

片面で補剛された板の解析

ANALYSIS OF PLATES WITH SINGLE-SIDED STIFFENERS

長谷川彰夫*・秋山晴樹**・西野文雄***

By Akio HASEGAWA, Haruki AKIYAMA and Fumio NISHINO

1. ま え が き

橋の床版や船のデッキプレートには、補剛材でたてまたは横あるいは両方向に補強された板構造、いわゆる補剛板構造がよく用いられる。補剛材は製作の便宜から普通等間隔に配置されるが、その形状は方向によって異なることが多い。このような構造物では、鋼やコンクリートのように等方性の材料でできていてもその力学的性質は方向によって異なる。また床版にみられるように、使用上の制約から補剛材が平板の片面にのみ配置される補剛板構造も多く、この場合には板面に垂直な方向に関する対称性が失われる。

このような構造的異方性を示す補剛板の解析に異方性材料でできた平板に関する理論、いわゆる直交異方性板の理論を最初に適用した研究に Huber の報告がある¹⁾。Huber はたて、横方向に鉄筋量の異なるコンクリート床版を、これと等価な剛性を持つ直交異方性板に置きかえ、つり合い方程式として板のたわみに関する4階の偏微分方程式を得た。この形の式は Huber の方程式とよばれ、その後各種の構造的異方性を示す補剛板の解析に広く用いられ現在にいたっている。Huber の方程式を格子構造に適用した解析に Guyon²⁾、Massonnet³⁾ の研究がある。前者の研究では、曲げ剛性のみを有する格子が解析され、後者では曲げ剛性とサン・ブナンのねじれ剛性を有する格子が取り扱われている。

補剛板を直交異方性板として取り扱い、Huber の方程式を用いて解析した結果も数多く発表されている^{4)~7)}。補剛板に直交異方性板理論を適用するとき、異方性体としての剛度を評価すること、すなわち曲げモーメント、ねじれモーメントと変位の関係を求めることが重要な問

題となる。Bareš・Massonnet⁴⁾ は片面に補剛された板の曲げ剛度、すなわち曲げモーメントと変位との関係を求めるにあたってポアソン比を零と仮定している。この場合、直ひずみは同じ方向の直応力だけで決まり、直交する方向の直応力とは無関係となる。したがって、注目する断面に曲げモーメントが作用したときの中立軸の位置は、それに直交する断面の形状とその断面に作用する曲げモーメントとは無関係に注目する断面の形状のみによって決まる。その結果、直交する二方向で中立軸の位置の異なることを解析上認めていることになる。すなわち、ポアソン比を零とおくことにより、直交する二つの軸まわりの曲げモーメントの値によって断面の中立軸の位置が変化することに起因する解析上の困難性をさけている。Timoshenko・Woinowsky-Krieger⁵⁾ はポアソン比を考慮し、平面応力状態を考えて曲げモーメントと曲率の関係を求めているが、平板の中央面に関して上下対称な補剛板のみを取り扱っている。この場合直交している補剛格子部分の断面の相違に無関係に板部分の中央面は常に補剛板の中立面となり、中立面の位置が移動することに起因する解析上の困難性はさけられている。

Giencke⁶⁾ は板部分と補剛格子部分の両者にポアソン比を考慮し、さらに注目する断面によって中立軸の位置が相違することを考慮して曲げモーメントと曲率の関係を導いている。この解析では、板部分のみならず補剛材も平面応力状態にあるとして取り扱われているが、補剛材は大部分一軸応力状態にあり、たて横の補剛材の交わる部分でのみ平面応力状態と考えるのが実状に近いと思われる。補剛材については交点でのみ平面応力状態にあると考えて曲げモーメントと変位の関係を求めた結果が Cusens・Zeiden・Pama⁷⁾、Nishino・Pama・Lee⁸⁾ により報告されている。それらの報告では板部分と補剛格子部分が一体構造として曲げモーメントに抵抗するものとして曲げ剛性が評価されている。

補剛板の解析に関するいままでの報告では曲げ剛性の

* 正会員 工博 名古屋工業大学助教授 土木工学科

** 正会員 工修 本州四国連絡橋公団

*** 正会員 Ph. D. 東京大学助教授 工学部総合試験所

評価に比較して、ねじれ剛性を理論的に評価するための努力があまり払われておらず、不明確な点が残されている。現在、補剛板のねじれ剛性を解析的に評価するとき一般に用いられている方法は、これらを曲げ剛性の値の関数として評価する方法と、断面形状を考慮し、ねじれモーメントと変位の関係から求める方法とに大別される。

第一の方法の例として、互いに直交する軸まわりの補剛板の曲げ剛性 D_x, D_y を用いて、ねじれ剛性 D_{xy} を $D_{xy} = \lambda \sqrt{D_x D_y}$ ¹¹⁾, $D_{xy} = (\mu_x D_x + \mu_y D_y) / 2$ ⁹⁾ と評価する方法が挙げられる。ここに λ, μ_x, μ_y は定数であり、直交する二方向のポアソン比の関数として与えられている。このように評価されたねじれ剛性は、理論的な根拠がとぼしいため、一般性に欠け、断面寸法や境界条件、荷重条件の異なる補剛板に適用しようとすると、それぞれの場合に応じて定数を補正する必要が生ずる。構造的異方性を示す板に曲げモーメント、ねじれモーメントが作用したときの直応力とせん断応力の分布の関係は、異方性材料でできた板中のそれらの関係と異なるため、後者でなりたつ曲げ剛性とねじれ剛性の関係、たとえば $D_{xy} = \lambda \sqrt{D_x D_y}$ は、少なくとも理論的には前者に対して成り立たない。したがって、補剛板のねじれ剛性を一般的に評価するには、構造形状に基づいて断面諸元より算出する必要がある。

第2の方法はこの後者の考え方に基づくものである。断面諸元に基づいてねじれ剛性を求める方法として、補剛板を板部分と補剛格子部分に分け、そのおのおのについてねじれ剛性を評価し、補剛板のねじれ剛性をこの和で与える方法が現在最も支配的である^{10), 11)}。しかし、この評価ではせん断変形に関して板部分と補剛格子部分が一体構造となっていることに対する考慮がなされていない。したがってねじれモーメントに対する板部分と補剛格子部分との相互作用が無視されている。補剛格子部分のうち、完全に格子を形成する部分を変形性状に関し等価な板に置き換えて解析し、板部分と完全に格子を形成する部分がせん断変形に関するひずみの連続条件を満たすようにねじれモーメントと変形の間係を求め、ねじれモーメントに対する板部分と補剛格子部分の相互作用を考慮した研究に Nishino・Pama・Lee の報告⁸⁾がある。

板部分の中央面に関して上下非対称である片面に補剛された板では、変位が微小で荷重が板面に垂直な方向の成分のみをもつ場合でも、板部分の中央面が変位し、ひずむ。このような考え方に基礎をおき、Pflüger は面内力を受ける補剛板の座屈を解析し、補剛板の座屈に対する支配方程式として直交する3方向の変位に関する4階の三元連立偏微分方程式を導いた¹²⁾。微小変位理論のもと

で板部分の中央面内の変位を考慮した解析に Trenks¹³⁾, Massonnet¹⁴⁾, Clifton・Chang・Au¹⁵⁾ らの報告があり、面外荷重を受ける補剛板が取り扱われている。これらの研究では、ねじれ剛性の値として板部分と補剛格子部分のせん断変形に関する相互作用を無視して得られる値を用いている。現在、この面内変位を考慮し、ねじれ剛性の評価に対しては板と補剛材の剛性の単純な和を用いた理論が片面に補剛された板の厳密解を与えるものと考えられている。しかし、解を求めるのが簡単でないため、実際の設計では Huber の方程式が用いられることが多い¹⁰⁾。

今までの報告ではどちらの基本式を用いるにしてもねじれ剛性の評価において板部分と補剛格子部分が一体構造として働くと考えられていないため、このことに起因する誤差はさげられない。また、Huber の方程式と Trenks の方程式¹³⁾の関係、特に数値解の近似度に対する検討はほとんど行われていない。

ここでは、深さの異なる長方形断面の補剛材によって長方形平板の片面に、互いに直交する形でおのおの間隔に補剛された補剛板（以下これを片面補剛板とよぶ）を微小変位理論の仮定のもとに取り扱った Nishino・Pama・Lee の研究⁸⁾を発展させて解析した結果について報告する。解析の便のため、片面補剛板を平板部分（以下板部分とよぶ）と格子状の補剛材部分（以下補剛格子部分とよぶ）に分け、補剛格子部分はさらに直交する補剛材の深さが等しく完全に格子を形成する部分（以下完全格子部とよぶ）と深い補剛材の残りの部分（以下 x 軸方向補剛部とよぶ）に分けて考える。補剛板の解析で通常用いられている仮定のほかに、この報告では次の仮定を用いる。

1) 曲げ変形に対しては、補剛格子部分は補剛材の交差部で平面応力状態、交差部以外では一軸応力状態にあるものとして、応力とひずみの間にフックの法則が成り立つとする。

2) せん断変形に対しては、完全格子部を板に置き換え、その上で板部分と完全格子部のせん断変形に関するひずみの連続条件を満足させる。

以上の仮定に基づいて、片面補剛板に発生する軸方向力、せん断力、曲げモーメント、およびねじれモーメントと変位の関係を求める。この関係をもとに片面補剛板の支配方程式を求め、その近似式として Huber 型の方程式を導く。これらの結果に基づいて、数値計算し、Huber 型の方程式の厳密な支配方程式の解に対する近似度を調べる。また現在広く用いられている板部分と補剛格子部分とをせん断変形に関して一体構造と考えていない場合の理論に基づく数値解とも比較し、その影響を調べる。

本報告では補剛された鉄筋コンクリート床版にみられるような比較的厚肉な長方形断面の補剛材によってたて、横に補剛された補剛板を対象に、理論誘導と数値計算をおこなっている。しかし本報告に示すせん断変形に関する板部分と補剛材部分の相互作用の基本的な考え方は鋼床版にみられるようなパルプ・プレートや薄肉の閉断面の補剛材によって補剛された補剛板に対しても適用できるものとする。

2. 断面力と変位の関係

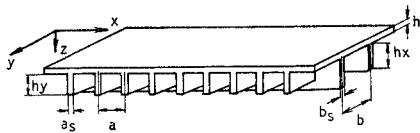
(1) ひずみと変位の関係

この報告では、片面補剛板に対し、右手系の直交デカルト座標系 (x, y, z) を用い、Fig. 1 (a) に示すように z 面 (z 軸に垂直な面、以下 x 面、 y 面も同様に定義する) で $z=0$ の面が板部分の中央面に一致し、かつ x 軸の方向が深い補剛材の方向に一致するように座標系の位置と方向を定める。 x 軸、 y 軸方向におおの1本ずつの補剛材を含む補剛板の単位となる要素を片面補剛板より Fig. 1 (b) のようにとり出し、それを Fig. 1 (c) に示すように板部分、完全格子部および x 軸方向補剛部の3つの部分に分けて考える。

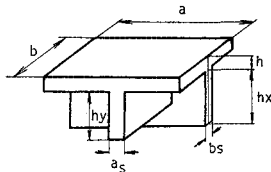
直ひずみと変位の関係は Kirchhoff-Love の仮定を用い、微小変位理論によると次のように表わせる。

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_x &= u' - zw'' \\ \epsilon_y &= v' - zw'' \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (1 \cdot a, b)$$

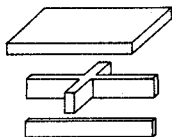
ここで、 ϵ_x, ϵ_y は x 軸、 y 軸方向の直ひずみ、 u, v は



(a) Plate with Eccentric Stiffeners



(b) Substantial stiffened Plate Element



(c) Decomposition of Element

Fig. 1 Stiffened Plates and Coordinates

板部分の中央面の x 軸、 y 軸方向の変位、 w は z 軸方向の変位である。 $()', () \cdot$ はそれぞれ、 x, y についての偏微分を表わす。

せん断ひずみと変位の関係は板部分、完全格子部、および x 軸方向補剛部で異なり、おのおの次のようにして求まる。板部分と補剛格子部分がそれぞれ x 面、 y 面に作用するねじれモーメントと x 軸、 y 軸方向のせん断力を受けて、面外方向に等しく変位した場合を考える。

板部分に生じる面内のせん断ひずみ r_p と変位の関係は次のように表わせる。

$$r_{\eta\zeta} = u' + v' - 2zw' \dots\dots\dots (2)$$

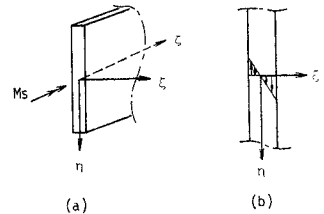
完全格子部では、格子は長方形断面を持つ補剛材より成る。格子より補剛材を取り出し、その両端にねじれモーメント M_s を加えた場合を考える。このとき Fig. 2 (a) に示す浅いほうの補剛材の図心に原点を持つ右手系の局所直交座標系 (ξ, η, ζ) で考えると補剛材に生ずるせん断ひずみは Fig. 2 (b) に示すように ξ 面内のみ生じ、その値は η 軸、 ζ 軸方向には一定で次のように表わせる¹⁶⁾。

$$r_{\eta\zeta} = -2\xi \frac{\partial^2 w_\xi}{\partial \eta \partial \zeta}, r_{\xi\eta} = 0, r_{\xi\zeta} = 0 \dots\dots (3 \cdot a \sim c)$$

ここで w_ξ は補剛材の ξ 軸方向の変位である。式 (3) は幅の狭い長方形断面の補剛材についてのみ成立する。しかし幅が狭くない場合でも式 (3) が成立するとして取り扱い、得られた結果に係数を乗ずることによって補正することができる¹⁷⁾。式 (3 \cdot a) で示されるせん断ひずみだけが生じている補剛材によって構成された完全格子部では、完全格子部を板とみなしたときのその仮定の中央面と各補剛材の中央面が直交するという仮定のもとで、Fig. 2 に示す座標系での補剛材のねじれ率 $\partial^2 w_\xi / \partial \eta \partial \zeta$ と Fig. 1 に示す座標系での完全格子部の中央面のねじれ率 w' は一致し、完全格子部は全域にわたって w' が一定となって鞍型に変形する。このように変形した完全格子部をその深さと同じ厚さを持つ板に置き換えると、その z 面には次のような仮想的なせん断ひずみ $r_{\eta\zeta}$ が生じている。

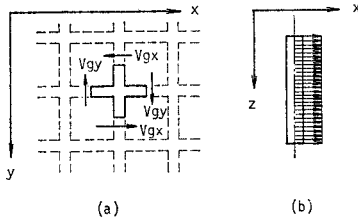
$$r_{\eta\zeta} = -2\bar{z}w' \dots\dots\dots (4)$$

ここで \bar{z} は完全格子部の中央面を原点とする z 軸方向



(a) Local Coordinates of Rectangular-shaped Stiffener
(b) Actual Saint-Venant's shear Strain, $r_{\eta\zeta}$ of Stiffener

Fig. 2 Saint-Venant Torsion of Stiffener



(a) Complete Grid Part and Longitudinal Shear Force
(b) Shear Strain, r_{ga}

Fig. 3 Shear Deformation of Complete Grid Parts due to Longitudinal Shear Force

の座標である。

Fig. 3 (a) に示すように完全格子部の x 面, y 面の中心に y 軸, x 軸方向のせん断力 V_{gx}, V_{gy} が作用するとき, 完全格子部を板に置き換えるとそれによるせん断ひずみ r_{ga} は Fig. 3 (b) に示すように補剛材の深さ方向には一定で, 次のように表わせる。

$$r_{ga} = u_s' + v_s' \dots\dots\dots (5)$$

ここで u_s, v_s は完全格子部の中央面の x 軸, y 軸方向の変位である。完全格子部の z 面のせん断ひずみはねじれモーメント M_s と x 軸, y 軸方向のせん断力 V_{gx}, V_{gy} によって生ずるから, 一般的な荷重のもとでの完全格子部のせん断ひずみ r_g は r_{ga} と r_{gv} の和で与えられる。

$$r_g = u_s' + v_s' - 2z\bar{w}' \dots\dots\dots (6)$$

このようにせん断変形した板部分と完全格子部を重ね合わせると, 板部分の下面と完全格子部の上面は面外方向に同様に変形しても面内方向には一般にずれが生ずる。板部分と完全格子部が一体として変形する場合は, 両部分の接合面でのせん断ひずみは一致しなければならない。

$$r_p \left(z = \frac{h}{2} \right) = r_g \left(\bar{z} = -\frac{h_y}{2} \right) \dots\dots\dots (7)$$

ここで h は板部分の板厚, h_y は完全格子部の深さすなわち, y 方向に配置された浅いほうの補剛材の深さである。式 (2) と式 (6) を式 (7) に代入すれば, 完全格子部の中央面のせん断ひずみ r_{gm} は次のように表わせる。

$$r_{gm} = u_s' + v_s' = u' + v' - (h + h_y)w' \dots\dots\dots (8)$$

x 軸方向補剛部では, 一方向にしか補剛されていないため格子としての挙動は示さず, 板に置き換えることができない。したがって完全格子部で求めた式 (6) に示すせん断ひずみを考えることは意味を持たず, その結果として式 (7) に示すようなせん断ひずみの連続条件は完全格子部と x 軸方向補剛部の間では, 考える必要がない。この場合, 完全格子部と x 軸方向補剛部の境界での局所的なひずみの連続条件は必ずしも満足しないが補剛構造全域での変形の連続条件は満たしている。 x 軸方向補剛部では, 任意の変形に対し, サン・ブナンのねじれ抵抗によるねじれモーメントが発生するだけである。

(2) 応力とひずみの関係

板部分では平面応力状態にあると仮定する。このとき, x 面, y 面に生ずる直応力 σ_x, σ_y と対応する直ひずみ ϵ_x, ϵ_y の関係はフックの法則を用いて次のように表わせる。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{E}{1-\nu^2} (\epsilon_x + \nu\epsilon_y) \\ \sigma_y &= \frac{E}{1-\nu^2} (\epsilon_y + \nu\epsilon_x) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (9 \cdot a, b)$$

ここで, E は弾性係数, ν はポアソン比である。

完全格子部では補剛材の交差部で平面応力状態, それ以外の部分で一軸応力状態であると仮定する。交差部での平面応力状態のポアソン比の影響を格子全体に平均化して評価する。その場合, 完全格子部の応力とひずみの関係は次のように表わせる⁹⁾。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{E}{1-\nu^2\alpha\beta} (\epsilon_x + \nu\alpha\epsilon_y) \\ \sigma_y &= \frac{E}{1-\nu^2\alpha\beta} (\epsilon_y + \nu\beta\epsilon_x) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (10 \cdot a, b)$$

ここで, $\alpha = a_s/a, \beta = b_s/b$ であり, a, b は Fig. 1 (b) に示すように補剛材の単位となる要素の x 軸, y 軸方向の幅, a_s, b_s は y 軸, x 軸方向に配置された補剛材の幅を表わす。

x 軸方向補剛部は一軸応力状態にあると仮定する。

$$\sigma_x = E\epsilon_x, \sigma_y = 0 \dots\dots\dots (11 \cdot a, b)$$

せん断応力 τ とせん断ひずみ r の関係はすべての領域で

$$\tau = G\gamma \dots\dots\dots (12)$$

ここで, G はせん断弾性係数である。

(3) 断面力と変位の関係

解析の対象とする長方形の片面補剛板より取り出した Fig. 1 (b) に示す補剛材の単位となる要素に対応して Fig. 4 に示すように板部分は単位幅を持ち, x 軸, y 軸方向の補剛材は板部分の単位幅に対しておのおの 1 本ずつ, 板部分の中央に配置されるように補剛材を深さを変えずに補剛材全体の断面積は変化しない条件のもとに再配置した要素 (以下これを単位要素とよぶ) を考え

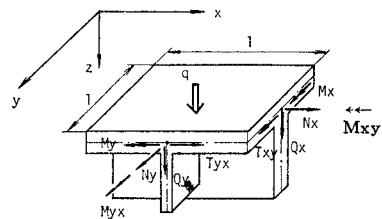


Fig. 4 Modified Stiffened Plate Element and Stress Resultants

る。単位要素の x 面, y 面にそれぞれ生ずる軸方向力を N_x, N_y とすると

$$\left. \begin{aligned} N_x &= \int_{A_x} \sigma_x dA_x \\ N_y &= \int_{A_y} \sigma_y dA_y \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (13 \cdot a, b)$$

ここで, A_x, A_y は単位要素の x 面, y 面での断面積である。積分は式に示す断面全域について行う。以下にあらわれる積分についても同様であり, 積分領域を示す記号は以下省略する。式 (1), (9), (10), (11) を式 (13) に代入すると軸方向力 N_x, N_y は板部分の中央面の変位で次のように表わせる。

$$\left. \begin{aligned} N_x &= C_{nxa}u' + C_{nxb}v' - C_{nxc}w'' - C_{nxd}w'' \\ N_y &= C_{nya}v' + C_{nyb}u' - C_{nyc}w'' - C_{nyd}w'' \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (14 \cdot a, b)$$

ここで, $C_{nxa} \sim C_{nyd}$ は断面定数であり, その詳細を補遺 1 に示す。

単位要素の x 面, y 面に生ずる y 軸, x 軸方向のせん断力 T_{xy}, T_{yx} は

$$\left. \begin{aligned} T_{xy} &= \int \tau_{xy} dA_x = \int \tau_{xy} dA_{px} + \int \tau_{xy} dA_{gx} \\ &= T_{px} + T_{gx} \\ T_{yx} &= \int \tau_{yx} dA_y = \int \tau_{yx} dA_{py} + \int \tau_{yx} dA_{gy} \\ &= T_{py} + T_{gy} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (15 \cdot a, b)$$

ここで, A_{px}, A_{py} は単位要素の板部分の x 面, y 面の断面積, A_{gx}, A_{gy} は単位要素の完全格子部の x 面, y 面の断面積である。 T_{px}, T_{py} と T_{gx}, T_{gy} は T_{xy}, T_{yx} の板部分と完全格子部が分担するせん断力の成分である。

式 (2) と式 (12) を用いると式 (15) の最右辺の第 1 項は次のように変位で表わせる。

$$T_p = T_{px} = T_{py} = Gh(u' + v') \dots\dots\dots (16)$$

T_{gx}, T_{gy} は完全格子部を板に置き換えて求めた式 (6) のせん断ひずみを用いて式 (15) の積分を実行し, その値を求めることも可能である。しかし式 (6) の右辺の第 3 項は式 (3・a) に示すサン・ブナンのねじれに由来する仮想的な z 面内のせん断ひずみであり, したがって式 (15) を用いて T_{gx}, T_{gy} を求めるよりも実際の

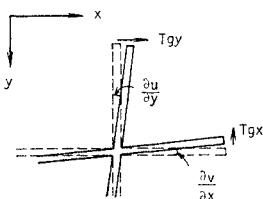


Fig. 5 Shear Deformation of Modified Complete Grid Part

格子の断面でのせん断ひずみとせん断応力の関係を用いて, T_{gx}, T_{gy} を評価するほうが適切であろう。完全格子部の y 面, x 面に実際に働く x 軸, y 軸方向のせん断応力の分布は z 軸方向には一定である。このとき式 (15・a, b) の最右辺の第 2 項のせん断力 T_{gx}, T_{gy} は Fig. 5 に示すように完全格子部の中央面の変位を用いて次式で表わせる。

$$\frac{T_{gx}}{A_{gx}} = Gv_s', \quad \frac{T_{gy}}{A_{gy}} = Gu_s' \dots\dots\dots (17 \cdot a, b)$$

A_{gx}, A_{gy} の少なくとも一方が零になる場合には, 式 (17) は意味を持たない。 A_{gx}, A_{gy} の少なくとも一方が零となる場合には, 一方向のみの補剛となるため, この部分を板に置き換えることができず, Fig. 3 (b) に示す補剛材の深さ方向に一定のせん断応力は発生しない。このことは完全格子部がない場合にせん断力 T_{gx}, T_{gy} が発生しないことを意味する。式 (17) を式 (8) に代入すると T_{gx}, T_{gy} と板部分の中央面の変位 u, v との関係は次のように表わせる。

$$\frac{1}{G} \left(\frac{T_{gx}}{A_{gx}} + \frac{T_{gy}}{A_{gy}} \right) = u' + v' - (h + h_y)w'' \dots\dots\dots (18)$$

単位要素の x 面, y 面に生ずる曲げモーメントを M_x, M_y とすると

$$\left. \begin{aligned} M_x &= \int \sigma_x z dA_x \\ M_y &= \int \sigma_y z dA_y \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (19 \cdot a, b)$$

式 (1), (9), (10), (11) を式 (19) に代入すると M_x, M_y は次のように板部分の中央面の変位で表わせる。

$$\left. \begin{aligned} M_x &= C_{mxa}u' + C_{mxb}v' - C_{mxc}w'' - C_{mxd}w'' \\ M_y &= C_{mya}v' + C_{myb}u' - C_{myc}w'' - C_{myd}w'' \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (20 \cdot a, b)$$

ここで, $C_{mxa} \sim C_{myd}$ は断面定数であり, その詳細を補遺 2 に示す。

単位要素の x 面, y 面に生ずるねじれモーメント M_{xy}, M_{yx} は次のように表わせる。

$$\left. \begin{aligned} M_{xy} &= \int \tau_{xy} z dA_x + \frac{1}{b} \int \bar{\tau}_x \xi d\bar{A}_{gx} \\ M_{yx} &= \int \tau_{yx} z dA_y + \frac{1}{a} \int \bar{\tau}_y \xi d\bar{A}_{gy} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (21 \cdot a, b)$$

ここで, $\bar{\tau}_x, \bar{\tau}_y$ は x 軸, y 軸方向に配置された補剛材の Fig. 2 (b) に示す分布をする ξ 面内でのサン・ブナンのせん断応力, $\bar{A}_{gx}, \bar{A}_{gy}$ は Fig. 1 (b) に示す補剛板の単位となる要素の補剛格子部の x 面, y 面の断面積である。式 (21) の右辺の第 1 項は, 板部分に対しては式 (2) を式 (12) に代入して積分を実行し, 完全格子部に対しては T_{gx}, T_{gy} を用いると次のように表わせる。

$$\left. \begin{aligned} \int \tau_{xy} z dA_x &= \int \tau_{xy} z dA_{px} + \int \tau_{xy} z dA_{gx} \\ &= -\frac{1}{6} Gh^3 w' + \frac{1}{2} T_{gx}(h+h_y) \\ \int \tau_{yx} z dA_y &= \int \tau_{yx} z dA_{py} + \int \tau_{yx} z dA_{gy} \\ &= -\frac{1}{6} Gh^3 w' + \frac{1}{2} T_{gy}(h+h_y) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(22\cdot a, b)$$

式 (21) の右辺の第 2 項は、式 (3・a) と式 (12) を用いて式 (21) に代入し、 $(\partial^2 w_\xi / \partial \eta \partial \zeta) = w'$ に注意すると次のように表わせる。

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{b} \int \bar{\epsilon}_x \xi d\bar{A}_{gx} &= -\frac{J_x}{b} Gw' \\ \frac{1}{a} \int \bar{\epsilon}_y \xi d\bar{A}_{gy} &= -\frac{J_y}{a} Gw' \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(23\cdot a, b)$$

ここで、 J_x, J_y は x 軸、 y 軸方向に配置された補剛材のサン・ブナンのねじれ定数であり、細長い長方形断面の補剛材の場合には次のように表わせる。

$$J_x = \frac{1}{3} b_s^3 h_x, \quad J_y = \frac{1}{3} a_s^3 h_y \dots\dots\dots(24\cdot a, b)$$

式 (22), (23) を式 (21) に代入すればねじれモーメント M_{xy}, M_{yx} は次のように表わされる。

$$\left. \begin{aligned} M_{xy} &= -\frac{1}{6} Gh^3 w' - \frac{J_x}{b} Gw' + T_{gx} \frac{h+h_y}{2} \\ M_{yx} &= -\frac{1}{6} Gh^3 w' - \frac{J_y}{a} Gw' + T_{gy} \frac{h+h_y}{2} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(25\cdot a, b)$$

ここで式 (25) の右辺の第 1 項は板部分のねじれに対する抵抗に関する成分、第 2 項は補剛材のサン・ブナンのねじれ抵抗に関する成分である。現在、実用設計に用いられているねじれモーメントの評価には式 (25) の右辺の第 3 項で示される完全格子部に生ずるせん断力 T_{gx}, T_{gy} によるねじれモーメントは考慮されていない。

3. つり合い式

(1) 断面力で表示したつり合い式

単位要素に、外力として z 軸方向に作用する分布荷重のみが作用した場合、単位要素の x 面、 y 面に生ずる断面力を Fig. 4 に示す。この単位要素のつり合い式は次のように表わせる。

$$\left. \begin{aligned} N_x' + T_{yx}' &= 0 \\ N_y' + T_{xy}' &= 0 \\ Q_x' + Q_y' + q &= 0 \\ -M_{xy}' - M_y' + Q_y &= 0 \\ M_{yx}' + M_x' - Q_x &= 0 \\ T_{xy} - T_{yx} &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(26\cdot a\sim f)$$

ここで、 Q_x, Q_y は単位要素の x 面、 y 面に作用する z

軸方向のせん断力であり、 q は単位面積あたりの z 軸方向の荷重である。

式 (26・f) より

$$T_{xy} = T_{yx} = T \dots\dots\dots(27)$$

式 (27) の T を式 (26・a, b) に代入し、式 (26・d, e) を式 (26・c) に代入して Q_x, Q_y を消去すれば、式 (26・a~c) はそれぞれ次のように表わせる。

$$\left. \begin{aligned} N_x' + T' &= 0 \\ N_y' + T' &= 0 \\ M_x'' + M_{xy}' + M_{yx}' + M_y'' &= -q \end{aligned} \right\} \dots\dots(28\cdot a\sim c)$$

(2) 変位で表示したつり合い式

式 (15), (16), (27) より補剛材の完全格子部の受け持つせん断力 T_{gx} と T_{gy} は等しくなり、これを T_g とおく。式 (18) を用いると T_g は次のように板部分の中央面の変位で表わせる。

$$T_g = \frac{G}{\frac{1}{A_{gx}} + \frac{1}{A_{gy}}} \{u' + v' - (h+h_g)w'\} \dots\dots\dots(29)$$

式 (16) と (29) を式 (15) に代入すれば、式 (27) より片面補剛板に発生するせん断力 T は板部分の中央面の変位で次のように表わせる。

$$T = C_{ta}(u' + v') - C_{tb}w' \dots\dots\dots(30)$$

ここで、 C_{ta}, C_{tb} は断面定数であり、その詳細を補遺 3 に示す。

式 (29) の T_g を式 (25) の右辺の第 3 項の T_{gx}, T_{gy} に代入すれば、ねじれモーメント M_{xy}, M_{yx} は板部分の中央面の変位で次のように表わせる。

$$\left. \begin{aligned} M_{xy} &= C_{mxya}(u' + v') - C_{mxyz}w' \\ M_{yx} &= C_{myxa}(u' + v') - C_{myxc}w' \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(31\cdot a, b)$$

ここで、 $C_{mxya} \sim C_{myxc}$ は断面定数でありその詳細を補遺 4 に示す。

式 (14), (20), (30), (31) を式 (28) に代入すると、片面補剛板のつり合い方程式は板部分の中央面の変位で次のように表わせる。

$$\left. \begin{aligned} C_{xa}u'' + C_{xb}v'' + C_{xc}u'' - C_{xd}w''' - C_{xe}w'' \\ &= 0 \\ C_{ya}v'' + C_{yb}u'' + C_{yc}v'' - C_{yd}w''' - C_{ye}w'' \\ &= 0 \\ -C_{za}u''' - C_{zb}u'' - C_{zc}v'' - C_{zd}v''' \\ &\quad + C_{ze}w'''' + C_{zf}w'''' + C_{zg}w'''' = q \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(32\cdot a\sim c)$$

ここで、 $C_{xa} \sim C_{zg}$ は断面定数であり、その詳細を補遺 5 に示す。板部分と完全格子部のせん断変形に関する相互作用を無視した場合、式 (32・a, b) の係数 C_{xe}, C_{ye} が零となるほか、 $C_{xb}, C_{xc}, C_{yb}, C_{yc}, C_{zb}, C_{zc}, C_{zf}$ も

異なった値となり、その結果は Trenks が導いた変位表示のつり合い方程式¹³⁾に一致する。

(3) 変位と断面力で表示したつり合い式

式 (14) を用いて式 (20) から u', v' を消去すると式 (20) の曲げモーメント M_x, M_y は変位 w と軸方向力 N_x, N_y で次のように表わせる。

$$\left. \begin{aligned} M_x &= -D_x w'' - D_1 w'' + D_{N_x a} N_x + D_{N_x b} N_y \\ M_y &= -D_y w'' - D_2 w'' + D_{N_y a} N_y + D_{N_y b} N_x \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (33 \cdot a, b)$$

ここで、 $D_x, D_y, D_1, D_2, D_{N_x a} \sim D_{N_y b}$ は断面定数であり、詳細を補遺 6 に示す。

同様に式 (30) を用いて式 (31) から $(u' + v')$ を消去すると、式 (31) のねじれモーメント M_{xy}, M_{yx} は変位 w とせん断力 T で次のように表わせる。

$$\left. \begin{aligned} M_{xy} &= -D_{xy} w' + D_{s_{xy}} T \\ M_{yx} &= -D_{yx} w' + D_{s_{yx}} T \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (34 \cdot a, b)$$

ここで、 D_{xy}, D_{yx} は直交異方性板のねじれ剛性に相当し、次のように表わされる断面定数である。

$$\left. \begin{aligned} D_{xy} &= G \left\{ \frac{h^3}{6} + \frac{J_x}{b} + \frac{1}{h} + \frac{\frac{(h+h_y)^2}{2}}{\left(\frac{1}{A_{gx}} + \frac{1}{A_{gy}}\right)} \right\} \\ D_{yx} &= G \left\{ \frac{h^3}{6} + \frac{J_y}{a} + \frac{1}{h} + \frac{\frac{(h+h_x)^2}{2}}{\left(\frac{1}{A_{gx}} + \frac{1}{A_{gy}}\right)} \right\} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (35 \cdot a, b)$$

式 (34) の右辺の第 2 項と式 (35) の右辺の第 3 項は、板部分と完全格子部のせん断変形に関する相互作用を考慮することにより付加される項であり、この相互作用を無視している Massonnet の理論¹⁴⁾ではこの項は含まれていない。 $D_{s_{xy}}, D_{s_{yx}}$ は断面定数であり、次のように表わせる。

$$\left. \begin{aligned} D_{s_{xy}} &= C_{m_{xya}} / C_{ta} \\ D_{s_{yx}} &= C_{m_{yxa}} / C_{ta} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (36 \cdot a, b)$$

板部分と完全格子部のせん断変形に関する相互作用を無視すると $C_{m_{xya}} = C_{m_{yxa}} = 0$ となるため $D_{s_{xy}} = D_{s_{yx}} = 0$ となり、式 (34) の右辺の第 2 項は消える。

式 (33) と式 (34) を式 (28 \cdot c) に代入し、式 (28 \cdot a, b) を用いて T を消去すれば、片面補剛板のつり合い方程式は次のように変位 w と軸力 N_x, N_y で表わせる。

$$\left. \begin{aligned} D_x w'''' + 2Hw'''' + D_y w'''' \\ = q + D_a N_x'' + D_b N_y'' + D_c N_x'' + D_d N_y'' \\ N_x'' - N_y'' = 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (37 \cdot a, b)$$

ここで $D_a \sim D_d$ は断面定数であり詳細を補遺 7 に示す。式 (37 \cdot a) の $2H$ は一般に板の有効ねじれ剛性とよば

れ次のように表わせる。

$$2H = D_{xy} + D_{yx} + D_1 + D_2 \dots\dots\dots (38)$$

Trenks の求めた補剛板の面外変位 w に関する 8 階の偏微分方程式¹³⁾は、式 (32 \cdot a, b) を用いて式 (32 \cdot c) から面内変位 u, v を消去して得られるものであり、式 (37 \cdot a) と等価のものである。

(4) 近似式としての Huber 型のつり合い式

式 (32) と式 (37) は、長方形断面の補剛材で直交する 2 方向に補強した片面補剛板の厳密なつり合い方程式を与えるが、これらの式を一般的な境界条件のもとで解くには複雑な演算を必要とする。片面補剛板に面外方向の荷重のみが作用する場合、あるいは面外荷重と片面補剛板の相対する 端辺に 同一の面内荷重が加わる場合には、補剛板の面内方向に生ずる軸方向力は一般に零ではなく、ある有限な値をとる。しかし、その変化はきわめて小さいと考えられるので次のような仮定をおく。

$$N_x' = N_x'' = N_y' = N_y'' = 0 \dots\dots\dots (39)$$

式 (39) の仮定と式 (28 \cdot a, b) より、

$$T' = T'' = 0 \dots\dots\dots (40)$$

式 (39) と式 (40) より

$$\left. \begin{aligned} N_x''' = N_x'''' = N_y''' = N_y'''' = 0 \\ N_x = C_1, N_y = C_2, T = C_3 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (41 \cdot a \sim d)$$

式 (41 \cdot a) を式 (37 \cdot a) に代入すると次のように面外変位 w だけを未知変数とする Huber 型のつり合い方程式を得る。

$$D_x w'''' + 2Hw'''' + D_y w'''' = q \dots\dots\dots (42)$$

式 (41 \cdot b \sim d) より、 N_x, N_y, T も片面補剛板全域で一定となり、結局周辺での値に一致し、一般には境界条件として与えられる。そのため、式 (33) に示す曲げモーメント、式 (34) に示すねじれモーメントも面内変位に無関係に一義的に決定され、片面補剛板の面外挙動は式 (42) に示す Huber 型のつり合い方程式を解くことにより、解析することができる。

外力としての面内力がない場合には式 (39) の仮定のもとでは片面補剛板全域で $N_x = N_y = T = 0$ となり、式 (33) の右辺の第 3 項と第 4 項、式 (34) の右辺の第 2 項が消えるため、境界条件も含めて形の上で式 (42) は Huber の方程式に一致する。しかし、この場合にも板部分と完全格子部のせん断変形に関する相互作用を考慮した結果、式 (42) の $2H$ の成分であるねじれ剛性 D_{xy}, D_{yx} は、相互作用を無視した場合の値と異なることに注意しなければならない。

4. 数値計算例

(1) 板部分と完全格子部の相互作用がねじれ剛性に及ぼす影響

片面補剛板の、せん断変形に関する板部分と完全格子部の相互作用が式 (35) に示すねじれ剛性 D_{xy}, D_{yx} に及ぼす影響の程度は片面補剛板の断面形状によって決まる。例として $a=b, a_s=b_s=0.5h, h_x=h_y$ のもとで補剛材の深さと板部分の板厚の比 h_s/h と補剛材間隔と板部分の板厚の比 b/h を変化させ、式 (35) に示す相互作用を考慮したねじれ剛性 ($D_{xy}+D_{yx}$) と、式 (35) の右辺の第3項を無視した、相互作用を考慮しないねじれ剛性 ($D_{xy}+D_{yx}$) の比 R_D を計算した。計算結果を、横軸に h_s/h 、たて軸に R_D をとり、 b/h をパラメーターとして Fig. 6 示す。この結果より一般に相互作用を考慮すれば片面補剛板のねじれ剛性は増大し、補剛材の深さが深いほど、また補剛材間隔が密なほど増大の割合は大きいことがわかる。

(2) 板部分と完全格子部の相互作用が Huber 型の方程式の解に及ぼす影響

せん断変形に関する板部分と完全格子部の相互作用の影響は式 (35), (38), (42) で示されるように Huber 型の方程式においてはねじれ剛性 D_{xy}, D_{yx} にあらわれる。ねじれ剛性が面外変位 w に最も影響を及ぼすの

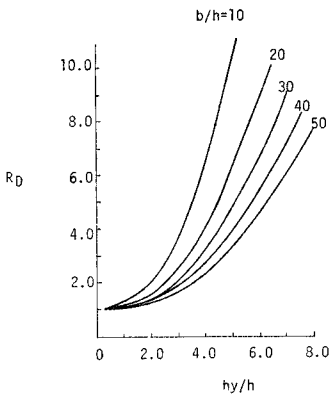


Fig. 6 Influence of Shear Interaction on Torsional Rigidity ($a_s=b_s=0.5h, a=b, h_x=h_y$)

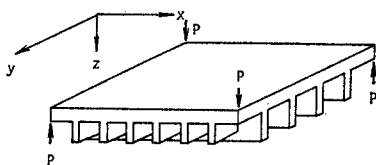


Fig. 7 Stiffened Plate under Corner Loading

は、Fig. 7 に示すように長方形の片面補剛板がコーナーに集中荷重 P を受ける場合である。この時座標の原点を片面補剛板の中心にとると Huber 型の方程式の解 w は次のように表わされ、ねじれ剛性に反比例する。

$$w = \frac{P}{D_{xy} + D_{yx}} xy \dots\dots\dots (43)$$

したがって、板部分と完全格子部の相互作用の考慮の有無は、この荷重条件では面外変位 w に直接影響する。

現在、実用設計では面外方向の分布荷重のみを受ける片面補剛板は、一般に板部分と完全格子部の相互作用を無視したねじれ剛性を用いた Huber 型の方程式に基づいて計算されている。この相互作用の考慮の有無による式 (42) に示す Huber 型の方程式の解の相違を、片面補剛板の実用設計で問題となるような荷重条件、支持条件のもとに調べる。

ここでは、長方形の片面補剛板の相対する2辺が単純支持、他の2辺が自由、単純、固定支持されている場合について、Levy の解法⁵⁾ を応用して解き、相互作用が面外変位 w と断面力 M_y, M_{yx}, Q_y に及ぼす影響をそれぞれの支持条件に対して調べた。例として Fig. 8 (a) に示すように辺長比 $a/b=2.0$ の片面補剛板の中央の長方形領域に分布荷重が作用している場合を取りあげる。補剛材の形状と配置を $h_x=h_y=4h, a_s=b_s=0.3h, a=b=10h$ とし、中央の断面から $a/1000$ だけ離れた断面 X-X に生ずる変位 w 、断面力 M_y, M_{yx}, Q_y を計算する。計算結果を相互作用を考慮した場合を実線で、無視した場合を破線で Fig. 8 (b)~(e) に示す。この結果によると、境界条件とはほぼ無関係に相互作用を考慮すれば変位 w と曲げモーメント M_y はわずかに減少し、せん断力 Q_y はわずかに増大する。ねじれモーメント M_{yx} が著しく増加していることが注目されるがこれは式 (34) に示すように、ねじれモーメントはねじれ剛性の変化の影響を直接受けるためである。ねじれモーメントの著しい増加にもかかわらず、面外変位、曲げモーメントとせん断力にあまり変化がないのは、このような荷重や支持条件のもとでは、荷重を支点に伝達するメカニズムとして、ねじれ抵抗によるものに比較し、曲げ抵抗によるものが支配的であることを意味する。

(3) Huber 型の方程式の解の近似性

片面補剛板では、断面力と変位の関係を与える式 (14), (20), (30), (31) に示すように、微小変位理論のもとでも断面力に面内変位 u, v と面外変位 w が連成して影響を及ぼす。このため、面外荷重だけが作用したときにも式 (14) と式 (30) に示すように軸方向力と面内のせん断力が生ずる。

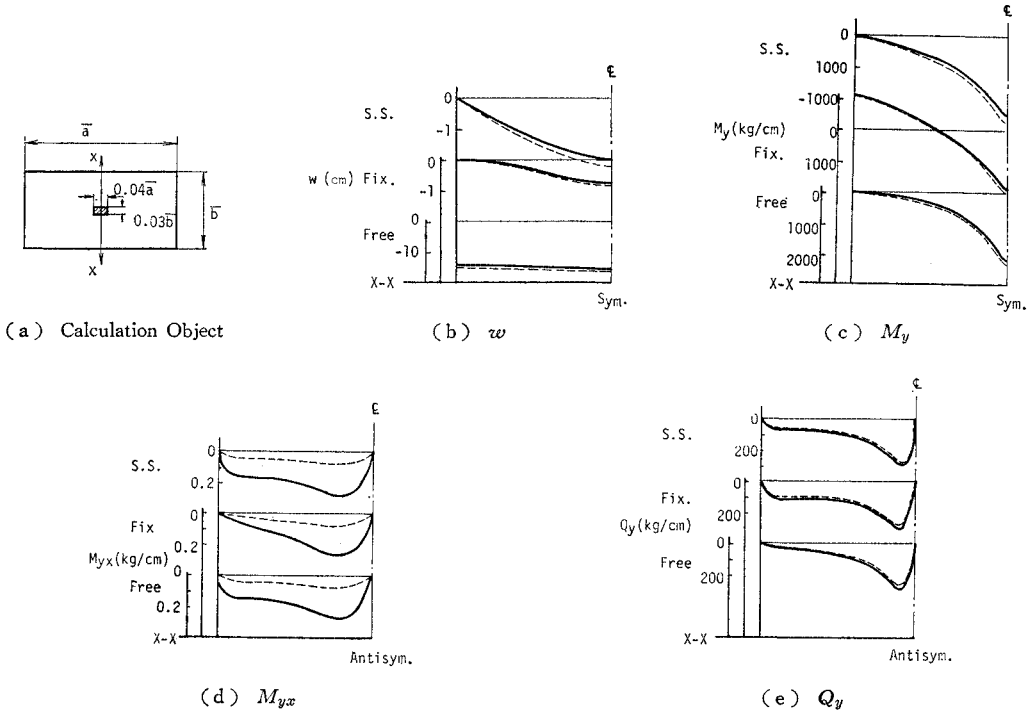
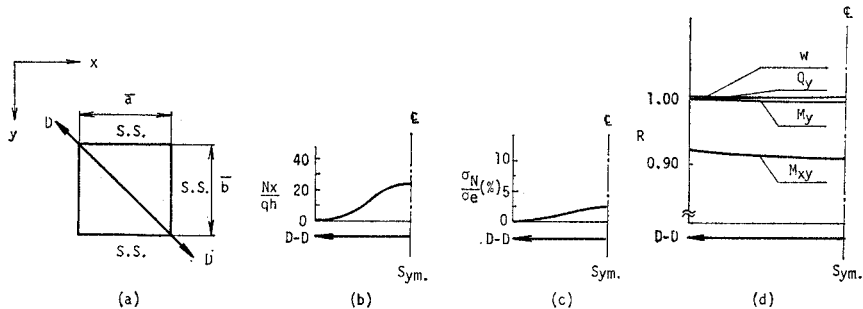


Fig. 8 Influence of Shear Interaction on Huber's Equation ($\bar{a}/b=2.0$, $h_x=h_y=4h$, $a_s=b_s=0.3h$, $a=b=10h$, $E=2.1 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2$, $\nu=0.3$, $h=1.0 \text{ cm}$, $q=625 \text{ kg/cm}^2$)



(a) Calculation Object (b) Distribution of N_x
(c) Distribution of σ_N/σ_e (d) Comparison of Huber's Eq. with Rigorous Eq.

Fig. 9 Accuracy of Huber's Equation ($\bar{a}=\bar{b}$, $h_x=h_y=4h$, $a_s=b_s=0.3h$, $a=b=10h$)

この軸方向力の分布状態を調べるため、厳密なつり合い方程式 (32) を二重フーリエ級数を用いて数値的に解いた。例として、断面形状が $a=b=10h$, $h_x=h_y=4h$, $a_s=b_s=0.3h$ である正方形の片面補剛板に等分布荷重 q が作用した場合を、周辺単純支持条件のもとで計算した。その結果を Fig. 9 に示す。Fig. 9 (a) に示す断面 $D-D$ に生ずる軸方向力 N_x の分布を等分布荷重 q と板部分の板厚 h の積で無次元化して Fig. 9 (b) に示す。この結果によると軸方向力 N_x は補剛板の中央部に向かって増大することがわかる。軸方向力 N_x の影響を検討するため、 N_x による平均直応力 σ_N の、板部分の上面に生ずる直応力 σ_e に対する比をとり、補剛

板の断面 $D-D$ における分布を Fig. 9 (c) に示す。これによると、式 (32) を用いて厳密に解析した結果得られた x 面、 y 面に生ずる平均直応力は板部分の上面に生ずる直応力のたかだか 2~3% である。しかしこのように、平板の両面に非対称に補剛材を配した補剛板では面外荷重だけが作用したときにも軸方向力が生ずるため、Huber 型の方程式によって解かれた面外変位や断面力は厳密には近似解を与えるにすぎない。

この近似度を検討するため、厳密なつり合い方程式 (32) とその近似式としての Huber 型の方程式 (42) をそれぞれ板部分と完全格子部のせん断変形に関する相互作用を考慮して前述の荷重、断面形状、支持条件のもと

で解き、その結果得られた断面 $D-D$ における面外変位 w と断面力 M_y, M_{yx}, Q_y を式 (42) の解の式 (32) の解に対する比 R として Fig. 9 (d) に示す。この結果によると Huber 型の方程式による近似解は厳密解に対し、変位 w 、せん断力 Q_y と曲げモーメント M_y はほとんど差はなく、ねじれモーメント M_{yx} だけが約 10% 小さく評価されることがわかる。

5. 結 論

微小変位理論のもとで、せん断変形に関する板部分と完全格子部の相互作用を考慮して片面補剛板の厳密な支配方程式を導いた。本理論と相互作用を無視した今までの厳密と考えられていた理論を比較・検討した。実用面で用いられる Huber 型の方程式と厳密な支配方程式の関係を示し、Huber 型の方程式における相互作用の影響を検討した。その結果、得られた結論は次のとおりである。

(1) 相互作用を考慮すれば、片面補剛板のねじれ剛性は増大する。したがって主としてねじれモーメントによって伝達されるような荷重、支持条件の場合には、相互作用を考慮するかどうかで片面補剛板の面外変位に大きな差異が生ずる。

(2) 一般の床版が受けるような荷重、支持条件のもとでは、相互作用が片面補剛板の面外変位と断面力に及ぼす影響は、ねじれモーメントが片面補剛板の全域で数倍程度大きくなることを除けば比較的小さくほぼ 10% 以内である。

(3) 床版のように、補剛材が平板の中央面に関し非対称に配置された補剛板の挙動は微小変位理論のもとでも厳密には、面内成分と面外成分が連成する。しかし、その連成作用を無視して得られる面外成分に関する Huber 型の方程式の解の厳密解に対する差異は、一般に小さくそのような補剛板に対し、実用的に Huber 型の方程式を適用することに問題はない。

謝 辞：本研究を実施するに際し、多大のご指導をいただいた埼玉大学の奥村敏恵教授（研究当時 東京大学教授）と研究遂行上の討議に加わっていただいた東京大学大学院の倉方慶夫氏に深く感謝する。

【補 遺】

1. 式 (14) の係数は次のとおりである。

$$\left. \begin{aligned} C_{nxa} &= E \left\{ \frac{h}{1-\nu^2} + \frac{\beta h_y}{1-\nu^2 \alpha \beta} + \beta (h_x - h_y) \right\} \\ C_{nxb} &= \nu E \left\{ \frac{h}{1-\nu^2} + \frac{\alpha \beta h_y}{1-\nu^2 \alpha \beta} \right\} \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} C_{nxc} &= E \left\{ \frac{\beta h_y (h + h_y)}{2(1-\nu^2 \alpha \beta)} + \frac{\beta (h_x - h_y) (h + h_x + h_y)}{2} \right\} \\ C_{nxd} &= \nu E \left\{ \frac{\alpha \beta h_y (h + h_y)}{2(1-\nu^2 \alpha \beta)} \right\} \\ C_{nya} &= E \left\{ \frac{h}{1-\nu^2} + \frac{\alpha h_y}{1-\nu^2 \alpha \beta} \right\} \\ C_{nyb} &= \nu E \left\{ \frac{h}{1-\nu^2} + \frac{\alpha \beta h_y}{1-\nu^2 \alpha \beta} \right\} \\ C_{nyc} &= E \left\{ \frac{\alpha h_y (h + h_y)}{2(1-\nu^2 \alpha \beta)} \right\} \\ C_{nyd} &= \nu E \left\{ \frac{\alpha \beta h_y (h + h_y)}{2(1-\nu^2 \alpha \beta)} \right\} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (A.1 \cdot a \sim h)$$

ここで h_x は x 方向に配置された補剛材の深さである。

2. 式 (20) の係数は次のとおりである。

$$\left. \begin{aligned} C_{mxa} &= E \left\{ \frac{\beta h_y (h + h_y)}{2(1-\nu^2 \alpha \beta)} + \frac{\beta (h + h_x + h_y) (h_x - h_y)}{2} \right\} \\ C_{mxb} &= \nu E \left\{ \frac{\alpha \beta h_y (h + h_y)}{2(1-\nu^2 \alpha \beta)} \right\} \\ C_{mxc} &= E \left\{ \frac{h^3}{12(1-\nu^2)} + \frac{\beta \left(\frac{h^2}{4} h_y + \frac{h}{2} h_y^2 + \frac{1}{3} h_y^3 \right)}{1-\nu^2 \alpha \beta} + \beta \left[\frac{h^2}{4} (h_x - h_y) + \frac{h}{2} (h_x^2 - h_y^2) + \frac{1}{3} (h_x^3 - h_y^3) \right] \right\} \\ C_{mxd} &= \nu E \left\{ \frac{h^3}{12(1-\nu^2)} + \frac{\alpha \beta \left(\frac{h^2}{4} h_y + \frac{h}{2} h_y^2 + \frac{1}{3} h_y^3 \right)}{1-\nu^2 \alpha \beta} \right\} \\ C_{mya} &= E \left\{ \frac{\alpha h_y (h + h_y)}{2(1-\nu^2 \alpha \beta)} \right\} \\ C_{myb} &= \nu E \left\{ \frac{\alpha \beta h_y (h + h_y)}{2(1-\nu^2 \alpha \beta)} \right\} \\ C_{myc} &= E \left\{ \frac{h^3}{12(1-\nu^2)} + \frac{\alpha \left(\frac{h^2}{4} h_y + \frac{h}{2} h_y^2 + \frac{1}{3} h_y^3 \right)}{1-\nu^2 \alpha \beta} \right\} \\ C_{myd} &= \nu E \left\{ \frac{h^3}{12(1-\nu^2)} + \frac{\alpha \beta \left(\frac{h^2}{4} h_y + \frac{h}{2} h_y^2 + \frac{1}{3} h_y^3 \right)}{1-\nu^2 \alpha \beta} \right\} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (A.2 \cdot a \sim h)$$

3. 式 (30) の係数は次のとおりである。

$$\left. \begin{aligned} C_{ia} &= G(h + A) \\ C_{ib} &= GA(h + h_y) \end{aligned} \right\}$$

ここで

$$A = \frac{1}{\left(\frac{1}{A_{gx}} + \frac{1}{A_{gy}}\right)} \quad \dots\dots\dots (A.3 \cdot a \sim c)$$

4. 式 (31) の係数は次のとおりである。

$$\left. \begin{aligned} C_{mxya} &= C_{myxa} = GA \frac{h+h_y}{2} \\ C_{mxyz} &= G \left\{ \frac{h^3}{6} + \frac{J_x}{b} + \frac{h(h+h_y)}{2} A \right\} \\ C_{myxc} &= G \left\{ \frac{h^3}{6} + \frac{J_y}{a} + \frac{h(h+h_y)}{2} A \right\} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (A.4 \cdot a \sim c)$$

5. 式 (32) の係数は次のとおりである。

$$\left. \begin{aligned} C_{xa} &= C_{nxa}, C_{xb} = C_{nxb} + C_{ta}, C_{xc} = C_{ta} \\ C_{xd} &= C_{nxc}, C_{xe} = C_{nxd} + C_{tb}, C_{ya} = C_{nya} \\ C_{yb} &= C_{nyb} + C_{ta}, C_{yc} = C_{ta}, C_{yd} = C_{nyd} \\ C_{ye} &= C_{nyd} + C_{tb}, C_{za} = C_{mxa} \\ C_{zb} &= C_{mxya} + C_{myxa} + C_{myb} \\ C_{zc} &= C_{mxb} + C_{mxya} + C_{myxa} \\ C_{zd} &= C_{mya}, C_{ze} = C_{mxc} \\ C_{zf} &= C_{mxd} + C_{mxyz} + C_{myxc} + C_{myd} \\ C_{zg} &= C_{myc} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (A.5 \cdot a \sim q)$$

6. 式 (33) の係数は次のとおりである。

$$\left. \begin{aligned} D_x &= C_{mxc} + C_{mxa}C_{ua} + C_{mxb}C_{vb} \\ D_1 &= C_{mxd} + C_{mxa}C_{ub} + C_{mxb}C_{va} \\ D_{Nxa} &= C_{mxa}C_{uc} + C_{mxb}C_{vd} \\ D_{Nxb} &= C_{mxa}C_{ud} + C_{mxb}C_{vc} \\ D_y &= C_{myc} + C_{mya}C_{va} + C_{myb}C_{vb} \\ D_2 &= C_{myd} + C_{mya}C_{vb} + C_{myb}C_{ua} \\ D_{Nya} &= C_{mya}C_{vc} + C_{myb}C_{ud} \\ D_{Nyb} &= C_{mya}C_{vd} + C_{myb}C_{uc} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (A.6 \cdot a \sim h)$$

ここで

$$\left. \begin{aligned} C_{ua} &= C_{ka}(C_{nxb}C_{nyd} - C_{nxc}C_{nya}) \\ C_{ub} &= C_{ka}(C_{nxb}C_{nyd} - C_{nxc}C_{nya}) \\ C_{uc} &= C_{ka}C_{nya} \\ C_{ud} &= -C_{ka}C_{nxb} \\ C_{va} &= C_{kb}(C_{nxa}C_{nyd} - C_{nxc}C_{nyb}) \\ C_{vb} &= C_{kb}(C_{nxa}C_{nyd} - C_{nxc}C_{nyb}) \\ C_{vc} &= -C_{kb}C_{nxa} \\ C_{vd} &= C_{kb}C_{nyb} \\ C_{ka} &= 1/(C_{nxa}C_{nya} - C_{nyb}C_{nxb}) \\ C_{kb} &= 1/(C_{nxb}C_{nyb} - C_{nya}C_{nxa}) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (A.6 \cdot i \sim r)$$

C_{ka}, C_{kb} の分母は 補遺 1 の値を用いて計算すれば明らかのように 0 となることはない。

7. 式 (38・a) の係数は次のとおりである。

$$\left. \begin{aligned} D_a &= D_{Nxa} - D_{sxy} \\ D_b &= D_{Nxb} \\ D_c &= D_{Nyb} \\ D_d &= D_{Nya} - D_{syz} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (A.7 \cdot a \sim d)$$

記号

$x, y, z = \text{Fig. 1}$ に示す方向を持ち, $z=0$ なる面を板の中央面に置いた直交デカルト座標系。

$\xi, \eta, \zeta = \text{Fig. 2}$ に示す補剛材の局所直交デカルト座標系。

x 面, y 面= x, y 軸に垂直な平面で切ったときに見える断面。

\bar{a}, \bar{b} = 片面補剛板の x, y 軸方向の板幅。

a, b = 片面補剛板の x, y 軸方向の補剛材の間隔。

a_s, b_s = 片面補剛板の x, y 軸方向の補剛材の幅。

h, h_x, h_y = 板部分の板厚と x, y 面での補剛材の深さ。ただし, $h_x > h_y$ とする。

$A_x, A_y = x, y$ 面での片面補剛板の単位幅あたりの換算断面積。

$A_{px}, A_{py} = x, y$ 面での板部分の単位幅あたりの断面積。 $A_{px} = A_{py} = h$

$A_{gx}, A_{gy} = x, y$ 面での完全補剛部の単位幅あたりの換算断面積。

$\bar{A}_{gx}, \bar{A}_{gy} = x, y$ 面での 1 本の補剛材の断面積。

α, β = おのおの $a_s/a, b_s/b$ を示す。

u, v, w = 板部分の中央面の x, y, z 軸方向の変位。

$N_x, N_y = x, y$ 面に生じる, **Fig. 4** に示す方向を持った軸力。

$T_{xy}, T_{yx} = x, y$ 面に生じる, **Fig. 4** に示す面内方向のせん断力。

$Q_x, Q_y = x, y$ 面に生じる, **Fig. 4** に示す面外方向のせん断力。

$M_x, M_y = x, y$ 面に生じる, **Fig. 4** に示す曲げモーメント。

$M_{xy}, M_{yx} = x, y$ 面に生じる, **Fig. 4** に示すねじれモーメント。

E, ν, G = 弾性係数, ポアソン比, せん断弾性係数。

$D_x, D_y, D_{xy}, D_{yx}, D_1, D_2$ = 片面補剛板の単位幅あたりの剛性。

$2H$ = 片面補剛板の有効ねじれ剛性,

$2H = D_{xy} + D_{yx} + D_1 + D_2$

$J_x, J_y = x, y$ 面での 1 本の補剛材のサン・ブナンのねじれ剛性。

()', () = おのおの $\partial/\partial x, \partial/\partial y$ を示す。

参 考 文 献

- 1) Huber, M.T. : Die Theorie der kreuzweise bewehrten Eisenbetonplatten nebst Anwendungen auf mehrere bautechnisch wichtige Aufgaben über rechteckige Platten, Bauingenieur, Bd. 5, 1923, pp. 354~360, 392~395.
- 2) Guyon, Y. : Calcul des pouts larges à poutres multiples solidarisées par des entretoises, Annales des Pouts et Chaussées de France, Sept.~Oct. 1946, pp. 553~612.
- 3) Massonnet, C. : Méthode de calcul des pouts à poutres multiples tenant compte de leur résistance à la torsion, Publications, International Association for Bridge and Structural Engineering, Vol. 10, 1950, pp. 147~182.
- 4) Bareš, R. and C. Massonnet : Analysis of Beam Grids and Orthotropic Plates, Crosby Lockwood and Sons, London, 1968.
- 5) Timoshenko, S. and S. Woinowsky-Krieger : Theory of Plates and Shells, 2nd ed., McGraw-Hill, New York, 1959.
- 6) Giencke, E. : Die Grundgleichungen für die orthotrope Platte mit exzentrischen Steifen, Stahlbau, Bd. 24, Heft 6, Juni, 1955, pp. 128~129.
- 7) Cusens, A.R., M.A. Zeidan and R.P. Pama : Elastic rigidities of ribbed plates, Building Science, Vol. 7, 1972, pp. 23~32.
- 8) Nishino, F., R.P. Pama and S.L. Lee : Orthotropic plates with eccentric stiffeners, Publications, International Association for Bridge and Structural Engineering, Vol. 34-II, 1974.
- 9) 吉田 裕 : 平板構造の数値解析学的研究, 東京大学学位論文, 昭和 43 年 8 月.
- 10) American Institute of Steel Construction. : Orthotropic Steel Plate Deck Bridges, AISC, New York, 1963.
- 11) Trioitsky, M.S. : Orthotropic Bridges Theory and Design, The James F. Lincoln Arc Welding Foundation, Ohio, 1967.
- 12) Pflüger, A. : Zum Beulproblem der anisotropen Rechteckplatten, Ingenieur Archiv, Bd. 16, 1947, pp. 111~120.
- 13) Trenks, K. : Beitrag zur Berechnung orthogonal anisotroper Rechteckplatten, Bauingenieur, Bd. 29, Heft 10, 1954, pp. 372~377.
- 14) Massonnet, C. : Plaque et coques cylindriques orthotropes à nervures dissymétriques, Publications, International Association for Bridge and Structural Engineering, Vol. 19, 1957, pp. 201~230.
- 15) Clifton, R.J., J.C.L. Chang and T. Au. : Analysis of orthotropic plate bridges, Proc. ASCE, Vol. 89, No. ST 5, Oct. 1963, pp. 133~171.
- 16) Kollbrunner, C.F. und K. Basler. : Torsion, Springer Verlag, Berlin, 1969.
- 17) Timoshenko, S.P. and J.N. Goodier. : Theory of Elasticity 3rd Ed., McGraw-Hill, New York, 1970.

(1974. 10. 21・受付)