

平面骨組構造物の静的, 動的塑性曲げに対する数値解析法*

NUMERICAL ANALYSIS METHOD FOR STATIC AND DYNAMIC PLASTIC BENDING OF PLANE FRAMED STRUCTURES.

太田 俊 昭**・今井 富士 夫***・寺本 恵 一 郎****
By Toshiaki OHTA, Fujio IMAI and Keiichiro TERAMOTO

1. ま え が き

構造物の終局崩壊荷重とその崩壊メカニズムの平易な解法である極限解析法は、設計における経済的な断面決定に利するのみならず、きわめて重要な安全性に対する一つの評価基準を与えてくれる。この分野に関する解法としては、平衡条件と変形の適合条件(変形機構条件)の2条件を満たすいわゆる上界定理に基づく仮想変形法^{1),2)}や積み重ね法³⁾、あるいは、変形の適合条件の代わりに塑性条件を満足させた下界定理を基とする不等式法⁴⁾や塑性モーメント分配法⁵⁾などがあり、いずれも漸増荷重の崩壊荷重算定に威力を発揮する簡易解法として知られている。しかしながら荷重が複雑に変動する場合の極限解析を行うには、上記諸解法は、いずれも煩雑となり、簡易化、実用化を要するところいまだ大といえる。

さて、この種の変動荷重に対する崩壊挙動を自動追跡するには、平衡条件と変形の適合条件に基づく変形法を用い、これに塑性条件を各荷重段階ごとに逐次導入していく荷重増分法^{6),7)}が一般的であり、特に手法として、行列解析を採用すれば、電子計算機による骨組構造物の極限解析^{8),9)}が容易に可能となるなどの利点がある。この種の解法を大別すれば、問題の塑性条件をあらかじめ部材の剛性に含ませて解析を行う方法と、塑性ヒンジ発生予想点を節点とみなし、同節点が塑性ヒンジになれば、これに対応して塑性条件を新たに導入する方法(節点間の部材は、あくまで弾性部材とみなす)とに2別される。前者に関しては坂本¹⁰⁾、児嶋¹¹⁾らの研究があり、特に児嶋のそれは、曲げ問題を含めて有限変形問題や軸力下の座屈問題を取り扱いうる一般論を展開し、アーチ、

ラーメン等に関し興味ある知見を提供しているが、荷重が変動する場合については、言及していない。一方、後者に関しては、剛性行列法による渡辺の連続ばりの曲げを対象とした研究¹²⁾や Davies⁷⁾の門形ラーメンに対する研究などがあるが、いずれも塑性ヒンジ発生のごとく塑性条件を導入しなければならないために、その判別決定操作に加えて未知変形量の決定方程式の元数を変更しなければならないこと、たとえば、渡辺の方法では、行列要素の配列順序を塑性ヒンジ発生ごとに変えなければならないことが挙げられる。本研究では、後者に関する以上の難点を排除すべく塑性条件としてのパラメータをあらかじめ一般的に解式中に導入して、マトリックスの元数ならびに要素配列を固定化する方法を採用しており、また解法としては剛性行列を変換した柔性行列法を用いている。したがって弾性行列解法と塑性に関する若干の基礎知識さえあれば、骨組構造物の崩壊挙動を平易に、かつ自動的に解明できることとなり、しかもその応用範囲は広く、任意変動荷重を受ける静的崩壊挙動はもちろんのこと、動的崩壊挙動をも明らかにすることができる。本論ではまずその第1段階として構造物の曲げ崩壊メカニズムの静的、動的挙動の解明理論を示し、簡単な二、三の例題を用いて演算手法の骨子を解説するものとする。

2. 基 礎 式

いま、図—1 に示すように部材 ab の両端に \dot{M}_{ab} , \dot{M}_{ba} なるモーメント増分を加え、その時の部材接線角増分(接線角速度)を $\dot{\tau}_{ab}$, $\dot{\tau}_{ba}$ とすれば、周知のたわみ角公式より次の関係式をえる。すなわち

$$\dot{M} = \begin{bmatrix} \dot{M}_{ab} \\ \dot{M}_{ba} \end{bmatrix}, \quad \dot{\tau} = \begin{bmatrix} \dot{\tau}_{ab} \\ \dot{\tau}_{ba} \end{bmatrix}, \quad k = \begin{bmatrix} 4EI/l & 2EI/l \\ 2EI/l & 4EI/l \end{bmatrix},$$
$$\begin{bmatrix} \dot{M}_{ab} \\ \dot{M}_{ba} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4EI/l & 2EI/l \\ 2EI/l & 4EI/l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\tau}_{ab} \\ \dot{\tau}_{ba} \end{bmatrix},$$

または $\dot{M} = k\dot{\tau}$ (1)

* 第 29 回土木学会年次学術講演会にて一部発表済み
** 正会員 工博 九州大学助教授 工学部土木工学科
*** 正会員 九州大学助手 工学部土木工学科
**** 学生会員 九州大学大学院修士課程

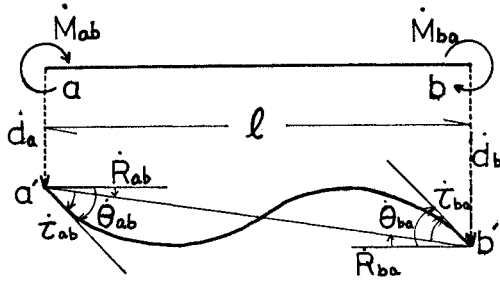


図-1

ただし、 EI ：曲げ剛性、 l ：スパンの長さ。

また変形の適合条件式は、弾性部材 ab について接線角増分 $\dot{\tau}$ とたわみ角増分 $\dot{\theta}$ (たわみ角速度) に関し、部材回転角増分 \dot{R} (部材回転角速度) を用いて次のように表わせる。

$$\begin{cases} \dot{\tau}_{ab} = \dot{\theta}_a - \dot{R}_{ab} = \dot{\theta}_a + (\dot{d}_a - \dot{d}_b)/l \\ \dot{\tau}_{ba} = \dot{\theta}_b - \dot{R}_{ba} = \dot{\theta}_b + (\dot{d}_a - \dot{d}_b)/l \end{cases} \dots\dots\dots (2)$$

ただし、 \dot{d}_a, \dot{d}_b ：部材 ab の材端における垂直変位増分 (垂直速度)。

よって構造物の全節点 (荷重点も含む) における弾性時の変形の適合条件式は式 (2) より結局次のようになる。

$$\dot{\tau} = A_e \begin{bmatrix} \dot{d} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} \dots\dots\dots (3)$$

次に a, b 両端に塑性ヒンジが発生し、その不連続角増分をそれぞれ $\dot{\theta}_a^p, \dot{\theta}_b^p$ とすれば、変形の適合条件式は、

$$\begin{cases} \dot{\tau}_{ab} = \dot{\theta}_a + \dot{d}_a/l - \dot{d}_b/l + \beta_a \dot{\theta}_a^p \\ \dot{\tau}_{ba} = \dot{\theta}_b + \dot{d}_a/l - \dot{d}_b/l + \beta_b \dot{\theta}_b^p \end{cases} \dots\dots\dots (4)$$

となる。ここに β_a, β_b は塑性ヒンジ発生時に 1、そうでない場合にはゼロとなる変数である。よって構造物の全節点における弾塑性時の変形の適合条件式は、式 (3) と同様次のように一般化される。

$$\dot{\tau} = A_e \begin{bmatrix} \dot{d} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} + A_P \dot{\theta}^p \dots\dots\dots (5)$$

ここに A_P の内容は、式 (4) の第 4 項の係数 β で構成される係数行列である。

一方、力のつりあい式は外力の増分を \dot{P} とすれば、反傾関係 (contragradient nature)¹³⁾ から、式 (3) の係数行列 A_e を用いて

$$\dot{P} = A_e^T \dot{M} \dots\dots\dots (6)$$

ただし A_e^T は A_e の転置行列

また、完全塑性曲げモーメントを M_P とすれば、塑性条件 ($\dot{M} = \dot{M}_P$) も同じく反傾関係を用いて

$$\dot{M}_P = A_P^T \dot{M} \dots\dots\dots (7)$$

としてえられ、これが塑性ヒンジの不連続角増分 $\dot{\theta}^p$ を定める条件式となる。しかるに塑性ヒンジの発生前もしくは、塑性ヒンジが消失した場合の条件は

$$\alpha_h \dot{\theta}^p = 0 \dots\dots\dots (8)$$

となる。しかるに式 (7) と式 (8) の条件とは、併設せしめられるものであるため $\dot{\theta}^p$ の算定式である式 (10) の係数行列 H に α_h を含ませる必要がある (ただし、 α_h は要素 α_i を有する対角行列で、要素 α_i は塑性ヒンジ発生時にゼロ、そうでないときは 1 となる)。すなわち、式 (6)、(7) に式 (1)、(5) を代入して式 (8) の条件を加味すれば、

$$\dot{P} = K \dot{U} + G \dot{\theta}^p \dots\dots\dots (9)$$

$$\dot{M}_P = G^T \dot{U} + H \dot{\theta}^p \dots\dots\dots (10)$$

となる。

ただし、

$$K = A_e^T k A_e : \text{剛性行列 (stiffness matrix)}$$

$$G = A_e^T k A_P, H = A_P^T k A_P + \alpha_h, \dot{U} = \begin{pmatrix} \dot{d} \\ \dot{\theta} \end{pmatrix}$$

以上の基礎式を用いて構造解析を行うには、以下に示すような柔性行列法と剛性行列法との 2 通りの方法がある。

(1) 柔性行列に基づく解法

式 (9) を変形すれば次式をえる。

$$\dot{U} = S \dot{P} - S G \dot{\theta}^p \dots\dots\dots (11)$$

ただし、

$$S = K^{-1} : \text{柔性行列 (flexibility matrix)}$$

いま、曲げのみ働く場合を想定すれば、塑性条件式は $\dot{M}_P = 0$ となるゆえ、式 (10)、(11) より

$$0 = G^T (S \dot{P} - S G \dot{\theta}^p) + H \dot{\theta}^p, \dots\dots\dots (12)$$

$$\therefore \dot{\theta}^p = C_g^{-1} G^T S \dot{P} \dots\dots\dots (13)$$

ここに、

$$C_g = G^T S G - H \dots\dots\dots (14)$$

式 (13) の $\dot{\theta}^p$ を式 (11) に代入すれば、変形ベクトル増分 \dot{U} (速度ベクトル) が次のようにえられる。

$$\dot{U} = D \dot{P} \dots\dots\dots (15)$$

ここに、

$$D = (I - S G C_g^{-1} G^T) S \dots\dots\dots (16)$$

式 (13)、(15) より $\dot{\theta}^p, \dot{U}$ が定められるゆえ、所定のモーメント増分は、式 (1)、(5) を用いて次式で求められる。

$$\dot{M} = k (A_e \dot{U} + A_P \dot{\theta}^p) \dots\dots\dots (17)$$

以上の諸式を用いれば、在来の弾性行列解法に準じた極限解析が可能となる。すなわち、前の荷重段階の U, θ^p を既知とし、それぞれ $U^*, (\theta^p)^*$ で表わせば、式 (13)、(15) より荷重増分 \dot{P} (荷重速度) に対する $\dot{\theta}^p, \dot{U}$ が求められるゆえ、 U および θ^p は、それぞれ $U = U^* + \dot{U}$, および $\theta^p = (\theta^p)^* + \dot{\theta}^p$ で算出される。また材端モーメントも同様な方法で、次式で与えられる。

$$M = M^* + \dot{M} \dots\dots\dots (18)$$

なお、各荷重段階では、式(18)の各材端モーメントが塑性条件を満足しているか否かを判別して α_h に含まれる α 値、および A_P 行列に含まれる β 値を自動的に決定する必要があり、弾性および除荷時では ($|M| < M_P$ or $|M|=M_P$ and $W^P = -\dot{\theta}^P M < 0$ (塑性ひずみ増分による仕事は非負)), $\alpha=1, \beta=0$, 塑性ヒンジ発生時には ($|M|=M_P$ and $W^P = -\dot{\theta}^P M \geq 0$), $\alpha=0, \beta=1$ とおけばよい。なお、最終崩壊荷重は式(14)の C_g が不定になった時の荷重値で与えられる。

(2) 剛性行列に基づく解法¹²⁾

$\dot{M}_P=0$ なる塑性条件を用いて式(10)を変形すれば、

$$\dot{\theta}^P = -H^{-1}G^T \dot{U} \dots \dots \dots (19)$$

となる。

式(9), (19)より

$$\dot{P} = (K - GH^{-1}G^T) \dot{U} \dots \dots \dots (20)$$

ここで、 $K_g = K - GH^{-1}G^T$ なる弾塑性剛性行列ともいうべき対称行列 ($\because K, H$ は、対称行列である) を用いて式(20)を書きなおせば、次式をえる。

$$\dot{P} = K_g \dot{U} \dots \dots \dots (21)$$

よって

$$\dot{U} = K_g^{-1} \dot{P} \dots \dots \dots (22)$$

計算手法は前者と同じであるが、この場合には、各荷重段階ごとに α および β を含んだ H^{-1} および、 K_g^{-1} の2つの逆行列を求める必要があり、柔性行列に基づく解法 (S を求めておけば C_g^{-1} だけである) と比較して不利といえる。なお、式(21)の K_g は、 α, β を含むゆえ、渡辺の解式¹²⁾と行列内容が異なることに注意されたい。

(3) 塑性判別条件

考えている点が塑性であるか否かは、降伏条件 $f = |M| - M_P = 0$ と塑性ひずみ増分による仕事为非負である2条件より判定できる。特に後者についてこれを塑性不連続角増分 $\dot{\theta}^P$ を用いて数式表現すれば次のようになる。

いま、部材上のA点に塑性ヒンジが発生し、不連続角増分 $\dot{\theta}_A^P$ が生じた場合を考える。A点の塑性曲率増分を $\dot{\phi}_A^P$ とすれば、 W_A^P は、

$$W_A^P = \dot{\phi}_A^P M_A \geq 0 \dots \dots \dots (23)$$

一方、A点と微小長さ $4S$ 離れた点 A' を考え、両点の回転角をそれぞれ $\theta_A, \theta_{A'}$ とすれば、 ϕ -法公式より、

$$\theta_{A'} = \theta_A - \int_0^{4S} \phi dS \dots \dots \dots (24)$$

$$\therefore \lim_{A \rightarrow A'} (\theta_{A'} - \theta_A) = - \lim_{4S \rightarrow 0} \phi_A 4S$$

または、

$$\lim_{4S \rightarrow 0} \frac{\theta_{A'} - \theta_A}{4S} = -\phi_A$$

上式を増分形式に直せば

$$\lim_{4S \rightarrow 0} \frac{\dot{\theta}_{A'} - \dot{\theta}_A}{4S} = -\dot{\phi}_A \dots \dots \dots (25)$$

ここで式(25)のA点の曲率増分を塑性曲率増分 $\dot{\phi}_A^P$ とすれば、塑性ヒンジによる不連続角増分 $\dot{\theta}_A^P$ は次式で与えられる。

$$\dot{\theta}_A^P = -\dot{\phi}_A^P \dots \dots \dots (26)$$

式(23), (26)より W_A^P は、結局次のようになる。

$$W_A^P = -\dot{\theta}_A^P M_A \geq 0 \dots \dots \dots (27)$$

以上から塑性判別条件は次のようになる。

- ① $|M|=M_P$ and $\dot{\theta}_A^P M_A \leq 0$ であれば塑性ヒンジ発生 ($\alpha=0, \beta=1$)。
- ② $|M| < M_P$ または、 $|M|=M_P$ and $\dot{\theta}_A^P M_A > 0$ であれば、弾性、または除荷 ($\alpha=1, \beta=0$)。

ただし、回転角モーメントの記号規約は、すべてたわみ角式のそれに準ずるものである。たとえば、部材 AB で A, B 点がヒンジの場合、式(27)の W^P はいずれも同一形式の $W_A^P = -\dot{\theta}_A^P M_{AB} \geq 0, W_B^P = -\dot{\theta}_B^P M_{BA} \geq 0$ の形で与えられる。

3. 漸増および変動荷重を受ける構造物の静的崩壊機構に関する数値解析例

前節で考慮したように、この種の解析法としては柔性行列に基づく解法が有利であることが判明したので、以下の数値解析では、すべてこの方法によって行うことにする。

(1) 両端固定ばり

理解を早めるため、図-2に示す両端固定ばりを例にとり、演算過程を以下に説明する。

図-2に示す端固定ばり ac をはり ab とはり bc に分け、それぞれのはりについて式(1)のたわみ角式を

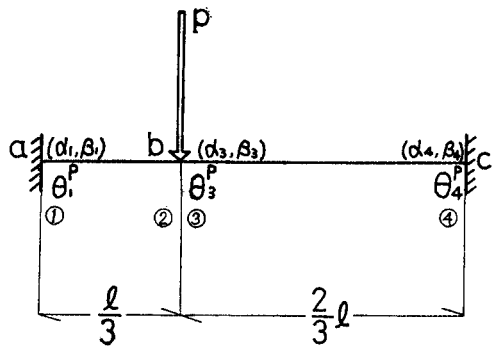


図-2

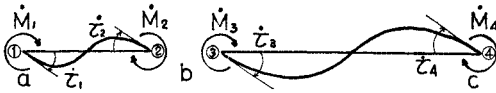


図-3

適用すれば、図-3 の記号を用いて次式をえる。ただし
 一様断面とする。

$$\begin{bmatrix} \dot{M}_1 \\ \dot{M}_2 \\ \dot{M}_3 \\ \dot{M}_4 \end{bmatrix} = \frac{EI}{l} \begin{bmatrix} 12 & 6 & 0 & 0 \\ 6 & 12 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \\ \dot{z}_3 \\ \dot{z}_4 \end{bmatrix}$$

$$\therefore k = \frac{EI}{l} \begin{bmatrix} 12 & 6 & 0 & 0 \\ 6 & 12 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 6 \end{bmatrix} \dots\dots\dots (28)$$

また、式 (3) の変形の適合条件式を行列表示すれば、

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \\ \dot{z}_3 \\ \dot{z}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ 1 & -3 \\ 1 & 1.5 \\ 0 & 1.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_b \\ \dot{d}_b/l \end{bmatrix}$$

$$\therefore A_e = \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ 1 & -3 \\ 1 & 1.5 \\ 0 & 1.5 \end{bmatrix} \dots\dots\dots (29)$$

一方、力のつりあい式は式 (29) と反傾の関係にあり、 \dot{z} に対して \dot{M} 、 \dot{d}_b/l に対して \dot{P} が関係づけられる。すなわち式 (6) に該当する式は次式となる。

$$\begin{bmatrix} 0 \\ \dot{P} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ -3 & -3 & 1.5 & 1.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{M}_1 \\ \dot{M}_2 \\ \dot{M}_3 \\ \dot{M}_4 \end{bmatrix} \dots\dots\dots (30)$$

明らかに式 (30) の第1式は、節点 b における節点方程式 $0 = \dot{M}_2 + \dot{M}_3$ を表わし、第2式は、節点 b での鉛直方向の力のつりあい式 $\dot{P} = -(\dot{M}_1 + \dot{M}_3)/(l/3) + (\dot{M}_3 + \dot{M}_4)/(2l/3)$ を表わしている。

さて、以上の弾性解法の結果を利用して、極限解析を行うには、塑性ヒンジが発生する点を見い出さなければならぬ。一般に塑性ヒンジは、節点と荷重点に発生するゆえ、この例では節点 a, b, c に塑性ヒンジ回転角が生じる可能性がある。それらの不連続な回転角の増分をそれぞれ $\dot{\theta}_1^P, \dot{\theta}_3^P$ ($\dot{\theta}^P$ を選んでもよい)、 $\dot{\theta}_4^P$ とすれば、式 (5) は次のようになる。

$$\dot{\tau} = A_e \dot{U} + A_P \dot{\theta}^P = A_e \dot{U} + \begin{bmatrix} \beta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta_3 & 0 \\ 0 & 0 & \beta_4 \end{bmatrix} \dot{\theta}^P$$

$$\therefore A_P = \begin{bmatrix} \beta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta_3 & 0 \\ 0 & 0 & \beta_4 \end{bmatrix} \dots\dots\dots (31)$$

次に解析に必要な行列 S, G, H および C_g を求めれば、それぞれ次のようになる。

$$S = (A_e^T k A_e)^{-1} = \frac{\alpha_0}{546.75} \begin{bmatrix} 121.5 & 13.5 \\ 13.5 & 6.0 \end{bmatrix}$$

ただし、 $\alpha_0 = \frac{l}{3EI}$

$$G = A_e^T k A_P = \frac{1}{\alpha_0} \begin{bmatrix} 2\beta_1 & 2\beta_3 & \beta_4 \\ -18\beta_1 & 4.5\beta_3 & 4.5\beta_4 \end{bmatrix}$$

$$H = A_P^T k A_P + \alpha_h = \frac{1}{\alpha_0} \begin{bmatrix} 4\beta_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & 2\beta_3^2 & \beta_3\beta_4 \\ 0 & \beta_3\beta_4 & 2\beta_4^2 \end{bmatrix}$$

$$+ \begin{bmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_3 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_4 \end{bmatrix}$$

$$C_g = G^T S G - H$$

$$= -\frac{1}{\alpha_0} \begin{bmatrix} 4\beta_1^2/3 + \alpha_0\alpha_1 & 2\beta_1\beta_3/3 & 2\beta_3\beta_4/3 \\ \text{SYM.} & 4\beta_3^2/9 + \alpha_0\alpha_3 & 0 \\ & & 4\beta_4^2/3 + \alpha_0\alpha_4 \end{bmatrix} \dots\dots\dots (32)$$

a) 弾性計算

まず塑性ヒンジ発生前の解析を示せば、 \dot{U} および \dot{M} が次のように求められる。

$$\dot{U} = S \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{P} \end{bmatrix} = \frac{\alpha_0 \dot{P} l}{546.75} \begin{bmatrix} 13.5 \\ 6.0 \end{bmatrix}$$

$$\dot{M} = \frac{\dot{P} l}{546.75} \begin{bmatrix} -81 \\ -54 \\ 54 \\ 40.5 \end{bmatrix} \dots\dots\dots (33)$$

したがって第1の塑性ヒンジは、断面①にでき、そのときの荷重、変位、モーメントを $P_{①}, U_{①}, M_{①}$ で表わせば、それぞれ次のようになる。

$$P_{①} = 6.75 M_P / l, \dots\dots\dots (34)$$

$$U_{①} = \begin{bmatrix} 5.56 \\ 2.47 \end{bmatrix} \times \frac{M_P l}{EI} \times 10^{-2}$$

$$M_{①} = \begin{bmatrix} -1.0 \\ -2/3 \\ 2/3 \\ 1/2 \end{bmatrix} \times M_P \dots\dots\dots (35)$$

b) 塑性ヒンジが断面①に生じた場合

この場合の条件は、 $\alpha_1=0, \beta_1=1; \alpha_3=1, \beta_3=0; \alpha_4=1, \beta_4=0$ となるから、これらの値を式 (32) に代入すれば $\dot{\theta}^P$ および \dot{U} がそれぞれ式 (13) および式 (15) より次のように求められる。

$$\dot{\theta}^P = \frac{\alpha_0 \dot{P} l}{546.75} \begin{bmatrix} 60.75 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\dot{U} = \frac{\alpha_0 \dot{P} l}{546.75} \begin{bmatrix} 13.5 \\ 15 \end{bmatrix} \dots\dots\dots (36)$$

またモーメント増分は、式 (17) より

$$\dot{M} = \frac{\dot{P}l}{546.75} \begin{bmatrix} 0 \\ -94.5 \\ 94.5 \\ 81 \end{bmatrix} \dots\dots\dots(37)$$

よって第2の塑性ヒンジは、断面③にできそのときの荷重 \dot{P}_3 は、

$$94.5 \dot{P}_3 l / 546.75 = M_P (1 - 2/3),$$

$$\therefore \dot{P}_3 = 1.93 M_P / l \dots\dots\dots(38)$$

よって P_3 は、

$$P_3 = P_1 + \dot{P}_3 = 8.68 M_P / l \dots\dots\dots(39)$$

このとき、 U_3, M_3 はそれぞれ次のようになる。

$$U_3 = U_1 + \dot{U}_3 = \left\{ \begin{bmatrix} 5.56 \\ 2.47 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1.59 \\ 1.76 \end{bmatrix} \right\}$$

$$\times \frac{M_P l}{EI} \times 10^{-2} = \begin{bmatrix} 7.15 \\ 4.23 \end{bmatrix} \times \frac{M_P l}{EI} \times 10^{-2},$$

\dots\dots\dots(40)

$$M_3 = M_1 + \dot{M}_3 = \left\{ \begin{bmatrix} -1.0 \\ -2/3 \\ 2/3 \\ 1/2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -1/3 \\ 1/3 \\ 2/7 \end{bmatrix} \right\}$$

$$\times M_P = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 11/14 \end{bmatrix} \times M_P \dots\dots\dots(41)$$

c) 塑性ヒンジが断面①および③に生じた場合

この場合の条件は、 $\alpha_1=0, \beta_1=1; \alpha_3=0, \beta_3=1; \alpha_4=1, \beta_4=0$ となり、前の場合と同様にして $\dot{\theta}^P, \dot{U}$ および \dot{M} がそれぞれ以下のように求められる。

$$\left. \begin{aligned} \dot{\theta}^P &= \begin{bmatrix} 0.89 \\ -1.56 \\ 0 \end{bmatrix} \times \alpha_0 \dot{P}l, \\ \dot{U} &= \begin{bmatrix} 0.89 \\ 0.30 \end{bmatrix} \times \alpha_0 \dot{P}l, \\ \dot{M} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2/3 \end{bmatrix} \times \dot{P}l. \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(42)$$

最終ヒンジは断面④にでき、そのときの \dot{P}_4 は、

$$2 \dot{P}_4 l / 3 = M_P (1 - 11/14)$$

$$\therefore \dot{P}_4 = 0.32 M_P / l \dots\dots\dots(43)$$

となる。よって P_4 が次の値で求められる。

$$P_4 = P_3 + \dot{P}_4 = 9 M_P / l \dots\dots\dots(44)$$

また、このときの U_4, M_4 はそれぞれ

$$U_4 = U_3 + \dot{U}_4 = \left\{ \begin{bmatrix} 7.15 \\ 4.23 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 9.52 \\ 3.18 \end{bmatrix} \right\}$$

$$\times \frac{M_P l}{EI} \times 10^{-2} = \begin{bmatrix} 16.67 \\ 7.41 \end{bmatrix} \times \frac{M_P l}{EI} \times 10^{-2}$$

\dots\dots\dots(45)

$$M_4 = M_3 + \dot{M}_4 = \left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 11/14 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 3/14 \end{bmatrix} \right\}$$

$$\times M_P = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \times M_P \dots\dots\dots(46)$$

d) 断面①、③および④に塑性ヒンジが生じた場合
この場合の条件は、 $\alpha_1=0, \beta_1=1; \alpha_3=0, \beta_3=1; \alpha_4=0, \beta_4=1$ であるゆえ、式 (30) の C_g は次のようになる。

$$C_g = \frac{1}{\alpha_0} \begin{bmatrix} 4/3 & 2/3 & 2/3 \\ & 4/9 & 0 \\ \text{SYM.} & & 4/3 \end{bmatrix} \dots\dots\dots(47)$$

このとき $|C_g|=0$ で不定となり、結局この構造系は、最終崩壊に至ったことが了解される。以上の結果は、むしろ既往の文献 3) の結果と完全に合致する。なお、以上の FLOW-CHART は 図-7 に示す。

(2) 2 スパン連続ばり

図-4 のように集中荷重 P_B と P_D が働く 2 スパン連続ばりの崩壊メカニズムを解析する。荷重条件としては、(i) 表-1 に示すように case (a) ($P_B=P_D=0 \rightarrow 5.5 \rightarrow 0 (\times M_P/L)$) および case (b) ($P_B=0, P_D=0 \rightarrow 5.5 \rightarrow 0 (\times M_P/L)$) を 1 cycle として繰り返される場合と、(ii) 表-2 に示すように case (c) ($P_B=P_D=0 \rightarrow 5.05 (\times M_P/L)$) および case (d) ($P_B=0, P_D=0 \rightarrow$

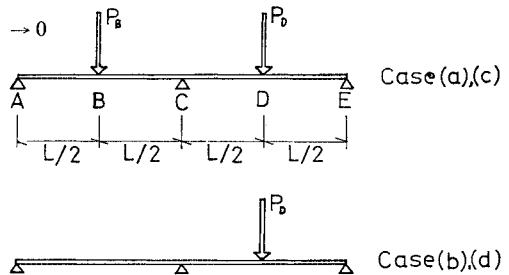


図-4

表-1

| CASE | $P_B l / M_P$ | $P_D l / M_P$ |
|------|---------------|---------------|
| (a) | 0 | 0 |
| | 5.5 | 5.5 |
| (b) | 0 | 0 |
| | 0 | 5.5 |

1Cycle

表-2

| | CASE | P_0L/M_P | P_0L/M_P |
|--------|------|------------|------------|
| 1Cycle | (c) | 0 | 0 |
| | | 5.05 | 5.05 |
| | | 0 | 0 |
| 1Cycle | (d) | 0 | 0 |
| | | 0 | 5.05 |
| | | 0 | 0 |

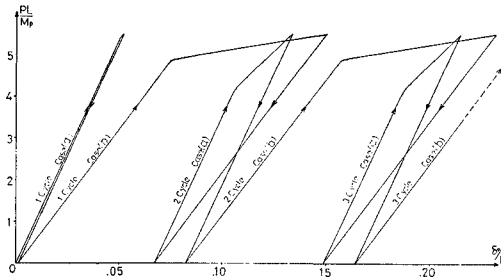


図-5 荷重とたわみの関係図

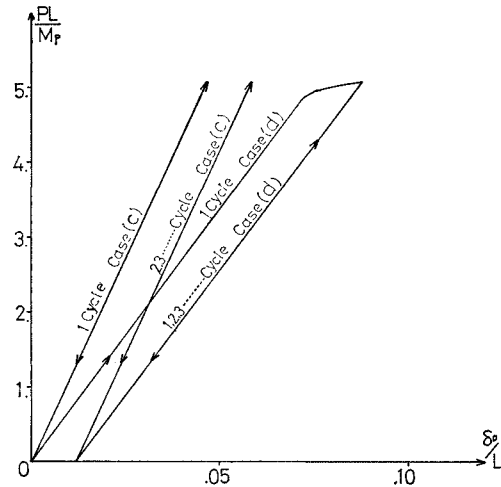


図-6 荷重とたわみの関係図

5.05 → 0 (× M_P/L) を 1 cycle として繰り返される場合を採用した。荷重の刻み $\dot{P}=0.01$ (× M_P/L) にとり、電子計算機による数値解析を試みた。結果は、それぞれ 図-5 および 図-6 に示すとおりである。図-5 では、漸増塑性変形による崩壊 (incremental collapse) を生じているのに対し、図-6 では 2 cycle 以後では、やはり弾性挙動を示し、いわゆる変形硬化 (shake down) していることが判読される。

4. 構造物の動的崩壊機構に対する解析方法

本法は荷重のいかんを問わず、崩壊プロセスを自動的

に追跡解明できる一般解法であるゆえ、慣性力を外力とみなせば、これを動的問題にも活用することが可能となる。以下にその骨子を解説する。

いま、時刻 i と微小時間 Δt 後の時刻を $i+1$ で区別したうえで、式 (15) の \dot{U} のうち変位成分のみを抽出し (回転角成分の項を除く) これに記号 \sim を添加して表わせば、次の関係式をえる。

$$\tilde{U}_{i+1} - \tilde{U}_i = \tilde{D}_{i+1} (P_{i+1} - P_i) \dots \dots \dots (48)$$

さて、式 (48) の外力 P_{i+1}/l は、一般に慣性力 $-M\ddot{U}_{i+1}''$ と強制外力 f_{i+1} の和として表わされる。

$$P_{i+1} = -m\ddot{U}_{i+1}'' + lf_{i+1}, \dots \dots \dots (49)$$

ただし、

m : 質量マトリックス、

$\tilde{U}_{i+1}'' = d^2 \tilde{U}/dt^2$: 加速度に関する列行列。

式 (49) の関係を用いて式 (48) を変形すれば、次式をえる。

$$\tilde{U}_{i+1} = -l^2 \tilde{D}_{i+1} m \tilde{U}_{i+1}'' + \tilde{U}_i + l^2 \tilde{D}_{i+1} m \tilde{U}_i'' + l \tilde{D}_{i+1} (f_{i+1} - f_i) \dots \dots \dots (50)$$

特に、 $f=0$ で \tilde{D}_{i+1} に含まれる変数 α, β が $\alpha=1, \beta=0$ の弾性自由振動の場合、式 (50) は周知の固有振動方程式となる。すなわち、

$$\tilde{U} + l^2 \tilde{D} m \tilde{U}'' = 0, \dots \dots \dots (51)$$

さて、式 (50) の非線形応答式を解くには、線型加速度法^{(4), (15)}や、Milne 法⁽⁶⁾あるいは、Runge-Kutta 法⁽⁶⁾などがあるが、ここでは、数式表現が簡明で、収束性の良い線型加速度法⁽⁵⁾を採用する。

すなわち、線型加速度法によれば、時刻 $i+1$ におけるたわみ \tilde{U}_{i+1} 、速度 $\dot{\tilde{U}}_{i+1}$ 、および加速度 $\ddot{\tilde{U}}_{i+1}$ と時刻 i におけるそれらとは、次の式によって関係づけられる。

$$\left. \begin{aligned} \tilde{U}_{i+1} &= \tilde{U}_i + \dot{\tilde{U}}_i' \Delta t + \ddot{\tilde{U}}_i'' \Delta t^2 / 2 + \ddot{\tilde{U}}_i''' \Delta t^3 / 6, \\ \dot{\tilde{U}}_{i+1}' &= \dot{\tilde{U}}_i' + \ddot{\tilde{U}}_i'' \Delta t + \ddot{\tilde{U}}_i''' \Delta t^2 / 2, \\ \ddot{\tilde{U}}_{i+1}'' &= \ddot{\tilde{U}}_i'' + \ddot{\tilde{U}}_i''' \Delta t. \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (52)$$

式 (52) の $\ddot{\tilde{U}}_i'''$ を消去して整理すれば、次の 2 式をえる。

$$\left. \begin{aligned} \tilde{U}_{i+1} &= \tilde{U}_i + \dot{\tilde{U}}_i' \Delta t + \ddot{\tilde{U}}_i'' \Delta t^2 / 3 + \ddot{\tilde{U}}_{i+1}'' \Delta t^3 / 6, \\ \dot{\tilde{U}}_{i+1}' &= \dot{\tilde{U}}_i' + (\ddot{\tilde{U}}_i'' + \ddot{\tilde{U}}_{i+1}'') \Delta t / 2. \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (53)$$

ここで、時刻 $i+1$ において式 (50) と式 (53) とを加速度 $\ddot{\tilde{U}}_{i+1}''$ について連立して解けば次式をえる。

$$\tilde{U}_{i+1}'' = F^{-1} (V + W), \dots \dots \dots (54)$$

ここに、 $F = l^2 \tilde{D}_{i+1} m + \Delta t^2 I / 6$,

$V = (l^2 \tilde{D}_{i+1} m - \Delta t^2 I / 3) \ddot{\tilde{U}}_i'' - \dot{\tilde{U}}_i' \Delta t$,

$W = l \tilde{D}_{i+1} (f_{i+1} - f_i)$,

I : 単位行列。

一方、曲げモーメントは、式 (17) に式 (13), (15) を代入のうえ、整理すれば、直接外力の増分 \dot{P} によ

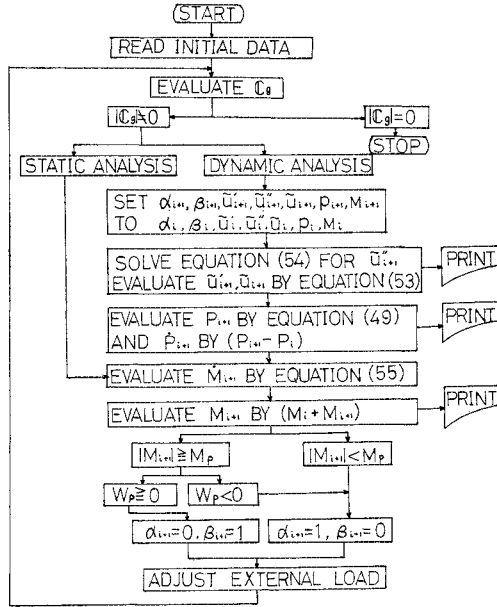


図-7 FLOW-CHART

て次のように書き改められる。

$$\dot{M} = k(A_e D \dot{P} + A_P C_g^{-1} G^T \dot{S} P) = E \dot{P}, \dots (55)$$

ただし、

$$E = k(A_e D + A_P C_g^{-1} G^T S).$$

または、添字 i , および $i+1$ をつけて

$$M_{i+1} = E_{i+1}(P_{i+1} - P_i) + M_i \dots (56)$$

以上から、演算は次の順序で行われる。すなわち、時刻 i の $\tilde{U}_i, \tilde{U}'_i, \tilde{U}''_i, M_i$ および α_i, β_i を既知として、時刻 $i+1$ のそれらを求めるには、まず式 (54) より $\alpha_{i+1} \cong \alpha_i, \beta_{i+1} \cong \beta_i$ と仮定して、加速度 \tilde{U}''_{i+1} を求め、式 (53) より $\tilde{U}'_{i+1}, \tilde{U}_{i+1}$ を順次算出する。また \tilde{U}_{i+1} を式 (49) に代入すれば、 P_{i+1} が得られ、したがって式 (56) より M_{i+1} が定められる。これを基に $\alpha_{i+1}, \beta_{i+1}$ を判別決定し、この結果を用いて再度上述の計算を繰り返す(ただし時間間隔 $4t$ を十分に小さくすれば(集中 Mass の自由度によって決定される最高次固有周期の 1/5 程度)、その間で $\alpha_{i+1} = \alpha_i, \beta_{i+1} = \beta_i$ と仮定しても、実用上さしつかえない)。

以上の FLOW-CHART を 図-7 に示す。

5. 強制力を受ける 構造物の 動的崩壊機構に関する数値解析例

ここでは、簡単のための 図-8 の門形ラーメンが水平正弦波強制力 $f = 3 \mu m_0 \alpha_s l \sin \omega t$ (α_s : 基準加速度でここでは、 $\alpha_s = 4 M_P / m_0 l^2$ とする。 m_0 : 単位長さ当りの基準質量) を受ける場合を例にとり、応答倍率 μ , および円振動数 ω の動的崩壊挙動に及ぼす影響の一端を考

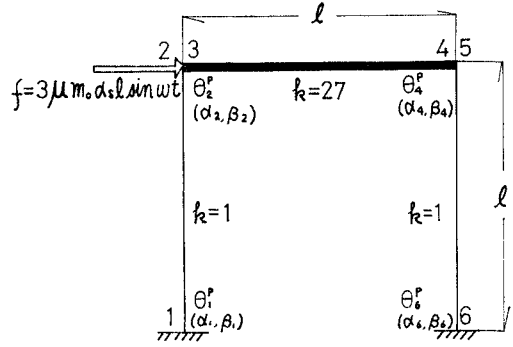


図-8

察してみる。まず計算手順を簡単に説明すれば次のとおりである。

$$k = \frac{1}{3 \alpha_0} \begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 108 & 54 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 54 & 108 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 4 \end{bmatrix} \dots (57)$$

$$A_e = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \dots (58)$$

$$A_P = \begin{bmatrix} \beta_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta_5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \beta_6 \end{bmatrix} \dots (59)$$

よって式 (27) の S は次式となる。

$$S = (A_e^T k A_e)^{-1} = \begin{bmatrix} 11.68 & -5.55 & 1.53 \\ & 11.68 & 1.53 \\ \text{SYM.} & & 42.43 \end{bmatrix} \times 3 \alpha_0 \times 10^{-3} \dots (60)$$

式 (28), (29) より G, H は次の値となる。

$$G = \frac{1}{3 \alpha_0} \begin{bmatrix} 2 \beta_1 & 4 \beta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \beta_5 & 2 \beta_6 \\ -6 \beta_1 & -6 \beta_2 & -6 \beta_5 & -6 \beta_6 \end{bmatrix} \dots (61)$$

$$H = \frac{1}{3 \alpha_0} \times \begin{bmatrix} 4 \beta_1^2 + 3 \alpha_1 \alpha_0 & 2 \beta_1 \beta_2 & 0 & 0 \\ & 4 \beta_2^2 + 3 \alpha_2 \alpha_0 & 0 & 0 \\ & & 4 \beta_5^2 + 3 \alpha_5 \alpha_0 & 2 \beta_5 \beta_6 \\ \text{SYM.} & & & 4 \beta_6^2 + 3 \alpha_6 \alpha_0 \end{bmatrix} \dots (62)$$

これらの値と式 (30) を用いて C_g が次式で求められる。

$$C_{\theta} = -\frac{1}{3\alpha_0} \begin{bmatrix} 2.46\beta_1^2 + 3\alpha_1\alpha_0 & +0.43\beta_1\beta_2 & -1.43\beta_1\beta_3 & -1.47\beta_1\beta_6 \\ & 2.36\beta_2^2 + 3\alpha_2\alpha_0 & -1.36\beta_2\beta_3 & -1.43\beta_2\beta_6 \\ & & 2.36\beta_3^2 + 3\alpha_3\alpha_0 & +0.43\beta_3\beta_6 \\ \text{SYM.} & & & 2.46\beta_6^2 + 3\alpha_6\alpha_0 \end{bmatrix} \dots\dots\dots (63)$$

以上の G, S, C_{θ} を式 (16) に代入すれば、 D が求められることになる。

さて、本応答計算例では、水平応答変位のみを独立変数とする 1 自由度系とすれば、式 (48) の \hat{D} は、行列 D の第 3 行第 3 列の要素 r で表わされ (r には α, β が一般的に含まれている)、式 (48) は結局次式となる。

$$(u_{i+1} - u_i)/l = r_{i+1}(P_{i+1} - P_i)l \dots\dots\dots (64)$$

これに式 (49) を代入すれば

$$u_{i+1}/l = -3r_{i+1}m_0u_{i+1}''l^2 + u_i/l + 3r_{i+1} \times m_0u_i''l^2 + r_{i+1}l(f_{i+1} - f_i) \dots\dots\dots (65)$$

ここで固有振動方程式を求めれば、式 (51) より

$$u/l + 3r m_0 u'' l^2 = 0$$

また上式の r は次のように求められる。

$$\beta = 0 \text{ より } G = 0,$$

$$\therefore D = S,$$

したがって $r = S_{33} = 42.43 \times 10^{-3} \times l/EI$ となり、固有値 ω_0 は、次式で与えられる。

$$\omega_0 = 2.803 \sqrt{EI/m_0 l^3}$$

また、上述のごとく式 (65) に $f = 3 \mu m_0 \alpha_s l \sin \omega t$ を代入したうえで、線型加速度法を併用すれば、強制力 f に対する動的応答解析が可能となる。実際の計算としては、まず μ を 0.05、および 0.1 に固定し、それぞれの場合について、種々の ω に対する応答解析を行い、結果を図-9、および図-10 に示した。

これらの図より ω が増大して固有周期 ω_0 に近づくほどラーメンの崩壊が早められることが了解される。なお、図-9 の $\mu = 0.05$ で $\omega = 0.8 \omega_0$ および図-10 の

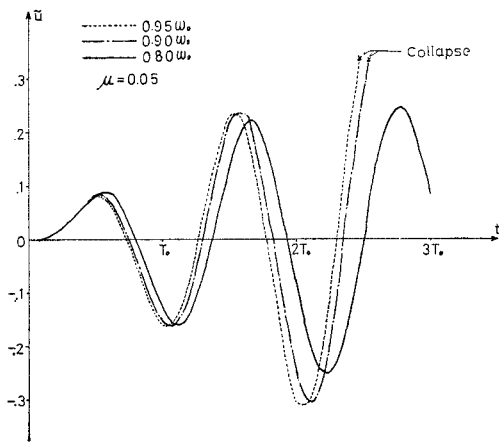


図-9 $\mu = 0.05$ の場合のたわみ曲線

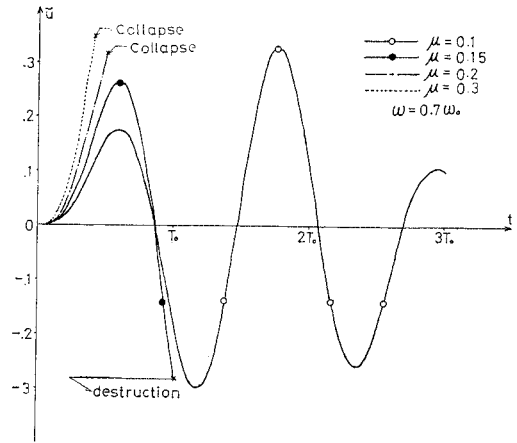


図-11 $\omega = 0.7 \omega_0$ における各荷重によるたわみ曲線

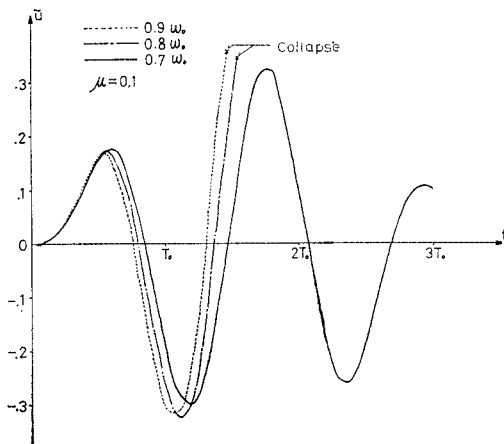


図-10 $\mu = 0.1$ の場合のたわみ曲線

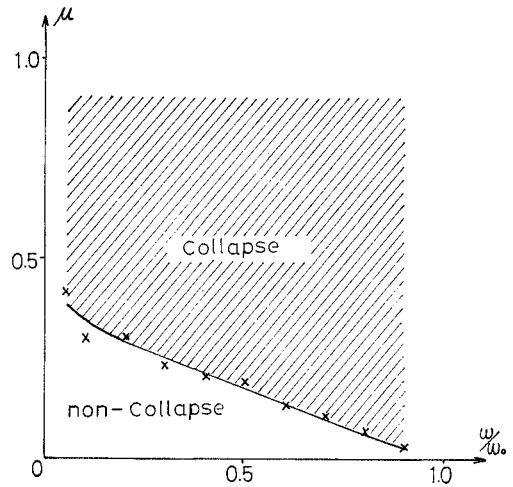


図-12 $\mu - \omega$ 相関曲線

$\mu=0.1$ で $\omega=0.7\omega_0$ では、いずれの場合もラーメンは崩壊せず完全弾性応答を示している。

次に ω を $0.7\omega_0$ に保ち、応答倍率 μ の及ぼす影響を検討し、これを 図—11 に示したが、当然のことながら μ が増大すれば、ラーメンの崩壊が早められることが看取される。

この種の外力に対して、以上の計算を押し進めることによりラーメンが崩壊しない限界を示す 図—12 のごとき μ - ω 相関曲線がえられた。さらに各種外力に対して同様な相関曲線を系統的に求めることにより、耐震設計上、重要な一つの安全指針がえられるが、この点については言及しない。

6. む す び

本論文は構造物の極限解析法に関する一手法を提案したものであり、その特色を挙げれば、次のとおりである。すなわち、その第1は、変数 α, β を導入することにより行列の元数と行列要素の配列を固定化したことであり、このため、塑性に関する初歩的な知識と行列演算についての若干の経験さえあれば、連続ばりやラーメンなどの曲げ崩壊挙動を在来の弾性変形法に準じて平易にかつ機械的に解明できること。また第2は逆行列の元数を減ずるために未知数を構成する一般変形量と塑性ヒンジ不連続角を別々に分けて算出する方法を採り、かつ柔性行列法を導入することにより各荷重に対して1回の逆行列計算で済ましようようにし、演算の合理化、短縮化を試みたこと、さらに第3としては、本法が変形硬化現象や、交番荷重に対する崩壊挙動の解明を始めとして動的問題にも広く活用できる普遍性を有することなどが挙げられる。なお、曲げモーメントと軸力が連成されるアーチや、曲げモーメントとねじりモーメントが同時に生じる格子桁や立体ラーメンなどに対しても、これらの組み合わせ応力下の塑性条件を導入すれば、本法に準じたそれぞれの極限解析法が同様の平易さをもって可能となるが、これらについては、別の機会に報告する予定であ

る。数値計算は、すべて九州大学大型計算機 FACOM 230-60 を用いた。本研究に関し多くの助言を賜った九州大学吉村教授に謝意を表します。

参 考 文 献

- 1) Neal, B.G. : The Plastic Methods of Structural Analysis, Chapman & Hall, pp. 70-90, 1963.
- 2) Hodge, P.G. : Plastic Analysis of Structures, McGraw-Hill Book Company, Inc. pp. 39-61, 1959.
- 3) 木原 博 : 塑性設計法, 培風館, pp. 41-42.
- 4) Neal, B.G. and Symonds, P.S. : The Calculation of Collapse Loads for Framed Structures, J. Inst. Civil Eng., pp. 21-40, 1950.
- 5) Daniels, S.R. : Inelastic Steel Structures, The University of Tennessee Press, pp. 85-108, 1966.
- 6) Majid, K.I. : Non-Linear Structures, Butterworths, pp. 181-222, 1972.
- Jennings, A. and Majid, K.I. : An Elastic-Plastic Analysis by Computer for Framed Structures Loaded up to Collapse, The Structural Engineer, Dec. 1965.
- 7) Davies, J.M. : The Response of Plane Frameworks to Static and Variable Repeated Loading in the Elastic-Plastic Range. The Structural Engineer, Aug. 1966.
- 8) 藤田 譲ほか : 構造物の塑性設計(その9), 日本造船学会論文集, 第124号, 昭和43年11月.
- 9) 上田幸雄ほか : マトリックス法による骨組構造物の弾塑性解析, 日本造船学会論文集, 第124号, 昭和43年11月.
- 10) 坂本 順ほか : 鋼構造骨組の弾塑性域における変形と安定性に関する考察(第II, III報), 日本建築学会論文集, 第113号, 第116号, 昭和40年7, 10月.
- 11) 児嶋弘行ほか : 平面剛滑節構造物の一自動極限解析, 土木学会論文報告集, pp. 463-468, 昭和46年10月.
- 12) 渡辺 昇ほか : 剛性マトリックスによる連続桁の塑性崩壊の解析, 第5回マトリックス構造解析法研究発表論文集, 昭和46年6月.
- 13) Livesley, R.K. : Matrix Methods of Structural Analysis pp. 38-46, Pergamon Press Limited.
- 14) 小坪清真 : 土木振動学, 森北出版, pp. 278-280.
- 15) Ohta, T. : Dynamic Respon of Elasto-Plastic Beams for Repeated Loading, 18th National Symposium on Bridge and Structure Engineering, 1972.
- 16) 山内二郎ほか : 電子計算機のための数値計算法 I, 培風館, pp. 137-159.

(1974.11.15・受付)