

## 開水路における波動の有限要素法解析

FINITE ELEMENT ANALYSIS OF WAVE PROPAGATION  
IN OPEN CHANNELS

坂井 藤 一\*・河合 三四郎\*\*

By Fujikazu SAKAI and Sanshiro KAWAI

## 1. ま え が き

水路を伝播する波動については、過去数世紀にわたり最も基本的な問題として研究が続けられてきた<sup>1)</sup>。その大部分は、解析的手法に基づくものか、または実験的手法に基づくものである。近年ではコンピュータの発達に伴って、差分法を用いた数値シミュレーションも採用されるに至っている。

解析的手法に基づく解析は、特定の問題に関しては比較的簡単に解が求まり、波動のアナログ情報を得るには適しているが、それだけに限られた場合にしか適用できない。実験的手法に基づくものは、任意の状況に応じて信頼性のあるデータを得ることができるが、その反面多大の設備や長期の観測などを必要とし、またデータは一般に非汎用的である。

コンピュータによる数値シミュレーションは数値実験とよばれることからわかるように、この点で従来の手法と異なる特色を持っている。それは、理論解析としてそれなりの前提を必要とするので万能というわけでは無論ないが、多目的プログラムによる種々の設計計画の検討なども簡便に行い得る利点がある。このような数値計算法として従来は差分法が用いられてきた。この例としてたとえば最近では伊藤・谷本の研究がある<sup>2)</sup>。

一方、急速な発展を遂げつつある有限要素法（以下 FEM と略称する）を波動数値解析に適用しようとする試みが最近なされつつある。FEM はもともと構造解析の手法として誕生したが、最近では流体を含む連続体の解析にも適用され、一般的数値解析法としての位置を確立したとあってよい。FEM と差分法ではそれぞれ特色

があるが、実際に取扱う上で FEM が便利なのはメッシュ分割の任意性と境界条件の処理の容易さにある。したがって、任意の地形や物体形状に応じて数値解析を行うおうとする場合、FEM の方が状況を正確に表現し易くまた汎用プログラムを作成し易いと思われる<sup>注1)</sup>。

本報告は、FEM の重力波動伝播問題への適用について論じたものである。この方面へ FEM を最初に適用したのは港湾固有振動の問題に適用した Taylor et al.<sup>4)</sup> であろうと思われるが、その後 Taylor et al.<sup>5)</sup> は非線形波動伝播解析に応用し、また、Galerkin 法の応用も報告している<sup>6)</sup>。周期的波動問題としては、Berkhoff<sup>7)</sup> が完全に開いた領域の屈折、回折問題に適用し、また、Bai<sup>8)</sup> は無限領域への伝播問題を Sommerfeld の放射条件を利用して解析する方法を示している。筆者らも、上記の研究とは異なる根拠（最小二乗法）に基づいて過渡的波動を解析する FEM 手法の試みを示した<sup>9), 10)</sup>。

本報告では任意形状の水路を伝播する重力波動の周期的問題に対して FEM 解析の手法と応用例を示すことにする<sup>\*</sup>。取扱った対象は微小振幅波平面二次元問題である。

注 1) FEM と差分法は一見異なる根拠に基づくと考えられるが、実はかなり等価な面を見出すことができる。波動方程式における代表的な差分スキーム Lax-Wendroff 法なども FEM の観点から導くことができる。また、差分法の方が FEM より有利な面もあり、筆者は両者を適当に組合わせることにより最も望ましい数値解法が考えられるのではないかと考え、これを仮に差分要素法とよんでいる<sup>9)</sup>。

たとえば、FEM ではメッシュを構成する各要素について要素マトリックスを導出しなければならないが、要素数の多い場合これに要する計算時間はかなりのものとなる。差分法では、規則的なメッシュを用いる場合、このような計算は省略されていると考えられる。しかしながら、境界条件の処理については変分学上の自然条件を利用する FEM のやり方が巧妙であろうと思われる。このような点から両者の特徴を活用することがもっと考えられてよい。

\* ) 本論は一部すでに発表した<sup>9)</sup>のものも含んでいる<sup>11)-13)</sup>。

\* 正会員 工博 川崎重工業(株) 鉄構設計室

\*\* 学生会員 理修 東北大学理学部地球物理学科博士課程

2. 基礎関係式と変分原理

(1) 基礎方程式

一般に重力波動の基礎方程式は、自由表面における水面変動を  $\bar{\eta}$  とする時、Fig. 1 に示すような  $x$ - $y$ - $z$  座標系に対して次のように書くことができる。

$$\frac{\partial^2 \bar{\eta}}{\partial t^2} - gH \left( \frac{\partial^2 \bar{\eta}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{\eta}}{\partial y^2} \right) = 0 \dots\dots\dots (1)$$

ただし、 $t$  は時間を示し、 $g$  は重力加速度であり、 $H$  は定数で次のように表わされる。

$$H = \frac{1}{k} \cdot \tanh kh \dots\dots\dots (2)$$

これは一般の重力波（浅水波）に対して成立するが、特殊な場合としては次のようになる。

$$H = h \quad (h/L < 1/25 \dots\dots \text{長波}) \dots\dots\dots (3)$$

$$H = 1/k \quad (h/L > 1/2 \dots\dots \text{深水波}) \dots\dots\dots (4)$$

ここで、 $k$  は波数であり、波長  $L$  とは次の関係にある。

$$k = 2\pi/L \dots\dots\dots (5)$$

また、振動数を  $\sigma$  とすると次の分散関係が成立する（ただし、長波の場合には非分散性である）。

$$\sigma^2 = kg \tanh kh \dots\dots\dots (6)$$

いま、問題が周期的であるとすれば、振幅を  $\eta$  として

$$\bar{\eta} = \eta e^{-i\sigma t} \dots\dots\dots (7)$$

したがって、式 (1) は次の Helmholtz 方程式となる。

$$\nabla^2 \eta + k^2 \eta = 0 \dots\dots\dots (8)$$

波動をそれぞれ  $x, y$  軸方向の進行波に分けて表現すれば、上式は次のように書き換えられる。

$$\left. \begin{aligned} \eta_{,x} \mp ik_x \eta &= 0 \\ \eta_{,y} \mp ik_y \eta &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (9)$$

ここで、 $k_x, k_y$  は  $x, y$  それぞれの方向の波数であり、次の関係がある。

$$k_x^2 + k_y^2 = k^2 \dots\dots\dots (10)$$

また、複号は進行する方向の正負を表わしている。

以後 ( )、は偏微分係数を、 $i$  は虚数単位を表わすものとする。

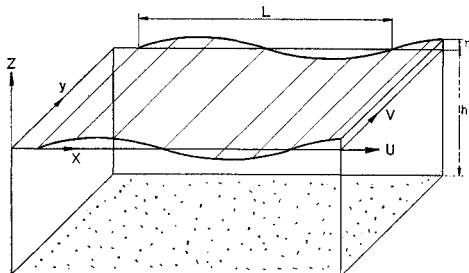


Fig. 1 Notations

(2) 境界条件

境界条件は次のような3種類を考えている。

1) 岸壁など常に波の腹になる境界線  $S_1$  上で、  

$$\eta_{,n} = 0 \quad \text{on } S_1 \dots\dots\dots (11)$$

ただし、 $n$  は境界線に対する外向き法線方向座標である。

2) 与えられた振幅を生ずる境界線  $S_2$  上で、  

$$\eta = \eta_{\text{given}} \quad \text{on } S_2 \dots\dots\dots (12)$$

境界が常に波の節になれば、

$$\eta = 0 \dots\dots\dots (12')$$

3) 平面波が無限の領域に伝播する場合には、適当な境界線  $S_3$  を仮想し、そこで次の条件が成立するとする。

$$\eta_{,n} \mp ik\eta = 0 \quad \text{on } S_3 \dots\dots\dots (13)$$

ただし、複号は境界から透過する場合と入射する場合を表わしている。

一般に FEM で連続体の境界値問題の解析を行う場合、しばしば無限に近い領域を対象としなければならないことが多い。通常われわれは静的な固体のつり合い問題や定常流れの問題において、Saint-Venant 原理とよばれる考え方を適用し、仮想の境界を設けて対象を有限領域に限定することによって、コンピュータ解析を可能にしている。式 (13) はこのような意味において、本来存在しない境界線を仮に設定した時、平面波がその境界をよぎる条件を与えている。これについては物理的に次のように説明できる。

$n$  方向に正または負の進行波が伝わる媒質の境界に特性インピーダンス  $Z$  が存在すれば、境界において次の式が成り立つ。

$$Z \frac{\partial \bar{\eta}}{\partial t} \pm H \frac{\partial \bar{\eta}}{\partial n} = 0 \dots\dots\dots (14)$$

ここで、無反射の境界となるのは  $Z$  が次の値を有する時である。

$$Z = \sqrt{H/g} \dots\dots\dots (15)$$

この時、 $Z$  は整合しているといい、この境界を完全終端という。周期的波動を考えればこれは式 (13) と同一となり、したがって、同一媒質が無限に続く領域への伝播を考えるには、この境界において整合インピーダンスを考えればよいことになる。この条件は差分法の場合にも最近利用されるようになった<sup>14)</sup>。しかし、後の取扱いに見るように FEM の方が境界条件の処理が容易である。

(3) 変分原理

対象とする閉領域を  $\Omega$ 、その境界を  $S$  とする (Fig. 2)。境界  $S$  は前述の3種の境界によって構成される。

$$S = S_1 + S_2 + S_3 \dots\dots\dots (16)$$

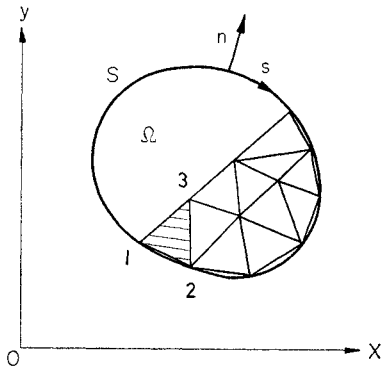


Fig. 2 An Analyzed Region

a) 仮想境界を含まない場合

いま、境界が  $S_1$  と  $S_2$  だけから構成される時には、 $\Omega$  内には定常波（完全重複波）しか存在しない。このとき次の汎関数を考える。

$$\pi = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\eta_{,x^2} + \eta_{,y^2} - k^2 \eta^2) d\Omega \dots\dots\dots (17)$$

この停留条件

$$\delta\pi = - \int_{\Omega} (\nabla^2 \eta + k^2 \eta) \delta\eta d\Omega + \int_S \eta_{,n} \delta\eta dS = 0 \dots\dots\dots (17')$$

から、次の Euler 方程式と境界条件を得る。

$$\left. \begin{array}{ll} \nabla^2 \eta + k^2 \eta = 0 & \text{in } \Omega \\ \eta_{,n} = 0 & \text{on } S_1 \\ \eta = \eta_{\text{given}} & \text{on } S_2 \end{array} \right\} \dots\dots\dots (18)$$

この原理を利用して港湾固有振動の FEM 解析法を提示したのは Taylor et al.<sup>4)</sup> である。

b) 仮想境界を含む場合

境界に  $S_3$  を含むような場合には、位相の推移が問題になるので、振幅  $\eta$  を複素数表示する。

$$\eta = \eta^c + i\eta^s \dots\dots\dots (19)$$

これを基本方程式 (8) に代入すれば、次の式を得る。

$$\nabla^2 \eta^c + k^2 \eta^c = 0, \nabla^2 \eta^s + k^2 \eta^s = 0 \quad \text{in } \Omega \dots\dots (20)$$

また、境界条件としては次の式を得る。

式 (11) から、

$$\eta_{,n^c} = 0, \eta_{,n^s} = 0 \quad \text{on } S_1 \dots\dots\dots (21)$$

式 (12) に対応して

$$\eta^c = \eta^c_{\text{given}}, \eta^s = \eta^s_{\text{given}} \quad \text{on } S_2 \dots\dots\dots (22)$$

式 (13) に対応して

$$\eta_{,n^c} \pm k\eta^s = 0, \eta_{,n^s} \mp k\eta^c = 0 \quad \text{on } S_3 \dots\dots (23)$$

このとき次の汎関数を考える。

$$\begin{aligned} \pi &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} [(\eta_{,x^c} \pm k_x \eta^s)^2 + (\eta_{,y^c} \pm k_y \eta^s)^2 \\ &\quad - (\eta_{,x^s} \mp k_x \eta^c)^2 - (\eta_{,y^s} \mp k_y \eta^c)^2] d\Omega \\ &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\eta_{,x^c}{}^2 + \eta_{,y^c}{}^2 - k^2 \eta^{c2} - \eta_{,x^s}{}^2 - \eta_{,y^s}{}^2 + k^2 \eta^{s2}) d\Omega \end{aligned}$$

$$\pm \int_{S_3} k \eta^c \eta^s ds \dots\dots\dots (24)$$

この停留条件は次のようになる。

$$\begin{aligned} \delta\pi &= - \int_{\Omega} [(\nabla^2 \eta^c + k^2 \eta^c) \delta\eta^c - (\nabla^2 \eta^s + k^2 \eta^s) \delta\eta^s] d\Omega \\ &\quad + \int_{S_1 + S_2} [\eta_{,n^c} \delta\eta^c - \eta_{,n^s} \delta\eta^s] ds \\ &\quad + \int_{S_3} [(\eta_{,n^c} \pm k\eta^s) \delta\eta^c - (\eta_{,n^s} \mp k\eta^c) \delta\eta^s] ds = 0 \dots\dots\dots (25) \end{aligned}$$

これより Euler 方程式として式 (20)、自然境界条件として式 (21) および式 (23)、拘束境界条件として式 (22) を得る。このように **b)** の場合はすべての境界条件を含み、また  $\eta^s = 0$  とすれば **a)** の場合に相当することになるので以後は **b)** の場合について述べることにする。

式 (24) の汎関数は、Bai<sup>5)</sup> が Sommerfeld の放射条件を利用して導いたものとほとんど同じである。彼はさらに、平面二次元波の場合に限り Hankel 関数の性質を利用して仮想境界条件として次の修正条件を与えている。

$$\eta_{,r} + \frac{1}{2r} \eta - ik\eta = 0 \dots\dots\dots (26)$$

ただし、 $r$  は  $x$ - $y$  平面内において波源からの距離を示す。

しかし、この条件が成り立つような場合、すなわち、ある種の点波源から放射されるような波動を問題にする場合よりも水路などでは主として平面波として扱われる問題が多いように見受けられる。その場合には、条件は式 (13) の方が適切である。ここでは、Bai と若干異なる観点から汎関数を導いている。すなわち、式 (24) の汎関数は二乗和の積分形をしており、式 (25) は停留二乗原理<sup>6)</sup> から導き得ることがわかる。

### 3. 一次元有限要素法

#### (1) 有限要素法の定式化

完全に波動が一次元的とみられる場合には、一次元（直線）要素に領域を分割して FEM を展開することができる。いま、Fig. 3 のような水路を考え、両端  $j$  および  $j+1$  を節点とする要素  $j$  の  $N$  個の集合から成る領域  $l$  を考える。領域  $l$  の外側は一様で無限に続くものとしておく。

要素  $j$  の長さを  $l_j$  とすれば、

<sup>6)</sup> 式 (24) では汎関数の正値性、最小性が保証されないの、式 (25) は最小二乗原理よりもむしろ停留二乗原理とよぶ方が妥当であると思われる。

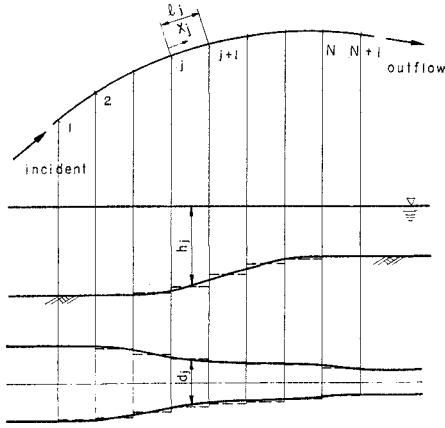


Fig. 3 One-Dimensional Canal

$$l = \sum_{j=1}^N l_j \dots\dots\dots (27)$$

また、要素  $j$  では一様水深  $h_j$  および一様水路幅  $d_j$  を仮定し、波数  $k_j$  が次の式で決定される。

$$\sigma^2 = k_j g \tanh k_j h_j \dots\dots\dots (28)$$

要素  $j$  について局所座標  $x_j$  を採り、要素内の振幅を次のように仮定する。

$$\left. \begin{aligned} \eta^c &= L_j \eta_j^c + L_{j+1} \eta_{j+1}^c \\ \eta^s &= L_j \eta_j^s + L_{j+1} \eta_{j+1}^s \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (29)$$

ただし、 $\eta_j^c, \eta_j^s, \eta_{j+1}^c$  および  $\eta_{j+1}^s$  は節点  $j$  および  $j+1$  における振幅の実部と虚部を表わす。また、 $L_j$  および  $L_{j+1}$  は次式で与えられる。

$$L_j \equiv 1 - x_j / l_j, \quad L_{j+1} \equiv x_j / l_j \dots\dots\dots (30)$$

汎関数は次のようになる。

$$\pi = \sum_{j=1}^N \int_0^{l_j} \frac{d_j}{2} [\eta, x_j^{c^2} - k^2 \eta^{c^2} - \eta, x_j^{s^2} + k^2 \eta^{s^2}] dx_j - k_1 d_1 \eta_1^c \eta_1^s + k_N d_N \eta_N^c + \eta_N^s \dots\dots\dots (31)$$

式 (29) を代入して

$$\left[ \begin{array}{ccccccc} \left(\frac{1}{l_1} - k_1^2 \frac{l_1}{3}\right) d_1 & & -k_1 d_1 & & & & \\ & -k_1 d_1 & & \left(-\frac{1}{l_1} + k_1^2 \frac{l_1}{3}\right) d_1 & & & \\ & & & & \left(\frac{1}{l_{j-1}} - k_{j-1}^2 \frac{l_{j-1}}{3}\right) d_{j-1} + \left(\frac{1}{l_j} - k_j^2 \frac{l_j}{3}\right) d_j & & 0 \\ & & & & & & \\ & & & & & & \left(-\frac{1}{l_{j-1}} + k_{j-1}^2 \frac{l_{j-1}}{3}\right) d_{j-1} + \left(-\frac{1}{l_j} + k_j^2 \frac{l_j}{3}\right) d_j \\ & & & & & & \\ & & & & & & \left(-\frac{1}{l_j} - k_j^2 \frac{l_j}{6}\right) d_j & & 0 \\ & & & & & & & & \\ & & & & & & & & 0 & \left(\frac{1}{l_j} + k_j^2 \frac{l_j}{6}\right) d_j \end{array} \right]$$

$$\begin{aligned} \pi = & \sum_{j=1}^N \frac{d_j}{2} \left[ \left\{ \eta_j^c, \eta_{j+1}^c \right\} ([B_j^1] - k_j^2 [A_j^1]) \right. \\ & \cdot \left. \left\{ \eta_j^c, \eta_{j+1}^c \right\} - \left\{ \eta_j^s, \eta_{j+1}^s \right\} ([B_j^1] - k_j^2 [A_j^1]) \right. \\ & \cdot \left. \left\{ \eta_j^s, \eta_{j+1}^s \right\} \right] - k_1 d_1 \eta_1^c \eta_1^s + k_N d_N \eta_N^c + \eta_N^s \dots\dots\dots (32) \end{aligned}$$

ただし、

$$\left. \begin{aligned} [B_j^1] &= \frac{1}{l_j} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \\ [A_j^1] &= \frac{l_j}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (33)$$

汎関数  $\pi$  の停留条件  $\delta\pi = 0$  に対応する次の条件、

$$\frac{\partial \pi}{\partial \eta_j^c} = 0, \quad \frac{\partial \pi}{\partial \eta_j^s} = 0 \quad (j=1, 2, \dots, N+1) \dots\dots\dots (34)$$

から、(35) のマトリックス方程式を得る。

明らかに……項を見れば、全体マトリックスは仮想境界 1 および  $N+1$  を含む要素に関するものを除いて、各要素についてのマトリックス (式 (36)) を重ね合わせて得られることがわかる。この事実を FEM では慣用的に重ね合せ則とよんでいる\*)。FEM の取り扱いにおいてはこの事実を利用して、要素についてのマトリックスをあらかじめ導き、その上で重ね合せ則を用いて全体マトリックスを構成するのが普通である。仮想境界 1 および  $N+1$  を含むような要素については、特別に付加項を考えればよい。このことによって FEM による汎用プログラムの作成がきわめて容易になることは注目すべきである。

このようにして構成された方程式を解けばよいわけで

\*) 以上のことが成り立つのは変分学上でいう汎関数の局所化の性質によってである。FEM がこの性質を巧妙に利用していることについては文献 3) で指摘した。

$$\left[ \begin{array}{cccc} \left(\frac{1}{l_j} - k_j^2 \frac{l_j}{3}\right) d_j & 0 & \left(-\frac{1}{l_j} - k_j^2 \frac{l_j}{6}\right) d_j & 0 \\ & \left(-\frac{1}{l_j} + k_j^2 \frac{l_j}{3}\right) d_j & 0 & \left(\frac{1}{l_j} + k_j^2 \frac{l_j}{6}\right) d_j \\ \text{sym.} & & \left(\frac{1}{l_j} - k_j^2 \frac{l_j}{3}\right) d_j & 0 \\ & & & \left(-\frac{1}{l_j} + k_j^2 \frac{l_j}{3}\right) d_j \end{array} \right] \dots\dots\dots (36)$$

あるが、式 (35) はこのままでは不定で解けない。何となれば、振幅を決定する条件が何も与えられていないからである。したがって、たとえば  $\eta_1^c = 1.0$  において、これに対応するものとして各節点における未知量  $\eta_j^c$ ,  $\eta_j^s$  を決定する。

いま、Fig. 3 では波が節点 1 で無限遠方から入射し、節点  $N+1$  で無限遠方に透過する場合を考えだが、他の場合には次のようにする。すなわち、節点 1 あるいは  $N+1$  に壁が存在するような場合には、 $k_1=0$  あるいは  $k_N=0$  とすればよい。この場合、領域内で完全重複波が形成されることになるから、 $\eta_j^s=0 (j=1, 2, \dots, N+1)$  になるようにする\*。

(2) 解析例

a) 一様水路の進行波

Fig. 4 は両端が開いた一様な水深と幅を有する水路における進行波の問題を解析し、解析法の妥当性と精度を検討してみた結果の一例である。この図は節点 1 から入射した波が節点 31 から透過する進行波を要素長  $dl=L/20$ 、水路長  $l=30 dl$  として解いた場合の  $\eta^c$  と  $\eta^s$  を示している。境界条件は、

- ① 節点 1 において、入射条件  
節点 31 において、 $\eta^c=0$  および  $\eta^s=1.0$

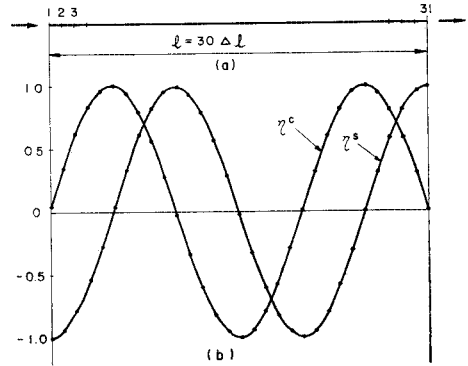


Fig. 4 One-Dimensional Wave in a Uniform Canal

② 節点 1 において、入射条件

節点 31 において  $\eta^s=1.0$  および透過条件の 2 ケースを考えだが、いずれにしても変わらない良好な結果が得られた。この例では  $dl=L/20$  で誤差 2% 程度であったが、その他の分割例の結果を比較すると要素の大きさは波長の 1/20 程度で十分であると思われる。

b) 水深の変化する水路の進行波

Fig. 5 (a) のような幅一様で水深変化のある水路(水深の比率 5.0 : 3.2)の一端から長波が入射し、他端から透過する問題を解析する。深い水路において 1 波長を 20 要素、また浅い水路を 16 要素で分割し、境界条件を次のように採る。

入射端において、 $\eta^c = -0.1$  および入射条件

\*必ずしもこのようにする必要はないが、この方が振幅の表現が実部だけとなりわかり易い。

$$\left[ \begin{array}{cccc} \left(-\frac{1}{l_j} - k_j^2 \frac{l_j}{6}\right) d_j & & 0 & \\ & 0 & \left(\frac{1}{l_{j+1}} + k_{j+1}^2 \frac{l_{j+1}}{6}\right) d_{j+1} & \\ \left(\frac{1}{l_j} - k_j^2 \frac{l_j}{3}\right) d_j + \left(\frac{1}{l_{j+1}} - k_{j+1}^2 \frac{l_{j+1}}{3}\right) d_{j+1} & & 0 & \\ & 0 & \left(-\frac{1}{l_j} + k_j^2 \frac{l_j}{3}\right) d_j + \left(-\frac{1}{l_{j+1}} + k_{j+1}^2 \frac{l_{j+1}}{3}\right) d_{j+1} & \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \eta_1^c \\ \eta_1^s \\ \vdots \\ \eta_j^c \\ \eta_j^s \\ \eta_{j+1}^c \\ \eta_{j+1}^s \\ \vdots \end{array} \right\} = \{0\} \dots (35)$$

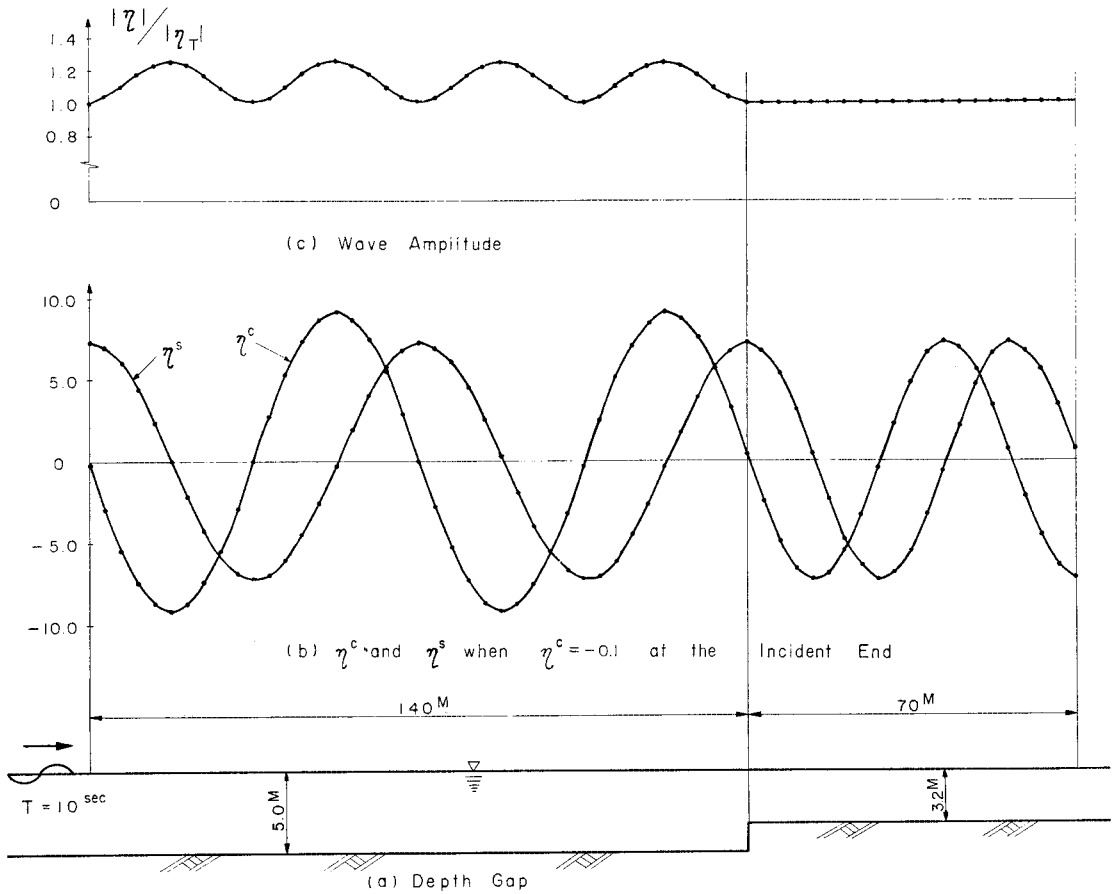


Fig. 5 An Illustrative Model of Canal with Variable Depth

透過端において、透過条件

$\eta^c$  および  $\eta^s$  の分布を Fig. 5 (b)、透過端の値でノルマライズした絶対振幅  $|\eta| = \sqrt{(\eta^c)^2 + (\eta^s)^2}$  を Fig. 5 (c) にそれぞれ示してある。絶対振幅の分布は、入射側水路で部分重複波が形成され、透過側水路で透過波が伝播することを如実に示している。これより、反射率  $\beta$  および透過率  $\tau$  は次のように求めることができる。

$$|\eta|_{\max} = 1.25, |\eta|_{\min} = 1.00$$

$$|\eta_T| = 1.00 \quad (\text{計算結果より})$$

$$|\eta_I| = \frac{|\eta|_{\max} + |\eta|_{\min}}{2} = 1.125$$

$$|\eta_R| = |\eta|_{\max} - |\eta|_{\min} = 0.125$$

$$\beta = |\eta_R|/|\eta_I| = 0.111, \tau = |\eta_T|/|\eta_I| = 0.889$$

この結果は理論的に導かれる次の値にきわめて良く一致する。

$$\beta_{th} = \frac{1/\sqrt{3.2} - 1/\sqrt{5.0}}{1/\sqrt{3.2} + 1/\sqrt{5.0}} = 1/9$$

$$\tau_{th} = \frac{2 \times 1/\sqrt{5.0}}{1/\sqrt{3.2} + 1/\sqrt{5.0}} = 8/9$$

### (3) 応用について

堀川・西村<sup>15)</sup>は水路の断面変化に伴う一次元長波の伝播問題を論じ、数値計算法として Neumann 法を紹介している。この方法は、FEM と同様に領域を一様な部分領域に分割し、その接続点における流量と振幅を未知数として隣接点間の関係を記述し、境界条件を考慮してその未知数を決定するものである。

このやり方は構造力学でよく用いられる遷移行列法<sup>16)</sup> (transfer matrix method) と同じものと思われ、連結体を離散化する一手法としてより一般的な観点からとらえることができる。遷移行列法では、部分領域両端の関係を示すのに field matrix、接続点両側の関係を示すのに point matrix とよぶ用語を用いる。

ここで展開した FEM 手法は、このような Neumann 法を基礎において異なるものであるが、同じように一次元波動解析の一般的手法として有用であろう\*)。特に、

\*) 遷移行列法と FEM の利害得失は一概にいえないが、数値精度や境界条件の取扱いにおいて FEM の方が便利と思われる。

FEM 汎用プログラムは、複雑な形状と断面変化のある水路網解析の自動化を可能にし、従来の電氣的相似法<sup>17)</sup>などに代るものとして活用されると思われる。さらに、本方法は非線形波動のネットワーク解析へ拡張される可能性も有していると思われる。

#### 4. 二次元有限要素法

##### (1) 有限要素法の定式化

波動が平面二次元波とみられる場合には、Fig. 2 に示すように領域を三角形あるいは四角形などの平面要素で分割して FEM を展開する。ここでは、最も普通に用いられる三角形要素を用いることにする。Fig. 2 において、対象領域  $\Omega$  を節点 1, 2, 3 を有するような要素  $j$  の集合と考える。総節点数を  $M$ 、総要素数を  $N$  とする。要素  $j$  の内部で一様水深  $h_j$  を仮定すれば、波数  $k_j$  は一次元の場合と同様に式 (28) で決まる。要素  $j$  の内部において振幅を次のように仮定する。

$$\begin{aligned} \eta^c &= \{L_j^T\} \{\eta_j^c\} \\ \eta^s &= \{L_j^T\} \{\eta_j^s\} \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (37)$$

ここで、 $\{L_j^T\} = \{L_1, L_2, L_3\}$  は Fig. 6 に示すような面積座標であり、 $\{\eta_j^c\}$  および  $\{\eta_j^s\}$  は次の式で定義される。

$$\{\eta_j^c\} = \begin{Bmatrix} \eta_1^c \\ \eta_2^c \\ \eta_3^c \end{Bmatrix}, \quad \{\eta_j^s\} = \begin{Bmatrix} \eta_1^s \\ \eta_2^s \\ \eta_3^s \end{Bmatrix} \quad \dots\dots\dots (38)$$

式 (24) に式 (37) を代入すれば、汎関数  $\pi$  は次のようになる。

$$\pi = \sum_{j=1}^N \frac{1}{2} \{\eta_j^{cT}, \eta_j^{sT}\} \begin{bmatrix} [D_j] & [E_j] \\ [E_j] & -[D_j] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \eta_j^c \\ \eta_j^s \end{Bmatrix} \quad \dots\dots\dots (39)$$

ここで

$$\begin{aligned} [D_j] &= [B_j] + [C_j] - k_j^2 [A_j] \quad \dots\dots\dots (40) \\ [A_j] &= \int_{A_j} \{L\} \cdot \{L^T\} d\Omega \\ [B_j] &= \int_{A_j} \frac{\partial}{\partial x} \{L\} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \{L^T\} d\Omega \\ [C_j] &= \int_{A_j} \frac{\partial}{\partial y} \{L\} \cdot \frac{\partial}{\partial y} \{L^T\} d\Omega \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (41)$$

ただし、 $A_j$  は要素  $j$  の面積である。

また、 $[E_j]$  は仮想境界を含む要素について考える。

$$[E_j] = \nu \begin{bmatrix} \frac{s_3 \delta_{3p} + s_2 \delta_{2p}}{3} & \frac{s_2 \delta_{2p}}{6} & \frac{s_3 \delta_{3p}}{6} \\ \frac{s_1 \delta_{1p} + s_2 \delta_{2p}}{3} & & \frac{s_1 \delta_{1p}}{6} \\ \text{sym.} & & \frac{s_1 \delta_{1p} + s_3 \delta_{3p}}{3} \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots (42)$$

ただし、クロネッカーのデルタ  $\delta_{ip}$ ...では、辺 1, 2, 3

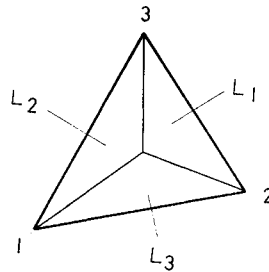


Fig. 6 Area Co-ordinates

の中で仮想境界となるものを  $p$  とする。 $s_1, s_2, s_3$  は要素の辺の長さを示す。 $\nu$  は対応する要素の辺が仮想境界上にある時は 0、仮想境界上にあつて流出の時は  $k$ 、入射の時は  $-k$  とする。

汎関数  $\pi$  の停留条件、

$$\frac{\partial \pi}{\partial \eta_m^c} = 0, \quad \frac{\partial \pi}{\partial \eta_m^s} = 0 \quad (m=1, 2, \dots, M) \quad \dots\dots (43)$$

から、次のマトリックス式を得る。

$$\sum_{j=1}^N \left( \begin{bmatrix} [D_j] & [E_j] \\ [E_j] & -[D_j] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \eta_j^c \\ \eta_j^s \end{Bmatrix} \right) = 0 \quad \dots\dots\dots (44)$$

すなわち、各要素のマトリックス  $[D_j], [E_j]$  を構成し、これらを重ね合わせることによって全体のマトリックス式 (44) を得る。これを所与の振幅に関する境界条件のもとに解けばよい。後の取扱いについては、3.(1) に述べた一次元の場合とまったく同様である。

##### (2) 解析例

###### a) 屈曲した港湾における津波(長波)の変形

Fig. 7 (a) に示すような屈曲した水深一定の港湾に左方から長波が進入する問題を解析する。堀川・西村<sup>15)</sup>は屈曲角が  $90^\circ$  および  $45^\circ$  の場合について実験を行い、いずれの場合にも断面変化を伴わない単なる屈曲は長波に対しほとんど影響を及ぼさないと結果を示している。ここでは、計算モデルを上記実験と同一寸法のものとし、FEM 解析によって数値実験を行うことにする。

堀川らの実験では技術上の困難さを避けるために、屈曲部より後の水路に壁を設けて、その重複波高を観察している。FEM 解析における計算モデルは Fig. 7 (a) および (b) に示されているが、(b) の場合は屈曲部(断面 A-A と B-B の間の部分)が異なるだけである。解析においては、断面 B-B に壁が存在する場合およびそこから自由に透過する場合の両方を Fig. 7 のようなメッシュ分割の下に同様に扱っている。

結果は屈曲部近傍の振幅(入射波振幅に対する比)分布を  $kd$  の特定の値について示した。ここで、 $k$  は波数であり、 $d$  は水路幅である。

壁が断面 B-B に存在する場合の結果を Fig. 8 (a), (b), (c) および (d) について示す。壁直前の波高は一樣に入射波高のほぼ 2 倍となり、これは実験事実と符号する。

直角に屈曲した水路を長波が伝播する問題に対しては、桃井<sup>19)</sup>が 2重 Fourier 級数を用いることによって

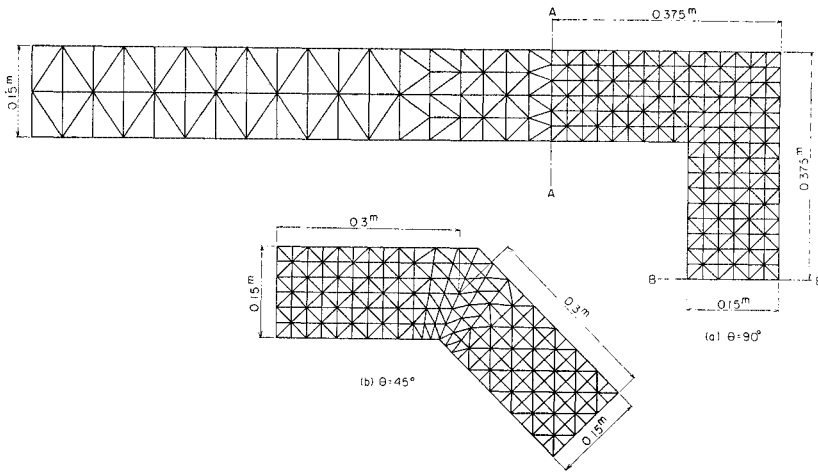


Fig. 7 Models (Depth=0.1 m) and Mesh Division

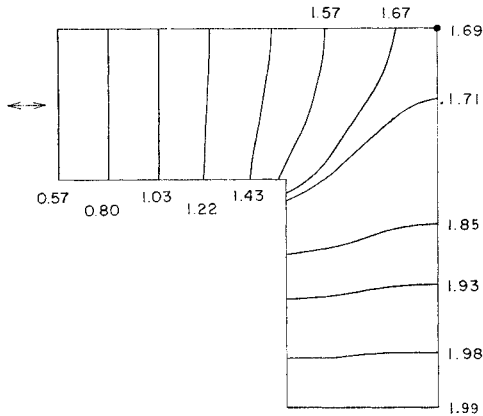


Fig. 8 (a) Variation of the Amplitude for  $kd=0.34$

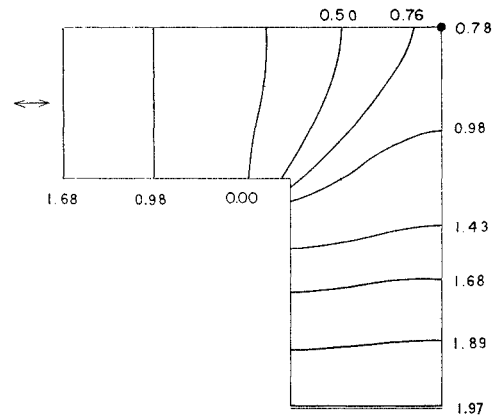


Fig. 8 (b) Variation of the Amplitude for  $kd=0.68$

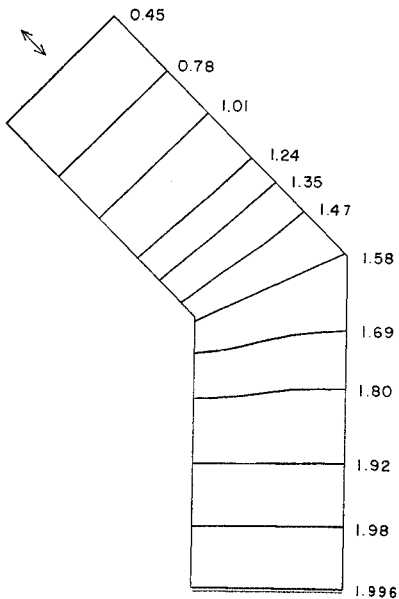


Fig. 8 (c) Variation of the Amplitude for  $kd=0.34$

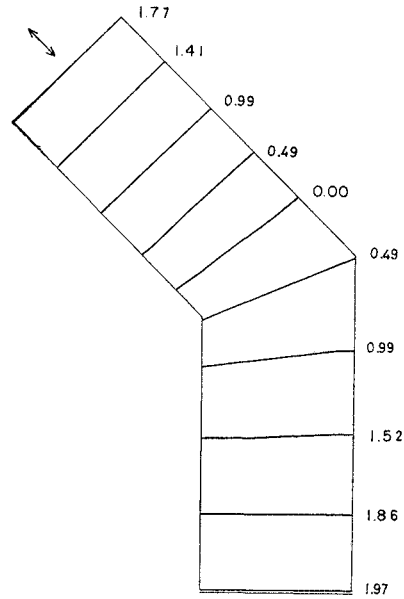
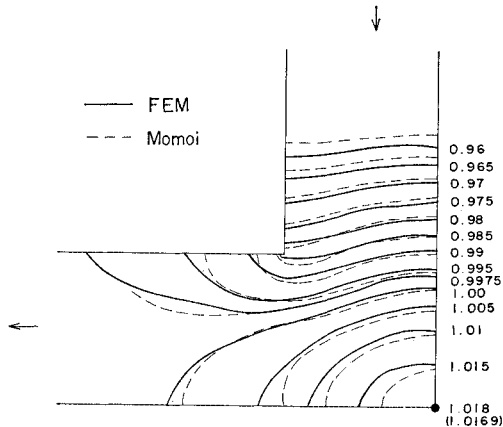


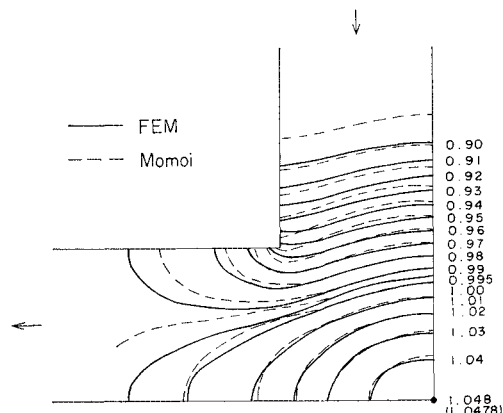
Fig. 8 (d) Variation of the Amplitude for  $kd=0.68$



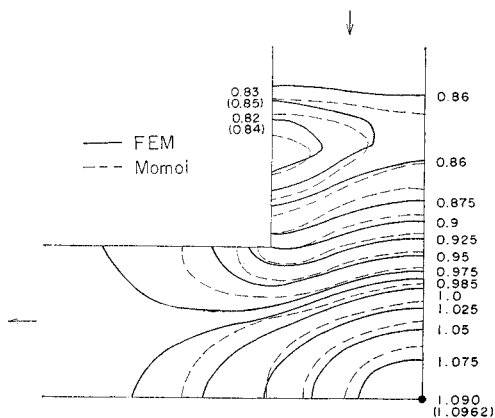
解析解を導いている。彼の解析結果によれば  $kd \leq 1.0$  という条件の下に波はほとんど透過することがわかっている。FEM 解析の結果と上記解析解を比較したのが、**Fig. 9** (a), (b), (c) および (d) である。図中、実線は FEM 解、破線は解析解を表わす。また、水路の角点 (●印点) における振幅を記入してあるが、( ) 内は解析解の値である。これらの結果は、両者が傾向的に



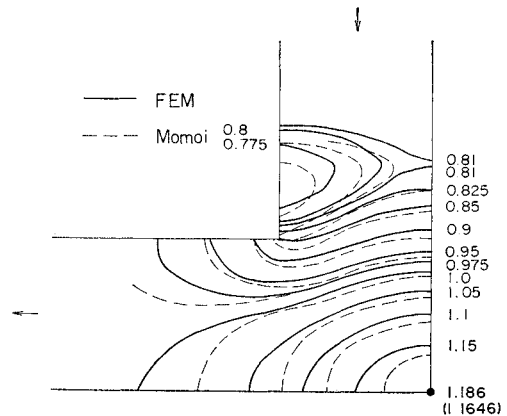
**Fig. 9 (a)** Variation of the Amplitude for  $kd=0.3$



**Fig. 9 (b)** Variation of the Amplitude for  $kd=0.5$



**Fig. 9 (c)** Variation of the Amplitude for  $kd=0.7$



**Fig. 9 (d)** Variation of the Amplitude  $kd=0.9$

まったく一致し、その数値上の相違もただか数%であることを示している。

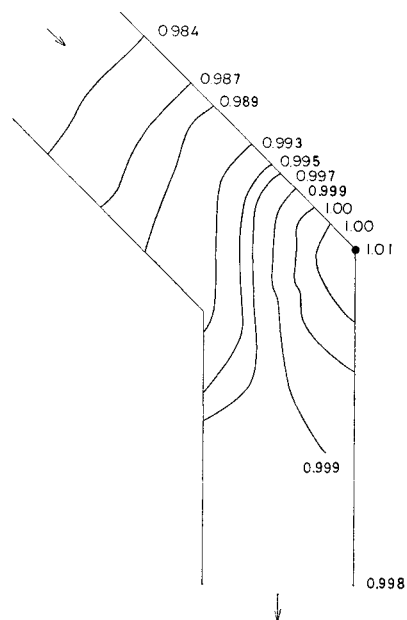
斜め  $45^\circ$  に屈曲した水路を長波が伝播する場合についての FEM 解析結果を **Fig. 10** (a), (b) および (c) に示す。透過率はほぼ 1.0 となり、上述の結果とともに実験からの堀川らの推論を裏づけている。

なお、位相の推移については挙げていないが、桃井の結果との良い一致を確認した。

**b) 曲線水路における長波の変形**

Johns et al.<sup>20)</sup>は **Fig. 11** に示すような水深一定の曲線状水路に進入した長波が後方で反射される重複挙動を解析的に求めている。彼の解析では円弧曲線部の外径と内径の比が 2 以上という近似上の制限が課されている。

**Fig. 11** に示したメッシュ分割の下に求めた FEM



**Fig. 10 (a)** Variation of the Amplitude for  $kd=0.34$

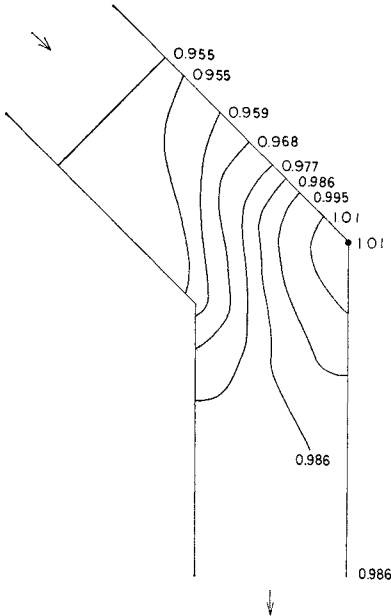


Fig. 10 (b) Variation of the Amplitude for  $kd=0.68$

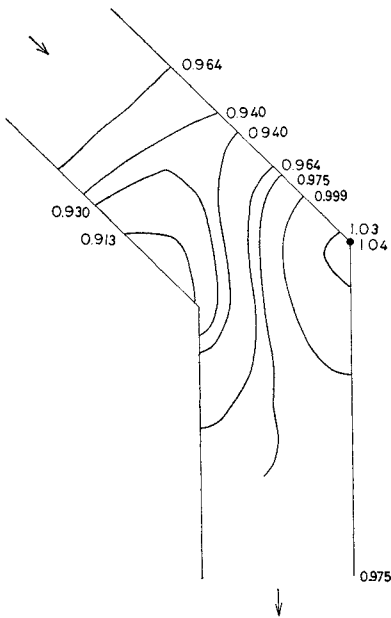


Fig. 10 (c) Variation of the Amplitude for  $kd=1.0$

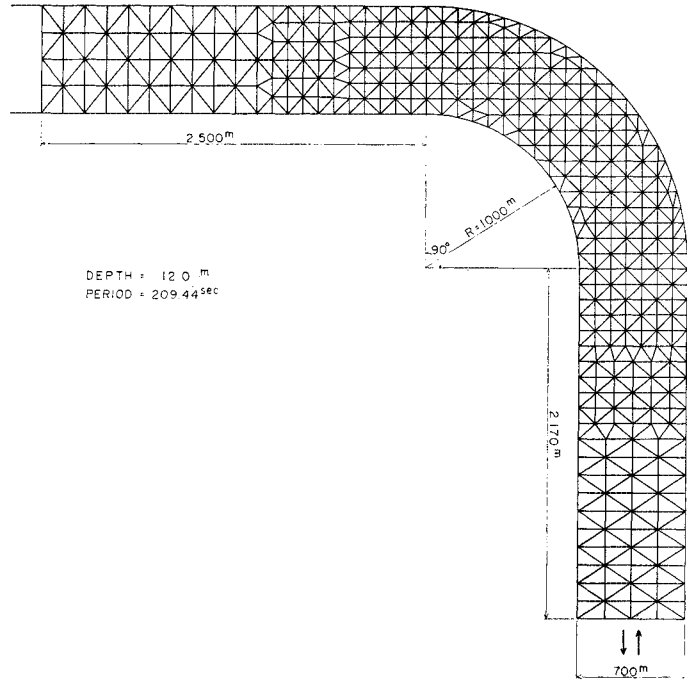


Fig. 11 Curved Canal and Mesh Division

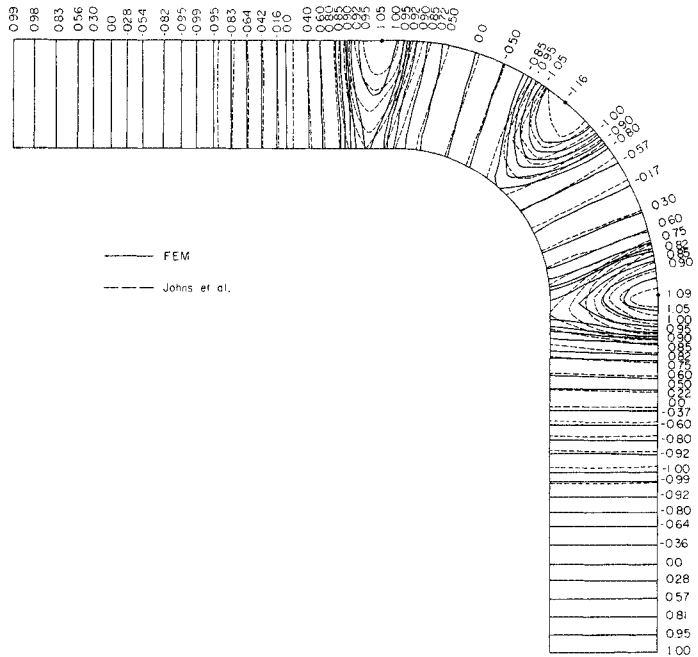


Fig. 12 Variation of Wave Amplitude

解と解析解の比較を振幅（入射波振幅×2 に対する比）分布について Fig. 12 に示す。若干の相違を除き両者は良く一致している。相違の原因はむしろ解析解における級数の項数（1項のみ）にあると考えられる。

次に Fig. 13 に示すような循環水槽の波動を解析す

る。モデルの水深は、20.0 cm とし、これに波長 4000 m の長波が図の上側の水路に進入し、図の下側の水路から透過するものとする。メッシュ分割も Fig. 13 に示されている。

振幅の分布を Fig. 14, 位相の推移状況を Fig. 15 に



平面二次元波の場合従来の実験結果や理論解と FEM 解析の結果を比較し、本論で述べた FEM 手法が十分信頼に足るものであることを示した。結論として、FEM 手法をこの種の問題に適用した場合の特長は以下のようである。

- (1) メッシュ分割の任意性から、任意形状の水路に適用可能であり、また局所的な現象を詳しく知ることができる。
- (2) 水深変化を考慮できる。
- (3) 理論解における適用上の制限あるいは実験における技術的制限を克服できる。
- (4) 境界条件の取扱いが容易であり、汎用プログラムにより多種多様な問題の解析が可能である。

FEM 手法は本論と同様の考え方の下に鉛直方向の境界条件の変化を考慮に入れた三次元的波動の問題にも適用され得る。また、本論文で取扱っていないが、水路に open sea が含まれるような場合についても FEM 手法の適用が考えられる。現在、仮想境界を利用して無限領域への波動伝播を解析する FEM 手法の系統的な取扱いを研究中である。

謝 辞：本報告は、川崎重工業（株）鉄構事業部設計室の技術開発研究に関連して、開発途上にある波浪解析汎用プログラムの一応用を述べたものである。研究の機会を与えられた室長 岡田統夫氏および元課長 人見昌地氏に深甚なる謝意を表す。また、同僚 月岡康一氏には資料提供や討議をして載いた。氏のご協力に感謝する。

## 記 号

$t$	: 時間
$x-y-z$	: 座標系
$\bar{\eta}(x, y, t), \eta(x, y)$	: 自由表面における水面変動および振幅
$g$	: 重力加速度
$h$	: 水深
$L$	: 波長
$k, k_x, k_y$	: 波数およびその成分
$\sigma$	: 振動数
$\Omega$	: 対象とする閉領域
$S$	: 対象領域の境界
$S_1$	: 固定壁境界
$S_2$	: 振幅の指定された境界
$S_3$	: 仮想境界
$n, s$	: 境界線に対する外向き法線方向および接線方向の座標

$\beta, \gamma$	: 反射率および透過率
$d$	: 水路幅

## 参 考 文 献

- 1) Lamb, H.: Hydrodynamics, Sixth Edition, Dover Publ., 1932.
- 2) 伊藤喜行・谷本勝利：数値波動解析法とその応用——構造物周辺の波——，第 18 回海岸工学講演会論文集，1971.
- 3) 坂井藤一：有限要素法と差分法の等価性およびある離散化手法，土木学会論文報告集，第 220 号，1973.
- 4) Taylor, C., B.S. Patil and O.C. Zienkiewicz: Harbour oscillation: a numerical treatment for undamped natural modes, Proc. ICE, Vol. 53, June 1969.
- 5) Kibirige, S., C. Taylor and P.L. Arlett: A finite element solution of the wave equation using a reduced variational formulation, in Dynamic waves in civil engineering, Wiley, 1971.
- 6) Zienkiewicz, O.C. and C. Taylor: Weighted residual processes in finite element with particular reference to some transient and coupled problems, in Lectures on finite element methods in continuum mechanics, UAH Press, 1973.
- 7) Berkhoff, J.C.W.: Computation of combined refraction diffraction, Proc. 20th international conference of coastal engineering, 1972.
- 8) Bai, K.J.: A variational method in potential flows with a free surface, Report No. NA 72-2, University of California, Sept. 1972.
- 9) 坂井藤一・河合三四郎：有限要素法による表面波の数値解析，マトリックス構造解析シンポジウム論文集，日本鋼構造協会，1973.
- 10) 坂井藤一・河合三四郎：波動解析への有限要素法の適用，第 20 回海岸工学講演会論文集，1973.
- 11) 坂井藤一：無限領域への波動伝播について，京都大学数理解析研究所「有限要素法の数学的基礎理論」講究録，1974.
- 12) 人見昌地・坂井藤一・月岡康一：波動伝播問題の数値シミュレーションについて，土木学会第 5 回海洋開発シンポジウム，1974.
- 13) 坂井藤一・河合三四郎：任意の開水路における波動の FEM 解析，第 29 回土木学会年次学術講演会概要，1974.
- 14) 伊藤 剛：非定常運動の境界条件について，第 18 回水理講演会論文集，1974.
- 15) 堀川清司・西村仁嗣：港湾の屈曲および断面変化に伴う長波の変形，第 20 回海岸工学講演会論文集，1973.
- 16) Kersten, R.: Das Reduktionsverfahren der Baustatik, Springer-Verlag, 1962 (伊藤学ほか訳，構造力学における還元法，技報堂).
- 17) 岩崎敏夫・楊沢民：湾内津波の計算 (1)，第 16 回海岸工学講演会論文集，1969.
- 18) 桃井高夫：L字水路における津波，地震研究所報告，1965.
- 19) Johns, B. and A.M.O. hamzah: Long standing waves in a curved canal, J. Fluid Mech., Vol. 34, 1968.
- 20) 坂井藤一・月岡康一：有限要素法による波浪制御法の検討——レゾネータについて，第 29 回土木学会年次学術講演会概要，1974.

(1974.11.25・受付)