土木学会論文報告集
第 241 号・1975 年 9 月

水量制御からみたダム群のシステム設計に関する DP 論的研究

DYNAMIC PROGRAMMING FOR MULTI-RESERVOIR SYSTEM DESIGN BASED ON THE WATER QUANTITY CONTROL

高 棹 琢 馬*・池 淵 周 一**・小 尻 利 治***
By Takuma TAKASAO, Shuichi IKEBUCHI and Toshiharu KOJIRI

1. はしがき

最近の流域開発にともなう流出場の変化，河道改修の進捗は洪水流量を増大させており，また高度の土地利用の要請から河道の拡幅や遊水池の設定も困難にしている。一方，都市の膨張は急激な水需要の増加と偏在化をもたらしている。このことは多数のダム建設の必要性を意味し，洪水のピーク流量を逓減させる治水面においても，また増大する水需要に対処する利水面においても，これらダム群の最適配置・規模決定の問題が重大な課題となってきた。

この課題はいわゆるシステム設計の問題であり，従来，地形条件を含めた物理的条件および経済的諸条件を重視した方法で展開されてきた。しかし，最適設計となるとこれらの条件に加えて操作条件も考慮されなければならない。ここに操作とは配置・規模決定後の実操作が重要であることはもちろんであるが，計画上の操作も不可欠である。すなわち，操作には流入量予測および合理的かつ普遍的な最適操作方式の確立が二本柱であるが，ここでは，たとえば治水においては計画高水ハイドログラフを，利水においては基準渇水年のハイドログラフなどの流入量が既知の場合，あるいは流況シミュレーションを想定した場合など，ダム群のシステム設計にソフトな水量制御の側面を導入することを目的としている。

したがって，本研究では流入量既知の場合のダム群による水系全体としての最適制御を求める手法の展開が中心であり，これらの成果が上記目的をいかに応用されていくかは結語で述べることにする。

さて，著者らはこうした手法を確立するにあたり，ダム群による治水，利水操作が明らかに制御過程であることに着目し，最適制御の一般的手法として有効な DP (Dynamic Programming) を利用することにした。DP 理論のこの分野への適用は最近急速に進められているが[2),3),4)]，なかでも著者らの対象とする複数ダム，複数評価地点をもつ水系の最適化手法としては，特に竹内の DCL 手法[5)]に興味がある。しかし，種々の仮定の導入に再検討の余地があり，特に今の段階では，最適性の指標として損失あるいは便益などで示される経済的指標よりも，むしろ計量化がはっきりしている物理的指標，すなわち，通過流量と許容流量の比といった指標の方がより現実的であろう。

また，大規模河川システムは本論で述べるように，いくつかのサブシステムに分割し，それぞれについて最適化を計ればよいことに注目し，DP の特徴を最大限に生かす方向で理論の展開を行った。具体的には，複数ダム，複数評価地点を考慮した治水，利水目的を明らかにし，それにかなった評価関数を設定した。さらに，DP の計算上の問題に関する種々の解決手法を考察し，それらを数種の仮想流況で適用を行い，その有効性と今後の研究課題を明らかにしたものである。

2. 評価地点と評価関数

この章の本題にはいる前に従来より明らかにしてきた DP の定式化をディジタル化して述べると次のようになる[3)]。まず，制御系に用いる 4 つの変数は系内のダムの総数を N とすると，それぞれ，① 決定変数は各ダムの放流量 $O_n(n=1, 2, \cdots, N)$，② 状態変数は各ダムの貯水量 $S_n(n=1, 2, \cdots, N)$，③ 合成変数はダム下流の沿川に設けられた評価地点 $i(i=1, 2, \cdots, m$；m は評価地点の総数）を通過する流量 $Q_i(i=1, 2, \cdots, m)$，④ 外乱は各ダムの流入流量 $I_n(n=1, 2, \cdots, N)$，およびダムの残流域流量 $q_h(h=1, 2, \cdots, H_i$；H_i は合流後に評価地点 i を通過する支川のうち，他の評価地点およびダムを

* 正会員　工博　京都大学教授　工学部土木工学教室
** 正会員　工博　京都大学助教授　工学部土木工学教室
*** 正会員　工修　京都大学助手　工学部土木工学教室

通らない支川の総数）が相当する。

いま，制御期間が $1, 2, t, \cdots, T$ で与えられ，任意の期間 t におけるダム n の流入量，放流量がそれぞれ $I_n(t)$，$O_n(t)$ と既知で，期間 t の初期の貯水量が $S_n(t)$ であるとすると，連続式は

$$S_n(t+1)=S_n(t)+I_n(t)-O_n(t) \quad \cdots\cdots\cdots(1)$$

で与えられる。また，制約条件を

$$O_n(t) \leqq g_n(S_n(t)+I_n(t))$$

とし，後進型 DP の計算上の初期条件を

$$C_n=S_n(T+1)$$

とすると DP による定式化は次式のように表現される。

すなわち，

$$f_t(S_1, S_2, \cdots, S_N)$$
$$=\min_{0\leq S_n\leq V_n}\left\{\sum_{i=1}^{m} D_i\{Q_i(t)\}+f_{t+1}(S_1, S_2, \cdots, S_N)\right\}$$
$$(n=1,2,\cdots,N) \quad \cdots\cdots\cdots(2)$$

ここに，$f_t(S_1, S_2, \cdots, S_N)$ は任意の期間 t から最終期間 T までの最適放流量系列による目的関数の最小値 $D_i\{Q_i(t)\}$ は評価地点 i における評価関数の値，V_n はダム n の有効貯水容量である。

ところでこの漸化式を解く手がかりとして，制御初期段階の決定による目的関数値 $f_T(S_1, S_2, \cdots, S_N)$ が必要であり，それは一意的に

$$f_T(S_1, S_2, \cdots, S_N)=\sum_{i=1}^{m} D_i\{Q_i(T)\} \quad \cdots\cdots(3)$$

となる。したがって，式（2）および（3）より f_T，$f_{T-1}, \cdots, f_1$ を求め，全期間における制御最終値，すなわち制御期間の初期貯水量状態を

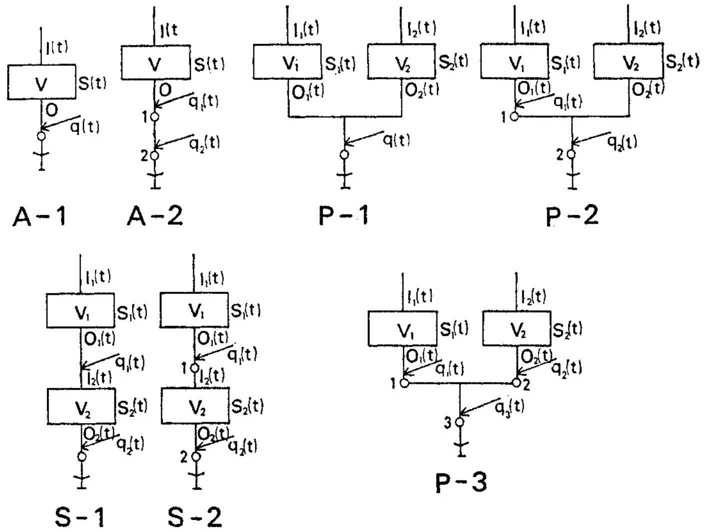
$$(S_1(1), S_2(1), \cdots, S_N(1))$$
$$=(S_1(1)^0, S_2(1)^0, \cdots, S_N(1)^0)$$

と与えれば，$f_1(S_1(1)^0, S_2(1)^0, \cdots, S_N(1)^0)$が求める最適制御解である。

このように，最適制御過程は DP により定式化されたわけであるが，次に問題となるのは目的関数の設定である。著者らが式（2）および（3）で示した目的関数については，評価地点 i の配置およびそれに付与する評価関数 $D_i\{Q_i(t)\}$ の与え方が重要であり，以下で詳細に論議しよう。

（1） 評価地点

評価地点を設定すべき箇所は，ダム操作による制御効果を明確に表わすとともに，治水においては防災地区，利水においては需要地区あるいは取水地区を代表する点



図—1 制御システムの基本パターン

と考えることができる。実際の水系では，ダムおよび評価地点も複数で存在し，複雑なシステムを構成しているのが現状である。

ところで，ダム貯水池の操作によって影響を受ける範囲はダム下流部の支川流入や河道内の自然な調節作用などにより限られるので，ダムを群として扱うべき範囲もまた限られていると考えてよいはずである。こうした観点から，時間的，空間的に相互作用があるサブシステムで分割すると，複数ダム，複数評価地点をもつトータルシステムは図—1 に示した7通りの基本パターンで表現されよう。したがって，制御システムは，それぞれのサブシステムをいくつか組み合わせたものといえるので，各サブシステムの最適方式の集合がトータルシステムの最適化と考えることができる。このような意味で，各基本パターンでの最適制御方式の確立が必要となるわけである。

（2） 制御目的

治水制御の目的は，水系一貫した操作によってダム下流部河道における洪水のピーク流量を可能な限り小さくし，越水による破堤を防ぐことにあると考えられる。

いま，ダム下流部の防災対象地区を評価地点 $i(i=1, 2, \cdots, m)$ で代表させ，各地点における許容流量を Q_{id}（たとえば計画高水流量）とする。また，制御後の評価地点 i を流下する洪水のピーク流量を Q_{ip} とすると，上記の目的は

$$K \equiv \max\{Q_{ip}/Q_{id}\} \rightarrow \min \quad (i=1, 2, \cdots, m) \quad \cdots\cdots\cdots(4)$$

かつ

$$K \leq 1$$

と表現することができよう。ただし，$K>1$ のときは，どのような制御を行おうともいずれかの評価地点で越水あるいは破堤が生ずることを意味しており，計算結果がたびたびそういう状況を示す場合には，ダムの治水容量あるいは Q_{id} の決定を再検討する必要があろう。ここでは $0 \leq K \leq 1$ の場合だけを取り扱い，$K>1$ のときは与えられた施設群では防御しきれない限界洪水と定義し，別の扱いをすることにしておく[6]。

一方，利水制御の目的は次のように定義されよう。いま，ある流域内に設けられたいくつかの評価地点で，ある期間常にある需要量を満たす流量が流れていて，それを決して下回わらないように制御することとすると，具体的には

$$P \equiv \min\{Q_{il}/Q_{id}\} \rightarrow \max \quad (i=1, 2, \cdots, m) \qquad \cdots\cdots(5)$$

かつ

$$P \geq 1$$

となる。さらに，水利用の面からすれば，最低流量の継続時間はできるだけ短く，しかも，流況に変動の少ないことが望まれる。ここに，Q_{il} は制御後の評価地点 i を流下する流量の最低値であり，Q_{id} は評価地点 i における確保流量，すなわち，河川維持用水，都市用水，工業用水，農業用水などの需要量を示す。

（3） 評 価 関 数

前節のように定義された目的を DP によって達成するには，評価地点に付与すべき評価関数 $D_i\{Q_i(t)\}$ の具体的な設定が必要である。1 評価地点である A-1, P-1, S-1 のときには，治水，利水いずれの場合でも，凸関数であれば最適放流量系列が得られるので，本研究では，複数評価地点をもつ制御系での評価関数を提案する。

著者らは制御目的を式（4），（5）で表わし，各評価地点での被害のウェイトをできるだけ均等化し，かつ，最小化しようとしている。その結果，通過流量の 1 単位は各地点で同じウェイトをもたず，次式で示すような許容流量に従属した $a_i (i=1, 2, \cdots, m)$ なるウェイトをもつことが考えられる。

$$a_i Q_{id} = \text{const.} \qquad \cdots\cdots(6)$$

なお，a_i はあとで述べる評価関数の制御目的との適合性より正整数とする。したがって，評価関数としては，治水目的と利水目的が相対関係にあることより，次のような式が考えられる。

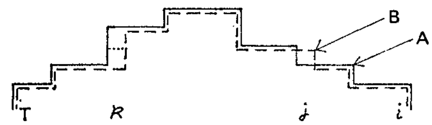
$$D_i\{Q_i(t)\} = \{(\omega+1)m\}^{\pm a_i Q_i(t) \mp b} \qquad \cdots\cdots(7)$$

ここに，指数部の符号は複合同順で，それぞれ治水制御，利水制御に対応している。また，ω は各期間での状態変数の可動範囲の最大値，b は任意定数である。式（7）は以下の証明において明らかなように，制御目的より起因する唯一の関数ではない。凸関数であること，および後述する制御過程における流量系列の変化特性を最大限に利用することを考慮して見い出したものであり，制御目的を満足する関数の 1 つであるといえる。なお，次に前述の変化特性と式（7）の制御目的との適合性の証明を行うが，治水制御の場合だけをとりあげ，利水制御については同様の手順であるので省略する。

本研究では DP に後進型計算法を用いているので，制御が期間 T から期間 $u+1$ まで進み，次の制御期間 $t=u$ において，貯水状態 $S(u)$ がある値 X から $X-1$ に変化したときの，それまでの制御で決定されている各地点の最適通過流量系列の応答を考察しよう。この 2 種類の流量系列において，時間的要素を無視し流量値だけを対象にして比較すると，すなわち，ハイドログラフを重ねて比較するのではなく，同一流量値で時間的に前後する場合は同じものとして比較すると，1 個の期間だけ，あるいは 2 個の期間，あるいは……で相違が生ずると考えられる。ただし，空間的な連続性，つまり同一期間での流れの連続性は保持しておく。すると実際には，常に最適な決定がなされておれば，各地点で 1 個の期間だけで，しかも流量値は 1 単位しか変化しておらず，そのことを A-2 型を例にとって説明しよう。

いま，2 個の期間で流量値に相違がみられると仮定する。各地点の通過流量の変化は放流量の変化に対応しているので，図—2 において最適放流量系列だけを示すことにするが，A は $S(u)=X$ での，B は $S(u)=X-1$ での，それまでの制御で決定された最適系列である。それぞれの場合の貯水量系列 $\{S(t)\}$，放流量系列 $\{O(t)\}$ $(t=T, T-1, \cdots u)$ も $S(u)=X$ のときを基準にして同図に記してある。また，A と B との流量値の相違は期間 k, j でみられ，期間 u までの水収支を考慮すると，期間 j で 1 単位相違があるなら，期間 k では 2 単位である。

さて，$S(u)=X$ での最適放流量系列 A ならびにそれに対応する最適通過流量系列に注目しよう。期間 k での



t	T	k	j	i
$S_A(t)$	S(T)	S(k)	S(j)	S(i)
$O_A(t)$	O(T)	O(k)	O(j)	O(i)
$S_B(t)$	S(T)	S(k)	S(j)−2	S(i)−1
$O_B(t)$	O(T)	O(k)−2	O(j)+1	O(i)

図—2 貯水量の変化によって流量系列が 2 単位変化している場合

放流量を1単位減らし，期間 j で1単位増加させる操作が可能であるとする。$S(u)=X$ の通過流量系列から，$S(u)=X-1$ での系列と相違がある期間，すなわち，期間 j,k の流量値だけをとり出すと次のようになる。

$$\kappa'=\max\{a_1Q_1(k),\ a_1Q_1(j),\ a_2Q_2(k),\ a_2Q_2(j)\} \quad \cdots\cdots(8)$$

一方，上記の操作を加えた後は

$$\kappa''=\max\{a_1(Q_1(k)-1),\ a_1(Q_1(j)+1),\ a_2(Q_2(k)-1),\ a_2(Q_2(j)+1)\} \quad \cdots\cdots(9)$$

となる。なお，この κ は，式（6）の関係より，制御目的式（4）の分母，分子に重み a_i を乗じた結果得られたもので，K と同じ意味をもち，κ の最小化は治水目的を満たすことにほかならない。式（8）および（9）に関して，最適系列は A に対応する場合であるから不等式

$$\kappa'<\kappa'' \quad \cdots\cdots(10)$$

が成立しなければならない。

次に，$S(u)=X-1$ での最適放流量系列 B をとりあげよう。期間 k での放流量を1単位増加し，期間 j で1単位減少させると，この操作を行う前後の通過流量系列は，前述のように κ で表わせばそれぞれ次のようになる。

操作を行う前

$$\kappa'''=\max\{a_1(Q_1(k)-2),\ a_1(Q_1(j)+1),\ a_2(Q_2(k)-2),\ a_2(Q_2(j)+1)\} \quad \cdots\cdots(11)$$

操作を行った後

$$\kappa''''=\max\{a_1(Q_1(k)-1),\ a_1Q_1(j),\ a_2(Q_2(k)-1),\ a_2Q_2(j)\} \quad \cdots\cdots(12)$$

最適放流量系列は操作を加える前の B の場合であるから，

$$\kappa'''<\kappa'''' \quad \cdots\cdots(13)$$

が成立する。ここで，式 (10)，(13) を式（8），（9）および式 (11)，(12) の要素を用いて簡単にすると，それぞれ，

$$\max\{a_1(Q_1(k)-1),\ a_2(Q_2(k)-1)\} < \max\{a_1(Q_1(j)+1),\ a_2(Q_2(j)+1)\} \quad \cdots\cdots(10)'$$

$$\max\{a_1(Q_1(k)-1),\ a_2(Q_2(k)-1)\} > \max\{a_1(Q_1(j)+1),\ a_2(Q_2(j)+1)\} \quad \cdots\cdots(13)'$$

となる。この式 (10)′，(13)′ が同時に成立しないことは明らかである。すなわち，$S(u)=X$ あるいは $S(u)=X-1$ における最適放流量系列を A, B と定めたことに誤りがあることを意味している。したがって，$S(u)=X$ での真の最適放流量系列が A である場合，$S(u)=X-1$ での最適放流量系列は，Bではなく式 (10)′ を満たす系列が最適解になる。具体的には，上述の証明過程において，流量を期間 k で1単位増加，期間 j で1単位減少する操作を加えた後の系列である。その結果，$S(u)=X$ での最適放流量系列と期間 k の1期間で，しかも流量値も1単位の相違があるにすぎず，それに対応して各地点の通過流量の相違も同様になる。さらに，この理論を3個，4個，……の期間で流量値に相違がある場合にもあてはめることができる。けっきよく，$S(u)=X$ と $S(u)=X-1$ での通過流量系列は，その時間的要素を無視した流量値だけを対象とする限り，それまでの制御が最適なら各評価地点で1期間だけで，しかも1単位の相違がみられるにすぎないとの結論が得られる。

ところで，DP の制御過程は，任意の期間 $u-1$ での任意の貯水量 $S(u-1)$ における最適放流量の決定に際して，期間 u での貯水量を最小値から順次増加させ，おのおのの通過流量系列による目的関数値を比較する方法をとっている。ここに上記の特徴を用いると，制御過程における系列の変化は，制御時の前の期間の貯水量 $S(u)$ のとり得る範囲に対応しているといえる。ゆえに，制御期間 t において期間 $t+1$ での状態変数の変動範囲を v_t で表わすと，期間 $t+1$ での貯水量の変動による流量系列（放流量，通過流量）の変化は $\min\{v_t,\ T-t\}$ である。したがって，

$$\omega=\max[\min\{v_t,\ T-t\}] \ (t=T,\ \cdots,\ 1) \quad \cdots(14)$$

と定めると，全制御期間を通じての流量系列の変化の最大値は，制御時を含めて $(\omega+1)$ 箇所となる。なお，貯水容量 V を用いると，ω は一般に $\min\{V+1,\ T-1\}$ なる定数が用いられるが，次章で述べる DDDP のように状態量の変域を制限する方法ではきわめて小さい値にすることができる。次に，こうした特徴をもつ制御過程において，式（7）が最適評価関数であることを証明しよう。

いま，任意の制御期間 u における最適放流量の決定に際し，系列の変化個数が各地点で最大である $(\omega+1)$ の場合を考えよう。すなわち，期間 $u+1$ での貯水量の差が最大のときの目的関数の変動と制御目的の関係を明らかにして，評価関数の制御目的との適合性を言及するのである。評価地点の通過流量で相違がある期間を j $(j=1,2,\cdots,(\omega+1))$ で代表し，次式のような場合を想定しよう。

$$K'=\max\{Q_1'(j)/Q_{1d},\ Q_2'(j)/Q_{2d},\ \cdots,\ Q_m'(j)/Q_{md}\}=Q_1'(1)/Q_{1d} \quad \cdots\cdots(15)$$

一方，通過流量系列の変化しない部分による評価関数の総和を R とすれば，目的関数は

$$J_u'=\sum_{i=1}^{m}\sum_{t=u}^{T}D_i\{Q_i(t)\} = \{(\omega+1)m\}^{a_1Q_1'(1)-b}+\{(\omega+1)m\}^{a_2Q_2'(1)-b} + \cdots + \{(\omega+1)m\}^{a_mQ_m'(\omega+1)-b}+R$$

$$>\{(\omega+1)m\}^{a_1Q_1'(1)-b}+R \cdots\cdots(16)$$

となる。ここに，$D_i\{Q_i(t)\}$ は指数関数であるから

$$D_i\{Q_i(t)\}>0$$

である。

次に流量系列が変化した結果

$$K''=\max\{Q_1''(j)/Q_{1d}, Q_2''(j)/Q_{2d}, \cdots, Q_m''(j)/Q_{md}\}<K' \cdots\cdots(17)$$

となったとすれば

$$\begin{aligned} a_iQ_i''(j) &< a_iK'Q_{id} \\ &= a_1K'Q_{1d} \\ &= a_1Q_1'(1) \end{aligned}$$

の関係が成立し，かつ，両辺は整数であるから，

$$a_iQ_i''(j)\leq a_1Q_1'(1)-1 \cdots\cdots(18)$$

となり，目的関数は次のようになる。すなわち，

$$\begin{aligned} J_u'' &= \sum_{i=1}^{m}\sum_{t=u}^{T} D_i\{Q_i(t)\} \\ &\leq \{(\omega+1)m\}^{a_1Q_1'(1)-b-1} \\ &\quad +\cdots+\{(\omega+1)m\}^{a_1Q_1'(1)-b-1}+R \\ &= \{(\omega+1)m\}^{a_1Q_1'(1)-b}+R \cdots\cdots(19) \end{aligned}$$

が得られ，$K'>K''$ ならば $J_u'>J_u''$ となるのは明らかである。また，$J_u'>J_u''$ ならば $K'\geq K''$ も成立し，かつ，

$$f_t(S(t))=\min\{J_u^l\} \quad (l=1, 2, \cdots, (\omega+1))$$

であることを考えれば，この関数を用いると各制御で常に最適な放流量を決定し，最小の K が得られることになる。ここに，J_u^l は制御期間 u で比較を行うはじめの系列と，l 個の期間で通過流量に相違がある系列の目的関数値を示す。このような過程で制御が進み，最終期間での貯水量 $S(1)$ が与えられると，$f_1(S(1))$ より得られる放流量系列は K の値を最小，いいかえると，治水目的を満たす最適解となり，式（7）は評価関数であるといえる。また，それに対応する通過流量系列も最適解であるので，ピーク流量の継続時間の総和も最小にしており，堤防の安全性からも好都合である。このことをやはり A-2 型を例にとって説明すると次のようになる。

すでに証明したように，任意の制御期間での貯水量の変動による流量系列の変化は最大 $(\omega+1)$ 箇所である。ここで，制御期間 $u+1$ においてピーク流量の継続時間の総和が変化した場合を考えよう。すなわち，

$$\left.\begin{aligned} Q_{1p}'/Q_{1d}=Q_{2p}'/Q_{2d}=K' \\ N(Q_{1p}')+N(Q_{2p}')=n' \end{aligned}\right\} \cdots\cdots(20)$$

とする。ここに，$N(Q_i)$ は評価地点 i における流量 Q_i の継続時間であり，n' は $2\leq n'\leq 2(\omega+1)$ なる整数である。また，$N(Q_{1p}')=n_1'$，$N(Q_{2p}')=n_2'$ (n_1', n_2' : $1\leq n_1', n_2'\leq\omega+1$ なる整数）とすると，目的関数 J_u' は，

$$\begin{aligned} J_u' &= \sum_{i=1}^{2}\sum_{t=u}^{T} D_i\{Q_i(t)\} \\ &\geq n_1'\{2(\omega+1)\}^{a_1Q_{1p}-b} \\ &\quad +n_2'\{2(\omega+1)\}^{a_2Q_{2p}'-b}+R \\ &= n'\{2(\omega+1)\}^{cK'-b}+R \cdots\cdots(21) \end{aligned}$$

となる。ただし，$c=a_1Q_{1d}=a_2Q_{2d}$ である。つづいて，流量系列が変化して

$$\left.\begin{aligned} &N(Q_{1p}')+N(Q_{2p}')=n''\leq n'-1 \\ &N(Q_{1p}')=n_1'' \ (n_1'' : 0\leq n_1''\leq\omega+1 \text{ なる整数}) \\ &N(Q_{2p}')=n_2'' \ (n_2'' : 0\leq n_1''\leq\omega \text{ なる整数}) \end{aligned}\right\} \cdots\cdots(22)$$

となったとすると，目的関数は

$$\begin{aligned} J_u'' &= \sum_{i=1}^{2}\sum_{t=u}^{T} D_i\{Q_i(t)\} \\ &\leq n_1''\{2(\omega+1)\}^{a_1Q_{1p}'-b} \\ &\quad +(\omega+1-n_1'')\{2(\omega+1)\}^{a_1(Q_{1p}'-1)-b} \\ &\quad +n_2''\{2(\omega+1)\}^{a_2Q_{2p}'-b} \\ &\quad +(\omega+1-n_2'')\{2(\omega+1)\}^{a_2(Q_{2p}'-1)-b} \\ &\quad +R \\ &< n'\{2(\omega+1)\}^{cK'-b}+R \cdots\cdots(23) \end{aligned}$$

となる。

したがって，式 (21)，(23) より $J_u'>J_u''$ が成立し，制御期間 $u+1$ での放流量の決定において，ピークの継続時間が最小化されることは明らかである。

3. 計算を実行するための諸手法

ダム群による治水，利水制御の DP による定式化，および評価地点に付与すべき評価関数が与えられると，残る課題は計算の実行である。ところが，前にも述べたように多次元，多期間，多容量の制御過程を考える以上，計算の実行可能性に限界が生じるのは当然である。その原因を大別すると，i）先に提案した評価関数において $\{(\omega+1)m\}^{\pm a_iQ_i(t)\mp b}$ の値が計算機内でオーバーフローあるいはアンダーフローのエラー，具体的にいうと，$Q_i(t)$ がその制約条件を満たす範囲内で最大値をとった場合，計算機固有の特性（本研究に用いた FACOM 230-75 では1語の大きさは $10^{\pm 76}$）より，上記のエラーを生じる可能性があること，ii）多次元，多期間による記憶容量および計算時間の問題である。一つの解決策として，離散区間の選び方を粗くすることが考えられる。しかし，あまり粗くすると実用的な解が得られず根本的な解決策とはならない。またii）の問題については，次元の節減化すなわち，多次元問題をより低次元の問題におきかえること，あるいは次元はそのままにして状態変数の変域を制限して状態量を減らす方法が考えられる。

以下では，上記の問題を (1) 近似化された目的関数，(2) ダム群の合成や逐次近似法による次元の節減化，(3) 記憶容量を減らすための DDDP 及び期間分割の 3

つの面からアプローチした諸手法について概説しよう。

（1） 近似化された目的関数

目的関数を最小化することがそのまま K の値を最小化する評価関数として式（7）を見い出し，その解が同時に唯一の最適解であるという意味で最適評価関数とみなした。しかし，制御目的が明確にされている以上，ここではそれを直接目的関数として，計算の実行可能性を高める方法を考察しよう。なお，以下の議論は主として治水問題について述べており，利水問題については特別な場合を除いて省略する。

いま，$f_t(S_1, S_2, \cdots, S_N)$ を任意の期間 t から最終期間 T までの目的関数の最小値，つまり，ピーク流量と許容流量の比の最小と定義すると，DP の定式化は次のようになる。

$$f_t(S_1, S_2, \cdots, S_N) = \min_{0\leq S_n\leq V_n}\left[\max\left\{\left(\frac{Q_i(t)}{Q_{id}}\right), f_{t+1}(S_1, S_2, \cdots, S_N)\right\}\right]$$

$$(i=1, 2, \cdots, m;\ n=1, 2, \cdots, N) \cdots\cdots\cdots\cdots (24)$$

この関数の特徴としては，① 指数関数でないのでオーバーフロー，アンダーフローの心配がなく，しかも計算時間が短縮できることである。しかし，② ピーク流量だけを対象としているため，解の一意性は成りたたず，次章の結果からもわかるように，式（7）を用いた場合に比してピークの継続時間が長くなる傾向にある。その対策として，ピーク流量の出現回数の最小化を同時に考慮した制御方法が考えられ，計算結果では多少の改良が可能である。

なお，この計算法の利水制御への応用としては，制御期間が長いため式（7）では計算時間が長すぎ，しかも，最低流量だけを対象とする渇水の判定問題，いるかえると，$P<1$ が生ずる可能性を見い出す問題に対しては有効であろう。

（2） 次元の節減化

a） ダム群の合成および空間基準

複数のダムによる統合的な操作は，原理的にはDPの式をそのまま解けば求まるが，実際に計算する場合には記憶容量，計算時間を考えると，一次元問題におきかえて解くのが望ましいことはいうまでもない。そこで，まず1評価地点2ダムである並列（P-1 型）および直列（S-1 型）について次元の節減化の可能性を考察し，その後，複数評価地点の取り扱いを検討する。

さて，P-1 型に関する DP の式は式（2）より

$$f_t(S_1, S_2) = \min_{0\leq S_1<V, 0\leq S_2\leq V}\{D(O_1(t)+O_2(t)+q(t)) + f_{t+1}(S_1(t+1), S_2(t+1))\} \cdots\cdots (25)$$

となる。

いま，仮想の合成ダムとして

$$\left.\begin{aligned} V_0 &= V_1+V_2 \\ C_0 &= C_1+C_2 \\ I_0(t) &= I_1(t)+I_2(t) \end{aligned}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots (26)$$

を想定し，一次元問題におきかえて放流量 $O_0(t)$ を求め，それを $O_1(t)$ および $O_2(t)$ に配分することを考える。また，合成ダムで解く場合，制約条件がもとの条件より緩和されているため両者の解が必らずしも一致するとは限らない。こうした理由から，著者らは従来用いられている空間基準を，“複数ダムによる最適制御方式を仮想の単一ダムとして求め，その解を各貯水池の制約条件を満たすように配分する方法”であると定義した。また同時に，解が複数ダムでの最適解と一致しないときは，解の変更を指示する手段でもあると考えた。具体的な形としては，Harvard Water Program で提案された方法[7]があるが，ダムの制約条件に直接影響を与えるのはその期間の流入量が最も大きいこと，また将来，適応制御問題への応用時における降雨の予測精度を考慮すると，この空間基準は次のように表現を変えることができよう。すなわち，“ある期間内の放流量の決定は，貯水池の空間と全貯水池についての空間の総和との比が，その期間に予想されるその貯水池への流入量と全貯水池への流入量との比に等しくする”ことである。これを数学的に記述すると，P-1 型では

$$\frac{V_i - S_i(t)}{\sum_{i=1}^{2}\{V_i - S_i(t)\}} = \frac{I_i(t)}{\sum_{i=1}^{2} I_i(t)} \quad (i=1, 2) \cdots (27)$$

となり，式（1）と式（27）より各貯水池の放流量が決定される。

この配分は $t=1$ から始めるが，求める $O_1(t-1)$，$O_2(t-1)$，$S_1(t)$，$S_2(t)$ は非負であるから，負の値をとれば0に変換しなければならない。さらにこうした操作を行っても各制約条件が満足されないときは，仮想の合成ダムによる解が，複数ダムでの最適系列と一致しないとみなして，期間 $t-1$ での放流量を一単位ずつ増加 $(O_0(t-1)=O_0(t-1)+1)$ して各制約条件を満たせばよい。しかしその結果，系列に変化が生じるわけだから，以後の期間については期間 t での変換後の貯水量をもつ系列 $(S_0(t)=S_1(t)+S_2(t))$ を新たな最適系列として求め，配分を繰り返す。

次に直列の S-1 型では，仮想の合成ダムとして

$$\left.\begin{aligned} V_0 &= V_1+V_2 \\ C_0 &= C_1+C_2 \\ I_0(t) &= I_1(t)+q_1(t) \end{aligned}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots (28)$$

が考えられる。配分方法としては並列型と同じように空間基準を用い，具体的には次のようになる。

$$\left.\begin{aligned}&\frac{V_1-S_1(t)}{\sum_{i=1}^{2}\{V_i-S_i(t)\}}=\frac{I_1(t)}{I_1(t)+q_1(t)}\\&S_2(t)=S_0(t)-S_i(t)\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(29)$$

また，複数ダムでの最適解をみると，治水制御の場合は上流側のダムがまず満水に近い状態になり下流側のダムを空けておき，利水制御では，下流側のダムがなるべく満水に近い状態になる傾向がある。したがって，第2の配分方法として，治水面では以下の手順が考えられよう。

① $S_0(t)\geq V_1$ のとき：上流側のダムを満水にし残りを下流側の貯水量とする。

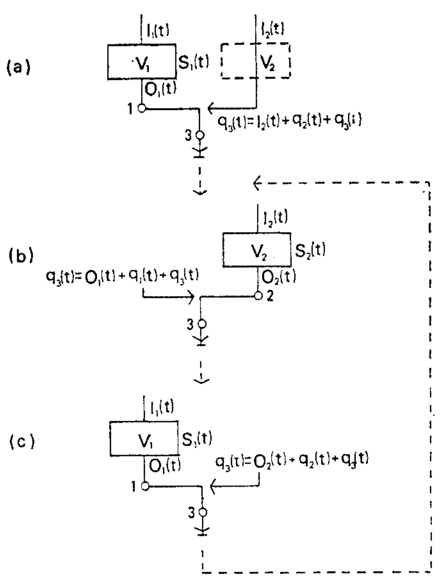
② $S_0(t)<V_1$ のとき：上流側のダムの貯水量を $S_0(t)$ とし，下流側の貯水量は 0 とする。

なお，利水制御に関しては，上記の条件を上流，下流逆に置けばよい。ここでも並列型の場合と同様にすべての制約条件が満たされないときは，放流量 $O_0(t-1)$ を一単位ずつ増加して配分を行い，ふたたび，合成ダムでの最適系列を求めなければならないことはいうまでもない。しかし，上流側のダムの自由度が大きいので，配分不可能となる場合は比較的少ないものと考えられる。

直列型の配分方法には以上の2種類があるが，このほかに S-2 型の近似解法の応用も考えられる。いずれも完全な方法ではなく，いいかえると，一つの配分方法にすぎず，今後多くの流況パターンで計算を行い，その適用性を検討しなければならない。

b） 逐次近似法および直列ダムの近似解法

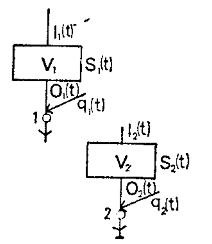
前節では1評価地点の場合を議論したが，多評価地点をもつ複数ダムにおける制御には評価地点間の影響があ



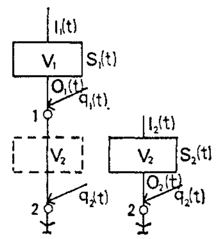
図—3 逐次近似法の概略図

り，上述の仮想ダムに合成する方法は利用できない。そこで複数ダムの最適解に等しいか，許容される程度の誤差をもつ近似解が必要となってくる。その具体的な方法の一つが逐次近似法であり，P-2, P-3 型に適用される。この方法は政策空間において，図—**3** で示すような流れで繰り返し解を求めることにより最適解に接近させていく方法である。簡単に手順を述べると，まず，どちらか一方のダムの放流量を残流域流量の一部とみなして制御を行う（図—**3**（b））。次に，その制御された放流量を残流域流量の一部とみなし，別のダムによって制御を行う（図—**3**（c））。なお，用いる評価関数は各制御でその最適系列を求めるのだから，式（7）に応じた形でなければならない。また，この繰り返し方法によって各ダムによる高次の近似解を求めていくわけであるが，解の収束は評価関数の制御目的との最適性の証明（**2.** 章）と同様にして導くことができるので，ここでは省略する（補遺参照）。

次に直列（S-2型）に関しては，単ダムの連続として解く方法（近似解法（I））が考えられる（図—**4**）。この方法の欠点は，上流側のダムがすぐ下流の評価地点に対して制御作用があるだけで，それ以外の評価地点での平滑化が行われにくいことである。ゆえに，残流域流量が多く，下流側のダムへの流入量が上流側のダムであまり制御できないとき，あるいは，利水面で $Q_{1d}>Q_{2d}$ である場合には有利であろう。



図—4 S-2 型の近似解法（I）の概略図



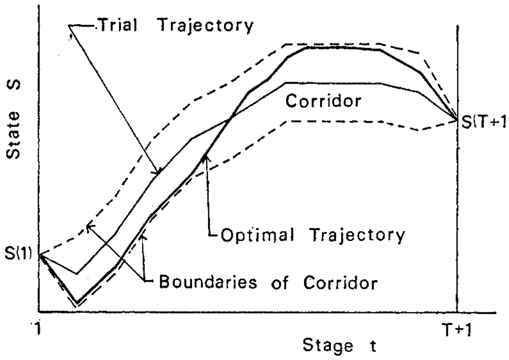
図—5 S-2 型の近似解法（II）の概略図

一方，評価地点間の影響を重視する方法（近似解法（II）），特に下流側の地点での制御効果を期待する方法は次のようになる。まずはじめに，下流側のダムを考えずに上流側のダムと2個の評価地点による制御（A-2型）を行い，つづいて，その放流量を下流側のダムの流入量として制御（A-1 型）を行うものである（図—**5**）。最初の制御では，当然式（7）の最適評価関数を用いなければならない。この方法は上流側のダム操作の自由度を減少する欠点を持っているが，下流側の評価地点での許容流量が上流側に比べてかなり大きいとき（$Q_{1d}\ll Q_{2d}$）のように，システムの制御対象が下流側の地点に集まる場合には有効であろう。

なお，上記の直列ダムの近似解法のどれがすぐれているか明確な基準はなく，与えられた流況および許容流量に対して各解法を適用して，もっとも制御目的にあった結果を最適近似解として採用すべきであろう。

（3） DDDP における Corridor 幅の決定法

DDDP (Discrete Differential Dynamic Programming) の手法は厳密にいえば，次元の節減化を行うものではなくて，次元はそのままにして状態変数の変域を制限し，状態量を減らした効果を期待するものである。この方法は "Invertible System" つまり，状態変数と決定変数の数が等しいシステムに対して有効であり[8]，明らかにダム群はこの条件を満足している。その概要とダム群制御への適用について述べると以下のようになる（図—6）。

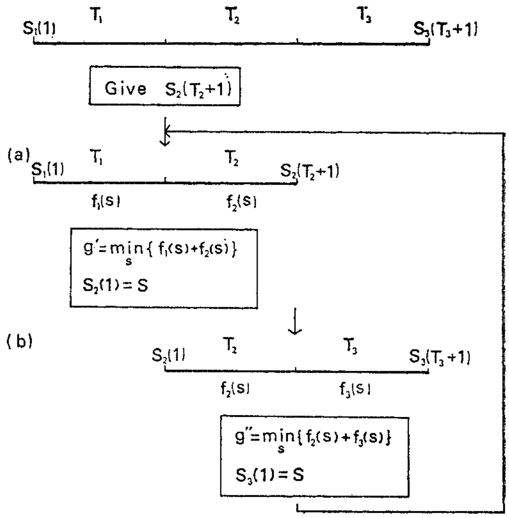


図—6 DDDP の概略図

いま，実行可能な放流量系列を考え，それに対応する貯水量，すなわち状態変数の系列をもって試系列 (Trial Trajectory) と定義する。次に，その適当な近傍 (Corridor) で DP 計算を行い局所的な最適解を求める。ついで，この解を次の段階での試系列として DP 計算を繰り返すことによって全体的な最適解を得ようとするものである。その場合，試系列のとり方としては，任意の近似解法を選びその近似系列を用いる方法があり，ついで式（7）の最適評価関数を使った DDDP 計算を行うのが，一層効果的であろう。

（4） 期間分割法

期間分割法は，DDDP と同じく次元の節減化を行うものではなく，政策空間を時間軸に関して分割し，その2つの空間において部分的な解を繰り返し求めていくことによって，全体的な最適解に接近させていく方法である。たとえば，図—7 に示すような3期間分割法の場合には，まず $S_2(T_2+1)(=S_3(1))$ を仮定して，第1期間は $S_1(1)$ を，第2期間は $S_2(T_2+1)$ をそれぞれ計算上の初期値として DP 計算を行う（図—7 (a))。その結



図—7 期間分割法の概略図（3期間分割の場合）

果，期間 (T_1+1) において2個の目的関数 f_1, f_2 が得られる。両関数は同一の状態変数 $(S_1(T_1+1)=S_2(1))$ を有しているので，目的関数の和 (f_1+f_2) を最小にするものを第1，第2期間の近似系列として求め，貯水量 $S_2(1)$ を決定することができる。つづいて，この値を第2期間の初期値，$S_3(T_3+1)$ を第3期間の初期値として DP 計算を行い近似系列を求め $S_3(1)(=S_2(T_2+1))$ を決定する（図—7 (b))。この手順を繰り返すことにより高次の近似解を求めようとするのだが，解の収束はまだ明らかでなく最適解の近くでの振動が予想される。しかし，具体的な計算例では低次で収束し，しかも最適解と一致していることを考えると，利水制御のように長期にわたり，分割期間内での初期値が比較的与え易い場合には効果的であろう。

以上，計算を実行するための諸手法を提案したが，次章ではこれらを仮想水系に適用し，その結果に対する考察を行おう。

4. 計算例とその考察

本章では，ダム，評価地点および支川が図—1 に分類した基本的なパターンを構成している制御系に対して，具体的な計算条件すなわちハイドログラフ $\{I_n(t), q_h(t)\}$，貯水容量 V_n，初期条件ならびに最終条件を与え DP 計算を行い，その結果について検討を加える。各近似解法はそれぞれのパターンでの計算例で考察するとともに，本研究で提案した最適評価関数や近似化された目的関数の特性は A-2 型でのみ表わす。ただし，DDDP や期間分割法については，計算結果が DP の式をそのまま解いた最適解と完全に一致していたので，ここでは省

略する。なお，計算例はすべて治水制御を対象にしたものである。

(1) A-1，A-2 型

まず，もっとも基本的なパターンとして A-1 型があるが，この場合には，どのような凸関数を用いても目的が達せられるので，適用は省く。A-2 型に関しては最適評価関数式（7）を用いなければならない。ダムへの流入ハイドログラフが表—1 に示される系列のとき，許容流量が $Q_{1d}=9$, $Q_{2d}=9$ から $Q_{1d}=6$, $Q_{2d}=18$ になった場合の制御結果が同表の下段に示してある。この表から明らかなように，評価地点の許容流量を変化させることによって最適放流量系列も変化し，制御目的を満たすように操作が行われていることからわかる。このことは，評価地点に重み a_i を導入した結果であり，許容流量さえ与えることができれば，常に最適な放流量が得られることを意味している。後述する近似解法において，A-2 型とみなして DP 計算を行う際にこの評価関数が用いられると，制御系列が可能な限り平滑化されることはいうまでもない。しかし，システムの規模が大きくなると，この評価関数を用いた制御は実行が困難となる。したがって，計算上の難点（記憶容量，計算時間など）が生じた場合だけ近似解法を用いるべきで，最終的には DDDP によって最適系列を求めるのが望ましい。

表—1 最適評価関数による A-2 型の計算例

$V=20$

t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	
I	1	3	5	8	9	7	6	4	3	2	1	1	
q_1	0	0	1	2	3	2	1	1	0	0	0	0	
q_2	0	1	2	3	5	4	2	1	1	1	0	0	

$Q_{1d}=9$　$Q_{2d}=9$

S	5	1	0	0	5	14	19	20	20	20	20	20	20
O	5	4	5	3	0	2	5	4	3	2	1	1	
Q_1	5	4	6	5	3	4	6	5	3	2	1	1	
Q_2	5	5	8	8	8	8	8	6	4	3	1	1	

$K=0.89$

$Q_{1d}=6$　$Q_{2d}=18$

S	5	2	0	1	6	14	18	20	20	20	20	20	20
O	4	5	4	3	1	3	4	4	3	2	1	1	
Q_1	4	5	5	5	4	5	5	5	3	2	1	1	
Q_2	4	6	7	8	9	9	7	6	4	3	1	1	

$K=0.83$

近似解法として，まず，近似化された目的関数を使った結果が表—2 に示されている。同表の＊の付いた系列は，式（7）を用いた最適系列である。両者を比較すると，近似解は最適系列よりも洪水継続時間が長くなり，特に，ピークを遅らせた場合の解は流入量の小さい制御初期から貯留する性質がある。ただ，この方法は P-3 型のような複雑な系に対しては，最適系列との一致の度合が高くなる特性がある。しかし，制御にはその期間までのピーク流量しか対象にされないので，最危険評価地点以外の地点流量はあまり平滑化されないで制御が終了する傾向にある。このような場合，最危険地点以外の許容流量を上げて，ピーク流量との比がどの地点でもほぼ同じ値をとるように置きかえ，それによって解を求めると，洪水の継続時間は長くなるが全体としての平滑化が行えるようである。

表—2 近似された目的関数による A-2 型の計算例

$V=75$ $Q_{1d}=20$ $Q_{2d}=30$

t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	
I	2	6	12	17	22	25	26	24	20	15	10	6	2	0	
q_2	2	4	6	8	9	8	7	6	5	4	2	1	0	0	
S	0	0	0	7	20	35	50	62	71	75	75	75	75	75	75
Q_1	2	6	12	10	9	10	11	12	11	11	10	6	2	0	
Q_2	4	10	18	18	18	18	18	18	16	15	12	7	2	0	

Optimal Trajectory

S^*	0	0	0	1	8	21	36	51	64	72	75	75	75	75	75
Q_1^*	2	6	11	10	9	10	11	11	12	12	10	6	2	0	
Q_2^*	4	10	17	18	18	18	18	17	17	16	12	7	2	0	

一方，利水面に関していえば，利水目的を目的関数とするのであるが，制御結果は治水の場合と同様に，対象とする最低流量の継続時間が最適系列より長くなる性質がある。

(2) 並列型（P-1，P-2，P-3）

表—3 は2個の並列型のダム群による2次元問題を仮想の単一ダムにおきかえて制御したものである。表に示すような流況においては，一回の DP 計算によって全期間にわたって各制約条件を満足する配分を行うことができた。このことは，仮想の単一ダムにおきかえてもその解が複数ダムによる最適解に合致していることを示している。さらに，同様の結果が数種の流況でもみられることから，空間基準が無効放流を生じない配分方法であり，

表—3 空間基準を用いた P-1 型の計算例

t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	
I_1	1	3	6	10	14	10	6	5	4	2	1	1	
I_2	0	1	2	4	6	7	10	8	3	2	2	1	

$V_1=20$　$V_2=15$

S_1	4	0	0	0	1	9	16	19	20	20	20	20	20
O_1	5	3	6	9	6	3	3	4	4	2	1	1	
S_2	2	1	0	0	4	7	8	12	15	15	15	15	15
O_2	1	2	2	0	3	6	6	5	3	2	2	1	
Q	6	5	8	9	9	9	9	9	9	7	4	3	2

節減化の有力な方法であるといえる。なお，計算時の評価関数としては $D\{Q(t)\}=\{Q(t)\}^2$ を用いた。

表―4 は P-3 型に逐次近似法を適用した結果である。また，P-2 型での適用は，P-3 型に含まれるので省略する。その結果によると，複数ダムでの最適解と同じ系列をとり，しかも，1 次あるいは 2 次で収束している。さらに，他の流況に関しても同様な結果が得られているところから，制御系の規模が小さいことを考慮しても，計算時間や精度の点で非常に効果的な方法といえる。この近似解法は，P-1 型に対しても適用することができ，空間基準を使って求めた解の最適系列からのずれの大きさを判定する基準にも使えよう。

表―4 逐次近似法による P-3 型の計算例

$V_1=10$ $V_2=11$ $Q_{1d}=12$ $Q_{2d}=12$ $Q_{3d}=16$

t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	
I_1	0	0	0	1	2	5	8	7	6	3	1	
I_2	1	3	9	8	6	4	3	1	1	0	0	
S_1	5	3	1	0	0	0	2	7	9	10	10	10
O_1	2	2	1	1	2	3	3	5	5	3	1	
S_2	5	2	1	5	8	10	11	11	11	11	11	11
O_2	4	4	5	5	4	3	3	1	1	0	0	
Q_3	6	6	6	6	6	6	6	6	6	3	1	

(3) 直列型 (S-1, S-2)

S-1 型の近似解法として仮想の単一ダムにおきかえて解いた結果を**表―5** に示した。中段は将来の流入量を考慮した空間基準，下段は上流側のダムを満杯状態にする空間基準を用いた配分結果である。両者を比較すると，評価地点での通過流量は同じであるが，各ダムの貯水量系列は大きく異なっている。その理由として，1 個の評価地点のため各ダムの持つ自由度が大きく，ダム操作に余裕が生じ，単一ダムへの置きかえが有効になることが考えられる。しかし，残流域流量 $\{q_1(t)\}$ の変動が激しいときには，ダムの自由度が減少するのですべての制約条件を満たす配分を行えず，最適系列の抽出を何度も行うことが想定される。

最後に，S-2 型の近似解法（Ⅰ），（Ⅱ）による計算例を**表―6** に示すが，表より明らかなように，ピーク流量の値には相違がなく系列がわずかに変化しているだけである。これは貯水容量が小さいので各ダムのもつ自由度が小さいこと，各流量波形がほぼ同じであること，さらに，各許容流量のとり方にも原因があると思われる。したがって，この計算例からどちらの解法がすぐれているかの判断をくだすことはできない。近似解法（Ⅱ）は，A-2 型で制御するときに下流側の評価地点だけを対象にした A-1 形で制御を行う方法にも変形でき，それは S-1 型の近似解法として使用することができよう。

表―5 空間基準を用いた S-1 型の計算例

$V_1=20$ $V_2=25$

t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	
I_1	1	2	5	10	17	15	11	8	5	3	1	1	
q_1	0	0	1	2	3	2	1	1	1	0	0	0	
q_2	0	1	2	3	4	3	2	2	2	1	1	0	
S_1	2	0	0	0	0	0	11	17	20	20	20	20	20
O_1	3	2	5	10	17	4	5	5	5	3	1	1	
S_2	5	3	0	1	8	24	25	25	25	25	25	25	25
O_2	5	5	5	5	4	5	6	6	6	3	1	1	
Q	5	6	7	8	8	8	8	8	8	4	2	1	
S_1	2	3	0	1	8	20	20	20	20	20	20	20	20
O_1	0	5	4	3	5	15	11	8	5	3	1	1	
S_2	5	0	0	0	0	4	16	22	25	25	25	25	25
O_2	5	5	5	5	4	5	6	6	6	3	1	1	
Q	5	6	7	8	8	8	8	8	8	4	2	1	

表―6 近似解法 (I), (II) による S-2 型の計算例

$V_1=20$ $V_2=25$ $Q_{1d}=6$ $Q_{2d}=18$

t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	
I_1	1	3	5	7	9	8	5	3	2	2	1	1	
q_1	0	0	1	1	3	2	2	1	1	0	0	0	
q_2	0	1	1	2	4	5	3	2	1	1	1	0	
S_1	2	0	0	1	4	12	18	20	20	20	20	20	20
O_1	3	3	4	4	1	2	3	3	2	2	1	1	
Q_1	3	3	5	5	4	4	5	4	3	2	1	1	
S_2	5	4	4	6	9	13	17	21	24	25	25	25	25
O_2	4	3	3	2	0	0	1	1	2	2	1	1	
Q_2	4	4	4	4	4	5	4	3	3	3	2	1	
S_1	2	0	0	2	5	12	18	20	20	20	19	19	20
O_1	3	3	3	4	2	2	3	3	2	3	1	0	
Q_1	3	3	4	5	5	4	5	4	3	3	1	0	
S_2	5	4	4	5	8	13	17	22	25	25	25	25	25
O_2	4	3	3	2	0	0	0	1	3	3	1	0	
Q_2	4	4	4	4	4	5	3	3	4	4	2	0	

以上，この章では各基本パターンに諸手法を適用したが，それらを一括すると**表―7** のようになる。ゆえに，複数ダム，複数評価地点をもつ大規模な制御システムに対する計算手順は次のように要約されよう。すなわち，まず，相関性の強いダムに関してすでに述べた基本パターンに分類し，次に各サブシステムにおいて**表―7** より適当な手法を選んで最適系列を求める。最後に，それらを統合することによってトータルシステムの最適制御系列を得るというシステム設計である。

表—7　各種計算法と基本パターンの関係一覧表

	治水制御					利水制御				
	A-2	P-1	P-2 P-3	S-1	S-2	A-2	P-1	P-2 P-3	S-1	S-2
近似化された目的関数	$AO_{1,2}$	AO_2	$AO_{1,2}$	AO_2	$AO_{1,2}$	$AO_{1,3}$	AO_3	$AO_{1,3}$	AO_3	$AO_{1,3}$
空間基準		SR_1		$SR_{1,2}$			SR_1		$SR_{1,3}$	
逐次近似法		$SI_{1,2}$	SI_2				$SI_{1,2}$		SI_2	
その他の近似解法				$AP\,\mathrm{I}_1$ $AP\,\mathrm{II}_1$	$AP\,\mathrm{I}_1$ $AP\,\mathrm{II}_{1,2}$				$AP\,\mathrm{I}_1$ $AP\,\mathrm{II}_1$	$AP\,\mathrm{I}_{1,2}$ $AP\,\mathrm{II}_{1,2}$
DDDP	$D_{1,2}$	D_2	$D_{1,2}$	D_2	$D_{1,2}$	$D_{1,2}$	D_2	$D_{1,2}$	D_2	$D_{1,2}$
期間分割法	P_1	P_1	P_1	P_1	P_1	$P_{1,2}$	P_1	$P_{1,2}$	P_1	$P_{1,2}$

記号の説明

記号	適用事由	記号	適用事由
AO_1	式(7)の評価関数ではオーバーフローなどが発生する場合	$AP\,\mathrm{I}_1$	近似解法（I）
AO_2	洪水の安全度の判定	$AP\,\mathrm{I}_2$	〃　$Q_{1d} \geq Q_{2d}$ のとき
AO_3	渇水の判定	$AP\,\mathrm{II}_1$	近似解法（II）
SR_1	将来の流入量を考慮したの空間基準	$AP\,\mathrm{II}_2$	〃　$Q_{1d} \ll Q_{2d}$ のとき
SR_2	上流側のダムを満杯にする方法	D_1	状態量が多くてオーバーフローなどが発生する場合
SR_3	下流側のダムを満杯にする方法	D_2	状態量が多くて記憶容量が不足する場合
SI_1	状態量が多くて記憶容量が不足する場合	P_1	状態量が多くて記憶容量が不足する場合
SI	SR_1による結果の良否を判定	P_2	制御期間が長くて記憶容量が不足する場合

5. 結　　語

本研究は，ダム群の最適配置・規模の決定問題に操作条件をも加味すべく，流入量既知の場合の水系全体としての最適制御解を DP 理論から導くとともに，その計算の実行可能性を高めるために諸手法を提案したものである。特に，式（7）で示される関数は制御目的だけでなく，ピークの継続時間の総和も最小にするという点で評価関数として用いた。したがって，すべての制御システムにおいて，式（7）を用いて最適解を求めることが望ましいことはいうまでもない。しかしそこには，すでに述べたように種々の問題が発生する可能性があり，次のような方策が考えられる。すなわち，**3**. 章で提案した近似化された目的関数を用いたり，各ダムが A-1 型を構成しているとみなして近似解を求め，ついで，これらを試系列として式（7）を用いた DDDP や期間分割法の組み合わせによって，きめの細かい最適解を求めることができよう。一方，各種の計算法を適用するため計算時間が増大し，計算精度の向上にも限界があるように思われる。また，トータルシステムの統合化に際して，評価関数の性質より分解原理などの適用が困難であり，今後の課題である。

以上のような問題点を含んではいるが，これらの基礎的計算手法は具体的には，以下のようにダム群のシステム設計に応用される。まず，治水計画においては，ダムの治水容量および防災地区の許容流量の決定が重要である。そこで，模擬降水と洪水流出解析法の結合によって流入量をシミュレートし，多くの流入ハイドログラフを得て本研究の計算法を適用する。同時に，ダムの位置，規模ならびに許容流量を変化させて，各洪水パターンに対する評価地点の安全度や，$K \leq 1$ を保つ容量および許容流量を求めることができる。また，洪水発生確率年を限定することによって，そこにおける最適なダム群の配置，規模を決定できる。さらに，この許容流量をもとに河川改修を行うことができ，確率的な基準をもつ計画がたてられよう。

次に，利水計画においては確保流量 Q_{id} を増加させていくと $P<1$ となる Q_{id} が現われ，この場合は，どんな操作を行ってもどこかの評価地点で需要量を確保することができなくなる。そこで $P \geq 1$ における最大の確保流量を Q_{id}^* とすれば，Q_{id}^* は利水計画上の河川表流水のもつ限界供給量と定義されよう。したがって，治水の場合と同様，多年にわたる流入ハイドログラフを得ると，各年，各評価地点において限界供給量を算定することができる。同時に，ダム群の配置，規模を変化させることによって，限界供給量の感応度を把握することができ，河川表流水のもつ水資源を定量的に表現することも可能であろう。

一方，実際のダム操作への適用について述べると，治水面では絶えず新たな降雨予測と制御計算を行い，既操作の誤差回復を行うことが必要であり，それによって最適な洪水調節が期待できよう。また，利水操作に関しても，降雨分布をある程度確率，統計的に扱うことができるので，最初はマクロな予測によるラフな操作計画をたてて，ついで予測精度の高い情報に基づいて現実の操作を段階的に最適化していけばよい。

なお，水量制御を対象にする以上，治水，利水の総合的な操作が望ましいことはいうまでもない。しかし，単位流量，単位時間のとり方，あるいは目的を達成するた

めの演算時間や各季節における操作形態の相違を考えると，両者の総合化には多くの問題が残っており，今後，検討を進めていきたい。

最後に，本研究を行うにあたって適切な助言をいただいた建設省の横田穣二氏，計算その他で協力していただいた京都大学大学院生の丸岡昇君に謝意を表したい。

補遺：逐次近似法の解の収束について

評価関数は式（7）より

$$D_i\{Q_i(t)\}=\{2(\omega+1)\}^{a_iQ_i(t)-b}$$

制御終了時の目的関数は

$$J=\sum_{i=1}^{3}\sum_{t=u}^{T}\{2(\omega+1)\}^{a_iQ_i(t)-b}$$

で与えられる。

1） まず，第 r 回目の近似制御（図―7（c））で

$$\max\{Q_{1p}/Q_{1d},\ Q_{2p}/Q_{2d},\ Q_{3p}/Q_{3d}\}=Q_{2p}/Q_{2d}\ \cdots\cdots(\mathrm{A}\cdot1)$$

となる場合を考えよう。式（A・1）はダム2の制御が評価地点2だけを対象にしていることを意味し，ダム1とは独立な操作となる。したがって，ダム2は A-1 型で，ダム1はその結果を用いて A-2 型で操作したものが最適制御となる。

2） 次に，同じく第 r 回目の近似制御（図―7（c））で

$$K'=\max\{Q_{1p}'/Q_{1d},\ Q_{2p}'/Q_{2d},\ Q_{3p}'/Q_{3d}\}=Q_{3p}'/Q_{3d}\ \cdots\cdots(\mathrm{A}\cdot2)$$

となる場合を考えよう。さらに，第 $r+1$ 回目の近似制御（図―7（b））で，

$$K''=\max\{Q_{1p}''/Q_{1d},\ Q_{2p}''/Q_{2d},\ Q_{3p}''/Q_{3d}\}<K'\ \cdots\cdots(\mathrm{A}\cdot3)$$

となるとしよう。この第 $r+1$ 回目の制御ではダム2の操作は第 r 回目と同じ，すなわち，$Q_{2p}'=Q_{2p}''$ であるから，式（A・2），（A・3）を第 $r+1$ 回目の制御に関して整理すると，

$$K'=\max\{Q_{1p}'/Q_{1d},\ Q_{3p}'/Q_{3d}\}\ \cdots\cdots(\mathrm{A}\cdot4)$$

$$K'''=\max\{Q_{1p}''/Q_{1d},\ Q_{3p}''/Q_{3d}\}<K'\ \cdots\cdots(\mathrm{A}\cdot5)$$

となる。ただし，$K'''\leq K''$ である。ここで，各制御での目的関数を比較するが，これは **2**. 章の（**3**）における評価関数の適合性の証明にほかならず，$J'>J''$ は明らかである。その結果，各制御において目的関数 J は単調に減少し，かつ，通過流量の総和が不変であることを考慮すると，目的関数は一定値に収束することがわかる。さらに，各 J に対し，必ず1個の K が存在することより，K も収束し最小値をとる。

参考文献

1） 近畿地方建設局企画室：広域利水調査開発方式および確保流量について（京阪神地域-淀川水系）．
2） Hall, W.A. : Optimum Design of a Multiple-purpose reservoir, J. Hydroulic Division, Vol. 90, 1964.
3） 高棹琢馬・瀬能邦雄：ダム群による洪水調節に関する研究（Ⅰ）―DP 利用とその問題点―，京大防災年報 B, 1970. 3.
4） Windsor, J.S. and Chow, V.T. : Multireservoir Optimization Model, J. Hydroulic Division, Vol. 98, 1972.
5） 竹内邦良：貯水量の累加損失係数を用いた貯水池群の最適操作手法，土木学会論文報告集，No. 222, 1974.2.
6） 高棹琢馬・横田穣二：DP 利用によるダム貯水池の洪水調節方式について，昭和46年度年次講演概要集 Ⅱ-145.
7） Harvard Water Program : Design of Water System, 1962.
8） Heidari, M. and Chow, V.T. : Discrete Differential Dynamic Programming for Approach to Water Resources Systems Optimization, 1971.4.

（1974.9.17・受付）