_i^{(1)}(z)$  を逆方向に加えてやる。そしてその時の  $i$  杭の変位  $\hat{y}_{iA}^{(2)}(z)$  と  $j$  杭の中心軸上の地盤の変位  $\tilde{a}_j^{(2)}(l, z)$  とを求める。それらは③の場合とまったく同様に考えれば容易に求めることができ、次のようになる。すなわち、

$$K\tilde{X}^{i(2)} = \tilde{U}_n^{j(1)}(l)C$$

を満足する  $\tilde{X}^{i(2)}$  を用いれば、式 (44), (48) の右辺において、ただ上付添字の  $j(1)$  を  $i(2)$  に変更するだけで、それぞれ  $\hat{y}_{iA}^{(2)}(z), \tilde{a}_j^{(2)}(l, z)$  を表わすことができる。

⑥ 上述の②~⑤の操作を何回も繰り返せば、両杭の変形曲線の解析解を求めることができ

$$\begin{aligned} y_i(z) &= \sum_{k=1}^{\infty} \{\hat{y}_{iA}^{(k)}(z) + \hat{y}_{iP}^{(k)}(z)\} \\ &= \beta \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} (-1)^{n-1/2} n^{-4} \{\tilde{Y}_n^{i(k)}\} \\ &\quad + \tilde{U}_n^{j(k)}(l) \sin \frac{n\pi z}{2H} \dots\dots\dots (52) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_j(z) &= \sum_{k=1}^{\infty} \{\hat{y}_{jP}^{(k)}(z) + \hat{y}_{jA}^{(k)}(z)\} \\ &= \beta \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} (-1)^{n-1/2} n^{-4} \{\tilde{U}_n^{i(k)}(l) \\ &\quad + \tilde{Y}_n^{j(k)}\} \sin \frac{n\pi z}{2H} \dots\dots\dots (53) \end{aligned}$$

となる。上式において、未定係数  $\tilde{Y}_n^{i(k)}, \tilde{Y}_n^{j(k)}$  および  $\tilde{U}_n^{i(k)}(l), \tilde{U}_n^{j(k)}(l)$  に含まれている未定係数  $\tilde{A}_n^{i(k)}, \sim \tilde{D}_n^{i(k)}, \tilde{A}_n^{j(k)}, \sim \tilde{D}_n^{j(k)}$  は、上述の所論から次に示す連立方程式の解として得られる。

$$\begin{aligned} K\tilde{X}^{i(k)} &= \begin{cases} C & (k=1) \\ \tilde{U}_n^{j(k-1)}(l)C & (k=2, 3, \dots) \end{cases} \\ K\tilde{X}^{j(k)} &= \begin{cases} \tilde{U}_n^{i(k)}(l)C & (k=1, 2, 3, \dots) \end{cases} \end{aligned} \dots\dots\dots (54)$$

したがって  $\tilde{Y}_n^{i(k)}, \tilde{U}_n^{i(k)}$  などは等比級数をなすから、式 (42) の関係を考慮すれば

$$\left. \begin{aligned} \tilde{Y}_n^{i(k)} &= \{\tilde{U}_n^{i(k-1)}\} \tilde{Y}_n^{i(k-1)} \\ \tilde{U}_n^{i(k)}(l) &= \{\tilde{U}_n^{i(k-1)}\} \tilde{U}_n^{i(k-1)} \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} \tilde{Y}_n^{j(k)} &= \{\tilde{U}_n^{j(k-1)}\} \tilde{Y}_n^{j(k-1)} \\ \tilde{U}_n^{j(k)}(l) &= \{\tilde{U}_n^{j(k-1)}\} \tilde{U}_n^{j(k-1)} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (55)$$

( $k=1, 2, 3, \dots$ )

のように書ける。したがって結局  $i, j$  両杭の杭頭の連結を断ち、杭頭部を回転拘束した状態で、 $i$  杭に  $x$  方向単位水平荷重を加えたとき、両杭の  $z=H$  における変位すなわち杭頭変位は式 (52), (53), (55) から求めることができ、次のように表わせる。

$$\delta_{ii}^x = \beta \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{n^4} \frac{\tilde{Y}_n - \{\tilde{U}_n^{i(k)}\}^2}{1 - \{\tilde{U}_n^{i(k)}\}^2} \dots\dots\dots (56)$$

$$\delta_{jj}^x = \beta \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{n^4} \frac{\{1 - \tilde{Y}_n\} \tilde{U}_n^{j(k)}}{1 - \{\tilde{U}_n^{j(k)}\}^2} \dots\dots\dots (57)$$

ここで、 $\delta$  の添字については、たとえば  $\delta_{ji}^x$  は  $i$  杭に  $x$  方向単位水平荷重を加えたときの  $j$  杭の  $x$  方向の杭頭変位を表わす。

上層地盤に外側境界が存在しない場合には、上式において上付添字  $\sim$  を一に変えるだけでよい。

2本杭の  $x$  方向の群杭効果  $e_{2x}$  は式 (56), (57) を利用すればただちに得られる。すなわち、杭中心間の距離が  $l$  である  $i, j$  杭にそれぞれ  $x$  方向水平荷重  $Q_{ix}, Q_{jx}$  を加えて、 $i, j$  両杭の杭頭を  $x$  方向に1だけ変位させたとき、荷重  $Q_{ix}, Q_{jx}$  は次に示す方程式を同時に満足するものでなければならない。

$$\begin{cases} \delta_{ii}^x Q_{ix} + \delta_{ij}^x Q_{jx} = 1 \dots\dots\dots (58) \\ \delta_{ji}^x Q_{ix} + \delta_{jj}^x Q_{jx} = 1 \dots\dots\dots (59) \end{cases}$$

あきらかに  $\delta_{jj}^x = \delta_{ii}^x, \delta_{ij}^x = \delta_{ji}^x$  であるから、上式が同時に成り立つためには  $Q_{ix} = Q_{jx}$  でなければならない。したがって、

$$Q_{ix} = \frac{1}{\delta_{ii}^x + \delta_{ij}^x} \dots\dots\dots (60)$$

他方、単杭の杭頭を1だけ変位させるのに必要な水平荷重は式 (27) から

$$Q_0 = \frac{1}{\beta \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \tilde{Y}_n} \dots\dots\dots (61)$$

となる。よって、群杭効果は式 (1) の定義に従って

$$e_{2x} = \frac{Q_{ix} + Q_{jx}}{2Q_0} = \frac{Q_{ix}}{Q_0} \dots\dots\dots (62)$$

のように得られる。また、 $i$  杭の荷重分担率は  $Q_{ix}/(Q_{ix} + Q_{jx}) = 1/2$  となり、両杭の荷重分担率は等しいという当然の結果が導かれる。

(2) 2本杭が  $y$  方向水平荷重をうける場合

図-3 に示す2本杭が、 $y$  軸方向に水平荷重  $Q_y$  をうけた場合の両杭および上層地盤の変形曲線ならびに群杭効果を求めるには、前節と同様に考えればよい。ここでは群杭効果を求めるための基礎式のみを示す。

$$\delta_{ii}^y = \beta \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{n^4} \frac{\tilde{Y}_n - \{\tilde{V}_n^{i(k)}\}^2}{1 - \{\tilde{V}_n^{i(k)}\}^2} \dots\dots\dots (63)$$

$$\delta_{ji}^y = -\beta \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{n^4} \frac{\{1 - \tilde{Y}_n\} \tilde{V}_n(L)}{1 - \{\tilde{V}_n(L)\}^2} \dots\dots (64)$$

上式によって  $\delta_{ii}^y, \delta_{ji}^y$  が得られれば、群杭効果は前節とまったく同様にして求めることができる。

(3) 2本杭が任意方向水平荷重をうける場合

図-5 に示すように、 $x'$  軸方向に並んだ2本杭に、 $x$  方向水平荷重  $Q_x=1$  を加えたとき、 $i, j$  両杭の杭頭変位は、荷重  $Q_x$  を  $x'$  軸および  $y'$  軸方向の2方向の荷重に分けて考えれば、(1), (2) 節の結果を利用して容易に求めることができる。結果は次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} \delta_{ii}^{xx} &= \beta \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} n^{-4} [f_1 \{\tilde{Y}_n, \tilde{U}_n(L)\} \cos^2 \varphi \\ &\quad + f_1 \{\tilde{Y}_n, \tilde{V}_n(L)\} \sin^2 \varphi] \\ \delta_{ii}^{yy} &= \beta \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} n^{-4} [f_1 \{\tilde{Y}_n, \tilde{U}_n(L)\} \\ &\quad - f_1 \{\tilde{Y}_n, \tilde{V}_n(L)\} \sin \varphi \cos \varphi] \\ \delta_{ji}^{xx} &= \beta \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} n^{-4} [f_2 \{\tilde{Y}_n, \tilde{U}_n(L)\} \cos^2 \varphi \\ &\quad - f_2 \{\tilde{Y}_n, \tilde{V}_n(L)\} \sin^2 \varphi] \\ \delta_{ji}^{yy} &= \beta \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} n^{-4} [f_2 \{\tilde{Y}_n, \tilde{U}_n(L)\} \\ &\quad + f_2 \{\tilde{Y}_n, \tilde{V}_n(L)\} \sin \varphi \cos \varphi] \end{aligned} \right\} \dots\dots (65)$$

ここに、

$$f_1 \{\xi, \zeta\} = \frac{\xi - \zeta^2}{1 - \zeta^2}, \quad f_2 \{\xi, \zeta\} = \frac{(1 - \xi)\zeta}{1 - \zeta^2} \dots (66)$$

また  $\delta$  の添字については、たとえば  $\delta_{ji}^{yx}$  は  $i$  杭に  $x$  方向単位水平荷重を加えたときの  $j$  杭の  $y$  方向杭頭変位を表わす。同様にして、 $y$  方向水平荷重  $Q_y=1$  を加えたとき、両杭の杭頭変位は

$$\left. \begin{aligned} \delta_{ii}^{xy} &= \delta_{ii}^{yx}, \quad \delta_{ji}^{xy} = \delta_{ji}^{yx} \\ \delta_{ii}^{yy} &= \beta \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} n^{-4} [f_1 \{\tilde{Y}_n, \tilde{U}_n(L)\} \sin^2 \varphi \\ &\quad + f_1 \{\tilde{Y}_n, \tilde{V}_n(L)\} \cos^2 \varphi] \\ \delta_{ji}^{yy} &= \beta \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} n^{-4} [f_2 \{\tilde{Y}_n, \tilde{U}_n(L)\} \sin^2 \varphi \\ &\quad - f_2 \{\tilde{Y}_n, \tilde{V}_n(L)\} \cos^2 \varphi] \end{aligned} \right\} \dots\dots (67)$$

のように表わされる。式 (65), (67) を用いれば、杭並び方向と荷重方向とが任意の角度をなす2本杭の場合についても、その群杭効果を容易に求めることができる。また、この両式は任意本数から構成された群杭の群杭効

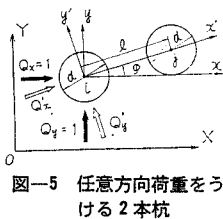


図-5 任意方向荷重をうける2本杭

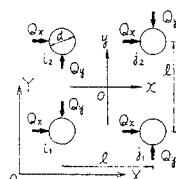


図-6 4本杭

果の近似計算にも利用することができる。

(4) 4本杭の場合

$M=2, N=2$  から構成される4本杭が、 $x$  方向水平荷重  $Q_x$  をうけたときの群杭効果を求めるには、前述の2本杭の場合と同様に考えて、各杭に一定の操作を順々に加えてやって各杭の杭頭変位を求めればよい。しかし、4本杭の場合は杭配置の対称性を利用すればかなりその手数を節約することができる。それには図-6において  $i_1, i_2$  杭と  $j_1, j_2$  杭とをそれぞれ一組にして考える。群杭効果を求めるには、図-6 に示すように  $i, j$  両杭に  $x$  方向および  $y$  方向水平荷重  $Q_x, Q_y$  を加えて、各杭の杭頭の  $x$  方向および  $y$  方向変位がそれぞれ 1, 0 となるような  $Q_x, Q_y$  が得られればよい。この  $Q_x, Q_y$  は次のようにして求めることができる。まず図-7 (a) に示すように、 $i_1, i_2$  杭に  $x$  方向単位水平荷重を加えたとき、 $i_1, i_2$  杭の変形曲線および  $j_1, j_2$  杭の中心軸上の地盤の変形曲線を、前節の2本杭についての所論を利用して求める。ただ、4本杭の場合は2本杭の場合と異なり、 $i$  杭に  $x$  方向水平荷重を加えたとき、 $j$  点の地盤が  $x$  方向の変位成分のみならず  $y$  方向の変位成分をも有するという事に注意する必要がある。したがって、次の操作からは  $y$  方向の拘束力を加えることが必要になってくる。さて、つづいて適当な強制分布荷重を加えて図-7 (a) の  $j$  点の地盤と等しい変形をさせた  $j_1, j_2$  杭に、今度は図-7 (b) に示すように、先に加えた強制分布荷重と大きさ等しく方向が反対の水平分布荷重  $p_j^{x(1)}, p_j^{y(1)}$  を加えて、 $j$  杭の変形曲線および  $i$  杭の中心軸上の地盤の変形曲線を、やはり2本杭の場合の所論に従って求める。以下図-7を参照しながら2本杭の場合と同様な操作を順々に続けていけばよい。本節ではその手順についてはこれ以上述べない。次に今度は  $i_1, i_2$  杭に  $y$  方向単位水平荷重を加えた場合についても同様な操作を行って各杭の杭頭変位を求める。いま  $i_1, i_2$  杭に対して、 $x$  方向および  $y$  方向単位水平荷重を加えたときの各杭の杭頭変位をそれぞれ  $\delta_{ii}^{xx}$  等および  $\delta_{ij}^{yy}$  等と表わせば、 $Q_x, Q_y$  は次の連立方程式を満足する解として得られる。

$$\left. \begin{aligned} (\delta_{ii}^{xx} + \delta_{ij}^{xx}) Q_x + (\delta_{ii}^{xy} + \delta_{ij}^{xy}) Q_y &= 1 \\ (\delta_{ii}^{yx} + \delta_{ij}^{yx}) Q_x + (\delta_{ii}^{yy} + \delta_{ij}^{yy}) Q_y &= 0 \end{aligned} \right\} \dots (68)$$

群杭効果  $e_i$  は次式によって求めることができる。

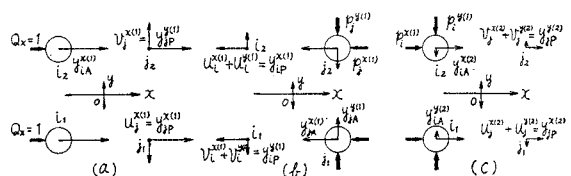


図-7 4本杭に対する操作手順

$$e_x = Q_x/Q_0 \dots\dots\dots(69)$$

$x$  方向に対する  $y$  方向の荷重分担率は  $Q_y/Q_x$  である。式(68)の  $Q_x$  の係数  $\delta_{ii}^{xx}$  などの具体的な表示式は

$$\left. \begin{aligned} f_n^* &= \frac{1}{2} \frac{2\tilde{U}_n(l) + \tilde{U}_n(\sqrt{2}l) - \tilde{V}_n(\sqrt{2}l)}{1 - \tilde{V}_n(l)} \\ f_n^{**} &= \frac{1}{2} \frac{\tilde{U}_n(\sqrt{2}l) + \tilde{V}_n(\sqrt{2}l)}{1 - \tilde{V}_n(l)}, \\ h_n^* &= \frac{\tilde{Y}_n - \tilde{V}_n(l)}{1 - \tilde{V}_n(l)} \\ g_n^* &= \frac{1}{2} \frac{2\tilde{V}_n(l) + \tilde{U}_n(\sqrt{2}l) - \tilde{V}_n(\sqrt{2}l)}{1 - \tilde{U}_n(l)} \\ g_n^{**} &= \frac{1}{2} \frac{\tilde{U}_n(\sqrt{2}l) + \tilde{V}_n(\sqrt{2}l)}{1 - \tilde{U}_n(l)}, \\ h_n^{**} &= \frac{\tilde{Y}_n - \tilde{U}_n(l)}{1 - \tilde{U}_n(l)} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(70)$$

$$\left. \begin{aligned} \begin{Bmatrix} s_n^{(k)} \\ t_n^{(k)} \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} f_n^* & g_n^* \\ f_n^{**} & g_n^{**} \end{Bmatrix} {}^{2k} \begin{Bmatrix} s_n^{(0)} \\ t_n^{(0)} \end{Bmatrix}, \\ \begin{Bmatrix} s_n^{(0)} \\ t_n^{(0)} \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(71)$$

とおけば

$$\left. \begin{aligned} \delta_{ii}^{xx} &= \beta \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} n^{-4} \{h_n^* s_n^{(k-1)} - s_n^{(k)}\} \\ \delta_{ij}^{xx} &= \beta \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} n^{-4} \{1 - h_n^*\} \{f_n^* s_n^{(k)} \\ &\quad + g_n^{**} t_n^{(k)}\} \\ \delta_{ii}^{yy} &= \beta \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} n^{-4} \{h_n^{**} t_n^{(k-1)} - t_n^{(k)}\} \\ \delta_{ij}^{yy} &= \beta \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} n^{-4} \{1 - h_n^{**}\} \{f_n^{**} s_n^{(k)} \\ &\quad + g_n^* t_n^{(k)}\} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(72)$$

$$\left[ \begin{array}{cccccccc} \delta_{11}^{xx} & \delta_{11}^{xy} & \delta_{12}^{xx} & \delta_{12}^{xy} & \dots\dots & \delta_{1,MN}^{xx} & \delta_{1,MN}^{xy} & \\ \delta_{11}^{yx} & \delta_{11}^{yy} & \delta_{12}^{yx} & \delta_{12}^{yy} & \dots\dots & \delta_{1,MN}^{yx} & \delta_{1,MN}^{yy} & \\ \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots & \\ \delta_{MN,1}^{xx} & \delta_{MN,1}^{xy} & \delta_{MN,2}^{xx} & \delta_{MN,2}^{xy} & \dots\dots & \delta_{MN,MN}^{xx} & \delta_{MN,MN}^{xy} & \\ \delta_{MN,1}^{yx} & \delta_{MN,1}^{yy} & \delta_{MN,2}^{yx} & \delta_{MN,2}^{yy} & \dots\dots & \delta_{MN,MN}^{yx} & \delta_{MN,MN}^{yy} & \end{array} \right] \begin{Bmatrix} Q_{x1} \\ Q_{y1} \\ \dots \\ Q_{x,MN} \\ Q_{y,MN} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ \dots \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \dots\dots(73)$$

ここに、 $\delta$  の添字はたとえば  $\delta_{ij}^{xy}$  は No.  $j$  杭に  $y$  方向単位水平荷重を加えたときの No.  $i$  杭の  $x$  方向の杭頭変位を表わす。群杭効果は

$$e_{MNx} = \sum_{i=1}^{MN} Q_{xi}/(MNQ_0) \dots\dots\dots(74)$$

と表わすことができる。No. 1 杭に対する荷重分担率は  $x$  方向は  $Q_{x1}/Q_{x1}$ ,  $y$  方向は  $Q_{y1}/Q_{x1}$  となる。

もし杭配置が対称性を有する場合には、4 本杭の場合に詳論したように、上述の操作手順数を大幅に減少させることができる。

以上述べた群杭効果の一般的な計算方法は、杭本数が増すに従ってその手数が杭本数の 2 乗に比例して増大し

となる。式 (68) の  $Q_y$  の係数  $\delta_{ii}^{yy}$  などについては、式(71)において、初期値を  $s_n^{(0)}=0, t_n^{(0)}=1$  と置き換えさえすれば式 (72) の表示がそのまま成立する。ただそのとき、式(72)の左辺を第 1 式から順に  $\delta_{ii}^{xy}, \delta_{ij}^{xy}, \delta_{ii}^{yy}, \delta_{ij}^{yy}$  と読み変えることが必要である。

(5) 一般の群杭の場合

MN本から構成される一般の群杭に対して、図-2 に示すように、各杭に順に番号 1, 2, 3, ...MN をつける。一般の群杭の場合についても、2 本杭について詳論した基本的な考え方を適用することができる。ただ、2 本杭の場合と異なり No. 3 杭以下の各杭の影響も同時に考慮に入れて、各杭および各杭の中心軸上の地盤の変形曲線を求めることが必要である。

表-1 操作手順数と杭頭変位量の大きさ  
( $\nu=0.43, H/d=40.0, \alpha_0=0.00025,$   
 $l/d=3.0, 境界なしの場合)$

操作 手順数	杭 $i$		杭 $j$	
	杭頭変位 $\tilde{y}_{iA}^{(k)}$	$\tilde{y}_{iP}^{(k)}$	$\tilde{y}_{jA}^{(k)}$	$\tilde{y}_{jP}^{(k)}$
1	1.0	—	—	0.4951
2	—	-0.0198	-0.0577	—
3	0.0084	—	—	0.0026
4	—	-0.0004	-0.0014	—
5	0.0003	—	—	0.0004
6	—	-0.0000	-0.0000	—

各杭の杭頭に  $x$  方向および  $y$  方向単位水平荷重を順次加えたときの各杭の杭頭の変位がそれぞれ得られれば、各杭に  $x$  方向および  $y$  方向水平荷重  $Q_{x1}, Q_{y1}, Q_{x2}, Q_{y2}$  等を同時に加えたとき、各杭の  $x$  方向の変位を 1,  $y$  方向の変位を 0 にするに必要な荷重  $Q_{xi}, Q_{yi}$  は、次の 2 MN 元の連立方程式を解くことによって求められる。

てゆく。しかし、表-1 に示した計算例からわかるように、補正変位量は操作回数に従って急速に減少するので、実用的には 2~3 回程度の反復計算で十分であるといえる。なお表-1 は 2 本杭について、 $i$  杭に  $x$  方向荷重を加えたときの  $i, j$  両杭の杭頭変位を (1) 節の所論に従って計算した結果を示したものである。同表の数値はすべて  $i$  杭の初回の変位に対する比で表わしてある。

4. 理論解の検討ならびに考察

本章では、著者らの理論による計算結果と ① 玉置らおよび Prakash らの実験結果との対比、② Penzien ら



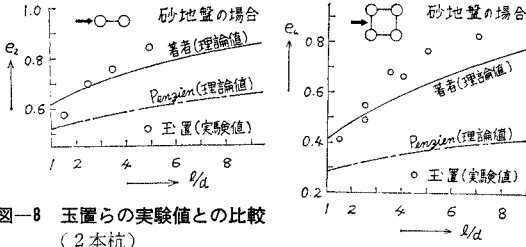


図-8 玉置らの実験値との比較 (2本杭)

図-9 玉置らの実験値との比較 (4本杭)

および Poulos の理論計算結果との比較を行って、著者らの理論の妥当性を検討し、2, 3 の考察を行った。

(1) 玉置らおよび Prakash らの実験結果との対比

図-8, 9 は 2 本杭および 4 本杭の場合について、玉置らの実験結果と、著者らの理論解とを対比したものである。玉置らの実験装置は 3.0 m × 2.0 m × 1.95 m (深さ) の砂地盤中に外径 4.3 cm, 長さ 1.95 m の鋼製杭を建て込んだものである。著者らの解におけるパラメータの値は実験における諸元に合わせて  $\nu=0.43$ ,  $H/d=45$ ,  $\alpha_0=10^{-5}$  とした。

実験時に杭頭を完全に回転拘束することができないために、玉置らは杭頭固定度を定義してこれをパラメータの一つにとって実験結果を整理している。図-8, 9 中の○印は、杭頭回転拘束の条件に合うように、著者らが玉置らの実験値を補正したのち、その補正值をプロットしたものである。補正は次のようにして行った。まず、玉置らが導いた群杭効果の実験式を用いて、固定度  $k(k < 1)$  と固定度  $k=1$  (完全固定) とに対する群杭効果の比  $k_r$  を求める。次に玉置らの実験値の  $k_r$  倍を頭部回転拘束に対する群杭効果の補正值として採用した。

杭間隔  $l/d$  が小さい時は実験値は理論解のまわりにばらついているが、 $l/d$  が大きくなるに従って両者の差が開いてくる。つまり  $l/d$  が大きくなると理論解は群杭効果  $e_n$  を過小に評価し過ぎる結果を与える。玉置らの実験における杭変位の大きさ (約 0.5 mm) のところでは、すでに砂地盤を完全弾性体とみなすことができないこと

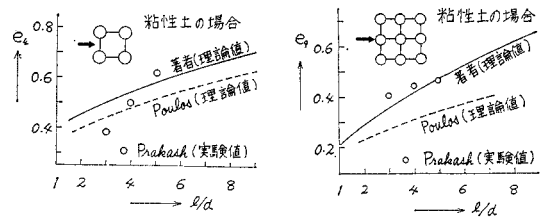


図-10 Prakash らの実験値との比較 (4本杭)

図-11 Prakash らの実験値との比較 (9本杭)

にその原因があると考えられる。すなわち砂地盤中の 1 点に力を加えると、砂地盤中の各点はそれぞれ変位を生ずるが、加力点からの距離による変位の減少の割合が、弾性論によるそれよりもかなり大きいため、 $l/d$  が大きくなると各杭間の相互作用が急速に弱くなり、その結果群杭効果  $e_n$  は理論値より大きくなるといえよう。また、図-8 中の一点鎖線は Penzien らの理論解である。実験結果と比べて Penzien らの解は群杭効果  $e_n$  を著しく過小に見積る結果を与えていることがわかる。なお図-9 に示す 4 本杭の場合についても同様のことがいえる。

図-10, 11 は 4 本杭と 9 本杭の場合について Prakash らの実験結果と著者らの理論解および Poulos の理論解との対比を示したものである。Prakash らの実験装置は 24.5 cm × 15.2 cm × 30.5 cm (深さ) の粘性土地盤中に外径 9 mm, 長さ 29 cm のアルミニウム製杭を建て込んだものである。著者らの解におけるパラメータは  $\nu=0.49$ ,  $H/d=30$ ,  $\alpha_0=10^{-4}$  とした。

粘性土地盤の場合については、杭間隔  $l/d$  が大きいときの実験値がないこと、実験において杭頭完全回転拘束の条件が完全には満たされておらないこと、杭頭変位が比較的大きく実験地盤の変形が非線型領域に入っていると考えられることなどのため理論値と実験値とを厳密に対比して、はっきりした結論を導き出すことはできないが、群杭効果の実験においては実験値のばらつきがかなり大きく出ることから考えて、理論値と実験値とはよく合っているといてもよい。また図-10, 11 中の点線は Poulos の理論解であるが、Poulos の解は群杭効果  $e_n$  を

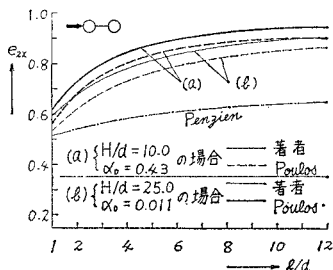


図-12(a) 各著者の解の比較 (2本杭 x 方向荷重)

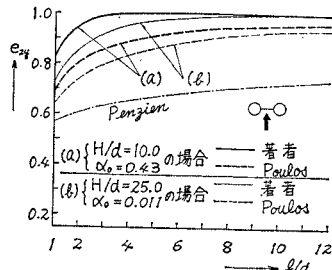


図-12(b) 各著者の解の比較 (2本杭 y 方向荷重)

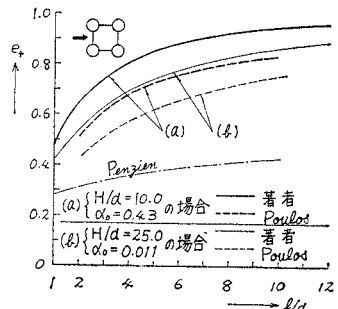


図-13 各著者の解の比較 (4本杭)

過小に評価する結果を与えており、それに比べると著者らの解の方が実験値に対する適合性がより高いと判断してもよからう。

$l/d$  が非常に小さいときは、砂地盤あるいは粘性土地盤のいずれの場合についても、実験値の方が理論値より一般に小さい。これは実験値における荷重-変位曲線の非線型性から考えて、杭間隔が小さいときには地盤の塑性変形の影響が群杭効果  $e_n$  に大きく影響し、見かけ上地盤のせん断弾性定数の値が小さくなったことに相当し、したがってたとえば図-14 からわかるように  $\alpha_0$  が小さくなったと同様な結果を与えるので、群杭効果  $e_n$  が小さく表われるためであると考えられる。

以上の議論から、総括的には著者らの理論は実験結果を比較的良好に説明し得るものであるといってもよい。

(2) Penzien らおよび Poulos の理論解との比較

図-12, 13 は著者ら, Penzien らおよび Poulos の三者による理論解を図示して比較したものである。後二者はポアソン比  $\nu$  として  $\nu=0.5$  を採用しているが、著者らは  $\nu=0.49$  とした。この程度のポアソン比の違いは結果にはほとんど影響しない。また Poulos の解は杭の断

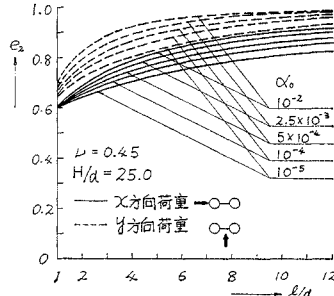


図-14 2本杭 ( $M=1, N=2$ ) の群杭効果の理論解

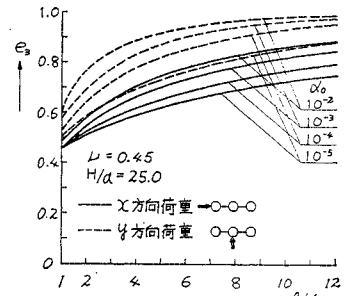


図-15 3本杭 ( $M=1, N=3$ ) の群杭効果の理論解

面が長方形の場合に対するものであるので、これを等価な円形断面に置換して比較を行った。同図から、著者らの解と Poulos の解とは、その傾向はよく似ているといえる。前節に述べた実験結果を考慮に入れば、Penzien らの解は他の二者の解に比べると群杭効果  $e_n$  を著しく過小に評価しすぎる結果を与えることがわかる。Poulos の結果は Penzien らの結果ほどではないが、やはり群杭効果  $e_n$  を過小に見積ることになるといえよう。

5. 数値計算結果

前章の理論に従って、それぞれ 2, 3, 4, 6 および 9 本杭から構成された群杭に対して、杭長と杭径の比  $H/d$

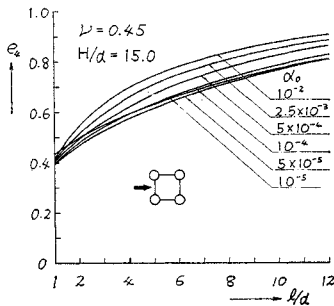


図-16 (a) 4本杭 ( $M=N=2$ ) の群杭効果の理論解

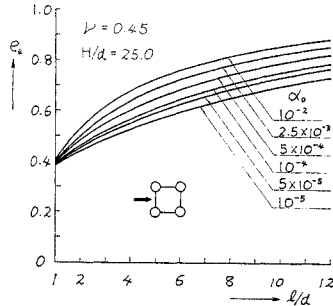


図-16 (b) 4本杭 ( $M=N=2$ ) の群杭効果の理論解

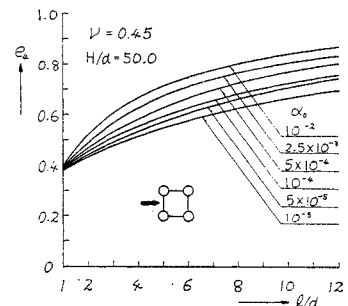


図-16 (c) 4本杭 ( $M=N=2$ ) の群杭効果の理論解

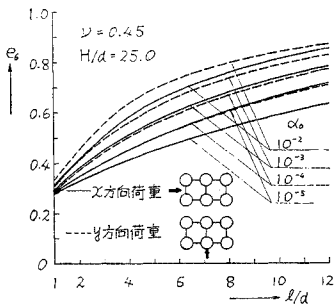


図-17 6本杭 ( $M=2, N=3$ ) の群杭効果の理論解

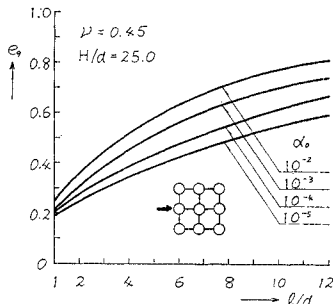


図-18 9本杭 ( $M=N=3$ ) の群杭効果の理論解

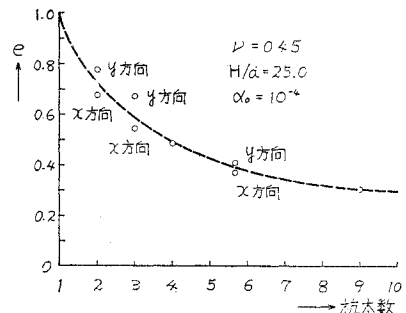


図-19 杭本数と群杭効果 ( $l/d=2.5$  の場合)

をいろいろに変えた場合について、地盤のせん断弾性定数と杭の曲げ剛性との比に比例する無次元量  $\alpha_0 = \mu / (E_p I_p)$  をパラメータとして群杭効果を計算した。結果の一部を 図—14—18 に示す。図はいずれも横軸に杭中心間距離と杭径の比  $l/d$  をとり、縦軸に式 (1) で定義された群杭効果  $e_n$  をとっている。上層地盤のポアソン比の変化が、群杭効果におよぼす影響はわずかであるから、同図には  $\nu = 0.45$  の場合についてのみ示した。通常実際によく使用されている多柱基礎に対しては  $H/d$  は 15~50,  $\alpha_0$  は  $10^{-5} \sim 10^{-2}$  の範囲に含まれているとみなしてよいので、本章では  $H/d$  が 15, 25, 50 の 3通りの場合について、 $\alpha_0$  を  $10^{-5} \sim 10^{-2}$  の範囲でほぼ 10 倍ずつ 4, 5 通り変えてそれぞれ群杭効果を計算した。

また 図—19 は一例として  $l/d = 2.5$  の場合に対して、杭本数と群杭効果との関係を示したものである。

数値計算結果および 図—14—19 から次のようなことがいえる。

(1) 杭本数が多いほど群杭効果  $e_n$  は小さく、杭本数に対して指数関数的に減少する。

(2) 杭本数が等しい場合には、杭の並び数が大きい方向に対する群杭効果  $e_n$  の方が、それと直角方向に対する群杭効果  $e_n$  より一般に小さいが、杭本数が多くなれば両者の差は小さくなる。

(3)  $H/d$  が大きいほど群杭効果  $e_n$  は小さいといえるが、 $H/d$  が 25 と 50 の場合には顕著な差が認められない。このことから、杭径の 20 倍を越すような長杭から構成される多柱基礎の群杭効果はいずれもほぼ等しいと考えてよい。

(4) 地盤のせん断剛性が小さいほど、あるいは杭の曲げ剛性が大きいほど (すなわち、 $\alpha_0 = \mu / (E_p I_p)$  が小さいほど) 群杭効果  $e_n$  は小さい。

(5) 地盤のせん断剛性および杭の曲げ剛性の広範囲な値の変化 ( $\alpha_0 = 10^{-5} \sim 10^{-2}$ ) に対して、それに応ずる群杭効果  $e_n$  の値はその変化の範囲が狭い。

(6) 杭本数が多いほど  $l/d$  が増すにつれて群杭効果  $e_n$  の増加の仕方が急である。

今後に残された研究課題としては、(1) 杭頭が回転自由である場合および弾性固定である場合の理論解を導くこと、(2) 地盤の非線型性を考慮した群杭効果の理論を確立することなどが挙げられる。これらの課題については現在研究中である。

終りに、貴重な実験結果を利用させていただいた玉置氏らおよび Prakash 氏らに謝意を表します。

#### 参考文献

- 1) 玉置 脩・三橋晃司・今井常雄：水平抵抗における群杭効果の研究，土木学会論文報告集，No. 192, pp. 79~89, 1971-8.
- 2) 江刺靖行・吉田保夫・江見元宣：杭の水平挙動に及ぼす杭間隔の影響，第8回土質工学研究発表会，昭 48-6.
- 3) 古藤田喜久雄・杉村義広・大杉文哉：群ぐいの水平抵抗低減値と設計法の提案，第8回土質工学研究発表会，昭 48-6.
- 4) Penzien, J., C.F. Scheffey and R.A. Parmelee: Seismic analysis of bridges on long piles, Proc. A.S.C.E., Vol. 90, No. EM3, pp. 223~254, 1964.
- 5) 杉村義広：群ぐい基礎における水平地盤係数の低減効果，第7回土質工学研究発表会，昭 47-6.
- 6) Poulos, H.G.: Behavior of laterally loaded piles. II-Pile groups, Proc. A.S.C.E., Vol. 97, No. SM5, pp. 733~751, 1971.
- 7) 田治見 宏：深い基礎を有する構造物の地震応答について，日本地震工学シンポジウム，昭 41-10.
- 8) Prakash, S. and D. Saran: Behaviour of laterally loaded piles in cohesive soil, Proc. 3rd Asian Regional Conference on Soil Mechanics and Foundation Engineering, 1967.

(1974. 12. 16・受付)