

立体骨組の一弾塑性解析

AN ELASTIC-PLASTIC ANALYSIS OF SPACE FRAMES

児嶋 弘行*・平尾 潔**・矢野 照雄***
By Hiroyuki KOJIMA, Kiyoshi HIRAO and Teruo YANO

1. はしがき

A. Jennings らの研究¹⁾をはじめとして、近年、電子計算機を利用した骨組の弾塑性解析に関する研究が活発に行われるようになってきた。これらの多くは平面骨組を対象としたものである²⁾が、立体骨組についても、G.A. Morris³⁾とか上田ら⁴⁾の線形解析に関する研究、さらには、大変形(大たわみ)を考慮し、安定解析をも含めた、S. Morinoら⁵⁾とか上田ら^{6),7)}の非線形解析に関する研究も報告されている。

本研究は各節点に一定荷重と比例漸増荷重とをうける任意の立体骨組を対象として、軸力と2軸まわりの曲げおよびねじりの組合せ降伏条件式を使用し、非線形な変形法の基本式を用いて安定解析も含めた弾塑性解析を電子計算機により自動的に行わんとするものである。

したがって、目的においては S. Morino らとか上田らの研究と類似な研究といえるが、これらの解析では降伏関節発生後の荷重強度を荷重増分法により変更しているのに対し、本解析では荷重倍数による変更方法をとっている⁸⁾。

また、立体骨組の弾塑性解析に対する降伏条件式の理論的な研究としては、軸力と2軸まわりの曲げとの組合せを考えた W.F. Chen ら^{9),10)}の研究とか、ねじりの影響も考慮した S.J. Fenves ら¹¹⁾の研究があるが、これらの理論式は、部材の断面形によって異なり、さらに、各断面形についても降伏条件を満足するような断面力(軸力と2軸まわりの曲げ)の組合せによって、種々、場合分けされており、その形も非常に複雑となる。そのため、上記の解析でも簡単な近似の球状降伏条件式が多く用いられているが、本解析では、前述の、S.J.

Fenves らの理論式をもとに、I形、箱形、および、パイプ(薄肉中空円形)の各断面形に対して、最小2乗法により誘導した近似の多項式を用いている。

また、解析の基礎となる弾性端部材に対する変形法の基本式を、S. Morino らは部材の変形を4次の多項式で近似し、曲げおよびねじりに対する基礎微分方程式から誘導しており、上田らも3次の多項式を仮定してエネルギー法から誘導しているが、いずれもかなり複雑な形となっている。これに対し、本解析では R.K. Livesley らにより提示された、安定関数を含んだ基本式¹²⁾を、大変形や部材の初期たわみを考慮して修正したものを用いている。

なお、組合せ降伏条件式を考慮した骨組の弾塑性解析では、塑性流れ理論の導入にともなって、降伏断面における材端力増分と変位増分との関係が非線形となるため¹³⁾、これらを線形な関係におきかえる必要がある。この方法には、3. で述べるような、上界近似の方法¹⁾と下界近似の方法³⁾とがあるが本解析では後者の方法を採用している。

以下に本解析で用いた降伏条件式、下界近似の方法、変形法の非線形基本式、ならびに、解析手順について述べ、最後に、二、三の計算例を紹介して本解析結果と上記の既往の研究結果との比較、ならびに、降伏条件式の相違とか初期たわみの有無による解析結果の比較などを行う。なお、解析に先だって次のような仮定をもうけている。

① 材料はひずみ硬化のない完全弾塑性体とし、材料の応力-ひずみ特性は時間に独立とする。

② 材料の降伏せん断応力度 τ_y は Von Mises の降伏基準にしたがって、 $\tau_y = \sigma_y / \sqrt{3}$ とする。

③ 降伏条件式におよぼすせん断力の影響は無視する。

④ 断面の形状係数は1とし、塑性域の部材軸方向の拡がりは無視する。

* 正会員 工修 徳島大学助教授 工学部土木工学科

** 正会員 工修 徳島大学講師 工学部土木工学科

*** 正会員 工修 徳島県庁徳島土木事務所 技師

- ⑤ すべての荷重は節点に作用し、その強度は一定、または、同一割合で変化するものとする。
- ⑥ 部材座屈はオイラー値による弾性座屈とする。
- ⑦ 部材は2軸対称な、一定断面を有する直線部材とし、曲げねじりの影響¹¹⁾は無視する。
- ⑧ 部材の初期たわみ η_0, ζ_0 は、変位に関係なく、その部材固有の座標軸 η, ζ の方向に生じ、半波の正弦波形、 $\eta_0 = \delta_{\eta 0} \cdot \sin(\pi \xi / l)$ 、 $\zeta_0 = \delta_{\zeta 0} \cdot \sin(\pi \xi / l)$ で表わされるものとする (図-3 参照)。
- ⑨ 部材の湾曲にともなう軸方向の変位は無視する。
- ⑩ 節点回転にともなう座標軸の変化は考慮しない。

2. 降伏条件式および荷重倍数

弾塑性解析では、使用する降伏条件式によって、崩壊過程(降伏関節の発生順序)とか耐荷力(崩壊荷重)にかなりの差が生ずることも考えられるため、より精度の高い降伏条件式を使用することが望まれる。この降伏条件式に関する理論的研究としては、前述のような、W.F. Chenらの研究とか S.J. Fenves らの研究があるが、これらの理論式は非常に複雑であり、また、種々、場合分けされているため、本文のような荷重倍数を用いた解析では、これらを直接使用することは困難である。そのため、本解析では、荷重倍数の計算が簡単になることも考慮し、次のような近似式を誘導して用いた。

$$a \cdot p^2 + m_{\xi}^2 + b \cdot m_{\eta}^2 + c \cdot m_{\zeta}^2 + d \cdot p \cdot m_{\eta} + e \cdot m_{\eta} \cdot m_{\zeta} + f \cdot m_{\zeta} \cdot p = 1 \dots\dots\dots (1)$$

ただし、

$$\left. \begin{aligned} p &= |N/N_p|, m_{\xi} = |M_{\xi}/M_{\xi p}|, m_{\eta} = |M_{\eta}/M_{\eta p}|, \\ m_{\zeta} &= |M_{\zeta}/M_{\zeta p}| \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2)$$

であり、 N は軸力、 M_{ξ} はねじりモーメント、 M_{η} 、 M_{ζ} は η 軸、 ζ 軸まわりの曲げモーメントを表わし、添字 p はそれらの全塑性値を表わす。また、添字 ξ, η, ζ は部材軸と ξ 軸とが一致するような部材固有の座標軸(図-2)を意味し、各係数 $a \sim f$ は断面形に応じて、それぞれ、次のようである。

- ① 箱形断面
 $a=1.1, b=c=1, d=f=0.5, e=0.1$
 ただし、 $\{m_{\eta} \neq 0 \text{ or } m_{\zeta} \neq 0 \text{ で、} 0.534 \leq p \leq 0.87\}$ では、
 $a=1, b=c=0.57, d=f=1.5, e=1.12$
- ② I形断面
 $a=1, b=c=1, d=f=0.3, e=0.6$
 ただし、 $\{m_{\eta} \neq 0 \text{ or } m_{\zeta} \neq 0 \text{ で、} 0.226 \leq p \leq 1\}$ では、
 $a=1, b=c=0.72, d=f=1.69, e=1.0$

- ③ パイプ断面
 $a=1.19, b=c=1, d=f=0.27, e=0.06$

これらの各係数の値は S.J. Fenves らの理論式¹¹⁾を満足するような、100~200 の p, m_{ξ}, m_{η} 、および、 m_{ζ} の組合せを考え、最小2乗法を用いて、繰返し計算から求めたものである。紙面の都合で詳しいことは省略するが、理論値に対して、球状降伏条件式、 $p^2 + m_{\xi}^2 + m_{\eta}^2 + m_{\zeta}^2 = 1$ 、では p, m_{η}, m_{ζ} のいずれかが 1 に近い値となるような特別な場合を除き、約 10~30% の誤差を生ずるのに対し、上記の近似式では、最大誤差が約 8% で、ほとんどの場合 6% 以下の誤差となっている。次に、式(1)の降伏条件式を使用した場合の本解析における荷重倍数の求め方について述べると以下のようである。

いま、荷重強度 $\bar{P}, \bar{P}_2 (> \bar{P}_1)$ に対する $p, m_{\xi}, m_{\eta}, m_{\zeta}$ をそれぞれ $p_1, m_{\xi 1}, m_{\eta 1}, m_{\zeta 1}$ 、および、 $p_2, m_{\xi 2}, m_{\eta 2}, m_{\zeta 2}$ とし、荷重増分 $d\bar{P} = \bar{P}_2 - \bar{P}_1$ に対するそれらの増分を $dp = p_2 - p_1, dm_{\xi} = m_{\xi 2} - m_{\xi 1}, dm_{\eta} = m_{\eta 2} - m_{\eta 1}, dm_{\zeta} = m_{\zeta 2} - m_{\zeta 1}$ とすれば、直線近似⁸⁾により、 $d\bar{P}$ に対する荷重倍数 k とこれらの諸量との間には、

$$\begin{aligned} &a(p_1 + k \cdot dp)^2 + (m_{\xi 1} + k \cdot dm_{\xi})^2 + b(m_{\eta 1} + k \cdot dm_{\eta})^2 \\ &+ c(m_{\zeta 1} + k \cdot dm_{\zeta})^2 + d(p_1 + k \cdot dp)(m_{\eta 1} + k \cdot dm_{\eta}) \\ &+ e(m_{\eta 1} + k \cdot dm_{\eta})(m_{\zeta 1} + k \cdot dm_{\zeta}) \\ &+ f(m_{\zeta 1} + k \cdot dm_{\zeta})(p_1 + k \cdot dp) = 1 \end{aligned}$$

の関係が成立し、これを整理すれば、

$$Ak^2 + Bk + C = 0$$

となり、荷重倍数 k が式(3)のように求められる。

$$k = \{-B + (B^2 - 4AC)^{1/2}\} / 2A \dots\dots\dots (3)$$

ここで、

$$\begin{aligned} A &= a \cdot dp^2 + dm_{\xi}^2 + b \cdot dm_{\eta}^2 + c \cdot dm_{\zeta}^2 \\ &+ d \cdot dp \cdot dm_{\eta} + e \cdot dm_{\eta} \cdot dm_{\zeta} + f \cdot dm_{\zeta} \cdot dp \\ B &= 2(a \cdot p_1 \cdot dp + m_{\xi 1} \cdot dm_{\xi} + b \cdot m_{\eta 1} \cdot dm_{\eta} \\ &+ c \cdot m_{\zeta 1} \cdot dm_{\zeta}) + d(p_1 \cdot dm_{\eta} + m_{\eta 1} \cdot dp) \\ &+ e(m_{\xi 1} \cdot dm_{\eta} + m_{\eta 1} \cdot dm_{\zeta}) + f(p_1 \cdot dm_{\zeta} + m_{\zeta 1} \cdot dp) \\ C &= a \cdot p_1^2 + m_{\xi 1}^2 + b \cdot m_{\eta 1}^2 + c \cdot m_{\zeta 1}^2 + d \cdot p_1 \cdot m_{\eta 1} \\ &+ e \cdot m_{\eta 1} \cdot m_{\zeta 1} + f \cdot m_{\zeta 1} \cdot p_1 - 1 \end{aligned}$$

式(3)の荷重倍数を用いて、あらたな荷重強度は、

$$\bar{P}'_p = \bar{P}_1 + k \cdot d\bar{P} \dots\dots\dots (4)$$

として定められる。線形解析ではこの \bar{P}'_p は降伏関節が発生するときの荷重強度 \bar{P}_p と一致するが、非線形解析では、さらに、 \bar{P}'_p に対する $p''_p, m''_{\xi p}, m''_{\eta p}$ 、および、 $m''_{\zeta p}$ を求め、式(3)よりあらたな荷重倍数を計算し、荷重倍数が1に収束するまで以上の操作を繰返す必要がある。

3. 線形近似の方法

組合せ降伏条件式を使用し、塑性流れ理論を導入した

場合には、降伏断面 i の塑性変位増分 $d\delta_i^p$ の方向はその断面の材端力 S_{pi} に対応する降伏曲面上の点 i における外向き法線ベクトル N_i の方向と一致することになり、降伏後の荷重増加に対して一義的に定まらず、降伏断面における材端力の変化量 dS_i に応じて常に変化してゆくことになる¹³⁾。したがって、その後の解析に先だって、これら $d\delta_i^p$ と dS_i との非線形関係を線形化しておく必要がある。この線形近似の方法としては下界近似の方法と上界近似の方法とがあるが、本解析では前者の方法を採用しているの、図-1 により、この方法を簡単に説明しておく。図-1 では表現を簡単にするために R_1, R_2 の組合せ降伏条件式、 $f(R_1, R_2) = c$ を用いた場合を示している。まず、断面 i が降伏したときの $N_i(d\delta_i^p)$ の方向を、 $N_i = \{\partial f/\partial R_1, \partial f/\partial R_2\}_i$ 、によって決定し、ついで、降伏断面 i の材端力を式 (5) にしたがって dS_i だけ降伏曲面

$$N_i^T \cdot dS_i = -h \dots\dots\dots (5)$$

の内側へ移動しておき、降伏後の荷重増加に対しては、 N_i の方向を一定とみなし、材端力をふたたび降伏曲面上の点 k に達するまで、点 i における接線に平行な直線 \overline{jk} に沿って変化させ、材料の完全弾塑性体の仮定、

$$N_i^T \cdot dS_i = 0 \dots\dots\dots (6)$$

を満足させようとする方法である。

これに対し、上界近似の方法は図の破線で示したように、微小な荷重増分 dP_i に対しては $N_i'(dS_i')$ の方向を一定とみなし、荷重増分の各段階ごとにこれらの方向を修正して、 $N_i'^T \cdot dS_i' = 0$ となるようにしようとする方法である。したがって、下界近似の方法では降伏断面の材端力が常に降伏曲面の内側にあるため耐荷力の下界値が得られることになり、上界近似の方法では、逆

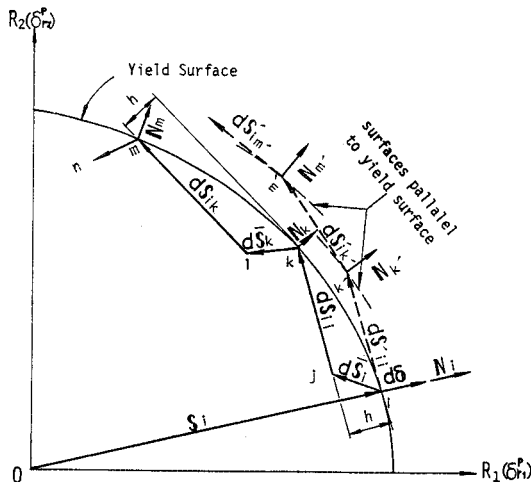


図-1 線形近似の手順

に、上界値が得られることになるが、前者ではベクトル移動量 h を、また、後者では荷重増分 dP を小さくするほど真の耐荷力に近づくことになる。

4. 変形法の基本式

図-2 に示すように、変形後の部材軸と ξ 軸とが一致する、部材固有の座標系 $\xi-\eta-\zeta$ に対する材端力 (モーメントも含めた) S_{ij}, S_{ji} と節点変位 δ_i, δ_j との関係を次のように表わすことにする⁸⁾。

$$\left. \begin{aligned} S_{ij} &= K_{ii} \cdot \delta_i + K_{ij} \cdot \delta_j + L_i \\ S_{ji} &= K_{ji} \cdot \delta_i + K_{jj} \cdot \delta_j + L_j \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (7)$$

ここで、 K は stiffness matrix を、 L は部材の初期たわみとか降伏端部材の降伏時における材端力などによる付加的な荷重項を表わし、材端力および変位ベクトル、 S, δ の内容は、

$$\begin{aligned} S_{ij(ji)} &= \{N, Q_\eta, Q_\zeta, M_\xi, M_\eta, M_\zeta\}_{ij(ji)}^T \\ \delta_{i(j)} &= \{\delta_\xi, \delta_\eta, \delta_\zeta, \theta_\xi, \theta_\eta, \theta_\zeta\}_{i(j)}^T \end{aligned}$$

である。ただし、 N, Q 、および δ の正方向は座標軸の正方向と一致するものとし、 M および θ は座標軸の正方向にむかって右回りのものを正とする。

(1) 弾性端部材に対する基本式

a) 軸 力

図-2 のように、部材 i_0j_0 が変形後 ij となつてつり合ったものとするれば、変形後の部材長 l は、

$$l = l' + (\delta_{\xi j} - \delta_{\xi i}) = \{l_0^2 - (\delta_\eta^2 + \delta_\zeta^2)\}^{1/2} + (\delta_{\xi j} - \delta_{\xi i})$$

と表わされるが、 $\{\}^{1/2}$ を Taylor 展開して第 2 項以上を無視すると、 l は近似的に、次のように表わされ、

$$l \approx l_0 \{1 - (\delta_\eta^2 + \delta_\zeta^2)/2l_0^2\} + (\delta_{\xi j} - \delta_{\xi i})$$

これより、部材の湾曲にともなう長さの変化を無視して、軸力に対する近似式、式 (8) が得られる。

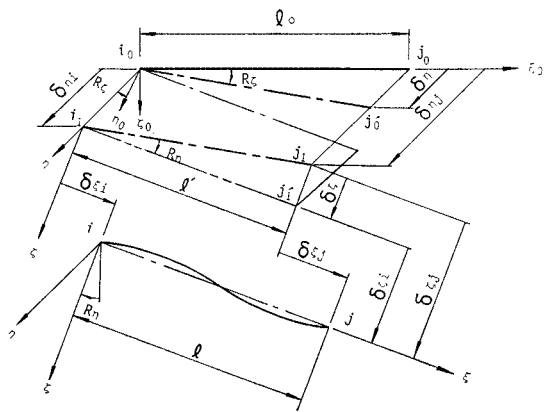


図-2 固有座標系、ならびに、変形状態

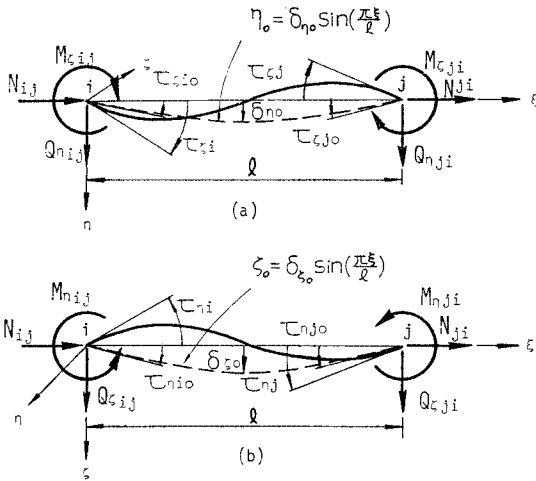


図-3 固有座標系に対する材端力

$$\left. \begin{aligned} N_{ij} &= \frac{EA}{l_0} (l_0 - l) = \frac{EA}{l_0} (\delta_{\xi i} - \delta_{\xi j}) + N_{i0} \\ \text{ただし,} \\ N_{i0} &= EA \{ (\delta_{\xi i} - \delta_{\eta j})^2 + (\delta_{\zeta i} - \delta_{\zeta j})^2 \} / 2 l_0^2 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (8)$$

b) 曲げモーメントおよびせん断力

① ξ-η 面内の曲げ (図-3 (a))

Ⓐ 両端剛節部材

部材の初期たわみ η₀ を考慮した場合の曲げに対する微分方程式¹⁶⁾は、

$$EI_{\zeta} \eta'' = -M_{\zeta ij} + Q_{\eta ij} \cdot \xi - N_{ij} (\eta + \eta_0)$$

となり、これを境界条件、(η)_{ξ=0, ξ=l} = 0, (η')_{ξ=0} = τ_{ζi} - τ_{ζio}, (η')_{ξ=l} = τ_{ζj} - τ_{ζjo} のもとに解き、材端モーメント M_{ζij}, 材端力 Q_{ηij} を求めれば、

$$\begin{aligned} Q_{\eta ij} &= 6 EI_{\zeta} \cdot \varphi_{2\zeta} (\tau_{\zeta i} + \tau_{\zeta j}) / l^2 + Q_{\eta i0} \\ M_{\zeta ij} &= 2 EI_{\zeta} (2 \varphi_{3\zeta} \cdot \tau_{\zeta i} + \varphi_{4\zeta} \cdot \tau_{\zeta j}) / l + M_{\zeta i0} \end{aligned}$$

となり、これに、τ_ζ = θ_ζ - R_ζ, R_ζ = (δ_{ηj} - δ_{ηi}) / l を代入して整理すれば、次のような近似の基本式、式 (9) が得られる。

$$\left. \begin{aligned} Q_{\eta ij} &= \frac{12 EI_{\zeta}}{l^3} \cdot \varphi_{2\zeta} (\delta_{\eta i} - \delta_{\eta j}) \\ &\quad + \frac{6 EI_{\zeta}}{l^2} \cdot \varphi_{2\zeta} (\theta_{\zeta i} + \theta_{\zeta j}) + Q_{\eta i0} \\ M_{\zeta ij} &= \frac{6 EI_{\zeta}}{l^2} \cdot \varphi_{2\zeta} (\delta_{\eta i} - \delta_{\eta j}) \\ &\quad + \frac{2 EI_{\zeta}}{l} (2 \varphi_{3\zeta} \cdot \theta_{\zeta i} + \varphi_{4\zeta} \cdot \theta_{\zeta j}) + M_{\zeta i0} \\ Q_{\eta i0} &= 0, M_{\zeta i0} = -2 EI_{\zeta} \cdot \varphi_{1\zeta} \cdot \kappa_{\zeta} \cdot \pi \cdot \delta_{\eta 0} / l^2 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (9)$$

ただし、式 (9) の Q_{ηi0}, M_{ζi0} は部材中央のたわみが δ_{η0} であるような半波の正弦波形、η₀ = δ_{η0} · sin(πξ/l)、の初期たわみによる荷重項を表す。

Ⓑ i 端滑節, j 端剛節部材

式 (9) において、M_{ζij} = 0 とおき、θ_{ζi} を消去すれば、

$$\left. \begin{aligned} Q_{\eta ij} &= \frac{3 EI_{\zeta}}{l^3} \cdot \varphi_{7\zeta} (\delta_{\eta i} - \delta_{\eta j}) \\ &\quad + \frac{3 EI_{\zeta}}{l^2} \cdot \varphi_{7\zeta} \cdot \theta_{\zeta j} + Q_{\eta i0} \\ M_{\zeta ij} &= M_{\zeta i0} = 0, Q_{\eta i0} = 3 EI_{\zeta} \cdot \varphi_{7\zeta} \cdot \kappa_{\zeta} \cdot \pi \cdot \delta_{\eta 0} / l^2 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (10)$$

Ⓒ i 端剛節, j 端滑節部材

M_{ζji} = -M_{ζij} + Q_{ηij} · l = 0 より、式 (9) の θ_{ζj} を消去し、

$$\left. \begin{aligned} Q_{\eta ij} &= \frac{3 EI_{\zeta}}{l^3} \cdot \varphi_{7\zeta} (\delta_{\eta i} - \delta_{\eta j}) \\ &\quad + \frac{3 EI_{\zeta}}{l^2} \cdot \varphi_{7\zeta} \cdot \theta_{\zeta i} + Q_{\eta i0} \\ M_{\zeta ij} &= Q_{\eta ij} \cdot l, Q_{\eta i0} = -3 EI_{\zeta} \cdot \varphi_{7\zeta} \cdot \kappa_{\zeta} \cdot \pi \cdot \delta_{\eta 0} / l^2 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (11)$$

② ξ-ζ 面内の曲げ (図-3 (b))

部材の初期たわみ ζ₀ を考慮した場合の曲げに対する微分方程式は、

$$EI_{\eta} \zeta'' = M_{\eta ij} + Q_{\zeta ij} \cdot \xi - N_{ij} (\zeta + \zeta_0)$$

となり、境界条件、(ζ)_{ξ=0, ξ=l} = 0, (ζ')_{ξ=0} = (τ_{ηio} - τ_{ηi}), (ζ')_{ξ=l} = (τ_{ηjo} - τ_{ηj}) のもとに、Q_{ζij}, M_{ηij} について解き、これに、τ_η = θ_η - R_η, R_η = (δ_{ζi} - δ_{ζj}) / l を代入して整理すれば、求める基本式、式 (12) を得る。

$$\left. \begin{aligned} Q_{\zeta ij} &= \frac{12 EI_{\eta}}{l^3} \cdot \varphi_{2\eta} (\delta_{\zeta i} - \delta_{\zeta j}) \\ &\quad - \frac{6 EI_{\eta}}{l^2} \cdot \varphi_{2\eta} (\theta_{\eta i} + \theta_{\eta j}) + Q_{\zeta i0} \\ M_{\eta ij} &= -\frac{6 EI_{\eta}}{l^2} \cdot \varphi_{2\eta} (\delta_{\zeta i} - \delta_{\zeta j}) \\ &\quad + \frac{2 EI_{\eta}}{l} (2 \varphi_{3\eta} \cdot \theta_{\eta i} + \varphi_{4\eta} \cdot \theta_{\eta j}) + M_{\eta i0} \\ Q_{\zeta i0} &= 0, M_{\eta i0} = 2 EI_{\eta} \cdot \varphi_{1\eta} \cdot \kappa_{\eta} \cdot \pi \cdot \delta_{\zeta 0} / l^2 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (12)$$

ただし、Q_{ζi0}, M_{ηi0} は初期たわみ、ζ₀ = δ_{ζ0} · sin(πξ/l) による荷重項を表す。

以下、ξ-η 面内の場合と同様にして、

Ⓓ i 端滑節, j 端剛節部材

$$\left. \begin{aligned} Q_{\zeta ij} &= \frac{3 EI_{\eta}}{l^3} \cdot \varphi_{7\eta} (\delta_{\zeta i} - \delta_{\zeta j}) \\ &\quad - \frac{3 EI_{\eta}}{l^2} \cdot \varphi_{7\eta} \cdot \theta_{\eta j} + Q_{\zeta i0} \\ M_{\eta ij} &= M_{\eta i0} = 0, Q_{\zeta i0} = 3 EI_{\eta} \cdot \varphi_{7\eta} \cdot \kappa_{\eta} \cdot \pi \cdot \delta_{\zeta 0} / l^2 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (13)$$

Ⓔ i 端剛節, j 端滑節部材

$$\left. \begin{aligned} Q_{\zeta ij} &= \frac{3 EI_{\eta}}{l^3} \cdot \varphi_{7\eta} (\delta_{\zeta i} - \delta_{\zeta j}) \\ &\quad - \frac{3 EI_{\eta}}{l^2} \cdot \varphi_{7\eta} \cdot \theta_{\eta i} + Q_{\zeta i0} \\ M_{\eta ij} &= -Q_{\zeta ij} \cdot l, Q_{\zeta i0} = -3 EI_{\eta} \cdot \varphi_{7\eta} \cdot \kappa_{\eta} \cdot \pi \cdot \delta_{\zeta 0} / l^2 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (14)$$

c) ねじりモーメント

曲げねじりを無視し、単純ねじりの式、式 (15) を用いる。

$$M_{\xi} = \frac{GJ}{l} (\theta_{\xi i} - \theta_{\xi j}) \dots\dots\dots (15)$$

以上の式 (8)~(15) を適当に組合せることにより、種々の材端条件に対する、式 (7) の K_{ii}, K_{ij} および L_i が求まり、部材のつり合い条件、 $N_{ji} = -N_{ij}, Q_{ji} = -Q_{ij}, M_{\xi ji} = -M_{\xi ij}$, および、 $M_{\xi ji} = M_{\xi ij} \pm Q_{ij} \cdot l$ より K_{ji}, K_{jj}, L_j が求まる。

ただし、上式中、 A は断面積、 E は弾性係数、 GJ はねじり剛性を表わし、 I_{η}, I_{ζ} は、それぞれ、 η, ζ 軸まわりの断面 2 次モーメントを表わす。また、 $\varphi_{1\eta}, \varphi_{2\eta}$ は、

i) $N_{ij} > 0$ (圧縮) の場合

$$\begin{aligned} \varphi_{1\eta} &= \lambda_{\eta} \cdot l \cdot \sin \lambda_{\eta} l / 2 (1 - \cos \lambda_{\eta} l) \\ \varphi_{2\eta} &= \frac{\lambda_{\eta}^2 \cdot l^2}{6} \cdot \frac{1 - \cos \lambda_{\eta} l}{2(1 - \cos \lambda_{\eta} l) - \lambda_{\eta} l \sin \lambda_{\eta} l} \end{aligned}$$

ii) $N_{ij} < 0$ (引張) の場合

$$\begin{aligned} \varphi_{1\eta} &= \lambda_{\eta} \cdot l \cdot \sinh \lambda_{\eta} l / 2 (\cosh \lambda_{\eta} l - 1) \\ \varphi_{2\eta} &= \frac{\lambda_{\eta}^2 \cdot l^2}{6} \cdot \frac{1 - \cosh \lambda_{\eta} l}{2(\cosh \lambda_{\eta} l - 1) - \lambda_{\eta} \cdot l \cdot \sinh \lambda_{\eta} l} \end{aligned}$$

であり、

$$\begin{aligned} \varphi_{3\eta} &= (3\varphi_{2\eta} + \varphi_{1\eta}) / 4, \varphi_{4\eta} = (3\varphi_{2\eta} - \varphi_{1\eta}) / 2 \\ \varphi_{1\eta} &= \varphi_{1\eta} \cdot \varphi_{2\eta} / \varphi_{3\eta}, \lambda_{\eta} = \{ |N_{ij}| / EI_{\eta} \}^{1/2} \end{aligned}$$

である。さらに、

$$\kappa_{\eta} = \begin{cases} \lambda_{\eta}^2 \cdot l^2 / (\pi^2 - \lambda_{\eta}^2 l^2), & (N_{ij} > 0) \\ -\lambda_{\eta}^2 \cdot l^2 / (\pi^2 + \lambda_{\eta}^2 l^2), & (N_{ij} < 0) \end{cases}$$

であり、 $\varphi_{i\zeta}, \kappa_{\zeta}$ は $\varphi_{i\eta}, \kappa_{\eta}$ の λ_{η} を $\lambda_{\zeta} = \{ |N_{ij}| / EI_{\zeta} \}^{1/2}$ でおきかえたものである。

(2) 降伏端部材に対する基本式

a) i, j 両端降伏部材

荷重強度 \bar{P}_p で材端 i および j が降伏したものととして、その時の材端力および材端変位を $S_{pij}, S_{pji}, \delta_{ip}, \delta_{jp}$ とし、降伏後の荷重増分 $d\bar{P}$ に対応するこれらの増分を $dS_{ij}, dS_{ji}, d\delta_i$, および、 $d\delta_j$ とする。また、荷重強度 $\bar{P} = \bar{P}_p + d\bar{P}$ に対応する材端力を S_{ij}, S_{ji} とし、材端弾性変位を δ_i', δ_j' , 節点変位を δ_i, δ_j とすれば、材端力増分 dS は、

$$\left. \begin{aligned} dS_{ij} &= S_{ij} - S_{pij} \\ &= K_{ii} \cdot \delta_i' + K_{ij} \cdot \delta_j' + L_i - S_{pij} \\ dS_{ji} &= S_{ji} - S_{pji} \\ &= K_{ji} \cdot \delta_i' + K_{jj} \cdot \delta_j' + L_j - S_{pji} \end{aligned} \right\} \dots (a)$$

と表わされ、変位増分 $d\delta$ は、弾性増分 $d\delta^e$ と塑性増分 $d\delta^p$ とに分解され¹³⁾、次のように表わされる。

$$\left. \begin{aligned} d\delta_i &= d\delta_i^e + d\delta_i^p = d\delta_i^e + \mu_i \cdot N_i = \delta_i - \delta_{ip} \\ d\delta_j &= d\delta_j^e + d\delta_j^p = d\delta_j^e + \mu_j \cdot N_j = \delta_j - \delta_{jp} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (b)$$

ただし、上式中、 K, L は荷重強度 \bar{P} に対応する両端弾性とした場合の stiffness matrix, および、荷重項を表わし、 μ は塑性流れ定数を表わす。また、 $N_{i(j)}$ は、2. で述べたような、 $S_{pij(ji)}$ に対応する降伏曲面上の点 $i(j)$ における外向き法線ベクトルであり、降伏条件式、 $f(N, M_{\xi}, M_{\eta}, M_{\zeta}) = C$ を用いた場合には次のように表わされる。

$$\begin{aligned} N_{i(j)} &= \{ \partial f / \partial N, 0, 0, \partial f / \partial M_{\xi}, \partial f / \partial M_{\eta}, \\ &\quad \partial f / \partial M_{\zeta} \}_{T_{i(j)}} \end{aligned}$$

次に、式 (b) より、変位の連続条件を考慮して、

$$\left. \begin{aligned} \delta_i' &= \delta_{ip} + d\delta_i^e = \delta_i - \mu_i \cdot N_i \\ \delta_j' &= \delta_{jp} + d\delta_j^e = \delta_j - \mu_j \cdot N_j \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (c)$$

となるから、式 (c) を式 (a) に代入すれば、式 (a) は、

$$\left. \begin{aligned} dS_{ij} &= K_{ii} \cdot \delta_i + K_{ij} \cdot \delta_j + L_i - S_{pij} \\ &\quad - K_{ii} \cdot \mu_i \cdot N_i - K_{ij} \cdot \mu_j \cdot N_j \\ dS_{ji} &= K_{ji} \cdot \delta_i + K_{jj} \cdot \delta_j + L_j - S_{pji} \\ &\quad - K_{ji} \cdot \mu_i \cdot N_i - K_{jj} \cdot \mu_j \cdot N_j \end{aligned} \right\} \dots\dots (d)$$

となる。一方、材料の完全弾塑性体の仮定より、

$$\left. \begin{aligned} N_i^T \cdot dS_{ij} &= 0 \\ N_j^T \cdot dS_{ji} &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (e)$$

となる必要があるから、この式 (e) に式 (d) を代入して整理すれば、流れ定数 μ_i, μ_j が次のように求まる。

$$\left. \begin{aligned} \mu_i &= \{ X_1 \cdot \delta_i + X_2 \cdot \delta_j - C_i \} \cdot T \\ \mu_j &= \{ X_3 \cdot \delta_i + X_4 \cdot \delta_j - C_j \} \cdot T \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (f)$$

ここで、

$$\begin{aligned} X_1 &= N_j^T \cdot K_{jj} \cdot N_j \cdot N_i^T \cdot K_{ii} \\ &\quad - N_i^T \cdot K_{ij} \cdot N_j \cdot N_j^T \cdot K_{ij} \\ X_2 &= N_j^T \cdot K_{jj} \cdot N_j \cdot N_i^T \cdot K_{ij} \\ &\quad - N_i^T \cdot K_{ij} \cdot N_j \cdot N_j^T \cdot K_{jj} \\ X_3 &= N_i^T \cdot K_{ii} \cdot N_i \cdot N_j^T \cdot K_{ji} \\ &\quad - N_j^T \cdot K_{ji} \cdot N_i \cdot N_i^T \cdot K_{ii} \\ X_4 &= N_i^T \cdot K_{ii} \cdot N_i \cdot N_j^T \cdot K_{jj} \\ &\quad - N_j^T \cdot K_{jj} \cdot N_i \cdot N_i^T \cdot K_{ij} \\ C_i &= N_j^T \cdot K_{jj} \cdot N_j \cdot N_i^T \cdot \{ S_{pij} - L_i \} \\ &\quad - N_i^T \cdot K_{ij} \cdot N_j \cdot N_j^T \cdot \{ S_{pji} - L_j \} \\ C_j &= N_i^T \cdot K_{ii} \cdot N_i \cdot N_j^T \cdot \{ S_{pji} - L_j \} \\ &\quad - N_j^T \cdot K_{ji} \cdot N_i \cdot N_i^T \cdot \{ S_{pij} - L_i \} \\ T &= \{ N_i^T \cdot K_{ii} \cdot N_i \cdot N_j^T \cdot K_{jj} \cdot N_j \\ &\quad - N_i^T \cdot K_{ij} \cdot N_j \cdot N_j^T \cdot K_{ji} \cdot N_i \}^{-1} \end{aligned}$$

したがって、式 (f) を式 (d) に代入すれば、 dS_{ij} が求まり、さらに、 $S_{ij} = dS_{ij} + S_{pij}$ より、この場合の基本式が次のように得られる。

$$\left. \begin{aligned} S_{ij} &= K_{ii}' \cdot \delta_i + K_{ij}' \cdot \delta_j + L_i' \\ K_{ii}' &= K_{ii} - \{ K_{ii} \cdot N_i \cdot X_1 + K_{ij} \cdot N_j \cdot X_2 \} \cdot T \\ K_{ij}' &= K_{ij} - \{ K_{ji} \cdot N_i \cdot X_2 + K_{ij} \cdot N_j \cdot X_4 \} \cdot T \\ L_i' &= \{ K_{ii} \cdot N_i \cdot C_i + K_{ij} \cdot N_j \cdot C_j \} \cdot T + L_i \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (16)$$

b) *i* 端降伏, *j* 端弾性部材

$$\left. \begin{aligned} \mu_j=0, \delta_j'=\delta_j \text{ として, a) と同様な誘導により,} \\ K_{ii}'=K_{ii}-K_{ii}\cdot N_i\cdot N_i^T\cdot K_{ii}\cdot T_i \\ K_{ij}'=K_{ij}-K_{ii}\cdot N_i\cdot N_i^T\cdot K_{ij}\cdot T_i, \\ T_i=(N_i^T\cdot K_{ii}\cdot N_i)^{-1} \\ L_i'=K_{ii}\cdot N_i\cdot N_i^T\cdot \{S_{pji}-L_i\}\cdot T_i+L_i \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(17)$$

c) *i* 端弾性, *j* 端降伏部材

$$\left. \begin{aligned} \mu_i=0, \delta_i'=\delta_i \text{ として, a) と同様な誘導により,} \\ K_{ii}'=K_{ii}-K_{ij}\cdot N_j\cdot N_j^T\cdot K_{ij}\cdot T_j \\ K_{ij}'=K_{ij}-K_{ij}\cdot N_j\cdot N_j^T\cdot K_{jj}\cdot T_j \\ T_j=(N_j^T\cdot K_{jj}\cdot N_j)^{-1} \\ L_i'=K_{ij}\cdot N_j\cdot N_j^T\cdot \{S_{pji}-L_j\}\cdot T_j+L_i \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(18)$$

なお、以上の降伏端部材に対する基本式の誘導過程で式 (f) のように得られる塑性流れ定数 μ が負となる場合には、定義より、その材端（降伏関節）は弾性復活をおこすことになる。

(3) ベクトル移動量

3. で述べたように、本解析では、降伏後の荷重増加に先だって、降伏断面 *i* の材端力を降伏曲面の内側へ $d\bar{S}_i$ だけ移動しておく必要があるが、その誘導方法¹⁵⁾は省略し、以下に結果だけを示す。

a) 両端弾性部材の *i* 端が降伏した場合

$$\left. \begin{aligned} d\bar{S}_i=-K_{ii}\cdot N_i\cdot T_i\cdot h \\ d\bar{S}_j=-K_{jj}\cdot N_j\cdot T_j\cdot h \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(19)$$

b) 両端弾性部材の *j* 端が降伏した場合

$$\left. \begin{aligned} d\bar{S}_i=-K_{ij}\cdot N_j\cdot T_j\cdot h \\ d\bar{S}_j=-K_{jj}\cdot N_j\cdot T_j\cdot h \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(20)$$

c) *i* 端弾性, *j* 端降伏部材の *i* 端が降伏した場合

$$\left. \begin{aligned} d\bar{S}_i=\{-K_{ii}\cdot N_i\cdot T_j^{-1}+K_{ij}\cdot N_j\cdot T_{ji}^{-1}\}\cdot T\cdot h \\ d\bar{S}_j=\{-K_{ji}\cdot N_i\cdot T_j^{-1}+K_{jj}\cdot N_j\cdot T_{ji}^{-1}\}\cdot T\cdot h \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(21)$$

d) *i* 端降伏, *j* 端弾性部材の *j* 端が降伏した場合

$$\left. \begin{aligned} d\bar{S}_i=\{K_{ii}\cdot N_i\cdot T_{ij}^{-1}-K_{ij}\cdot N_j\cdot T_i^{-1}\}\cdot T\cdot h \\ d\bar{S}_j=\{K_{ji}\cdot N_i\cdot T_{ij}^{-1}-K_{jj}\cdot N_j\cdot T_i^{-1}\}\cdot T\cdot h \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(22)$$

e) *i, j* 両端が同時に降伏した場合

$$\left. \begin{aligned} d\bar{S}_i=\{-K_{ii}\cdot N_i\cdot (T_j^{-1}-T_{ij}^{-1}) \\ +K_{ij}\cdot N_j\cdot (T_{ji}^{-1}-T_i^{-1})\}\cdot T\cdot h \\ d\bar{S}_j=\{-K_{ji}\cdot N_i\cdot (T_j^{-1}-T_{ij}^{-1}) \\ +K_{jj}\cdot N_j\cdot (T_{ji}^{-1}-T_i^{-1})\}\cdot T\cdot h \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(23)$$

ただし、上式中、

$$T_{ij}=(N_i^T\cdot K_{ij}\cdot N_j)^{-1}, T_{ji}=(N_j^T\cdot K_{ji}\cdot N_i)^{-1}$$

であり、その他の記号は (1), (2) で用いたものと同様である。また、ベクトル移動量 h は未知量であるから

解析に先だって適当な値を与えておく必要がある。

(4) 座標変換

以上で示した S と δ の関係は、変形後の部材軸と ξ 軸とが一致するような部材固有の座標座標系 $\xi-\eta-\zeta$ に対する結果であるが、これらの関係は座標変換行列 R によって、図-4 の基準座標系 $x-y-z$ に対する P と u の関係に容易に変換される。

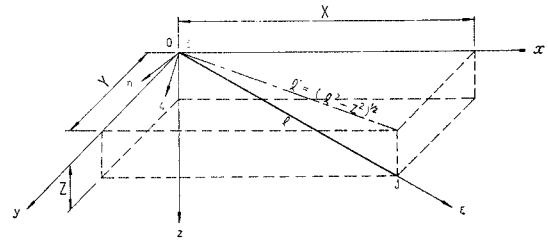


図-4 固有座標系と一般座標系との関係

$$P_{ij}=R_{ij}\cdot S_{ij}, \delta_{i(j)}=R_{ij}^T\cdot u_{i(j)} \dots\dots\dots(24)$$

ここで、

$$P_{ij}=\{P_x, P_y, P_z, M_x, M_y, M_z\}_{ij}^T$$

$$u_{i(j)}=\{\delta_x, \delta_y, \delta_z, \theta_x, \theta_y, \theta_z\}_{i(j)}^T$$

$$R_{ij}=\begin{bmatrix} R_{ij}' & 0 \\ 0 & R_{ij}' \end{bmatrix}, R_{ij}'=\begin{bmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{bmatrix}$$

ただし、方向余弦 $\alpha_1\sim\alpha_3$ は鉛直材以外に対しては、

$$\alpha_1=X/l, \alpha_2=Y/l, \alpha_3=Z/l,$$

$$\beta_1=(-Yl \cos r - XZ \sin r)/ll',$$

$$\beta_2=(Xl \cos r - YZ \sin r)/ll',$$

$$\beta_3=l' \sin r/l, \gamma_1=(Yl \sin r - XZ \cos r)/ll',$$

$$\gamma_2=(-Xl \sin r - YZ \cos r)/ll', \gamma_3=l' \cos r/l$$

であり、鉛直材に対しては、次のようである。

$$\alpha_1=\alpha_2=0, \alpha_3=Z/l, \beta_1=-Z \sin r/l,$$

$$\beta_2=\cos r, \beta_3=0, \gamma_1=-Z \cos r/l,$$

$$\gamma_2=-\sin r, \gamma_3=0$$

なお、式中、 X, Y, Z は変形後の部材長 l の x, y, z 軸への投影長を表わし、変形前のそれらを X_0, Y_0, Z_0 とすれば、 $X=X_0+(\delta_{xj}-\delta_{xi}), Y=Y_0+(\delta_{yj}-\delta_{yi}), Z=Z_0+(\delta_{zj}-\delta_{zi})$ である。また、 $l=(X^2+Y^2+Z^2)^{1/2}$ 、 $l'=(X^2+Y^2)^{1/2}$ であり、 r は ξ 軸まわりの主軸の回転角を表わす。

式 (24) より得られる基準座標系に対する基本式を用いて、各節点でつり合い方程式、 $\bar{P}_i=\Sigma P_{ij}$ を立てれば、骨組全体に対する解式として式 (25) が得られる。したがって、式 (25) を $\{U\}$ について解き、式 (24) より固有座標系に対する δ を求めれば、式 (7) から各部材の材端力 $\{S\}$ が求まることになる。

$$K \cdot \{U\} = \{\bar{P}\} - \{L\} = \{\bar{P}'\} \dots\dots\dots(25)$$

ただし、 K は骨組全体の stiffness matrix であり、 $\{U\}$ 、 $\{\bar{P}\}$ は、それぞれ、全節点の変位および荷重強度を表わす列ベクトルである。また、 $\{L\}$ は部材の初期たわみ、および、降伏端部材の降伏時における材端力に関係した付加的な荷重項を表わす。なお、式 (25) の K の determinant が 0 となる場合には機構崩壊かあるいは骨組全体の座屈 (不安定現象) が起こることになる。

5. 解析手順

荷重強度 $\{\bar{P}\}_{n,0}$ である塑性化部材が発生し、さらに荷重強度が増加して $\{\bar{P}\}_{n+1,0}$ となってあらたな塑性化部材が発生するまで、あるいは、限界荷重 $\{\bar{P}\}_B$ のもとで全体座屈が起こるまでの第 n 段階に対する解析手順を示せば次のようである。

① 任意の荷重強度 $\{\bar{P}\}_{n,m} (> \{\bar{P}\}_{n,0})$ を与えて、材端力 $\{S\}_{n,m}$ 、節点変位 $\{U\}_{n,m}$ の収束値を求め、同時に、 $K_{n,m}$ の determinant $D_{n,m}$ を計算する。

② $D_{n,m} > 0$ の場合には降伏端で弾性復活の判定を行い、弾性復活がおこった場合 ($\mu < 0$) にはそのように構造形式、および、stiffness matrix を修正して①の計算に帰り、その他の場合には式 (3) により各材端で荷重倍数を計算し、その最小値 $k_{n,m,\min}$ を求める。そして、 $k_{n,m,\min}$ が 1 に収束しているかどうかを判定し、未収束の場合には式 (4) により荷重強度を変更して①の計算に帰り、収束している場合には③の手順へうつる。一方、 $D_{n,m} \leq 0$ の場合には、荷重強度を変更しながら⁹⁾、繰返し計算を行い、限界荷重 $\{\bar{P}\}_B$ の近似値が求まった時点で解析を終了する。

③ $k_{n,m,\min}$ となった材端に降伏関節が発生したように構造形式、および、stiffness matrix を修正し、前述の線形近似の手順にしたがって、降伏端の材端力ベクトルを降伏曲面の内側へ移動し、この移動に伴うつり合い力の再配分を行う。

これらの①、②、③の手順を繰返してゆけば骨組は限界荷重 $\{\bar{P}\}_B$ のもとで全体座屈をおこすか、荷重強度 $\{\bar{P}\}_C$ のもとで機構を形成して崩壊することになる。

ただし、以上では $D_{n,m}$ が 0 となる場合には座屈がおこるものとして説明したが、前述のように、あらたな降伏関節の発生により、機構が形成されて $D_{n,m}$ が 0 となる場合もある。したがって、これらを判定するための手順が必要と思われるが、本解析では、文献 8) のような、特別な手順はもうけず、載荷状態などを考慮して、機構が形成されるために必要な降伏関節の数 (不静定次数) をあらかじめ与えておき、降伏関節の発生数とその値に達するまでは機構崩壊はおこらないものとして

解析している。

そのため、予想に反した、部分崩壊などがおこった場合にも座屈崩壊がおこったものとみなして計算を繰返すため演算時間に無駄を生ずることになる。ただ、機構崩壊はあらたな降伏関節が発生した時点でおこるから、次の解析段階にうつる場合に、荷重強度の増加を小さくしておけば、このような演算時間の無駄もある程度少なくなると思われるが、機構崩壊と座屈崩壊とははっきり区別するためには文献 8) で用いたような手順の導入が必要であろう。

また、本解析のように、安定関数を含んだ基本式を用い、荷重倍数による荷重強度の変更方法をとった場合には、ある荷重増加に対して、 $D_{n,m}$ が正から負を通りこしてふたたび正となり、真の座屈荷重を見落す危険性があるため、荷重増分がある値以上になれば、強制的に、一定な荷重増分を与えるなどして、このような危険性をさけるための考慮が必要である。

なお、著者らは、上述の解析手順を、京都大学大型計算機 FACOM 230-75 を対象として、プログラムしており、次に紹介する計算例はこの解析プログラムを用いて計算したものである。

6. 計算例

ここでは簡単な矩形ラーメンに対する 4 つの計算例を紹介し、本解析結果と S. Morino らおよび上田らの解析結果との比較、ならびに、降伏条件式の相異とか初期たわみの有無による解析結果の比較などを行う。






計算例に用いた各ラーメンの骨組寸法と載荷状態 (P は漸増荷重を表わす) はそれぞれ 図-5, 6, 9 のようであり、各部材の断面特性はそれぞれ 表-1 のようである。

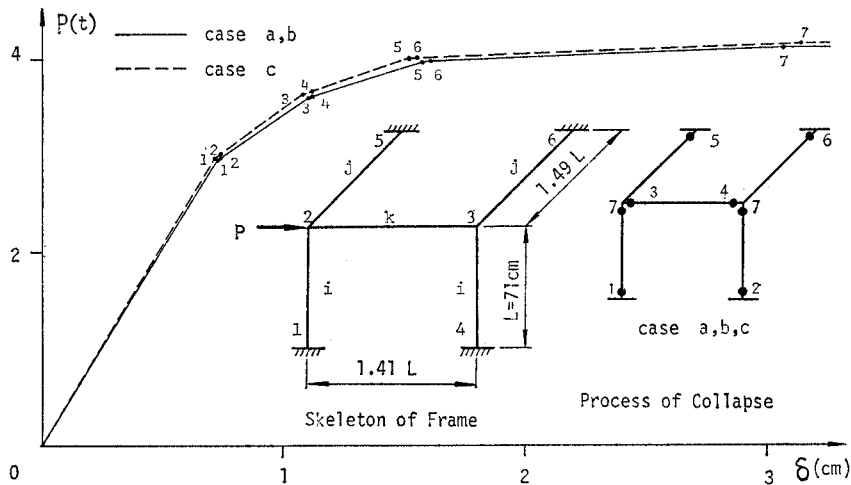
なお、以下では記述を簡単にするため、種々の解析方法を次のような case i の形で区別する。

case a : 本文の線形解析。case b : 本文の非線形解析。case c : 上田らの線形解析。case d : S. Morino らの線形解析。case e : S. Morino らの非線形解析。case f : 部材の初期たわみを考慮した本文の非線形解析。case g : 弾性端部材に対する基本式として、式 (8) の $N_{i0} = 0$ とし、式 (9)、(12) の δ にかかる係数 φ_2 を $\varphi_2 = \varphi_1 \cdot \varphi_2$ におきかえた場合 (R.K. Livesley らが安定解析に用いた基本式¹²⁾と一致) の非線形解析。

ただし、これらは球状降伏条件式を用いた場合であり、本文で誘導した近似の降伏条件式、式 (1)、を用いた場合にはこれらにダッシュをつけて case i' として区別する。

表—1 計算例に用いた矩形ラーメンの各部材の断面諸元

	計算例 1		計算例 2, 3		計算例 4	
	column beam	i j	beam k	column		beam
A cm ²	10.3		7.6	113.9	113.8	59.7
J cm ⁴	78.1		40.1	105.3	99.9	5402.0
I _n cm ⁴	39.0		20.0	14505.8	1960.4	2701.0
I _z cm ⁴	39.0		20.0	4849.0	40957.0	2701.0
N _p kg	28327.9		23856.5	272221.0	271982.0	191008.0
M _{εp} kg-cm	49560.0		35400.0	1488500.0	2085000.0	1047646.0
M _{mp} kg-cm	49560.0		35400.0	2941134.0	4801510.0	1155200.0
M _{cz} kg-cm	49560.0		35400.0	1372720.0	806000.0	1155200.0
σ _y kg/cm ²	2750.0		3140.0	2390.0	2390.0	3200.0
E kg/cm ²	2100000		2100000	2100000	2100000	2100000
G kg/cm ²	807690		807690	810000	810000	810000
cross section						



図—5 計算例 1 の骨組寸法、載荷状態、崩壊過程、ならびに、 $P-\delta$ 曲線

計算例 1 (図—5)

本例は上田らの上界近似による方法と本文の下界近似による方法との比較のための計算例であり、図中の case c に対する結果は文献 4) の解析例 5 (Fig. 7) から引用したものである。図からわかるように、本文の case a と上田らの case c の崩壊過程はまったく一致しており、 $P-\delta$ 曲線も非常によく一致した結果が得られている。また、3. で述べたように case c の方が上界値を与えている。なお、case b についても解析してみたが、本例では case b と case a との差はほとんどみられなかった。

計算例 2 (図—6, 7)

本解析と S. Morino らの解析との比較、ならびに、I 形断面に対する降伏条件式の相違による比較のための計算例であり、図中の case d および case e に対する結果は文献 5) の example 4.4.2 (Fig. 73) から引用したものである。最初に本解析結果と S. Morino らの結果についてみれば、図—6 の線形解析では case a と case d との $P-\delta$ 曲線は非常によく一致しており、崩壊過程もまったく同様であるが、図—7 の非線形解析では case b と case e との $P-\delta$ 曲線の間にはかなりの差があり、崩壊過程も異なり、case e の方が 10% 程度低い耐荷力を示している。次に、降伏条件式の相違による結

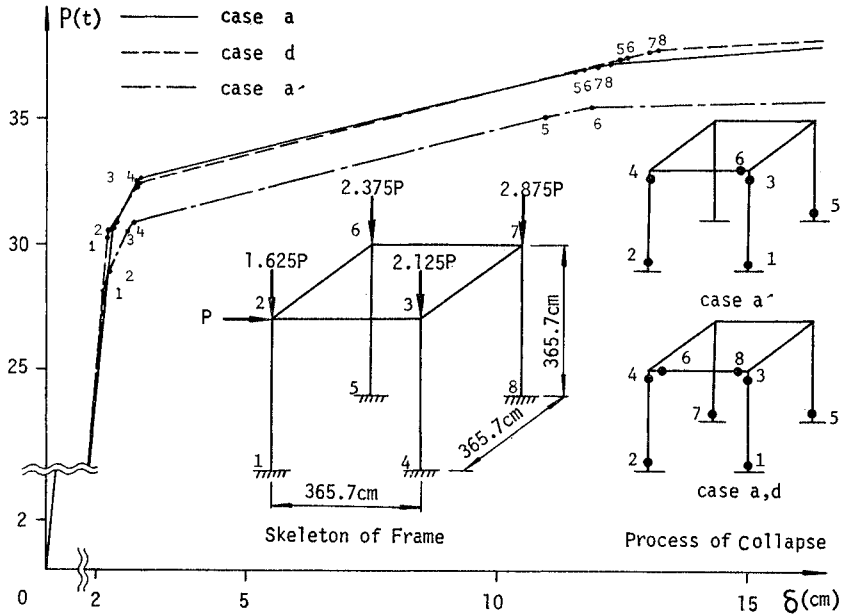


図-6 計算例 2 (線形解析) の骨組寸法, 載荷状態, 崩壊過程, ならびに, $P-\delta$ 曲線

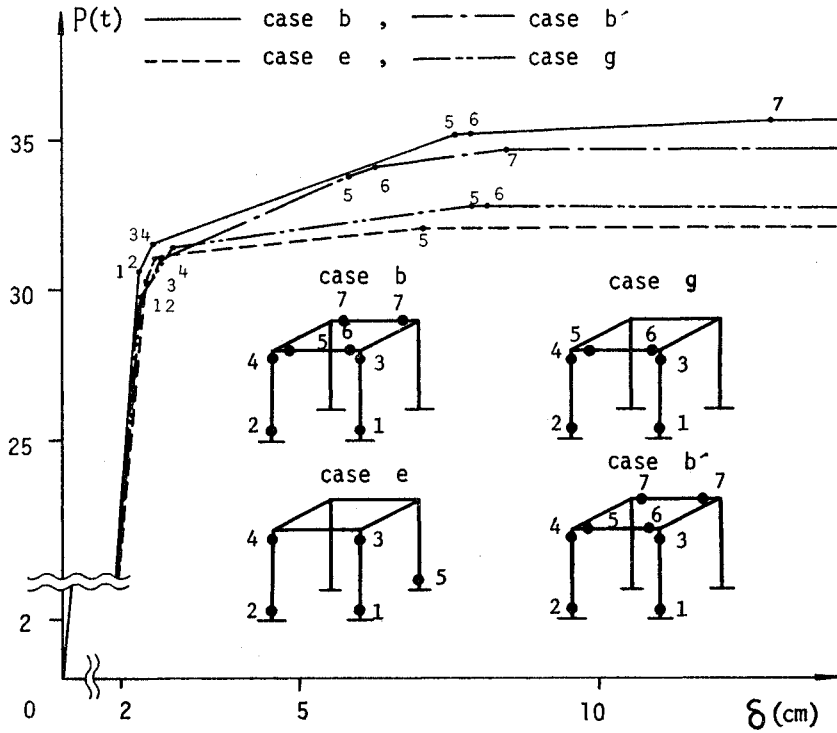
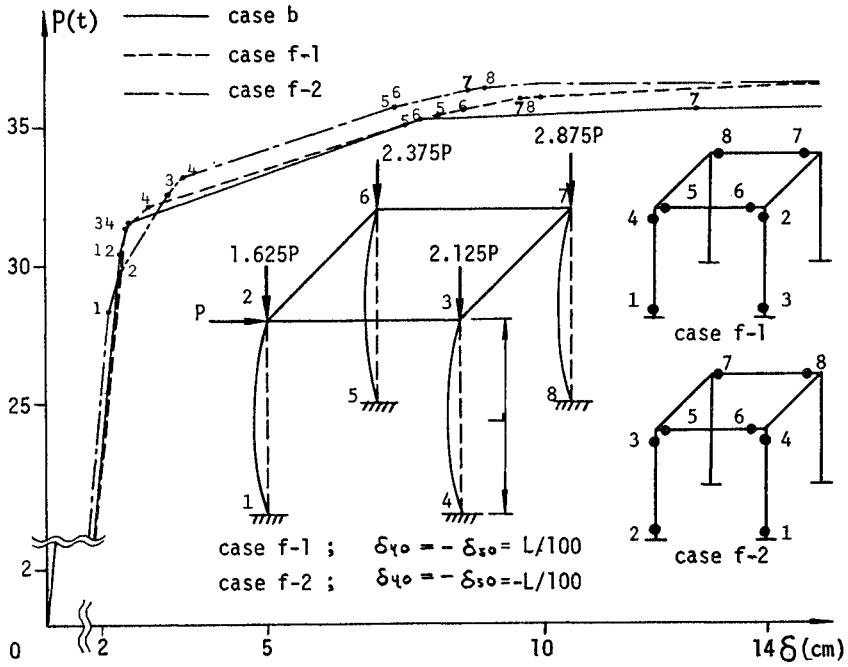


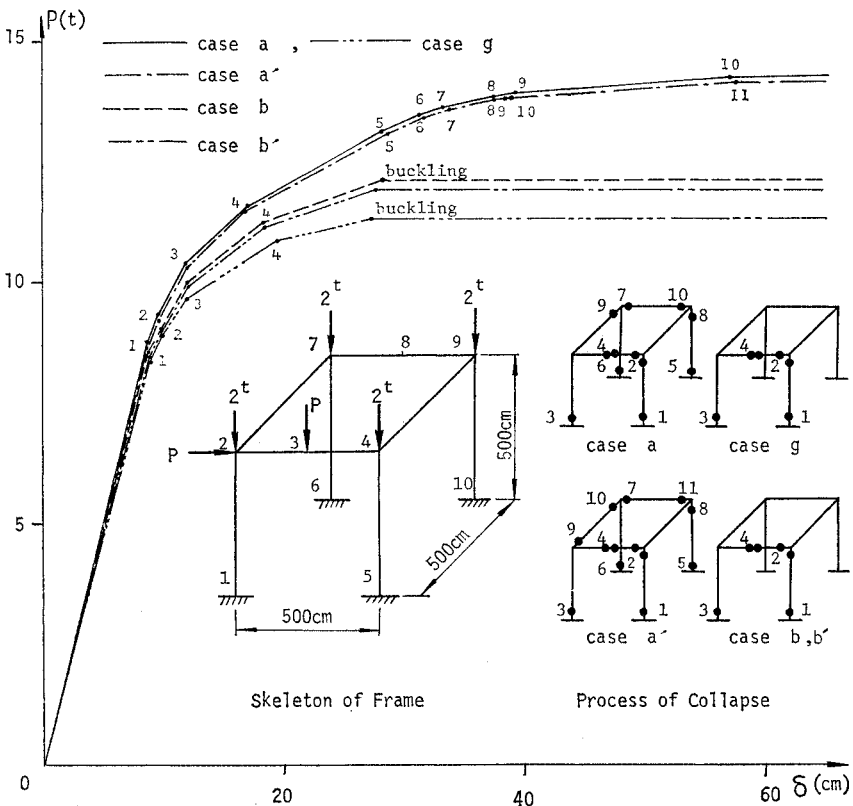
図-7 計算例 2 (非線形解析) の崩壊過程および $P-\delta$ 曲線

果についてみれば、本文の近似式を用いた場合 (case a', case b') の方が球状の場合 (case a, case b) よりも、線形解析で 6% 程度、非線形解析で 3% 程度いずれも低い耐荷力を示しており、線形解析では崩壊過程も異なっ

ている。最後に、case b と case g とでは同様な崩壊過程をたどるが、case g の方が一段階早く崩壊し、8% 程度低い耐荷力を示しており、 $P-\delta$ 曲線も、case b よりむしろ、case e とよく似た形になっている。



図—8 計算例 3 の載荷状態，崩壊過程，ならびに， P - δ 曲線



図—9 計算例 4 の骨組寸法，載荷状態，崩壊過程，ならびに， P - δ 曲線

計算例 3 (図-8)

部材の初期たわみの影響を検討するための計算例で、例 2 で扱った矩形ラーメンの柱材に $\delta_{y0} = -\delta_{z0} = l/100$ の初期たわみを導入した場合が case $f-1$ であり、 $\delta_{y0} = -\delta_{z0} = -l/100$ とした場合が case $f-2$ である。図からわかるように、各 case とも崩壊過程にかなり差があり、特に、初期たわみのはいった柱材に降伏関節が発生する第 4 段階までは case $f-1$ と case $f-2$ とではこの傾向は顕著である。したがって、各 case の $P-\delta$ 曲線の間にもこの第 4 段階までは差を生じているが、その後は各 case ともほとんど平行線をたどり、最終的な耐荷力は case f の方が case b よりも 2% 程度高くなっている。

計算例 4 (図-9)

パイプ断面に対する降伏条件式の相異による比較のための計算例である。case a と case a' 、および、case b と case b' では、計算例 2 の場合と同様に、case a' 、case b' の方がいずれも低い耐荷力を示している。しかしながら、I 形断面の場合にくらべて、両者の差は小さく 1.5% 以内である。ただ、本例でも case g の方が case b よりも 7% 程度低い耐荷力を示している。

なお、計算例 2, 4 のように、非線形解析で座屈崩壊がおこる場合には非線形解析による耐荷力の方が線形解析の耐荷力よりもかなり低い値を示している。

7. む す び

本文では有限変位を考慮した非線形な変形法の近似式を用い、軸力、曲げ、および、ねじりの組合せ降伏条件式を導入した場合の下界近似による一自動弾塑性解析法について述べ、矩形ラーメンに対する 4 つの計算例を紹介して本解析結果と既往の解析結果との比較、ならびに、降伏条件式の相異とか初期たわみの有無による解析結果の比較などを行ってきた。その結果、

(1) 本文の下界近似による方法と上田らの上界近似による方法との解析結果はよく一致する。

(2) 球状降伏条件式、 $p^2 + m_\xi^2 + m_\eta^2 + m_\zeta^2 = 1$ 、は耐荷力の上界値を与え危険側であるため、本文で誘導したような、実用的でより正確な降伏条件式の誘導が望まれる。

(3) 部材の初期たわみ(半波の正弦波形)を考慮した場合としない場合とでは崩壊過程はかなり異なるが、最終的な耐荷力にはあまり差がなく、本例のように、初期たわみと荷重による変形モードが異なるような場合には初期たわみを考慮した場合の方が少し高めの耐荷力を

示す。

(4) 非線形解析で座屈崩壊がおこるような場合には非線形解析の方が線形解析よりもかなり低い耐荷力を示す。

(5) R.K. Livesley らにより提案された基本式¹²⁾を用いた解析(case g)では、式中に付加的な $N \cdot \delta$ モーメントが潜在的に含まれているため、部材が主に圧縮力を受けるような場合には、本文で示した基本式を用いた場合よりもかなり低い耐荷力を示し、安全側の解析となる。

などの点があげられる。しかしながら、これらは限られた計算例から得られた結果であり、(1)の上界近似と下界近似の方法については演算時間とか解析(プログラムの作成)の容易さなどの検討が必要と思われ、(2)の降伏条件式についても、理論式が断面力の組合せによって、種々、場合分けされるような時には、本文で示した式(1)ではどうしてもある程度の誤差が含まれることになり、より精度を上げるためにはもう少し場合分けする必要があろう。また、(3)の初期たわみについても、部材の中間に降伏関節の発生を考慮した場合には少し様子が異なる¹⁶⁾ものと思われる。最後に、(4)の線形解析と非線形解析とでは、後者の方がかなり低い耐荷力を示す場合が多く、その必要性が認められるが、計算例 2, 4 で示したように、使用する基本式によってかなり差が生じているため、S. Tezcan¹⁷⁾、C. Oran¹⁸⁾ らにより提示された、より厳密な基本式を導入するなどして、さらに検討してゆく必要があろう。また、本解析では幾何学的非線形性だけを考えたが、塑性域の拡がりとかひずみ硬化ならびに残留応力の影響など材料的非線形性¹⁹⁾の導入も今後の一つの課題である。

なお、本研究は一部昭和 49 年度文部省科学研究費奨励研究 A の補助をうけたことを付記する。

参 考 文 献

- 1) Jennings, A. and K. Majid : An elastic-plastic analysis by computer for framed structures loaded up to collapse, The structural Engineer, Dec. 1965.
- 2) Parikh, B.P. : Elastic-Plastic Analysis and Unbraced Multi Story Steel Frames, Ph. D. Dissertation-Lehigh University, 1966.
- 3) Morris, G.A. and S.J. Fenves : Elastic-Plastic Analysis of Frameworks, J. of St. Div. ASCE, Vol. 96, No. ST 5, May, 1970.
- 4) 上田・松石・山川・赤松 : マトリックス法による骨組構造物の弾塑性解析, 日本造船学会論文集, 第 124 号, 1968 年 12 月.
- 5) Morino, S. and Le Wu Lu : Analysis of Space Frames, Fritz Engineering Laboratory Report, No. 331. 13, Lehigh University, 1971.
- 6) 上田・赤松・近江 : マトリックス法による骨組構造物の弾塑性解析(その 2), 日本造船学会論文集, 第 126 号, 1969 年 12 月.

- 7) 成岡・服部・加藤・後藤・上田：骨組構造解析，コンピュータによる構造工学講座 II-1-B，日本鋼構造協会編，培風館。
- 8) 児嶋・平尾：平面剛滑節構造物の一自動極限解析，土木学会論文報告集，第 218 号，1973 年 10 月。
- 9) Santathadaporn, S. and W.F. Chen : Interaction Curve for Sections under Combined Biaxial Bending and Axial Force, Welding Research Council, Bulletin No. 148, February, 1970.
- 10) Chen, W.F. and T. Atsuta : Interaction Equation for Biaxially Loaded Section, J. of St. Div., ASCE, Vol. 98, No. ST 5, May, 1972.
- 11) Morris, G.A. and S.J. Fenves : Approximate Yield Surface Equation, J. of EM. Div., ASCE, Vol. 95, No. EM 4, August, 1969.
- 12) Livesley, R.K. : The Application of an Electronic Digital Computer to Some Problems of Structure, The Structural Engineer, January, 1956.
- 13) Hodge, P.G. : Plastic Analysis of Structure, Mc. Hill, 1959.
- 14) 加藤・仲：単一材の座屈，東京大学出版会刊。
- 15) 星・児嶋・平尾：軸力の影響を考慮した平面剛，滑節構造物の一自動弾塑性解析，土木学会論文報告集，第 202 号，1972 年 6 月。
- 16) 児嶋・平尾・古市：元撓みを考慮した平面剛滑節骨組の弾塑性解析，土木学会第 29 回年次学術講演会講演概要集，第 I 部。
- 17) Tezcan, S.S. and B.C. Mahapatra : Tangent Stiffness Matrix for Space Frame Members, J. of St. Div., ASCE, Vol. 95, No. ST 6, June, 1969.
- 18) Oran, C. : Tangent Stiffness Matrix in Space Frames, J. of St. Div. ASCE, Vol. 99, No. ST 6, June, 1973.
- 19) 後藤・太田：構造物の非線形挙動の解析，数値解析講座 15，応用編，土木学会誌，1973 年 3 月号。

(1974.10.21・受付)