【討　議】

築地恒夫著 "軸力および保存ねじりモーメントによる柱の座屈(英文)" への討議

(土木学会論文報告集第223号・1974年3月掲載)

討　議

倉方慶夫 (東京大学)
長谷川彰夫 (名古屋工業大学)
西野文雄 (東京大学)

著者は部材の両端断面に保存力である軸方向力とねじりモーメントの作用する直線部材の座屈時におけるつり合い式と境界条件を仮想仕事の原理を用い，仮定した変位場を代入して導いている。この場合，得られる結果の精度はすべて用いた変位場に依存しており，変位場の扱いには十分注意しなければならないことは当然であるが[10]，同種の手法を用いた数多くの研究においてもその注意は必ずしも十分でないように見受けられる。著者はその変位場を式 (4)，(5) で与えているが，これに関しいくつかの疑問を感ずるので，ここに討議として問題提起をしたい。

座屈問題は，有限変位の問題の特殊な場合にあたる。このため仮想仕事の原理により座屈問題の支配方程式を導くとき，その変位場は一般的な有限変位場に基本を置くことはいうまでもない。三次元の変形する物体の力学では，変位場はひずみ―変位関係を満足する3つの変位成分と6つのひずみテンソルの成分で表わされる。棒理論では，断面上のある特定点を連ねた部材軸線に平行な線上での変位で断面上の一般点での変位を表わすことによって，三次元問題が一次元化されている。したがって棒理論での変位場は，断面内の特定の点の変位 u, v, θ で表わされた一般点の3つの変位成分 U, V, W とこれをひずみ―変位関係に代入して得られる6つのひずみ成分で表わされる。

部材軸線に平行な線上での変位によって断面上の一般点での変位場を表わすために，通常次の3つの仮定が導入される[10),11),12)]。

(i)　断面は変形しない。

(ii)　板厚中心面に垂直で部材軸線に平行な面内でのせん断ひずみ (ε_{nz}) は無視できる。

(iii)　板厚中心面のせん断ひずみ (ε_{sz}) は無視できる。

仮定 (ii) は，面外曲げを受ける平板やシェルで採用されるキルヒホッフ・ラブの仮定に相当し，仮定 (iii) は，オイラー・ベルヌーイの平面保持の仮定を一般化したものである。これらの仮定を導入しても有限変位場のもとでは断面上の一般点での変位は，前述の断面上の特定点での変位に関し非線形な表式となる[10),12),13)]。たとえば，断面上に任意に選んだ点 S (x_s, y_s) を回転中心とする回転 θ を与えれば，断面上の任意点の変位 U, V は仮定 (i) により

$$\left.\begin{aligned} U&=-(y-y_s)\sin\theta-(x-x_s)(1-\cos\theta) \\ V&=\ \ (x-x_s)\sin\theta-(y-y_s)(1-\cos\theta) \end{aligned}\right\}\cdots(33)$$

となる。上式の $\sin\theta$, $\cos\theta$ を級数展開すると

$$\left.\begin{aligned} U&=-(y-y_s)\theta-\frac{1}{2}(x-x_s)\theta^2+\cdots\cdots \\ V&=\ \ (x-x_s)\theta-\frac{1}{2}(y-y_s)\theta^2+\cdots\cdots \end{aligned}\right\}\cdots(34)$$

となる。著者は式 (34) のかわりに式 (4) の微小変位場の変位成分と直交直線座標を基準状態としたグリーンのひずみ―変位関係に，式 (4) を代入 (ただし ε_z においては W の微係数の二次項を無視) したと思われる式 (5) のひずみ成分の2つで表わされる変位場を用いている。

有限変位の問題では，どの程度までの変位を微小量として残すかということが最も重要な問題である。著者の用いている式 (4)，(5) の変位場の微小項の取り扱いに関連して二つの問題を指摘したい。

問題の設定から明らかなように式 (4)，(5) 中に表われる u, v, θ は座屈に伴ってつり合いの分岐点に生じるごく微小な変位と考えてよい。式 (34) と比較して明らかなように，式 (4) では θ の微係数の1次項に比してその2次項が無視されている。すなわち単位の値に対して，座屈変位の微係数は微小量として無視されている。これに反し式 (5) ではこのような取り扱いをせず変位の1次項に対し2次項が残されている。式 (5) に対してもまったく同じ取り扱いをして，変位の2次項を無視するとひずみ成分はすべて u, v, θ の線形項のみとなる。この変位場を用いて仮想仕事の原理からつり合い式を求めると微小変位のつり合い式が求まり，座屈問題とならないことが容易にわかる。すなわち微小変位理論によるつり合い式と著者の求めている座屈に対するつり合い式との差

は，すべて変位 u, v, θ の2次項から得られている。したがって座屈問題のつり合い式を仮想仕事の原理から求めるとき，座屈変位 u, v, θ の微係数の1次項を単位の値に対して無視できないことが容易に理解される。

すでに指摘したように，式 (4) では座屈変位の1次項に対して2次項が無視されている。このように2次以上の高次項を無視した結果得られた式 (4) をひずみ—変位関係に代入して式 (5) のひずみ成分を u, v, θ で表わしているので，式 (5) の右辺中に本来存在するべき2次項の一部も失われている。このように式 (4), (5) の変位場では座屈変位の2次項の一部が失われており，第一の問題点である。

著者の変位場に問題があることは式 (5) そのものについて指摘することもできる。

式 (5 b, c) の右辺第二項中に含まれる $\theta\dfrac{dv}{dz}$, $\theta\dfrac{du}{dz}$ の項である。部材に剛体変位を与えた場合を考えると，

$$\varepsilon_z=\varepsilon_{xz}=\varepsilon_{yz}=0 \quad\cdots\cdots(35)$$

$$\frac{d^2u}{dz^2}=\frac{d^2v}{dz^2}=\frac{d\theta}{dz}=0\quad\cdots\cdots(36)$$

となることは明らかである。これに対し，一般に，

$$\theta\fallingdotseq 0,\quad \frac{du}{dz}\fallingdotseq 0,\quad \frac{dv}{dz}\fallingdotseq 0\quad\cdots\cdots(37)$$

であるから，式 (5) に式 (36), (37) を代入すると二次の非線形項のオーダーで $\varepsilon_{xz}\fallingdotseq 0$, $\varepsilon_{yz}\fallingdotseq 0$ となり，式 (35) の関係が満足されない。すなわち剛体変位を与えたにもかかわらず，式 (5) で無視できないとして残した二次の非線形項のオーダーで部材にひずみが生ずることになる。この点からもわかるように，式 (5) の二次項には他にもこのような物理的に不都合な項が含まれている可能性があると考えざるを得ない。

式 (5) を求めた過程における他の1つの問題点は，式 (5) のアンダー・ラインされた項にある。すなわち，著者は ε_z を求める場合には，グリーンのひずみテンソルにおいて W の偏微分係数の二次項を無視したにもかかわらず，ε_{xz}, ε_{yz} の場合には W の偏微分係数の二次項を無視しなかった。著者自身がいっているように，ε_{xz}, ε_{yz} においても W の偏微分係数の二次項は通常無視されているにもかかわらず，これを考えた結果が式 (5) のアンダー・ラインされた項である。討議者らは，文献 12) の報告で仮定として W の偏微分係数の二次項を無視したひずみ—変位の関係式に基礎を置く解析を行ったが，6つのひずみ成分のうち $\varepsilon_z, \varepsilon_{xz}, \varepsilon_{yz}$ で通常 W の偏微分係数が無視されているのは，それなりに物理的な意味があるからである。直交直線座標を基準座標とし，ラグランジュの方法を用いればひずみ—変位の関係は変形した形で次のように表わされる。

$$\left.\begin{aligned}
\varepsilon_z &=\frac{1}{2}\frac{\partial W}{\partial z}+\frac{1}{2}\frac{\partial W}{\partial z}\left(1+\frac{\partial W}{\partial z}\right)\\
&\quad+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)^2+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2\\
\varepsilon_{xz}&=\frac{\partial U}{\partial z}+\frac{\partial W}{\partial x}\left(1+\frac{\partial W}{\partial z}\right)\\
&\quad+\frac{\partial U}{\partial x}\cdot\frac{\partial U}{\partial z}+\frac{\partial V}{\partial x}\cdot\frac{\partial V}{\partial z}\\
\varepsilon_{yz}&=\frac{\partial V}{\partial z}+\frac{\partial W}{\partial y}\left(1+\frac{\partial W}{\partial z}\right)\\
&\quad+\frac{\partial U}{\partial y}\cdot\frac{\partial U}{\partial z}+\frac{\partial V}{\partial y}\cdot\frac{\partial V}{\partial z}
\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(38)$$

となる。これらの式で，W の偏微分係数の二次項を無視することは，

$$\left(1+\frac{\partial W}{\partial z}\right)\approx 1\quad\cdots\cdots(39a)$$

すなわち

$$1\gg\left|\frac{\partial W}{\partial z}\right|\quad\cdots\cdots(39b)$$

と置くことに対応する。著者は式 (38a) で式 (39) を適用しながら，式 (38b, c) で式 (39) を用いなかったことは，ε_z と ε_{xz}, ε_{yz} を同一の基準で扱わなかったことになる。

ここで，$\left(1+\dfrac{\partial W}{\partial z}\right)$ について考えてみる。変形前の z 方向線素ベクトルを $\boldsymbol{dz}$ と表わし，変形前に基準座標に選んだ直交直線座標 (x, y, z) の基底ベクトルを単位ベクトルとし，$\boldsymbol{i}_x, \boldsymbol{i}_y, \boldsymbol{i}_z$ と表わすと，

$$\boldsymbol{dz}=dz\,\boldsymbol{i}_z\quad\cdots\cdots(40)$$

である。線素 $\boldsymbol{dz}$ は変形後 $\boldsymbol{d\hat{z}}$ になるものとすると，**Fig. 5** に示すように，

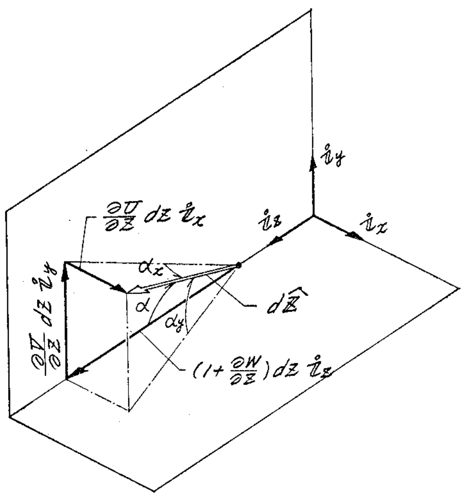

Fig. 5 Components of a line element dz

$$d\hat{z}=\frac{\partial U}{\partial z}dz\,\boldsymbol{i}_x+\frac{\partial V}{\partial z}dz\,\boldsymbol{i}_y+\left(1+\frac{\partial W}{\partial z}\right)dz\,\boldsymbol{i}_z \quad\cdots\cdots(41)$$

である。$\bar{\varepsilon}_z$ を z 方向線素の伸びひずみ[14] とすると

$$|d\hat{z}|=(1+\bar{\varepsilon}_z)dz \quad\cdots\cdots(42)$$

となる。ここで

α： dz と $d\hat{z}$ の交角

α_x： $\boldsymbol{i}_x$ に垂直な平面と $d\hat{z}$ の交角

α_y： $\boldsymbol{i}_y$ に垂直な平面と $d\hat{z}$ の交角

と表わすと

$$dz\cdot d\hat{z}=\cos\alpha\cdot(1+\bar{\varepsilon}_z)dz^2$$
$$d\hat{z}\cdot\boldsymbol{i}_x=\sin\alpha_x\cdot dz$$
$$d\hat{z}\cdot\boldsymbol{i}_y=\sin\alpha_y\cdot dz$$

となる。上式に，式 (40), (41), (42) の関係を代入すると，

$$\left.\begin{aligned}\cos\alpha&=\frac{1}{1+\bar{\varepsilon}_z}\left(1+\frac{\partial W}{\partial z}\right)\\ \sin\alpha_x&=\frac{1}{1+\bar{\varepsilon}_z}\frac{\partial U}{\partial z}\\ \sin\alpha_y&=\frac{1}{1+\bar{\varepsilon}_z}\frac{\partial V}{\partial z}\end{aligned}\right\}\quad\cdots\cdots(43)$$

となる。これらの量の間には

$$\frac{d\hat{z}\cdot d\hat{z}}{(1+\bar{\varepsilon}_z)^2}=(dz)^2$$

から

$$\cos^2\alpha+\sin^2\alpha_x+\sin^2\alpha_y=1 \quad\cdots\cdots(44)$$

の関係がある。通常，多くの場合ひずみは1に比べて十分小さいという微小ひずみの仮定，すなわち，

$$1\gg|\bar{\varepsilon}_z| \quad\cdots\cdots(45)$$

を暗黙のうちに導入し，式 (43) において $\bar{\varepsilon}_z$ を 1 に対し無視し

$$\left.\begin{aligned}\cos\alpha&=\left(1+\frac{\partial W}{\partial z}\right)\\ \sin\alpha_x&=\frac{\partial U}{\partial z}\\ \sin\alpha_y&=\frac{\partial V}{\partial z}\end{aligned}\right\}\quad\cdots\cdots(46)$$

としている。式 (4c) の右辺において，たわみ角の正弦を $\dfrac{du}{dz}$, $\dfrac{dv}{dz}$ と表わしているのは，式 (46) に相当する。式 (44) から，

$$\cos\alpha=\sqrt{1-\sin^2\alpha_x-\sin^2\alpha_y}\ ,\quad (\pi/2>\alpha>-\pi/2) \quad\cdots\cdots(47)$$

となり，上式に式 (43) を代入し，右辺を級数に展開し，三次以上の微小項を無視すると，

$$\left(1+\frac{\partial W}{\partial z}\right)=(1+\bar{\varepsilon}_z)-\frac{1}{2}\frac{1}{(1+\bar{\varepsilon}_z)}\times\left\{\left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2\right\} \quad\cdots\cdots(48)$$

となる。上式を式 (38) に代入し，1 に対し $\bar{\varepsilon}_z$ と $\left(\dfrac{\partial U}{\partial z}\right)^2$, $\left(\dfrac{\partial V}{\partial z}\right)^2$ を無視すると，結局，式 (39) を用いた結果と等しくなる。微小ひずみを前提とすると，伸びひずみとひずみテンソルは一致する[14] から，1 に対してひずみを無視すると，式 (48) から

$$\varepsilon_z=\frac{\partial W}{\partial z}+\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2\right\} \quad\cdots\cdots(49)$$

が求まり，上式は，式 (38a) で W の偏微分係数の二次項を無視したものと等しい。以上の観点から，微小ひずみを前提とし，また変位場において 1 に対して変位の微係数の 2 次項を無視する範囲で有限変位理論を考えると，式 (38) において W の偏微分係数の二次項は無視すべきものと考える。ちなみに ε_{xz}, ε_{yz} を (s, n, z) 座標へ座標変換すれば

$$\left.\begin{aligned}\varepsilon_{sz}&=\frac{\partial x}{\partial s}\cdot\varepsilon_{xz}+\frac{\partial y}{\partial s}\cdot\varepsilon_{yz}\\ \varepsilon_{nz}&=\frac{\partial x}{\partial n}\cdot\varepsilon_{xz}+\frac{\partial y}{\partial n}\cdot\varepsilon_{yz}\end{aligned}\right\}\quad\cdots\cdots(50)$$

となる。式 (5b, c) の右辺第一項を式 (50) に代入すれば，そのせん断ひずみは，微小変位場における St. Venant のねじりによるせん断ひずみと等価となり薄肉開断面材の仮定 (ii), (iii) に従うものであることがわかる。しかし，式 (5b, c) の非線形項を式 (50) に代入すれば，そのせん断ひずみは零とならず仮定 (ii), (iii) を満たさない。すなわちキルヒホッフ・ラブおよびオイラーベルヌイの仮定を満足しない変位場となっている。

最後に問題とする点は，著者は座屈前の変形を無視している点である。式 (4), (5) は直交直線座標を基準座標に定め，直線棒部材を対象にしたものと読みとれる。著者は式 (5) を座屈変形に伴うひずみと定義しているが，このことは厳密には座屈直前において部材はねじれ変形もしていない直線材でなければならないことになる。すなわち著者は，座屈前の変形について触れていないために，無載荷状態で直線材を考え，座屈に至る載荷の過程において部材は変形しないという仮定のもとに解析していることになる。従来，薄肉開断面材はねじれ抵抗は小さいものといわれており，曲げ座屈荷重に対し，ねじりモーメントの影響が顕著になるほどの大きなねじりモーメントをかける場合，部材の座屈前の回転変位 $\theta^{(0)}$ はかなり大きくなると予想される。円断面のように曲げ剛性に方向性の無いものはともかくとし，強軸と弱軸の曲げ剛性に差のある部材について座屈前における断面の回転変位を無視して解析することは，実状に合わなくなる可能性がある。

著者は理論の特別の場合として，Greenhill の式が得られることを示している。討議者も Greenhill の式に興

味を抱くものである。現在これを否定するものではないが，妥当なものとして肯定するにも至っていない。いずれにしても，エネルギー原理を用いて Greenhill の式を論ずるには変位場の構成にもっと注意を払うことが必要であると考える。

参考文献

10) 西野文雄・倉方慶夫・長谷川彰夫・奥村敏恵：軸力と曲げおよびねじりを受ける薄肉断面部材，土木学会論文報告集，No. 225, pp. 1～15, 1974-5.
11) Kollbrunner, C. F. und N. Hajdin: Dünnwandige stäbe stäbe, Band 1, Springer-Verlag, 1972.
12) Nishino, F., C. Kasemset and S. L. Lee: Variational formulation of stability problems for thin-walled members, Ingenier-Archiev, Band 43, Heft 1, pp. 58～68, 1973.
13) Roik, K., J. Carl und J. Lindner: Biegetorsionsprobleme gerader dünnwandiger stäbe, Verlag von Wilhelm Ernst und Sohn, 1972.
14) 鷲津久一郎：弾性学の変分原理概論，コンピューターによる構造工学講座 II-3-A，日本鋼構造協会編，培風館，1972.

回答

築地恒夫（長崎大学）

討議の論拠が文献 1) によっているものと考えられるので，同論文と関連して回答したい。

（1） 弾性安定問題で分岐座屈として取り扱われる問題は，分岐点近くに少なくとも二つの平衡状態が存在する問題である。そして，この平衡状態の安定・不安定を論ずるには，分岐点よりかなり変形の進んだ状態でのポテンシャルエネルギーを取り扱わねばならない。しかし，たんに分岐点の荷重（座屈荷重）を定めるためには，分岐点近くのポテンシャルエネルギーを考えればよく，それには分岐点の変位（座屈変位）は小さいと仮定することができる[2)]。座屈荷重を求める微分方程式が，座屈変位の線形式で表わされるのもこのためで，その結果，固有値問題の解として座屈荷重が求まる。

以上のように，座屈変位は小さいと仮定すると，座屈変形を表わす式として，本論文の変位式 (4) を採用することができる。しかも，式 (4) を用いて仮想仕事の原理より変分原理にしたがって，既存の座屈方程式が導かれる[3),4)]ことを考えると，式 (4) は十分良い近似式であるといえる。

さらに，文献 1) で，安定限界を示す平衡方程式（文献 1) の式 (7, 4)）が，座屈変位に関して $\cos\varphi\fallingdotseq 1$, $\sin\varphi\fallingdotseq\varphi$ と線形化して導かれているのも，上記理由によるものと推察される。すなわち，分岐点の変形を座屈変位の一次式で表わしていることであり，座屈前変形が無視できる場合には，著者の式 (4) と一致する。ご指摘のとおり，線形化された変位式を用いると，γ_{sz} の変位に関する二次項が，薄肉板厚中心で 0 とならない（これは座屈前変形を考慮しても同じ）が，これは座屈変位に関する高次の影響項であり，現在のはり座屈理論では無視しているものと考える。

（2） ひずみ成分と変位の関係式は，

$$\varepsilon_z=\frac{\partial W}{\partial z}+\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2+\left(\frac{\partial W}{\partial z}\right)^2\right]$$

$$=e_z+\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2\right]+\frac{1}{2}e_z^2 \quad\cdots(\mathrm{a})$$

$$\varepsilon_{xz}=\frac{\partial U}{\partial z}+\frac{\partial W}{\partial x}+\frac{\partial U}{\partial z}\frac{\partial U}{\partial x}+\frac{\partial V}{\partial z}\frac{\partial V}{\partial x}+\frac{\partial W}{\partial z}\frac{\partial W}{\partial x}$$

$$=e_{xz}+e_x\frac{\partial U}{\partial z}+\frac{\partial V}{\partial z}\frac{\partial V}{\partial x}+\frac{\partial W}{\partial x}e_z \quad\cdots\cdots(\mathrm{b})$$

$$e_{yz}=\frac{\partial V}{\partial z}+\frac{\partial W}{\partial y}+\frac{\partial U}{\partial z}\frac{\partial U}{\partial y}+\frac{\partial V}{\partial z}\frac{\partial V}{\partial y}+\frac{\partial W}{\partial z}\frac{\partial W}{\partial y}$$

$$=e_{yz}+\frac{\partial U}{\partial z}\frac{\partial U}{\partial y}+\frac{\partial V}{\partial z}e_y+\frac{\partial W}{\partial y}e_z \quad\cdots\cdots(\mathrm{c})$$

と書ける。

本論文の方法に従うと，ひずみ成分と変位の関係式 (a), (b), (c) のすべての項を用いても，容易に理論展開を行うことができる。しかし，次の理由によって，式 (a) 中の $\left(\frac{\partial W}{\partial z}\right)^2$ 項のみを無視した。

すなわち，座屈変形は小さく，さらにひずみも小さいと仮定すると，式 (a) の ε_z と e_z はほぼ同じ大きさであり，したがって e_z^2 は e_z と比較すると，高次の微小量である。

（3） 座屈前変形の影響については，今後検討したい。

有意義なご討議に感謝いたします。

文献

1) 西野文雄・倉方慶夫・長谷川彰夫・奥村敏恵：軸力と曲げおよびねじりを受ける薄肉断面部材，土木学会論文報告集，No. 225, 1974.
2) 長柱委員会編：弾性安定要覧，コロナ社，1974.
3) 川井忠彦：座屈問題解析，培風館，昭 49.
4) 築地恒夫：薄肉開き断面はりの座屈に関する基礎方程式，第 22 回応用力学連合講演会講演集，昭 47.