

ガラスビーズにおける粒状体の三軸圧縮特性

DEFORMATION OF GRANULAR MATERIAL IN TRIAxIAL COMPRESSION

諸 戸 靖 史*・遠 藤 秋 主**・河 上 房 義***
By Nobuchika MOROTO, Akisyu ENDŌ and Fusayoshi KAWAKAMI

1. はじめに

砂のような粒状体のせん断変形を基本的に正しい方向で認識し、その塑性変形理論を構成しようとした嚆矢となるべき一人は Poorooshasb^{9),10)} であるように思われる。従来、土の塑性論的研究では塑性ポテンシャルと降伏条件が一致するものとして数理的展開がなされてきたが、彼はその両者が異なることを実験的に感じ述べている。このことは、以後の粒状体のせん断変形の研究に新しい見とおしを与えているように思われる。

Poorooshasb の理論において、塑性ポテンシャルを定める根本となっているところは、砂の三軸圧縮試験における体積ひずみ増分とせん断ひずみ増分との比が応力経路に依存しないという実験事実である。しかし、最上⁹⁾も龍岡の結果を引用して述べているように、このことは応力・ひずみ曲線のピークの付近においては正しい。しかし、ピーク付近から遠いところ、すなわち等方圧力状態に近いところでは、ひずみ増分比は応力経路に依存するのである。体積ひずみには、いわゆる consolidation と shear によるものがあるとされている。砂のような粒状体の変形では、consolidation と shear を異質のものと考えれば、Poorooshasb の実験事実も上記の最上の見解も説明がつく。つまり、ピーク付近から遠いところでは、consolidation と shear の体積変形成分が同居し互いに他を無視できないが、ピーク付近では shear が卓越し dilatancy だけで体積ひずみを評価できるであろう。したがって、はじめから consolidation の影響を全体の体積変形量から差引いてやれば、せん断変形だけに着目して、その変形を統一的に表現できるのではないかと思われる。筆者らは⁹⁾、砂の三軸試験の場合そのようなことが可能であることを示してきた。

今回の報告では、密なガラスビーズの三軸圧縮試験を行って、粒状体のせん断変形の原因ともいえる基本的な変形性状を把握することに努める。あわせて、上記の考え方で粒状体のせん断変形を整理しようとする一つの試みを示す。本文ではガラスビーズという砂に比べて単純な材料の挙動を、しかもかなり限定された応力経路についてとりあつかっている。しかし、簡単な場合について、粒状体のせん断変形の基本的な変形像を理解しておくことは、今後砂の変形の表現を確立していくうえで非常に大切なことのように思える。

2. 実験のあらまし

本実験に用いたガラスビーズは東芝ガラス工業製のものであり、粒度特性はふるい目通過量が 0.56 mm : 0%, 0.84 mm : 17%, 1.2 mm : 100% であった。試験はすべて排水三軸圧縮であった。せん断の応力経路はすべて等方圧縮状態から出発させた。ガラスビーズの供試体は高さ 12 cm × 直径 5 cm の円筒形を標準としており、供試体作製時の間隙比（初期間隙比、 e_i ）はすべて $e_i = 0.58 \sim 0.60$ の範囲にあった。試料に用いたガラスビーズの最大間隙比 e_{max} は 0.704、最小間隙比は 0.563 であった。ここで、 e_{min} は、容積 1000 cc 円筒形容器に試料をつめ細い棒でいねいにつつき、最後に上部にもりをのせ、容器の外側から振動外力を加えて求めた。一方、 e_{max} の方は、1000 cc 用メスシリンダーに乾燥したガラスビーズを 500 g つめ、容器を逆さにした後すばやく元の状態に戻すいわゆるティルティング法にて求めた。本実験に用いたガラスビーズ供試体は、水で飽和したモールドの中に試料を注入し、針金でいねいにつつきながらモールドの側壁を連打して作製した。モールド内に試料をただ静かに注入しただけの場合の初期間隙比はほぼ 0.63 であり、これよりゆるい供試体を作ることとは不可能であった。また、たとえばほとんど同じよう

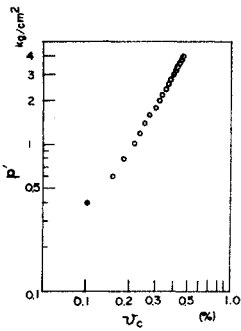
* 正会員 工修 東北大学助手 工学部土木工学科

** 工修 川崎重工業(株)

*** 正会員 工博 東北大学教授 工学部土木工学科

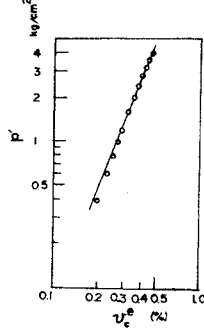
な初期間隙比をもっている供試体においても、その後の変形状が異なる場合も少なくなかった。そして、等方圧縮段階で圧縮量が大きい供試体は、その後のせん断の段階でも変形が大きくでる傾向にあった。したがって、初期間隙比を数種のグループに分け、そのおのおのについて変形の様子を細かく調べていくことは望まれることではあるが、本実験では無理であった。そのようなことから、粒子の集まり方が比較的均質で安定した材質が得られる密な供試体 ($e_i=0.58\sim 0.60$) で、しかも等方圧縮変形量が図一1 に示しているものほとんど同じような場合につき、その後のせん断変形を調べた。したがって本文の議論は密な粒状体のせん断特性について適用されるべきであり、砂や礫のような自然の粒状体のせん断変形に関する原形を把握するのに有用であろう。

(a)



図一1 等方圧縮曲線 (平均主応力 p' と処女圧縮ひずみ v_c との関係および平均主応力 p' と弾性的な体積ひずみ v_c^e との関係)

(b)



載荷操作はすべて手動で行い、クリープによる変形が終了してから次の載荷段階に移るきわめてゆるやかなものであった。

たて方向ひずみ ϵ_a は最少目盛 1/1 000 mm のダイヤルゲージ、体積ひずみ v は最少目盛 1/100 cc のビュレットを用いて測定した。よこ方向ひずみ ϵ_r は v と ϵ_a とを用いて計算した。たて方向応力 σ_a' はピストンとプッシング間の摩擦を除いて求めた。

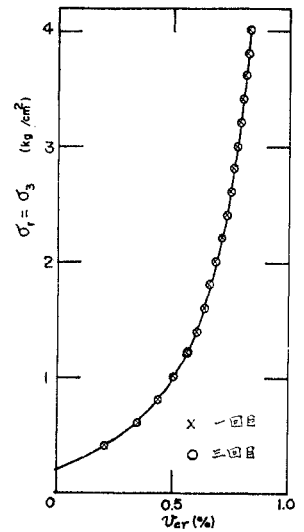
本実験において最も注意すべきことは、ゴム膜が側圧 σ_r によってガラスビーズの凹みにわん入することであった。この体積ひずみの読みに対する膜のわん入による誤差の補正は $3\epsilon_a=v$ とする方法によって行った⁵⁾。各側圧 σ_r のレベルに対する補正体積ひずみ量 v_{cr} を図一2 に示した。おどろくことに、 v_{cr} の値は等方圧縮において観測される全圧縮量の 70% 近くになっていた。以後用いられる体積ひずみはすべて膜のわん入に対する補正が行われている。ただ、 $3\epsilon_a=v$ とする方法で膜のわん入に対する補正を行う場合に問題となるのはガラスビーズ供試体の異方性の程度である。図一2 において、×印で示される点は、ガラスビーズ供試体に等方圧力を繰返し

て載荷、除荷した場合の第1回目の載荷曲線から得られた結果であり、○印で示される曲線は第3回目の載荷曲線から作られたものである。重力場で堆積する場合、砂は異方性を示し $3\epsilon_a < v$ となるようである。Karst²⁾ は、砂が等方圧力による繰返し載荷を受けるとしだいに等方的になると述べており、Parkin³⁾ は等方圧力が增大するほど砂の異方性が減少することを示している。このようなことを考慮すると、

ガラスビーズの初期の異方性が無視できない場合には、 $3\epsilon_a=v$ (等方性) という仮定を用いて算出される膜のわん入補正量には誤差が混入し、等方圧力レベルの上昇、繰返し載荷回数が増大とともにその誤差は減少するものと思われる。しかるに、図一2 に示されているように、第1回目の載荷時と第3回目の載荷時の挙動をいずれも等方性とみなして計算される膜のわん入補正量 v_{cr} はほとんど一致するもののできる。そこで本論文では、対象となる側圧のレベルにおいて、ガラスビーズは等方圧力のもとでほとんど等方性を示すものと見なすことにする。また、以後用いるゴム膜のわん入に対する補正量は第3回目の等方圧縮時における値を用いることにする。

本論文で用いられている応力とひずみの記号は次のようである。

- σ : 応力
- ϵ : ひずみ
- $d\epsilon$: ひずみ増分
- $v = \epsilon_a + 2\epsilon_r$: 体積ひずみ
- $p' = \frac{1}{3}(\sigma_a' + 2\sigma_r')$: 平均主応力
- $r = \epsilon_a - \epsilon_r$: せん断ひずみ
- $q = \sigma_a' - \sigma_r'$: 偏差応力
- ϵ_a : たて方向ひずみ
- σ_a' : たて方向応力 (有効)
- σ_a : 軸圧
- ϵ_r : よこ方向ひずみ
- σ_r' : よこ方向応力 (有効)
- σ_r : 側圧
- $\tau = q/p'$: 応力比



図一2 膜のわん入に対する体積ひずみの補正量

$$\epsilon = \frac{2}{3} \gamma$$

v_a : ダイレイタンスーによる体積ひずみ

ここで、応力とひずみの符号は圧縮を正としている。このような応力とひずみの表わし方はケンブリッジ大学の研究者達により用いられてきたもので、わが国においてはおもに京都大学の研究者達により粘土や砂の三軸試験結果を表わすのに採用されてきた。

三軸供試体の応力状態は上記のパラメータを用いると、

$$\sigma = p' \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{q}{3} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

と書け、その変化は

$$d\sigma = dp' \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{dq}{3} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

となる。ひずみ増分は

$$d\epsilon = \frac{dv}{3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{d\gamma}{3} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

である。

3. 実験結果

(1) 全変形

平均主応力が一定であると変形は偏差応力の変化に関連して起こっている。図-3, 4 に平均主応力一定試験における応力比とひずみの関係を示した。おおまかにみて本実験のガラスビーズのせん断変形は応力比 η だけで表わしたとしても支障がないように思われる。このことは Frydman ら¹⁾ のガラスビーズや砂における体積ひずみと応力比関係においてもそうになっており、また、村山・八木²⁾ の密な砂のデータでも同様である。次に、平均主応力 p' と偏差応力 q の両方が単調に変化する試験をする。側圧 σ_r を一定にしたまま軸圧 σ_a を増大させる σ_r 一定試験と σ_a を一定にしたまま σ_r を減少させていく σ_a 一定試験における η - γ 関係を示したのが図-

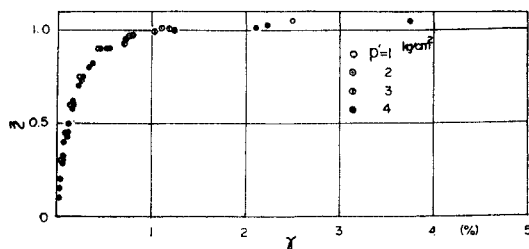


図-3 応力比 η とせん断ひずみ γ との関係 (平均主応力一定試験)

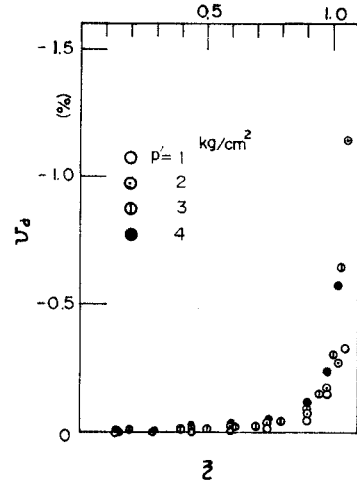


図-4 応力比 η と体積ひずみ v_a との関係 (平均主応力一定試験)

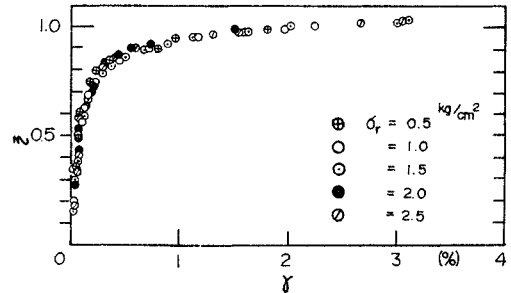


図-5 応力比 η とせん断ひずみ γ との関係 (側圧一定試験)

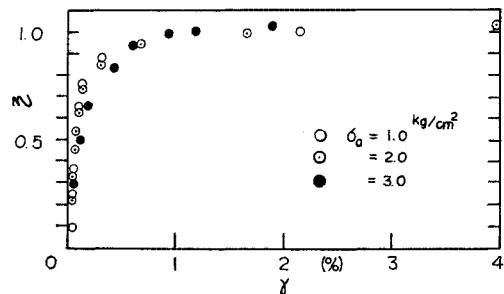


図-6 応力比 η とせん断ひずみ γ との関係 (軸圧一定試験)

5 および図-6 である。図-3, 5, 6 を比較することにより応力経路が変化しても η - γ 関係はほとんど同じものができることが知られる。破壊点は各試験における最後のプロット点付近である。

図-7 に平均主応力 p' 一定試験における体積ひずみ-せん断ひずみ (v_a - γ) 関係を示している。図-3, 4, 7 より、全般的にみると η - γ ~ v_a はほとんど同程度に密接に関連しているようである。ただ、変形初期においては変形に対する平均主応力の影響が無視できないように

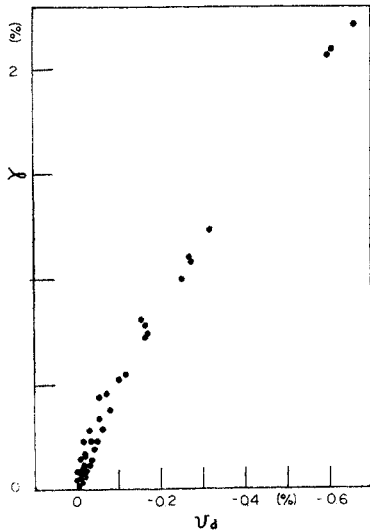


図-7 せん断ひずみ γ と体積ひずみ v_d との関係 (平均主応力一定試験)

思える。ここで、 p' 一定試験による体積ひずみ v_d をダイレイタンスによるものとしている。 σ_a 一定、 σ_r 一定試験ではせん断中に p' の値も変化するから当然体積変形の中にダイレイタンス成分と平均主応力による成分とを含むことになる。しかしこの両者を正確に区別して求めるてだてはないから次善の策として次のように考える。つまり、せん断中の体積ひずみ v を等方圧縮時の体積ひずみ-平均主応力 v_c-p' 関係および p' 一定試験における体積ひずみ-せん断ひずみ v_d-r 関係を用い

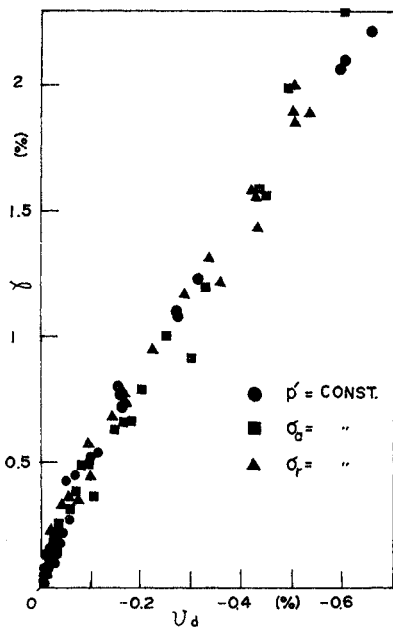
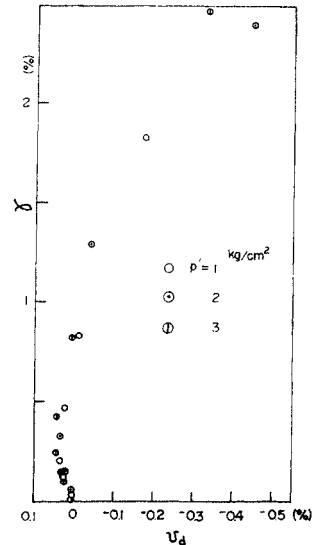


図-8 せん断ひずみ γ と体積ひずみ v_d との関係 (側圧一定, 軸圧一定試験)

$$v = v_c(p') + v_d(r) \dots\dots\dots (1)$$

と考えるのである。 σ_r 一定試験においてはせん断中に p' の値が増大する。したがって、この p' の変化に対応する等方圧縮曲線上の体積ひずみの変化 v_c を求め、観測された体積ひずみから差し引いてみると v_d が求まることになる。一方、 σ_a 一定試験においてはせん断中に p' の値は低下する。したがって、 p' の値の低下に伴うリバウンド量 v_c^e を観測された体積ひずみに加算してみると v_d が求まることになる。等方圧縮曲線として図-1を用い、 σ_a 一定および σ_r 一定試験において上述のようにして求めた v_d の値を r に対して書いたのが図-8である。応力経路の異なった各試験において、式(1)の関係式から求めた v_d-r 関係が p' 一定試験における v_d-r 関係と良い一致を見ていることがわかる。つまり、等方圧縮から単



調に増大するせん断変形を受ける場合、本実験で用いたガラスビーズのダイレイタンス特性を式(1)で表わしても良いように思われるのである。また、図-7において v_d は r に対して原点に接するような曲線形を示すが、変形がかなり進んでくると v_d は r に対して直線的に増加するようになっている。村山・八木⁷⁾による密な砂の三軸圧縮試験結果

図-9 せん断ひずみ γ と体積ひずみ v_d との関係 (平均主応力一定試験, 伸張試験) 参考のため平均主応力 p' 一定の伸張試験においてえられた v_d-r 関係を示すと図-9のようである。伸張試験におけるダイレイタンス特性には圧縮試験に比べせん断前期の圧縮部分がかかなり見られ、その後の膨張部分においても r に対して v_d が直線的に変化するようにはなっていないようである。圧縮と伸張ではダイレイタンス特性に差があるが、 v_d が r で整理できることには変わりがないように思える。

(2) 塑性変形および弾性的変形

Frydman⁸⁾は密なガラスビーズについて三軸圧縮試験を行い次のように述べている。あるせん断応力レベルまではダイレイタンスがみられない。ダイレイタンスがではじめる点を yield point とよび、応力がこの点

以前にあれば偏差応力とたて方向ひずみとの関係は直線である。この点において発揮される摩擦角は真の粒子間摩擦角と思われる、それ以前における粒状体内の粒子間すべりは重要でない。そして、通常的设计で採用される応力範囲は上記 yield point より手前にあると考えられるので、この範囲の応力・ひずみ曲線に弾性理論を適用させることができるのではない。

ここで、せん断の前期の微小変形時のガラスビーズの挙動につき調べてみよう。考慮する変形領域をどのようにすればよいか。図-3 をみても $r-\eta$ 関係には最初から直線性はみられないようである。そこで、 p' 一定試験において $\eta-r$ 曲線の曲率半径が最少となる点に注目する。この点を過ぎると変形は急増するようになる。図-3 においてこの点はほぼ $\eta=0.75$ 付近にあることが目で観測された。ちなみに、 $\eta-r$ 曲線を双曲線

$$\frac{r}{\eta} = \frac{r}{\eta_f} + a \quad a, \eta_f : \text{定数} \dots\dots\dots (2)$$

で整理してみると、その直線性はよいものであった。この曲線の曲率半径 $1/\xi$ は

$$\frac{1}{\xi} = \frac{dr^2/d\eta^2}{\{1+(dr/d\eta)^2\}^{3/2}}$$

であり、 $1/\xi$ が最少となる場合、すなわち $d(1/\xi)/dr=0$ のときの応力比 η_m は

$$\eta_m = \eta_f (1-a^{1/2})$$

と計算される。図-10 を最少自乗法により整理し、 η_m の値を求めてみると 0.73 であり目測の結果とほとんど一致していた。Frydman らのいうダイレイタンスーがではじめる点を図-4 において定めようとしてもなかなか正確には選点できないし、後で述べるように実際には最初からダイレイタンスーが観測される。Frydman らは彼らの yield point において発揮されている内部摩擦角 ϕ_i を Rowe によって求められたガラスビーズの粒子間摩擦角 $\phi_\mu=17^\circ$ に相当するものであると考えている。他方、松岡³⁾はガラスビーズの粒子間摩擦角 ϕ_μ は $6^\circ\sim 8^\circ$ であると述べているからガラスビーズの摩擦係数を直接測定して ϕ_i を定めることも容易ではない。した

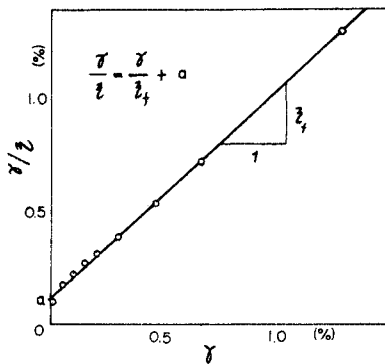


図-10 双曲線表示 ($\eta-r$ 関係)

がって本文では、 $\eta-r$ 関係の最も曲率の大きい点に注目し、その点 ($\eta=\eta_m$) 以後では急に変形が進むことから、 $0 \leq \eta \leq \eta_m$ の範囲で繰返し载荷を行い、変形が小さい領域におけるガラスビーズの弾性的な変形と塑性変形を求める。 $\eta_m=0.75$ とし、応力比がこの値をこえると弾性的変形は無視できるものと考えた。

上述の応力比の範囲で繰返し载荷を行った場合、2回目と3回目における応力・ひずみ曲線はほとんど一致するものであった。それで、3回目の载荷曲線をもって弾性的なひずみ ϵ^e とした。そして、処女载荷時の全ひずみ ϵ から ϵ^e を差引いたものを塑性ひずみ ϵ^p とした。以後、ひずみ r, r^e, r^p および v_d, v_d^e, v_d^p はこのように用いる。

図-11 に p' 一定試験における $r^p-\eta, r^e-\eta$ 関係を示す。塑性せん断ひずみ r^p の方は応力比 η だけで整理できそうであるが、弾性的せん断ひずみ r^e の方は、 η だけではなく平均主応力 p' も関与し、 p' が大きいものほ

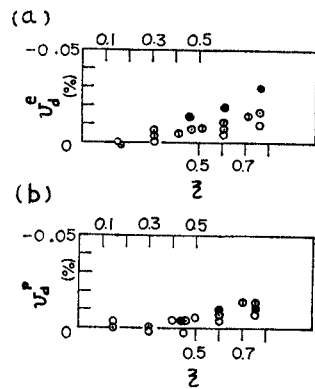


図-11 応力比 η と弾性的せん断ひずみ r^e および塑性せん断ひずみ r^p との関係 (平均主応力 p' 一定試験)

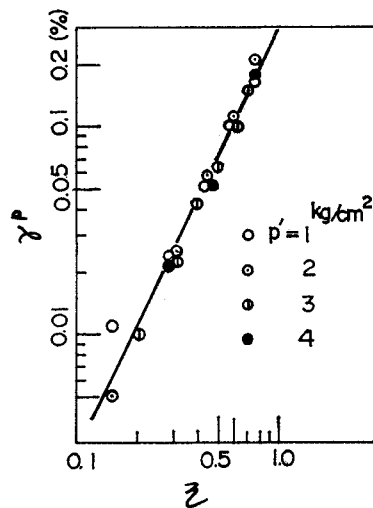


図-12 $\log \eta - \log r^p$ 関係

ど同一の η に対して r^e が增大する傾向にある。動的なせん断弾性係数 G はおもに拘束圧の 1/2 乗に比例するとみなされる場合が多いが、このことが

$$r^e \propto p^{1/2} \cdot \eta \quad (\because G \propto p^{1/2} \frac{q}{r^e}) \quad \dots\dots(3)$$

と表わされることを考えると、 r^e に p' が関与してくる事情も了承される。 η - r^p 関係を対数グラフに移し変えたのが 図-12 である。この図から

$$r^p \propto \eta^2 \quad \dots\dots(4)$$

と整理できそうである。一方、 r^e の方は 図-11 (a) から

$$r^e \propto x(p') \cdot \eta \quad \dots\dots(5)$$

と書けるようであるが、 $x(p')$ をさらに詳しく調べることは本実験では不可能である。しかし、式 (5) が式 (3) とあまり変わらないことだけはいえる。次に、 図-13 に v_d^p - η 、 v_d^e - η 関係が示されている。塑性的な体積ひずみ v_d^p は η により一義的に表わせるようであるが弾性的な体積ひずみ v_d^e には η ばかりでなくて p' も関係しているようである。しかし、 図-14 (a) に示すように v_d^e を r^e に対して書いてみると一義的に処理できることが知られる。 v_d^e - r^e 関係を対数紙上で調べてみると、 図-14 (b) からわかるように

$$v_d^e \propto (r^e)^2 \quad \dots\dots(6)$$

で処理できるようである。一方 v_d^p の方は 図-14 (a) から

$$v_d^p \propto r^p \quad \dots\dots(7)$$

と書けるようである。以上調べてきたせん断ひずみを同一の応力比 η についてその出方を見てみると $r^p > r^e$ となっており、微小変形時についても塑性せん断ひずみの方が大きくなっていることがわかる。体積ひずみについて比較すると、同一のせん断ひずみ $r^e=r^p$ に対して $v_d^e > v_d^p$ となっていることが理解できる。せん断ひずみと異なって体積ひずみの方は塑性体積ひずみ v_d^p が弾性的なひずみ v_d^e より小さくなっていることが理解できる。

次に σ_a 一定 ($\sigma_a=1.0, 2.0, 3.0 \text{ kg/cm}^2$ 一定), σ_r 一定 ($\sigma_r=0.5, 1.0, 1.5, 2.0, 2.5 \text{ kg/cm}^2$ 一定) 試験における η - r^p 、 v_d^p - r^p 関係について調べてみたのが 図-15 である。それらの図中の実線は p' 一定試験における平均的な値を示しており、応力経路にかかわらずほとんど変形が

$$\eta = G(r^p) \quad \dots\dots(8)$$

$$v_d^p = D(r^p) \quad \dots\dots(9)$$

と整理できることがわかる。

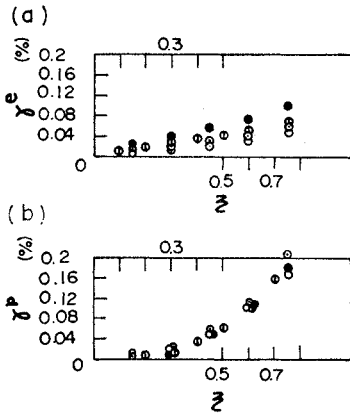


図-13 応力比 η と弾性的体積ひずみ v_d^e および塑性せん断ひずみ γ^p との関係 (平均主: 応力一定試験)

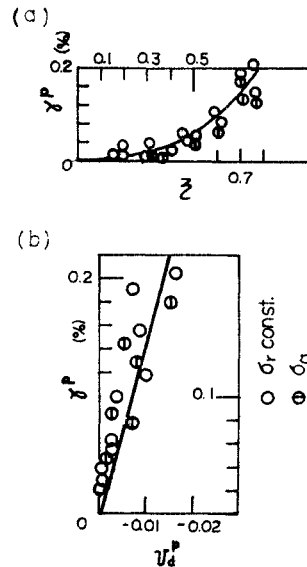


図-15 応力比 η と塑性せん断ひずみ γ^p および塑性せん断ひずみ γ^p と塑性体積ひずみ v_d^p との関係 (側圧一定, 軸圧一定試験)

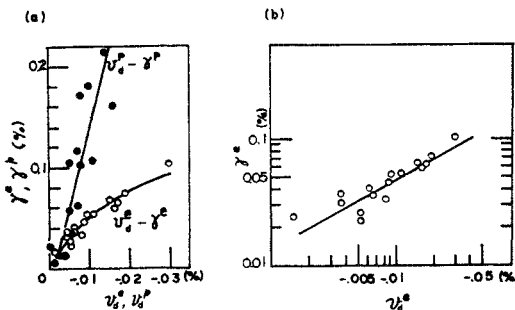


図-14 γ^e - v_d^e 、 γ^p - v_d^p 関係および $\log r^e$ - $\log v_d^e$ 関係

最後に、 r^p と η との関係は 図-16 のようである。 r^p と η には良好な一意的関係があることがわかる。 r^p - η 関係を双曲線表示してみたのが 図-17 である。原点付近を除いて良好な直線性がある。原点付近では、 $r^p \propto \eta^2$ で表わされることは前に述べた。したがって、せん断変形の初期変形係数は

$$\frac{1}{\left(\frac{d\gamma}{d\eta}\right)} = 1 / \left\{ \left(\frac{d\gamma^e}{d\eta}\right)_{\eta=0} + \left(\frac{d\gamma^p}{d\eta}\right)_{\eta=0} \right\}$$

$$= 1/x(p')$$

となり、弾性的な変形係数を示していることがわかる。また双曲線表示式から求められる初期変形係数 $1/a$ はみかけの弾性変形係数を与えるものであることも理解できるのである。

以上、ガラスビーズの三軸圧縮試験において粒状体のせん断変形の基本的な性格を理解してきた。このような実験結果をもとにして、粒状体の変形の特質について考えを進めてみよう。

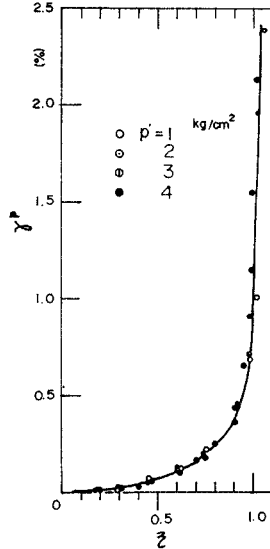


図-16 応力比 η と塑性せん断ひずみ γ^p との関係

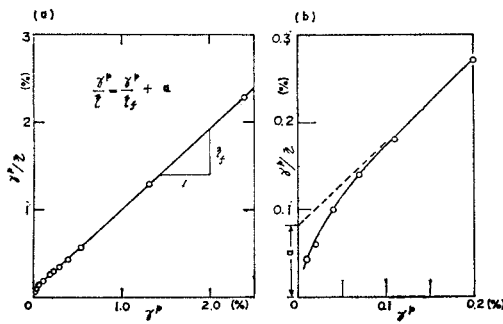


図-17 双曲線表示 (η - γ^p 関係)

4. 粒状体のせん断変形の特質

粒状体の変形の特徴は、今までよく知られており、また本実験からもわかるように、せん断変形が応力比によって第一義的に定まること、およびダイレイタンスが生じその体積変化量はせん断ひずみに直接関係していることであろう。金属の塑性変形とは異なるこのような粒状体の変形の特徴を考慮すると、粒状体の場合のように事情が異なってくるかを、粒状体のせん断変形の記述を試みる前に改めて認識しておかなければならないと考える。

(1) せん断の進み具合を示す量

筆者らは⁶⁾、砂の三軸試験結果を検討し、外力のなす塑性仕事経路に依存し決して状態量とはできないこと

を述べ、新たな状態量を定義した。ここで述べる事からはその前論文の議論の原形を与えるものである。

ガラスビーズ供試体になされる塑性仕事の増し高は

$$dW_s^p = p' dv_d^p + \frac{2}{3} q d\gamma^p \dots\dots\dots(10)$$

W_s^p : 全塑性仕事から等方圧力による塑性仕事を差引いた塑性仕事

dv_d^p : せん断時の体積ひずみで等方圧力による体積ひずみを含まない塑性体積ひずみ

γ^p : 塑性せん断ひずみ

p' : 平均主応力

q : 偏差応力

と書かれる。いままでに調べてきたように本実験の場合各応力経路にかかわらずほとんど式(8)、(9)で整理できることから、式(10)は

$$dW_s^p = p' E(\gamma^p) d\gamma^p \dots\dots\dots(11)$$

ここに、

$$E(\gamma^p) = D'(\gamma^p) + \frac{2}{3} G(\gamma^p)$$

$$D'(\gamma^p) = \frac{d}{d\gamma^p} D(\gamma^p)$$

となる。この式の積分は

$$W_s^p = \int p' E(\gamma^p) d\gamma^p \dots\dots\dots(12)$$

である。

同じような初期間隙比に調整された複数の供試体を等方である圧力まで圧縮する。これらの供試体はみな等方圧縮という同じ状態にある。一見、等方圧力レベルが異なれば等方圧力による体積変形が異なって各供試体は同じ状態にはないのではないかと疑問が生ずるが、式(12)の W_s^p は全塑性仕事から等方圧力により生ずる体積変形の寄与分を除外しているから、圧力レベルによらず等方圧縮状態にあるすべての供試体はせん断に関して同じ状態にあると考えられるのである。この等方圧縮状態からそれぞれの供試体を単調に増大する異なった応力経路でせん断すると、せん断を開始した時から徐々に塑性変形が増大し、最終的には破壊という状態に至るのである。その間に、供試体になされる塑性仕事 W_s^p は応力経路によって変化する。このことを少し詳しく述べてみよう。式(12)において塑性仕事 W_s^p は平均主応力 p' と塑性せん断ひずみ γ^p とで書かれている。 γ^p の値は式(8)により (p', q) の値だけで定まってくる。つまり、 W_s^p は (p', q) の代わりに媒介変数 γ^p を用いて (p', γ^p) により表わされているのである。ここでまず、 p' を 1.0 kg/cm^2 と 3.0 kg/cm^2 に保ったまません断する場合を考える。この2つの供試体が等しい γ^p を生ずるまでになされる W_s^p は、後者の場合が前者の3倍となっている。これは式(12)より容易にわかる。

次に側圧 σ_r を一定に保ったまま軸圧 σ_a を増大させる試験、 σ_a を一定に保ったまま σ_r を減少させる試験と p' 一定試験とを比べてみる。 $\sigma_a=1.0 \text{ kg/cm}^2$ 一定、 $\sigma_r=1.0 \text{ kg/cm}^2$ 一定試験の場合破壊に近いところまでなされた W_s^p の値は、 $p'=1.0 \text{ kg/cm}^2$ 一定試験の場合のそれぞれほぼ 6 割および 1.5 倍となっている。破壊以前においても、各応力経路において同じ r^p を生じさせるに要した塑性仕事量 W_s^p を比べてみることにより、粒状体のせん断変形における塑性仕事 W_s^p が応力経路に依存するようすが理解されるのである。ではなぜこのようになるのであろうか。その理由はとりもなおさず、粒状体のせん断変形が偏差応力ではなくて応力比によって支配され、またダイレイタンスを呈するからである。このことは、式 (10) においてダイレイタンスによる体積ひずみ v_d^p をゼロとおき、せん断ひずみ r^p を偏差応力 q だけの関数としてみれば W_s^p が応力経路に依存することなく定まってくることからわかる。もちろん、ダイレイタンスが無い場合であっても、 r^p が応力比 q/p' によって定まる場合には W_s^p が応力経路に依存するようになっていることも了解されるのである。

以上のように、粒状体のせん断変形の特異性によって外力によってなされる塑性仕事が状態量とならないことを知った。逆にいえば、塑性仕事が経路に依存することが粒状体のせん断変形の特質であるといえよう。そして、式 (12) において、 W_s が経路に依存するのは、式 (12) の右辺に平均主応力 p' がかかっているためである。このことを知って、式 (10) の両辺に $1/p'$ をかけ次のような量を考えよう、

$$dS_s^* = \frac{dW_s^p}{p'} = E(r^p) dr^p \dots\dots\dots(13)$$

この式の右辺の積分は経路に依存することなく r^p の値だけによって定まることがわかる。つまり、複数の同じような初期間隙比をもつガラスビーズ供試体が等方圧力で圧縮された後単純に増大する応力経路でせん断される。この場合、式 (13) で定義された関数

$$S_s^* = \int \frac{dW_s^p}{p'} = \int E(r^p) dr^p \dots\dots\dots(14)$$

は、応力経路によらず、せん断ひずみ r^p だけで定まる状態量となっているもののできるのである。ここで用いたガラスビーズのような自然の砂よりも均質とみなせる材料において、少なくともここで用いた拘束圧の下ではせん断ひずみ r^p が応力比 q/p' だけで定まるものと考えてよいようである。しかし、自然の砂の場合、 r^p に対して平均主応力 p' も関係するから式 (13) を

$$dS_s^* = \frac{dW_s^p}{p'} = E(p', r^p) dr^p \dots\dots\dots(15)$$

と書かなければならない。筆者らは、砂の三軸試験結果を用いて式 (15) の積分がほとんど r^p だけの値により

定まることを見いだしている。

熱力学においては熱量 dQ は経路に依存することが知られ、

$$S = \int \frac{dQ}{T} \quad T: \text{温度}$$

で定義される関数が状態量となることが経験的に認められている。そして、この状態量 S はエントロピーとよばれ熱力学では重要な物理量となっているのである。筆者らは粒状体に塑性変形が生じている場合、外力によってなされる塑性仕事 W_d^p が経路に依存することを明確に述べ、式 (14) で定義される状態関数を導入できることを見いだしてきた。熱力学の例にならえば、このようにして状態量 S_s^* を求め、用いていくことは自然ないき方であると思われる。では、粒状体のせん断変形を取扱っていく上で状態量 S_s^* を導入する意味はどのようなものであろうか。

式 (14) において S_s^* はせん断ひずみ r^p だけで定まる。このことは、せん断の進み具合を表わしていくためにはせん断ひずみ r^p を用いる必要があることを示しているのである。同じような初期間隙比をもつ供試体が等方圧力で圧縮されたのち、それぞれ異なった応力経路でせん断される場合、それぞれの供試体が同じ S_s^* の値をもつならば、つまり同じせん断ひずみ r^p の値を示すならば、それらの供試体は同じ程度のせん断作用を受けているといえる。

このような異なったせん断応力経路で、それぞれの供試体に同一のせん断ひずみ r^p を生じさせる応力の条件はそれらの応力経路にかかわらず一義的に定まってくる。本文のガラスビーズの場合はその条件は応力比 q/p' が一定であることである。つまり、上述した複数の供試体の応力比 q/p' が同じ r_A であるとき、それらの供試体に観測されるせん断ひずみ r^p はすべて同じ値 r_A^p を示す。応力状態が変化し、 q/p' の値が増大し r_B になったとき、それらの供試体のせん断ひずみも増大しすべて同一の値 r_B^p を示すようになる。応力状態を図-18 の

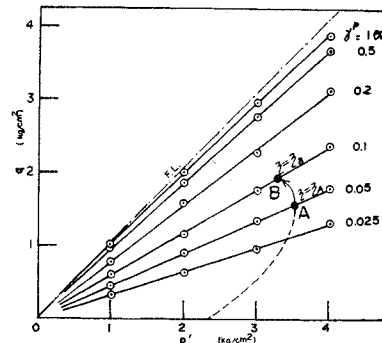


図-18 応力比一定線

ように (p', q) 平面で表示すると、等しい r^p の値に対応する応力条件は q/p' 一定線で示される。そして、 r^p の値を変化させれば無数に q/p' 一定線群が書ける。すべての応力状態は q/p' 一定線群のうちのどれかの上に位置し、低位にある q/p' 一定線から高位の q/p' 一定線上へと応力状態が変化した場合（たとえば、図-18の点 A から点 B）、せん断ひずみ r^p は増大する。応力状態が変化する道筋、すなわち応力経路にかかわらず、このような議論が可能となるのであるから、 S_s^* 一定 (r^p 一定) で規定される条件が降伏条件を与えるようになっていることが理解できる。

Poorooshasb⁽¹⁰⁾ や龍岡⁽¹³⁾ などにより砂の降伏条件について述べられてきている。彼らの降伏条件は本文で調べているガラスビーズの降伏条件のように q/p' 一定とはならず、 (p', q) 平面上で p' が増大するにつれて q/p' 一定線より少しずつ頭がたれていく形をしている。しかし、いずれにせよ龍岡も述べているように、砂やガラスビーズのような粒状体のせん断に関する降伏条件は平均主応力 p' が増大するにつれて偏差応力 q も大きくなる形をしているものと考えてよいようである。そして、粒状体のせん断に関する降伏条件として、応力比一定条件がその原形となっているように思われる。Poorooshasb⁽¹⁰⁾ は降伏条件に応力比一定を採用し論文を書いている。

粒状体のせん断変形において外力のなす塑性仕事を経路に依存するという事実が粒状体の変形の特徴的な性格であることを明らかにするとともに、砂やガラスビーズの三軸圧縮試験において式 (13) で定義される状態関数 S_s^* を導入しせん断変形の進み具合を追跡していく必要があることを主張してきた。土質力学では土の破壊規準が応力比を用いて書かれてきている。このことは S_s^* 一定条件の指定する内容と何ら矛盾するものではない。

(2) Roscoe ら^{(11),(12)} と筆者らの考え方の関連性と相違

ここで、

$$\eta_w = \frac{dv_d^p}{d\epsilon^p} + \eta$$

$$\eta_w = \frac{dW_s^p}{p' d\epsilon^p} = \frac{dS_s^*}{d\epsilon^p}$$

$$d\epsilon^p = \frac{2}{3} d\gamma^p \dots\dots\dots (16)$$

とおくとき、この η_w が定数または ϵ^p だけの関数であることが、 dS_s^* の積分が経路に依存しないための条件になっていることはすでに前論文⁽⁸⁾ で示した。また、当然式 (13) でもそうになっている。Roscoe らの理論におけるエネルギー消散式は

$$dW^p = p' M d\epsilon^p \dots\dots\dots (17)$$

ここで M は critical state の摩擦係数である。

式 (16) の書き方にしたがえば、式 (13) は

$$dS_s^* = \eta_w d\epsilon^p \dots\dots\dots (18)$$

となり、また Roscoe らのエネルギー式から

$$dS_s^* = M d\epsilon^p \dots\dots\dots (19)$$

となる。つまり、Roscoe らの理論は式 (18) において η_w を定数とおいた場合に相当する基本式を設定していることがわかる。彼らは間隙比 e を用いて土の降伏というものを表現していこうとしたが、このことが不自然であることは、彼らの理論の展開の基礎となる式そのものが示しているのである。なぜならば、いままで詳しく述べてきたように、式 (18) や (19) はせん断ひずみで降伏条件を考える必要性を示唆しているからである。ただ、Roscoe らと筆者らは粒状体のせん断変形を別のかたちで取扱ってきたのであるが、結局は式 (18)、(19) のような同じ関係式を基本として粒状体のせん断変形を見ているようである。このことは興味あることである。今後、式 (18) の係数 η_w のもつ物理的意味について考察していかなければならないが、この η_w は粒子間の摩擦係数および粒状体の構造の一種の乱れに関連して粒状体が発揮する摩擦係数であると考えられる。Roscoe らがこの η_w を定数としていることはすでに述べたが、詳細にみれば、 η_w の値はせん断変形の進行とともに変化していくものと思われる。図-19 に平均主応力一定試験における平均的な $S_s^* \sim \gamma^p$ 関係を示す。この図において変形の前半部 (r^p がほぼ 0.2% あたりまで) では $S_s^* \sim \gamma^p$ 関係は直線でない。つまり、 η_w の値は一定とはなっていない。しかし、その後の変形部分では η_w の値はほとんど一定とみなせるようである。式 (19) で表わされている Roscoe らの変形モデルはせん断変形の後の方にその適用性が高いことが理解できる。

また、式 (18) のもつ意味を理解していくためには、粒状体のミクロな挙動をも見つめていかなければなら

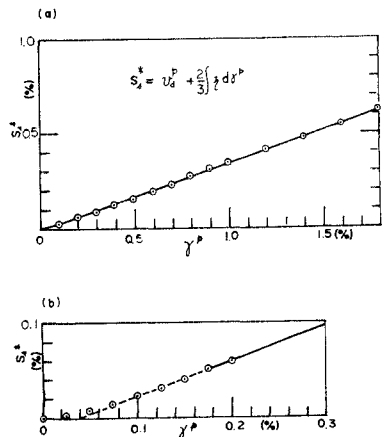


図-19 $S_s^* \sim \gamma^p$ 関係

いように思われる。

5. む す び

ガラスビーズの三軸圧縮試験結果から、粒状体の変形特性に関する基本的な性格を知ることができた。もちろん、ここで述べる結論は本実験の条件に限り適用できるものである。本実験の範囲内で次のようなことがわかった。

(1) 等方圧縮された密なガラスビーズが単調に増大するせん断作用を受ける場合、体積変形を単純に等方圧縮成分とダイレイタンス成分との線形和としてもよいように思われた。

(2) 弾性的な変形には応力比ばかりではなく平均主応力も関与するが、塑性的なせん断ひずみやダイレイタンスによる体積ひずみは応力比だけで整理できるように思われた。

(3) 塑性せん断変形はせん断応力より応力比によって第一義的に支配され、ダイレイタンス現象を示すために、塑性仕事の状態量とはならない。しかし、せん断の進み具合を表現できる状態関数 S_s^* が存在する。

(4) Roscoe らの理論の基本式そのものが、粒状体のせん断変形に関して間隙比を用いて降伏条件を与えていくことの不自然さを示しているようである。

謝 辞 筆者らが、塑性仕事 dW^p を (p', r) の関数で表示し、 $1/p'$ が dW^p の積分因数となっており、 $S = \int dW^p/p'$ が状態関数であると述べたとき、最上教授は Thurairajah と Roscoe¹³⁾ のエネルギー修正式を引用し

$$\frac{dW^p}{p'} = dv^p + \eta de^p$$

というかたちで書かれることを私信により教示された。この形式が完全微分形式かどうかは、上式からだけでは

判断できないが、この教示は、砂の三軸試験結果を用いて上式が完全微分とみなせるかどうかを調べてみるきっかけを作った。ここに、教授の親切なるご教示に感謝をいたします。

参 考 文 献

- 1) Frydman, S. and Zeitlen, J.G. : Some pseudo-elastic properties of granular media, Proc., 7th. ICSMFE, Vol. 1, 1969, pp. 135-141.
- 2) Karst, H., Legrand, J., Le Trirant, P., Sarda, J.P. and Weber, J. : Contribution à l'étude de la mécanique des milieux granulaires, Proc., 6th ICSMFE, Vol. 1, 1965, pp. 259-263.
- 3) Matsuoka, H. : Deformation Characteristics of Soil, Dept. Civ. Engg., Kyoto Univ., Aug., 1973.
- 4) Mogami, T. : A Report on Stress-Strain Relationship of Sand, presented to the First Iranian Congress of Civil Engineering and Engineering Mechanics, Pahlavi University, Shiraz, 1972.
- 5) 諸戸靖史 : 砂の弾性的な変形特性, 土質工学会論文報告集, Vol. 12, No. 3, Sept., 1972, pp. 66-74.
- 6) 諸戸靖史・河上房義 : 砂の変形における状態関数, 土木学会論文報告集, No. 229, Sept., 1974, pp. 77-88.
- 7) 村山朝郎・八木則男 : 砂質土の変形特性について, 土と基礎, Vol. 13, No. 2, 1965, pp. 65-71.
- 8) Parkin, A.K., Gerrard, C.M. and Willoughly, D.R. : Deformation of Sand in hydrostatic compression, discussion by Parkin et al., Jour., SM Div., ASCE, Vol. 94, SM 1, 1968, pp. 336-340.
- 9) Poorooshasb, H.B., Holbec, I. and Sherbourn, A.N. : Yielding and flow of sand in triaxial Compression : Part 1, Canadian Geotechnical Journal, Vol. 3, No. 4, 1966, pp. 179-190.
- 10) Poorooshasb, H.B. : Deformation of sand in triaxial compression, Proc. 4th. Asian Regional Conference, Vol. 1, 1971, pp. 63-66.
- 11) Roscoe, K.H., Schofield, A.N. and Wroth, C.P. : On the yielding of soils, Geotechnique, Vol. 8, 1958, pp. 22-53.
- 12) Schofield, A.N. and Wroth, C.P. : Critical State Soil Mechanics, McGraw Hill, London, 1968.
- 13) 龍岡文夫 : 三軸せん断装置による砂の変形特性, 東京大学学位請求論文, 1972.

(1974. 1. 16・受付)