【討　議】

結城皓曠
前田幸雄 共著

“薄肉断面構造の三次元挙動の解析”への討議

（土木学会論文報告集第224号・1974年4月所載）

討　議

西　野　文　雄（東京大学）
倉　方　慶　夫（東京大学）
長谷川　彰　夫（名古屋工業大学）

著者も指摘されているように幾何学的非線型性を考慮して薄肉断面を有する棒部材を有限要素手法を用いて解析した研究は比較的少なく，同じ問題に関心を持つ者として興味深く読ませて頂いた。

変位の1次項に比して高次の項はすべて微少であり，無視できるとするのが微少変位理論であるのに対し，2次あるいはそれ以上の項も無視できないとするのが有限変位の立場である。したがって有限変位問題としての支配方程式を求めるにあたってまず必要なことは，変位の1次項に対しどの程度の高次項までを無視できない量として取り扱うかを考えることであり[25),26)]，演算においても考えている次数の項が失われないように十分注意する必要がある。

本論文中の変位表示した支配方程式（22）において K_1V は変位の線型項，K_2V, K_3V はそれぞれ変位の2次，3次の非線型項を表わしている。したがって著者は変位の1次項に比して3次項までが無視できないとする有限変位理論の立場をとっていると考えられる。K_2V は最低次数の非線型項であることから，有限変位を考えるとき，少なくとも K_2 を正しく評価する必要があり，そのためには変位の2次項の一部が失われるようなことがあってはならない。次いで本論文の立場では K_3 について同様の注意が必要となる。本論文と同じ問題を扱った川井・村木[8)]，および Barsoum・Gallagher[9)] の報告では微少変位理論での変位場を吟味することなくそのまま採用してひずみエネルギーを評価し，ポテンシャル・エネルギーの停留条件から剛性マトリックスを求めている。このため本来 K_2V に含まれるべき変位の2次の微少項の一部が失われており[25),27),28)]，著者も 3.(4) の考察のなかで指摘されているように最低次数の有限変位解析としても不十分なものとなっている。これに反して著者の求めた K_2 には変位の2次項で表わされる項はすべて含まれており，変位が比較的小さい場合に用いられる最低次数の有限変位解析として十分なものである。棒部材の有限要素手法による有限変位解析に対して，本論文の寄与する最も重要な点であろう。著者は特にことわっていないが K_2, K_3 の表式は唯一つに限らず，何通りもの表式が可能である[29)]。また一般的には式（22）で求めた剛性マトリックスをそのままの形で用いたとき，式（23）が成り立つとは限らない[29)]。著者の求めた式（28），（29）の剛性マトリックスは対称で，かつ式（22），（23）の関係が成り立つ条件のもとで求められたものであり，これらを求める過程で，苦心があったのではないかと想像される。

実用上は K_2V の次数で十分な精度が得られるものと想像され，K_3V が問題となることは少ないと思われるが，変位の3次項まで考慮する立場をとったとき，著者の微小項の取り扱いは必ずしも十分でない。この結果 K_3V に本来含まれるべき項の一部が失われていると思われるのでここに指摘したい。著者は式（7）の変位を考え，$\varphi \ll 1$ として式（7）′ を得ている。実際には式（7）の正弦，余弦関数をマクローリン展開した上で $\varphi^2 \ll 1$ と仮定し，1に対して φ^2 が無視されている。この仮定を変位に対して用いるかぎり，この変位から得られるすべての結果において，一般的には φ の1次項に対して φ の3次項の信頼性はないものといってよい。したがって K_1V に対して K_3V の項は不十分なものになっていると考えられる。事実，式（7）′ の，第2，第3式に本来含まれていた φ^3 の項を含めてひずみエネルギーの評価をすると，この項と変位 u, v, φ の1次項との積で表わされる変位の4次項が求まり，これから本来 K_3 に含まれるべき項の一部が式（29）の K_3 の表示では失われていることがわかる。なおすでに記述したように，式（7）から式（7）′ を得る条件として $|\varphi| \ll 1$ としても正弦，余弦関数をマクローリン展開したとき，1次おきに φ の高次

項が現われるため結果には影響をおよぼさないが，一般的には $\varphi^2 \ll 1$ と仮定すべきで，そうしないと $\boldsymbol{K}_1\boldsymbol{V}$ に対して $\boldsymbol{K}_2\boldsymbol{V}$ の精度に疑問が生じることになる。

著者は式 (28), (29) において $\boldsymbol{F\alpha}$ あるいは $\boldsymbol{F}$ の微係数と $\boldsymbol{\alpha}$ との積がスカラー量であることを考慮して，この量のマトリックス式中での位置を自由に変えている。すなわち式(28)の右辺中の I_{rr} に関する項の一つを例にとると，本来式 (67) の左辺となるものを $\dot{\boldsymbol{F}}_x\boldsymbol{\alpha}$ がスカラー量であり，$\boldsymbol{T}$ が定数マトリックスであることを考慮して右辺のように書きかえている。

$$\int_0^1 [\boldsymbol{T}^{-1}]^T \frac{I_{rr}}{l^4} \dot{\boldsymbol{F}}_\alpha{}^T \dot{\boldsymbol{F}}_x \boldsymbol{\alpha} \dot{\boldsymbol{F}}_4 [\boldsymbol{T}^{-1}] d\xi$$

$$= [\boldsymbol{T}^{-1}]^T \int_0^1 \frac{I_{rr}}{l^4} \dot{\boldsymbol{F}}_x \boldsymbol{\alpha} \dot{\boldsymbol{F}}_\alpha{}^T \boldsymbol{F}_4 d\xi [\boldsymbol{T}^{-1}] \cdots\cdots (67)$$

積分記号中の演算を最初に行うかぎり式 (67) の右辺の演算に問題はないが，定数マトリックス $\boldsymbol{T}^{-1}$ を積分記号の中に移すとマトリックス式として積の定義できない形になることから，意味のない式となっているといえる。したがって式 (67) の右辺の $\dot{\boldsymbol{F}}_x\boldsymbol{\alpha}$ については，この演算をまず行い，スカラー量として取り扱うという特別の記号を用いて表示する必要がある。式 (28), (29) 中の他項中のこの $\dot{\boldsymbol{F}}_x\boldsymbol{\alpha}$ に相当する項は括弧でくくられているが，マトリックス演算では結合法則が成り立つものとして，すなわち，

$$(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{BC}) = \boldsymbol{ABC} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (68)$$

の関係が成り立つものとして括弧を取り扱っていることを考えると括弧にくくるだけでは不十分であり，混乱を避けるためには $\dot{\boldsymbol{F}}_\alpha\boldsymbol{\alpha}$ に相当する量をスカラー量とわかる量におきかえて表示することが好ましいと思われる。

なお読んでいて次のさ細な点に気がついた。式 (16) の第1～第4式の右辺の $\boldsymbol{\alpha}$ は印刷上の間違いで不要なのではないか。式 (14) 中の $(Au'v'^2 + Au'w'^2)$ の項から導かれると思われる $\boldsymbol{K}_2$ 中の項を理解することができなかった。式 (14)，あるいは式 (28) 中の A に関する項の表示はこれでよいのであろうか。

参考文献

25) 西野文雄・倉方慶夫・長谷川彰夫・奥村敏恵：軸力と曲げおよびねじりを受ける薄肉断面部材，土木学会論文報告集，No. 225, pp. 1～15, 1974-5.

26) 西野文雄・倉方慶夫・後藤芳顕：一軸曲げと軸力を受ける棒部材の有限変位理論，土木学会論文報告集，No. 237, 1975-5.

27) 西野文雄・倉方慶夫・長谷川彰夫：坂井藤一著"薄肉開断面材の弾性安定基礎方程式の統一的誘導"（土木学会論文報告集，No. 221, 1974-1）に対する討議，土木学会論文報告集，No. 228, 1975-6.

28) 倉方慶夫・長谷川彰夫・西野文雄：築地恒夫著"軸力および保存ねじりモーメントによる柱の座屈"（土木学会論文報告集，No. 223, 1974-3）に対する討議，土木学会論文報告集，No. 240, 1975-8 予定

29) Rajasekaran, S. and D.W. Murry : Incremental finite element matrices, Journal of Structural Division, ASCE, Vol. 99, No. ST 12, Proc. Paper 10226, pp. 2423～2438, Dec. 1973.

回　答

結　城　皓　曠（石川島播磨重工(株)）

前　田　幸　雄（大　阪　大　学）

討議の内容は二項目あると考え，以下にそれぞれについて回答します。

1. 変位の3次項まで考慮していないから，$\boldsymbol{K}_3$ は $\boldsymbol{K}_1$ に対して十分でないという指摘であるが，著者らは，ひずみの変位による2次式である式 (8) で非線型性を十分表現できると考え，これを理論の出発点としている。また，重心軸の変位で表わした式 (9) においても，一般の構造物ではねじり角 φ の値は回軸角 v', w' と同じオーダーと考えられるので，φ についても2次項までを採用している。当然のことながら，変位がかなり大きくなれば，式 (8), (9) の適用範囲を超え精度が悪くなるが，この問題に対しては，**3.(2)** で述べているように，数値計算の段階で，u, v, w と同時に φ についても変形後の座標系による変位を用いて精度を確保している。

しかしながら，断面上の変位と重心軸の変位は式 (7) のように φ について非線型であるから，式 (9) において，φ の次数はなるべく高次まで採用した方が式 (9) の式 (8) に対する近似が良くなるといえよう。この意味では，討議者と同意見である。この場合，式 (8) に式 (7) を代入し，φ の3次項まで採用すると，(9), (14) および (29) の各式にそれぞれ次式が追加される。

$$\frac{1}{2}\eta\varphi^2 v'' + \frac{1}{2}\zeta\varphi^2 w'' \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (9)'$$

$$-\frac{E}{2}\int_l (I_{yy}\varphi^2 v''^2 + I_{zz}\varphi^2 w''^2 + I_{y\omega}\varphi^2 v''\varphi''$$
$$+ I_{z\omega}\varphi^2 w''\varphi'')\,dx \cdots\cdots\cdots (14)'$$

$$-El^3[\boldsymbol{T}^{-1}]^T \int_0^1 \Big[\frac{I_{yy}}{l^4} \{ (\boldsymbol{F}_\varphi\boldsymbol{\alpha})^2 \ddot{\boldsymbol{F}}_y{}^T \ddot{\boldsymbol{F}}_y$$
$$+ (\ddot{\boldsymbol{F}}_y\boldsymbol{\alpha})^2 \boldsymbol{F}_\varphi{}^T \boldsymbol{F}_\varphi + 2(\ddot{\boldsymbol{F}}_y\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{F}_\varphi\boldsymbol{\alpha})(\ddot{\boldsymbol{F}}_y{}^T \boldsymbol{F}_\varphi$$
$$+ \boldsymbol{F}_\varphi{}^T \ddot{\boldsymbol{F}}_y)\} + \frac{I_{zz}}{l^4}\{ (\boldsymbol{F}_\varphi\boldsymbol{\alpha})^2 \ddot{\boldsymbol{F}}_z{}^T \ddot{\boldsymbol{F}}_z$$
$$+ (\ddot{\boldsymbol{F}}_z\boldsymbol{\alpha})^2 \boldsymbol{F}_\varphi{}^T \boldsymbol{F}_\varphi + 2(\ddot{\boldsymbol{F}}_z\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{F}_\varphi\boldsymbol{\alpha})(\ddot{\boldsymbol{F}}_z{}^T \boldsymbol{F}_\varphi$$
$$+ \boldsymbol{F}_\varphi{}^T \ddot{\boldsymbol{F}}_z)\} + \frac{I_{y\omega}}{2l^5}\{ (\boldsymbol{F}_\varphi\boldsymbol{\alpha})^2 (\ddot{\boldsymbol{F}}_y{}^T \ddot{\boldsymbol{F}}_\varphi + \ddot{\boldsymbol{F}}_\varphi{}^T \ddot{\boldsymbol{F}}_y)$$
$$+ 2(\ddot{\boldsymbol{F}}_\varphi\boldsymbol{\alpha}\ddot{\boldsymbol{F}}_y\boldsymbol{\alpha})\boldsymbol{F}_\varphi{}^T \boldsymbol{F}_\varphi \cdot 2(\boldsymbol{F}_\varphi\boldsymbol{\alpha}\ddot{\boldsymbol{F}}_y\boldsymbol{\alpha})(\ddot{\boldsymbol{F}}_\varphi{}^T \boldsymbol{F}_\varphi$$

$$+\boldsymbol{F}_\varphi{}^T\ddot{\boldsymbol{F}}_\varphi)+2(\boldsymbol{F}_\varphi\boldsymbol{\alpha}\ddot{\boldsymbol{F}}_\varphi\boldsymbol{\alpha})(\ddot{\boldsymbol{F}}_y{}^T\boldsymbol{F}_\varphi+\boldsymbol{F}_\varphi{}^T\ddot{\boldsymbol{F}}_y)\}$$
$$+\frac{I_{z\omega}}{2l^5}\{(\boldsymbol{F}_\varphi\boldsymbol{\alpha})^2(\ddot{\boldsymbol{F}}_z{}^T\ddot{\boldsymbol{F}}_\varphi+\ddot{\boldsymbol{F}}_\varphi{}^T\ddot{\boldsymbol{F}}_z)$$
$$+2(\ddot{\boldsymbol{F}}_\varphi\boldsymbol{\alpha}\ddot{\boldsymbol{F}}_z\boldsymbol{\alpha})\boldsymbol{F}_\varphi{}^T\boldsymbol{F}_\varphi+2(\boldsymbol{F}_\varphi\boldsymbol{\alpha}\ddot{\boldsymbol{F}}_z\boldsymbol{\alpha})(\ddot{\boldsymbol{F}}_\varphi{}^T\boldsymbol{F}_\varphi$$
$$+\boldsymbol{F}_\varphi{}^T\ddot{\boldsymbol{F}}_\varphi)+2(\boldsymbol{F}_\varphi\boldsymbol{\alpha}\ddot{\boldsymbol{F}}_\varphi\boldsymbol{\alpha})(\ddot{\boldsymbol{F}}_z{}^T\boldsymbol{F}_\varphi$$
$$+\boldsymbol{F}_\varphi{}^T\ddot{\boldsymbol{F}}_z)\}\Big]d\xi \cdots\cdots (29)'$$

これらの式を追加することによって，実際の構造物を解析する場合，どの程度の精度向上が期待できるかについては，未検討である。

2. 式(28), (29)においてマトリックスの表示が誤っているという指摘であるが，説明が不十分であったと思うので，ここに，追加説明させていただく。

（1） $\boldsymbol{F}^T\boldsymbol{F}$ がマトリックスである。

（2） その前にかかる $\boldsymbol{F\alpha}$, $(\boldsymbol{F\alpha})^2$ などは，式 (15) からわかるようにスカラー量である。

（3） $\boldsymbol{\alpha}$ を一般化変位と考えると，積分記号の中は無次元の一般化剛性マトリックスで，前後にかかるマトリックス $\boldsymbol{T}$ は部材座標への変換を意味している。

なお，本来非線型である力と変位の関係を，線型式のマトリックス表示にならって，式 (22) のように表現するために変位の一部を含んだ形で式(28), (29)を表わしている。しかし，非線型項 $\boldsymbol{K}_2\boldsymbol{V}$ は，二次形式で表わし得るものであるから，プログラム化に際しては，次のように取り扱うと便利と思われる。たとえば, $\boldsymbol{K}_2$ の中の代表的な項は

$$\int_0^1 \boldsymbol{F}_\varphi\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{F}_y{}^T\boldsymbol{F}_z d\xi=\int_0^1\sum_{k=1}^{14}(f_{\varphi k}f_{yi}f_{zj}\alpha_k)d\xi$$
$$=\sum_{k=1}^{14}h_{ijk}\alpha_k$$

ただし，$h_{ijk}=\int_0^1 f_{\varphi i}f_{yi}f_{zj}d\xi$，$f$ は $\boldsymbol{F}$ の要素である。

このように，h_{ijk} は3つの添字付きデータとして取り扱うことができ，一般化変位 $\boldsymbol{\alpha}$ を分離することができる。同様に $\boldsymbol{K}_3$ についても，4つの添字付きデータと変位 $\boldsymbol{\alpha}$ に分離することができる。

討議の中で,「式 (22), (23) は何通りもの表現が可能で……」とあるが，誤解をさけるために，著者らの考えを述べさせていただく。式 (22) は，先にも述べた通り非線型式であるから，何通りもの表現が可能である。しかし，式 (22) をどのように表現しても，これから数学的に導かれる増分の式 (23) は線型式で，表現は唯一である。著者らは，このようにして導いた式 (23) の形にならって非線型式を整理し，式 (22) を導いている。このようにすれば，本文では述べていないが，ひずみエネルギー式 (14) も次のように表現することができる。

$$U=\frac{1}{2}\boldsymbol{V}^T\boldsymbol{K}_1\boldsymbol{V}+\frac{1}{6}\boldsymbol{V}^T\boldsymbol{K}_2\boldsymbol{V}+\frac{1}{12}\boldsymbol{V}^T\boldsymbol{K}_3\boldsymbol{V}\cdots(14)'$$

指摘いただいた部分を含め，本文の誤りをここで訂正したい。

1) 式 (16) の第1〜4式の右辺の $\boldsymbol{\alpha}$ は不要である。

2) 式 (28) の第2行第1項の $\dot{\boldsymbol{F}}_z\boldsymbol{\alpha}$ を $\dot{\boldsymbol{F}}_x\boldsymbol{\alpha}$ に訂正する。

3) 式 (29) を次のように訂正する。

第4行第2項 $(\dot{\boldsymbol{F}}_\varphi\boldsymbol{\alpha})^2\rightarrow\frac{1}{2}(\dot{\boldsymbol{F}}_\varphi\boldsymbol{\alpha})^2$

第5行第1項 $\dot{\boldsymbol{F}}_z{}^T\boldsymbol{\alpha}\rightarrow\dot{\boldsymbol{F}}_z\boldsymbol{\alpha}$

第8行第2項 $(\dot{\boldsymbol{F}}_\varphi\boldsymbol{\alpha}\ddot{\boldsymbol{F}}_z\boldsymbol{\alpha})\rightarrow(\boldsymbol{F}_\varphi\boldsymbol{\alpha}\ddot{\boldsymbol{F}}_z\boldsymbol{\alpha})$

4) Fig. 6 において $I_{yy}=605.6\,\mathrm{cm}^4$ に訂正する。

5) Fig. 10, Table 2 ともに振動次数の 3rd と 4th を入れかえる。

著者らの論文に対して，有益なご討議をいただき感謝します。