

フラップゲートの振動についての理論解析

THEORETICAL ANALYSIS OF FLAP GATE OSCILLATION

本 間 仁*・萩原国宏**

By Masashi HOM-MA and Kunihiro OGIHARA

1. はじめに

フラップゲートに発生する振動現象については、かなり多くの人々によって指摘され、そのほとんどの場合にはフラップゲートより落下する水脈を切断するスポイラーをつけることによって振動の発生を防止することができることとされ、実行され成功している。そのスポイラーも取り付け間隔、形状などに決定的なものではなく、それぞれ工夫されたものが使われている。

このゲートに発生する振動（自励振動）は水流よりエネルギーの供給を受けて、振動が発生すればいつまでも持続するものである。

このゲートの振動およびナップの脈動現象については、Petrikat¹⁾ (1958) 以来、何人かの人々によって研究されてきているが、いまだよくわからない点が多い。振動の原因を越流水に原因を求めた研究は巻幡²⁾ のゲートに関する研究がある。また水脈下の空気の原因を求めた研究としては、砂防ダムよりの落下水の振動の観測および実験を行った西川³⁾ の研究、ナップの振動を扱った Schwarz, H. Ivan⁴⁾ の研究がある。この二例はゲートの振動ではなくナップに主眼点がおかれている。ナップとゲートの振動を結びつけた研究は Hans-Werner Partenscky⁵⁾ ほかのものがあるが、自由度 1 の振動を自由度 3 として扱っている点で問題がある。

これらの研究によって、振動現象の不安定原因はかなり明確になってきているが、i) ゲート上の流れ、ii) ゲート先端より落下する水脈、iii) 落下した水脈の下流水面上で発生する乱れ、iv) 水脈下の空気、v) 下流の流れの状況などの各種の現象が相互に関連していて、どこに解析モデルの主眼をおくか、またそれを運動方程式にどのように表わすかという観点で難しい問題が残されて

いる。

この論文では ii), iv) に主眼点をおき 1 自由度の回転運動の方程式を作り不安定問題として解いてみた。この解析方法によってフラップゲートに発生する大きな振動は説明できると考えているが、詳細は模型実験との比較をしたい。しかし、本論文は理論のみを扱い、実験は引き続き一つの論文としてまとめることにしている。

2. 基礎方程式

(1) 振動方程式

フラップゲートの振動方程式は、ゲートのたわみ振動を考えに入れられない限り、1 自由度の回転運動によると考えて良い。したがって、ゲートの慣性モーメント I 、ゲート先端で、ばね定数 k のばねで支持されているとすると次のような式を得る。

$$I\ddot{\theta} + R_0\dot{\theta} + kl^2\theta = F(\theta, t) \dots\dots\dots (1)$$

$\ddot{\theta}$, $\dot{\theta}$ はそれぞれ時間による 2 階, 1 階の微分を示す。 R_0 は粘性減衰係数で、ゲート上にある水の量とか流れによって変化する。また I はゲート質量による慣性モー

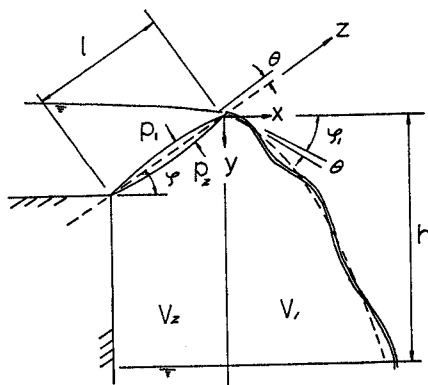


図-1

* 正会員 工博 東洋大学教授 工学部土木工学科
** 正会員 工博 東洋大学助教授 工学部土木工学科

ント I_0 のほかに, ゲート上に存在する水による付加質量による慣性モーメント I_a も考えにいけないといけな
い。すなわち

$$I = I_0 + I_a \dots\dots\dots(2)$$

であり, また I_a はゲート上の水の量, 流れの状態によ
って異なると考えられる。

ゲートに働く外力としては, 流れの乱れによる力, ゲ
ート下の水脈の落下によって生ずる空気の流れによる力
などが考えられる。そこで 図-1 のごとく, ゲート上
面に働いている圧力 p_1 の変動部分を p_1' , 下面に働い
ている圧力 p_2 のそれを p_2' とすれば

$$F(\theta, t) = \int_A p_2' Z dA - \int_A p_1' Z dA \\ = p_2' - p_1' \dots\dots\dots(3)$$

である。 p_1', p_2' には流れ自身の乱れなどによる圧力変
動も含まれているわけであるが, ここではゲートの自励
振動について考えるので, $F(\theta, t)$ のうち t の項は $\theta(t)$
の項の中に含めることにして, θ の変動に伴う p_1', p_2'
の変動を考えることにする。ゲート上面の圧力はゲート
開度の関数と考えても良いので, 各ゲート開度 (φ) でゲ
ートに働く圧力を p_1 とし, それをゲート全体について
まとめた力の支点に関するモーメントを F_1 とすれば

$$F_1(\varphi) = \int_A p_1 \cdot dA \cdot Z = \int_0^l B \cdot p_1 \cdot Z \cdot dZ \dots\dots(4)$$

となる。したがってこの θ による変動量を求めれば P_1'
が求まる。よって

$$P_1' = \frac{dF_1(\varphi)}{d\varphi} \cdot \theta = \left[\int_0^l B \cdot \frac{dp_1}{d\varphi} \cdot Z \cdot dZ \right] \theta \dots\dots(5)$$

と書くことができる。

次に P_2' であるが, これはゲート下およびナップ下の
空気の体積の増減による圧力変動とみなせば, ボイルシ
ャールの法則にしたがって

$$p_2 \cdot V = R \cdot T \dots\dots\dots(6)$$

より求めることができる。すなわち体積 V が ΔV 変化
したときの圧力の変化量が P_2' である。気体定数 R ,
絶体温度 T を使って

$$p_2' = \frac{dp_2}{dV} \cdot \Delta V = -\frac{RT}{V^2} \cdot \Delta V \dots\dots\dots(7)$$

となる。したがってゲートに働くモーメントとしては,
式 (3) 第1項より

$$P_2' = \int_A p_2' dA \cdot Z = p_2' \int_A Z dA \\ = -\frac{RT}{V^2} \cdot \Delta V \int_0^l Z B dZ \\ = -\frac{RT}{V^2} \cdot \frac{Bl^2}{2} \cdot \Delta V \dots\dots\dots(8)$$

となる。なおゲートの動きが小さい場合には式 (5) の
[] 中および式 (8) の ΔV の前の係数はそれぞれ定数

と考えて良い。また V はゲート下の体積 V_2 とナップ
下の体積 V_1 の和と考えられる。

$$V = V_1 + V_2 \dots\dots\dots(9)$$

(2) ゲートの運動に伴うゲート下の空気の変動量

a) ナップの軌跡について

図-1 においてフラップ先端での水の流出方向はフラ
ップの角度に支配されると考えられる。いま水が自由落
下運動をすると仮定すると, フラップの先端をはなれて
から描く軌跡は, フラップ先端部をはなれるときの流出
方向によって決定される。すなわち, そのときの速度を
 v_0 , 角度を $\varphi_1 + \theta$ とすれば, フラップ先端をはなれて t
時間後には,

$$\left. \begin{aligned} x &= v_0 \cos(\varphi_1 + \theta) \cdot t \\ y &= v_0 \sin(\varphi_1 + \theta) \cdot t + \frac{g}{2} t^2 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(10)$$

にいる。フラップゲートが振動しているときには θ は
時間の関数となる。いま $t = t_n$ のときにフラップ先端を
水がはなれて, $t = t$ の時間になったとすれば, この間に
その水の塊の落下した位置は次のごとくなる。

$$\left. \begin{aligned} x &= v_0 \cos[\varphi_1 + \theta(t_n)] \cdot (t - t_n) \\ y &= v_0 \sin[\varphi_1 + \theta(t_n)] \cdot (t - t_n) + \frac{g}{2} (t - t_n)^2 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(11)$$

ここで両式より $t - t_n$ を消去すると

$$y = \frac{\sin[\varphi_1 + \theta(t_n)]}{\cos[\varphi_1 + \theta(t_n)]} \cdot x \\ + \frac{g}{2} \cdot \frac{x^2}{[v_0 \cos[\varphi_1 + \theta(t_n)]]^2} \dots\dots\dots(12)$$

となる。一方, また式 (11) の第1式より t_n は

$$t_n = t - \frac{x}{v_0 \cos[\varphi_1 + \theta(t_n)]} \dots\dots\dots(13)$$

となる。式 (12), (13) のままでは複雑すぎて扱いが困
難なので, 振動が発生する状況が $|\varphi_1| < 20^\circ, |\theta| < 1^\circ$ であ
ることを考えると¹⁰⁾, $\cos[\varphi_1 + \theta(t_n)] \div \cos \varphi_1$ としても
良いと考えられる。したがって, 式 (12), (13) は次の
ごとくなる。

$$y = \frac{\sin[\varphi_1 + \theta(t_n)]}{\cos \varphi_1} x + \frac{g}{2} \frac{x^2}{[v_0 \cos \varphi_1]^2} \dots\dots(14)$$

$$t_n = t - \frac{x}{v_0 \cos \varphi_1} \dots\dots\dots(15)$$

これらの2式より t_n を消去すると, ナップの形状を与
える式として式 (16) を得る。

$$y = \frac{x}{\cos \varphi_1} \sin \left[\varphi_1 + \theta \left(t - \frac{x}{v_0 \cos \varphi_1} \right) \right] \\ + \frac{g}{2} \frac{x^2}{[v_0 \cos \varphi_1]^2} \dots\dots\dots(16)$$

式の第1項の $\theta \left(t - \frac{x}{v_0 \cos \varphi_1} \right)$ は波速 $c = v_0 \cos \varphi_1$
で伝わる波を示している。この項をグラフにしたのが

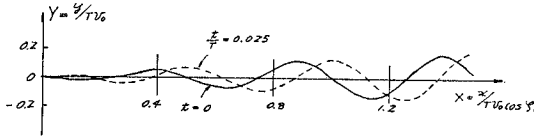


図-2

図-2 であり、この波の状況が良くわかる。

b) ナップの水脈の形状変化による体積の増減

時間とともに変化する部分は式 (16) の第 1 項である。そこでナップ下の空気の体積の増加を (+) として計算すると

$$\begin{aligned} \Delta V_1 &= \int_0^{x_1} B \cdot \left[\frac{g}{2} \frac{x^2}{[v_0 \cos \varphi_1]^2} - y \right] + \frac{x}{\cos \varphi_1} \sin \rho_1 dx \\ &= \frac{-B}{\cos \varphi_1} \int_0^{x_1} x \sin \left[\varphi_1 + \theta \left(t - \frac{x}{v_0 \cos \varphi_1} \right) \right] dx \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (17)$$

を得る。ここでさらに $\sin[]$ 項を展開して $\varphi_1 \gg \theta$, θ は微小と仮定すれば

$$\begin{aligned} \sin(\varphi_1 + \theta) &= \sin \varphi_1 \cos \theta + \cos \varphi_1 \cdot \sin \theta \\ &= \sin \varphi_1 + \cos \varphi_1 \cdot \theta \end{aligned}$$

となる。これを式 (17) に代入して時間とともに変化する体積を求めると、 θ の入った項のみを考えれば良いので、

$$\Delta V_1 = -B \int_0^{x_1} x \cdot \theta \left(t - \frac{x}{v_0 \cos \varphi_1} \right) dx \quad \dots\dots\dots (18)$$

となる。

c) ナップ下の平均体積

図-1 に示されたような状況を考えて、

$$\begin{aligned} V_1 &= \int_0^{x_1} B \cdot \left(h - \frac{g}{2} \frac{x^2}{[v_0 \cos \varphi_1]^2} + x \tan \varphi_1 \right) dx \\ &= B \left[h - \frac{g}{6} \frac{x_1^2}{[v_0 \cos \varphi_1]^2} - \frac{x}{2} \tan \varphi_1 \right] x_1 \end{aligned}$$

となり、 x_1 は $h = \frac{g}{2} \frac{x_1^2}{[v_0 \cos \varphi_1]^2}$ であることを考えると

$$V_1 = \frac{2Bh}{3} x_1 = \frac{2}{3} Bh \cdot \sqrt{\frac{2h}{g}} \cdot v_0 \cos \varphi_1 \quad \dots\dots\dots (19)$$

また式 (18) を出すときに無視した $\sin \varphi_1$ の項より

$$\begin{aligned} V_1' &= \frac{-B}{\cos \varphi_1} \int_0^{x_1} x \sin \varphi_1 dx = -\frac{B \sin \varphi_1}{\cos \varphi_1} \cdot \frac{x_1^2}{2} \\ &= -\frac{Bh}{g} v_0 \cos \varphi_1 \sin \varphi_1 \end{aligned}$$

を得るが、 V_1 に比して V_1' は $\sin \varphi_1 \ll \frac{2}{3} \sqrt{2gh}$ であることを考えると無視して良いことがわかる。

d) ゲート下の空气体積について

図-1 のごとくゲートの扉高を l とすれば、平均体積は、

$$V_2 = B \cdot l \cos \varphi_1 \left(h - \frac{l}{2} \sin \varphi_1 \right) \quad \dots\dots\dots (20)$$

であり、ゲートの動きによる体積の増減は、体積の増を正として次のようになる。

$$\Delta V_2 = \frac{Bl^2}{2} \theta(t) \quad \dots\dots\dots (21)$$

(3) 外力項を整理した振動方程式

以上求めた各式を使用して振動方程式をまとめてみよう、まず一番複雑な P_2' について書くと式 (8), (18) (21) より

$$\begin{aligned} P_2' &= -\frac{RT}{V^2} \cdot \frac{Bl^2}{2} (\Delta V_1 + \Delta V_2) \\ &= -\frac{RT}{V^2} \cdot \frac{Bl^2}{2} \left[-B \int_0^{x_1} x \theta \left(t - \frac{x}{v_0 \cos \varphi_1} \right) dx + \frac{Bl^2}{2} \theta(t) \right] \\ &= \frac{RT}{V^2} \cdot \frac{B^2 l^2}{2} \left[\int_0^{x_1} x \theta \left(t - \frac{x}{v_0 \cos \varphi_1} \right) dx - \frac{l^2}{2} \theta(t) \right] \quad \dots\dots\dots (22) \end{aligned}$$

したがって振動方程式の外力項は次のごとくなる。

$$\begin{aligned} F(\theta) &= P_2' - P_1' \\ &= \frac{RT}{V^2} \frac{B^2 l^2}{2} \left[\int_0^{x_1} x \theta \left(t - \frac{x}{v_0 \cos \varphi_1} \right) dx - \frac{l^2}{2} \theta \right] - \int_0^l B \frac{dP_1}{d\zeta} \cdot Z dZ \cdot \theta \quad \dots\dots\dots (23) \end{aligned}$$

これを振動方程式 (1) に導入して、両辺を I で割って、次のようなパラメーターの整理をすると、式 (25) のような自励振動の方程式を得る。

$$\left. \begin{aligned} \frac{R_\theta}{I} &= 2\tau, \\ \omega_n^2 &= \frac{1}{I} \left[kl^2 + \int_0^l B \frac{dP_1}{d\zeta} \cdot Z dZ + \frac{RT}{V^2} \frac{B^2 l^4}{4} \right] \\ \frac{1}{I} \frac{RT}{V^2} \cdot \frac{B^2 l^2}{2} &= M_1 \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (24)$$

$$\ddot{\theta} + 2\tau\dot{\theta} + \omega_n^2\theta = M_1 \int_0^{x_1} x \theta \left(t - \frac{x}{v_0 \cos \varphi_1} \right) dx \quad \dots\dots\dots (25)$$

ただし x_1 は式 (19) より次のごとく求まる。

$$x_1 = \sqrt{\frac{2h}{g}} \cdot v_0 \cos \varphi_1 \quad \dots\dots\dots (26)$$

(4) 振動方程式の特性方程式

フラップゲートの自励振動の微分方程式として式 (25) が求まったわけである。これは外力項に積分項があるが、この項はまた、自動制御関係でいうむだ時間要素⁶⁾に相当している。この振動の特性を調べるためには式 (25) の特性方程式を求めて、その根について調べれば良い。

特性方程式は式 (25) についてラプラス変換を行えば

良い。左辺のラプラス変換は

$$F(s) [s^2 + 2\gamma s + \omega_n^2] - \theta(0) [s + 2\gamma] - \theta'(0) \dots\dots\dots (27)$$

である。また右辺のラプラス変換は次のようにして求める。

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty \int_0^{x_1} x \cdot \theta \left(t - \frac{x}{v_0 \cos \varphi_1} \right) dx e^{-st} dt \\ &= \int_0^{x_1} x \int_0^\infty \theta \left(t - \frac{x}{v_0 \cos \varphi_1} \right) e^{-st} dt dx \\ &= \int_0^{x_1} x e^{-\frac{x}{v_0 \cos \varphi_1} S} F(s) dx \\ &= F(s) \int_0^{x_1} x e^{-\frac{x}{v_0 \cos \varphi_1} S} dx \\ &= F(s) \left[\frac{(v_0 \cos \varphi_1)^2}{S^2} (1 - e^{-\frac{x_1}{v_0 \cos \varphi_1} S}) \right. \\ & \quad \left. - \frac{v_0 \cos \varphi_1}{S} x_1 e^{-\frac{x_1}{v_0 \cos \varphi_1} S} \right] \dots\dots\dots (28) \end{aligned}$$

ここで $t=0, \theta(0)=0$ とし、

$$v_0 \cos \varphi_1 = c \dots\dots\dots (29)$$

とおき、ラプラス変換の結果をまとめると次のごとくなる。

$$F(s) \left[s^2 + 2\gamma s + \omega_n^2 - M_1 \left\{ \frac{c^2}{s^2} (1 - e^{-\frac{x_1}{c} s}) - \frac{c}{s} x_1 e^{-\frac{x_1}{c} s} \right\} \right] = \theta'(0) \dots\dots\dots (30)$$

したがって特性方程式は式 (31) となる。

$$Z(s) = s^2 + 2\gamma s + \omega_n^2 - M_1 \left\{ \frac{c^2}{s^2} (1 - e^{-\frac{x_1}{c} s}) - \frac{c}{s} x_1 e^{-\frac{x_1}{c} s} \right\} = 0 \dots\dots\dots (31)$$

3. 特性方程式の根と振動の安定性

振動方程式の安定性を判定する場合には、特性方程式の根の実部が正または負の値をとるかによって、不安定または安定をきめることができる。しかし、式 (31) は無理方程式であるので根は無数に存在するので、扱いが非常にめんどうである。1つの方法は $e^{-\frac{x_1}{c} s}$ の項を Maclaurin の級数展開して、その任意項までとり、線形高次微分方程式の安定判別法 (たとえば Routh の方法、Hurwitz の方法、Bilharz-Frank の方法⁷⁾) を適用する。この方法は非常に便利であるが、実際に生じている振動が、この級数展開の近似範囲に入っているのかどうかを見きわめなければならない。比較的少ない項数で近似できるような特性根の所を問題としている場合には便利である。

また特性根の軌跡を s -平面上にプロットする方法は、根の状況を直接に図面上において確認できる。特性根を $s = \sigma + i\omega$ とすれば、これを式 (31) に代入して σ に関

する方程式になおし、 ω を $-\infty \rightarrow \infty$ まで変え、 σ の根を求めこれを s -平面上にプロットし、 $\sigma > 0$ となる部分が不安定になる振動を示しているとするものである。この方法は、特性方程式の中にパラメーターが少ないときには計算が少なくて便利であるが、パラメーターが多くなると、根軌跡の曲線を多く求めなければいけないので、かなりめんどうである。また同様な考え方で複素平面を使用した方法に Nyquist の方法がある。これは特性根 $s = \sigma + i\omega$ を s 平面に、特性方程式の実部、虚部を \bar{X}, \bar{Y} とし $W = \bar{X} + i\bar{Y} = Z(s)$ で W 平面上に対応させることを考えると、等角写像の関係を想定すれば良くわかるが、 s 平面上の特性根は、すべて W 平面上では原点に対応していることがわかる。これは特性根が $\bar{X}=0, \bar{Y}=0$ とする根であることを考えると明らかである。そこで特性根の不安定、安定を決定する $\sigma \geq 0$ の限界条件は $\sigma=0$ であることを考えると、 S 平面上での $i\omega$ 軸がその限界を与えていることに気づく。そこでこの $S=i\omega$ を W 平面上に写像すると、すなわち $Z = \bar{X} + i\bar{Y} = Z(i\omega)$ の軌跡を求めると、その軌跡は安定側と不安定側を区別する境界になっている筈である (図-3)。そこで ω を 0 より増加させてゆくときに、 W 平面の原点がこの軌跡 (Nyquist 軌跡) の左側にあるか右側にあるかによって、その根が安定側か不安定側かが判定できることになる。すなわち ω 増の方向に軌跡をたどるとき原点を左側のみて進むときは安定であり、右側に見るときは不安定となる^{8)*}。

この Nyquist の方法を式 (31) に適応する。

$$\left. \begin{aligned} \beta &= x_1/c, A = \frac{2\gamma}{M_1 x_1^2 \beta} \\ C &= \frac{1}{M_1 x_1^2 \beta^2}, x = \omega\beta, x_n = \omega_n\beta \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (32)$$

とおくことにより次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} \tilde{X} &= \frac{\bar{X}}{M_1 x_1^2} = \text{Real}[Z(i\omega)] = C[x_n^2 - x^2] \\ &+ \frac{1 - \cos x}{x^2} - \frac{1}{x} \sin x = F_2(x) \end{aligned} \right\}$$

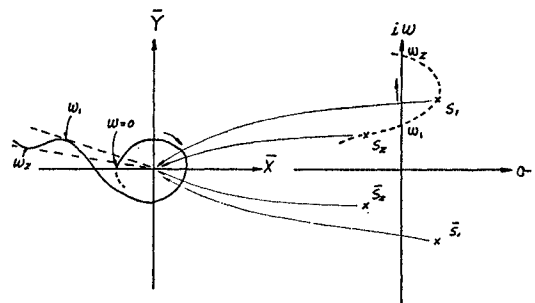


図-3

* 同一筆者の文献 8) ではこの扱いと若干変えて、 $Z(s)-1=W$ としての扱いをしているが同じことである。

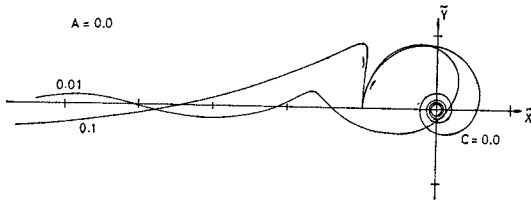


図-4 (1)

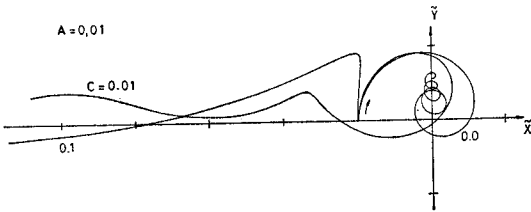


図-4 (2)

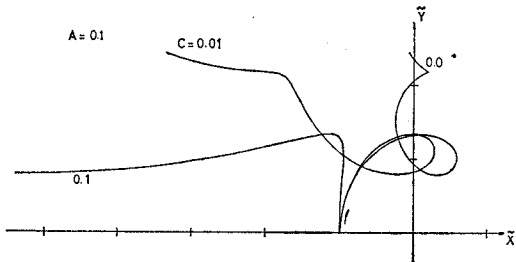


図-4 (3)

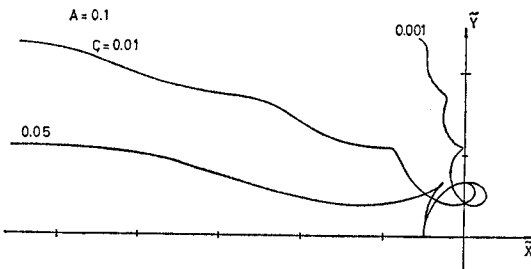


図-4 (4)

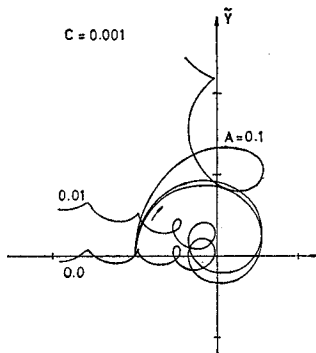


図-4 (5)

$$\left. \begin{aligned} \tilde{Y} &= \frac{\tilde{Y}}{M_1 x_n^2} = \text{Imag}[Z(i\omega)] = Ax + \frac{\sin x}{x^2} \\ &\quad - \frac{1}{x} \cos x = F_1(x) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (33)$$

(1) Nyquist 軌跡の例

式 (33) は A, C, x_n の3つのパラメーターを持っているので、これらの値の大きさによって軌跡が変わってくる。そこでこれらの値を変えて軌跡がどのようになるか求めてみた。その結果を図-4としていくつかの特徴的なものを示しておく。いずれの場合も $x=0$ の点は(計算の開始点) $\tilde{X} = -0.5, \tilde{Y} = 0.0$ に相当し、 x を増大させるにしたがって、それぞれの特徴的な軌跡を描く。図-4 (1)~(3) はパラメーター A, C をそれぞれ 0.0, 0.01, 0.1 とし、 $x_n=0$ の組合せの場合の Nyquist 軌跡である。 $A=0, C=0$ の場合には軌跡は時計まわりの渦巻き曲線になって、常に不安定であることを示している。 C の値が大きくなるにしたがって安定度が増加してゆくことがわかる。また A の値が増加すると曲線が \tilde{Y} の (+) の方向に引張られた形になっている。図-4 (4) は図-4 (3) に相当するものをより広範囲について示したもので、 x の値が大きくなるほど、曲線の幅が小さくなり振動は安定することを示している。図-4 (5) は A の影響をみるために $C=0.001$ の場合に $A=0.0, 0.01, 0.1, x_n=0$ とした場合のグラフである。これと図-4 (1) の $A=0, C=0$ の図を比較するとわかるごとく $A=0, C=0$ の渦巻き線の中心をもってこれを $\tilde{X} = -\frac{C}{A^2} \tilde{Y}^2 (\tilde{X} < 0)$ の曲線の方に引き伸ばしたような形をしていることがわかる。 A の値が大きいたまには \tilde{Y} の軸方向に伸びる量が多くなる傾向を示している。これらのいずれの曲線でも、ベクトルの回転方向が時計回りとなる場合が不安定となる。またいずれも $x_n=0$ とした場合の図を示したが、 $x_n \neq 0$ の場合には式 (33) の \tilde{X} を見ればわかるごとく $C \cdot x_n^2$ だけ \tilde{X} の値が増加することを示している。したがって、その量だけ図を \tilde{X} 軸の (+) の方向に平行移動させれば良いことがわかる。したがって図-4 (1)~(5) で不安定になっていた部分も、 $C \cdot x_n^2$ の平行移動によって安定になる場合も生じてくる。特に $Cx_n^2 > 0.5$ になると、 x の小さい部分の曲線の立上り部分が原点より右側 ($\tilde{X} > 0$) に移動するために、かなりの部分が安定化してゆくことがわかる。しかし逆に今まで安定であったところが不安定になってくることも当然でてる。

(2) Nyquist 軌跡の安定判定

W 平面での Nyquist 軌跡がどの平面にあっても、こ

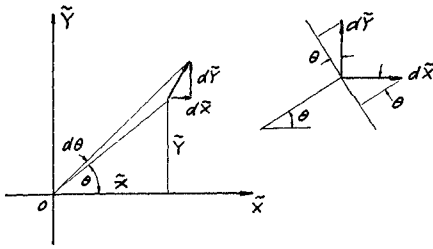


図-5

れを \bar{r}, θ を使ってベクトル軌跡と考えると (図-5), このベクトル軌跡が \bar{X} の増加にしたがって反時計方向に動くとき, $d\theta > 0$ であり, W -平面の原点は Nyquist 軌跡の進行方向の左側にあることになる。したがってこの場合は安定であることがわかる。したがって $d\theta$ の正, 負でも判定できる。そこで式 (33) より次のごとくして $d\theta$ を求める。

$$\left. \begin{aligned} \tan \theta &= \bar{Y}/\bar{X}, \quad r = \sqrt{\bar{X}^2 + \bar{Y}^2} \\ d\theta &= (d\bar{X} \cdot \cos \theta - d\bar{X} \sin \theta)/r \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (34)$$

の関係を使うと, $d\bar{Y}, d\bar{X}$ を式 (33) より求めて $d\theta$ を求めれば良い。

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\bar{Y}}{dx} &= A - \frac{2-x^2}{x^3} \sin x + \frac{2}{x^2} \cos x \\ &= F_3(x) \\ \frac{d\bar{X}}{dx} &= -2Cx - \frac{2}{x^3} + \frac{2-x^2}{x^3} \cos x \\ &\quad + \frac{2}{x^2} \sin x = F_4(x) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (35)$$

したがって

$$\frac{d\theta}{dx} = [F_3(x) \cos \theta - F_4(x) \cdot \sin \theta]/r \dots\dots\dots (36)$$

を求めて $d\theta/dx$ の正負によって, 安定, 不安定を決めれば良い。

この考えをさらに進めると $r > 0$ を考えに入れると, 常に安定, 不安定になる条件がでてくる。これらをまとめると 表-1 のごとくなる。

表-1

ベクトル		安定条件		不安定条件		
\bar{X}	\bar{Y}	$d\bar{X}$	$d\bar{Y}$	$d\bar{X}$	$d\bar{Y}$	
+	+	-	+	+	-	第1象限
-	+	-	-	+	+	2
-	-	+	-	-	+	3
+	-	+	+	-	-	4

この表に示した以外の条件では $d\bar{X}, d\bar{Y}, \bar{X}, \bar{Y}$ の値によって安定になったり不安定になったりするるので, 計算を試みなければならない。

このことをもとにして式 (33), (34) をみると, \bar{X} はパラメーター $C, x_n, d\bar{X}$ は $C, \bar{Y}, d\bar{Y}$ は A によって条件が異なってくるのがわかる。そこで $\bar{X}, d\bar{X}, \bar{Y},$

$d\bar{Y}$ の値を (+)(-) に分ける限界値を与えるパラメーター A, C, x_n を, x の値との関係で求める。すなわち $\bar{X}, d\bar{X}, \bar{Y}, d\bar{Y} = 0$ の式より次のごとく各パラメーターを決める式を求める。

$$C = \frac{1}{(x^2 - x_n^2)} \left[\frac{1 - \cos x}{x^2} - \frac{1}{x} \sin x \right] \dots\dots\dots (37)$$

$$A = \frac{1}{x^2} \cos x - \frac{1}{x^3} \sin x \dots\dots\dots (38)$$

$$C = -\frac{1}{x^4} + \frac{2-x^2}{2x^4} \cos x + \frac{1}{x^3} \sin x \dots\dots\dots (39)$$

$$A = \frac{2-x^2}{x^3} \sin x - \frac{2}{x^2} \cos x \dots\dots\dots (40)$$

式 (37), (38) は \bar{X}, \bar{Y} より式 (39), (40) は $d\bar{X}, d\bar{Y}$ の式より求めたものである。これらの式を使って $A \sim x, C \sim x, x_n$ の間のグラフを書くと, その曲線はそれぞれ $\bar{X}, \bar{Y}, d\bar{X}, d\bar{Y}$ を正, 負に分ける境界を示しているはずである。

そこで, これらのグラフを書いたのが 図-6 である。このグラフをみると, $A \sim x, C \sim x$ とともにそれぞれ4つの領域に分割されていることがわかる。図-6(1) は $A \sim x$ の関係を示した図であり, 図-6(2) は $C \sim x$ の関係で $x_n = 0$ とした場合の図である。いずれの図でも, ピーク値の大きい方の曲線が $d\bar{X}, d\bar{Y} = 0$ の条件より求めた式 (39), (40) で求めた曲線である。それぞれ図の

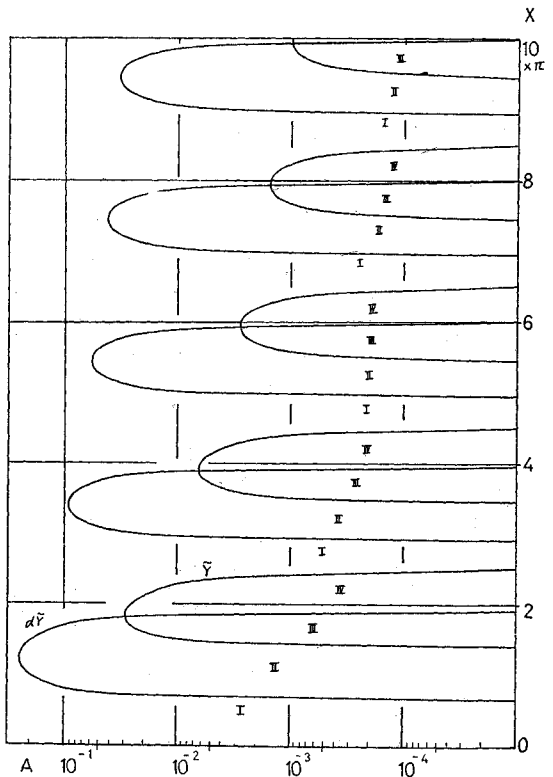


図-6 (1)

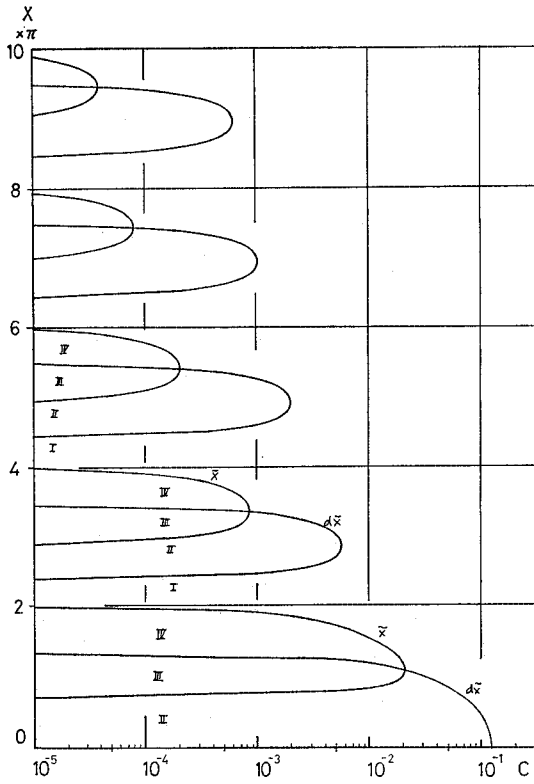


図-6 (2)

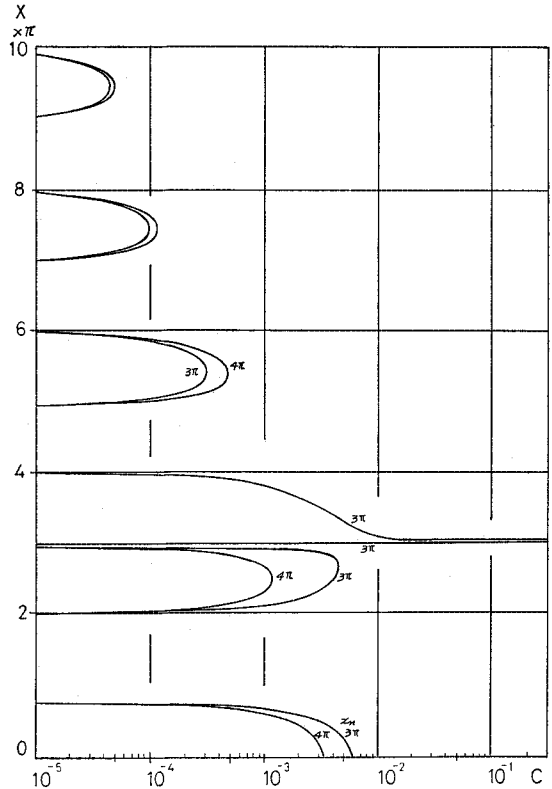


図-6 (4)

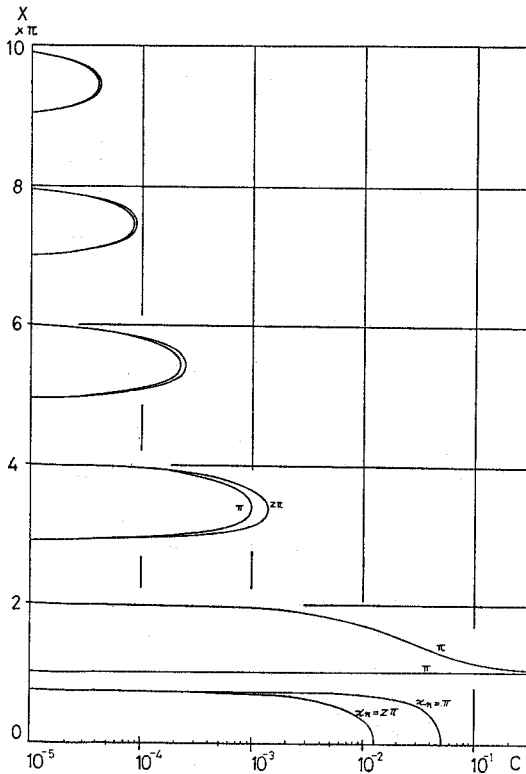


図-6 (3)

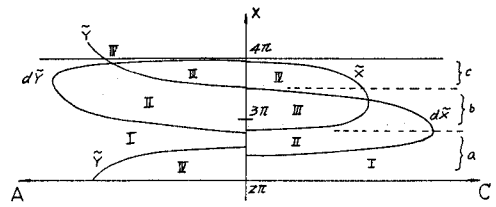


図-7 (1)

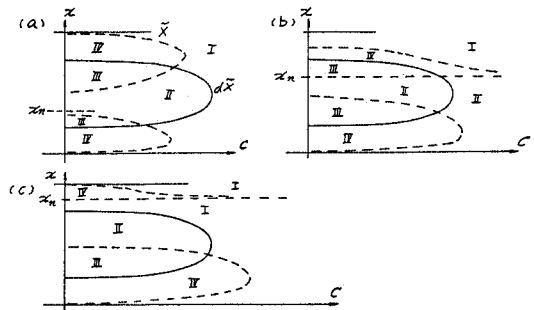


図-7 (2)

中に I ~ IV の領域に分割されていることがわかる。また $x_n \neq 0$ の場合の $\tilde{X}=0$ の条件より求めたグラフを 図-6 (3)~(4) に示しておく。 $x_n = \pi, 3\pi$ の場合には $C \rightarrow \infty$ となる部分がある点が注目される。この点については後で検討することにして、まず 図-6 (1), (2) の

表-2

	\tilde{X}	$d\tilde{X}$	\tilde{Y}	$d\tilde{Y}$
I	-	-	+	+
II	-	+	+	-
III	+	+	-	-
IV	+	-	-	+

表-3

$\begin{matrix} C \\ A \end{matrix}$	I	II	III	IV
I		x		o
II	o		x	
III		o		x
IV	x		o	

関係について考えてみる。図-6(1)と図-6(2)をx軸を共通として模式的に書くと図-7(1)のごとくなる。この図の中の4つの領域の組合せによって安定, 不安定が決まる。すなわち, 各領域の $\tilde{X}, d\tilde{X}, \tilde{Y}, d\tilde{Y}$ の正負を調べまとめたのが表-2である。これと先に示した表-1の条件より常に不安定となる組合せを×印, 常に安定となる組合せに○印をつけて表にしたのが表-3である。このことを頭に入れて図-7(1)をみると, A, Cの値がともに小さい場合には, つねに不安定となる組合せになっていることがわかる。また A, Cの値が大きくなったIの領域では, CのIとAのIVの領域すなわち $x=2n\pi$ ($n=1, 2, \dots$) 付近, AのI, CのIIの領域の組合せは $x=(2n+1)\pi$, ($n=1, 2, \dots$) 付近に不安定領域があることがわかる。また CのI, AのIの組合せは安定, 不安定を決めるのに式(36)によって $d\theta/dx$ の値を求めてみなければわからない。

次に x_n の値の影響であるが式(37)をみればわかるごとく $x=x_n$ の所で C の符号が (+), (-) 逆転し, [] 内の値が 0 でない場合には, $C=\pm\infty$ となる。[] 内が 0 となるのは $x=2n\pi$ ($n=1, 2, \dots$) のときで, このときの C の値は $C=-1/2x_n^2$ となる。さて, この x_n の値が図-7(1)の領域区分にどのように影響をもつかを検討してみよう。この値の関係するのは $\tilde{X}=0$ の場合で, C の場合の III, IV の領域である。そこで, x_n の値が3つの値をとる場合(図-7(1)で a, b, c の各領域にあるとき)についての領域区分を図-7(2)に示してある。(a)はCのIVの領域が新しく生じてきているが不安定性を生ずる組合せにはなっていない。(b), (c)ではIVの領域が $C=+\infty$ に伸びる部分がある。これはAのIIIの領域の関係で不安定になるが, Aは減衰定数のファクター(式(32))であるので, Aの大きな値の所でこの部分が生じたほうが不安定性は大きくなる。すなわち, $\tilde{Y}=0, d\tilde{Y}=0$ の両曲線の交点, $x=2n\pi$ にかかなり近い部分に x_n があれば良いことになる。また $x=2n\pi$ になると, この $C=+\infty$ の部分はなくなって(図-6(3)~(4)参照)CのIとAのIVの領域の組合せとなってこれも不安定な条件になっている。したがって, $x=x_n=2n\pi$ においては, Cの値に無関係にAの値がIII, IVの領域にあれば不安定になる。以上のことをまとめると, 不安定振動となる場合に, 大きく分けて2つのタイプがある。1つは表-3に示した。不安定となるA, C

の各領域に入る値によって決められるタイプのもの。もう1つは $x=x_n$, これはゲートの固有振動で振動する場合で, $x_n=2n\pi$ ($n=1, 2, \dots$) の値をとるときにはCの条件には関係なく, Aの値がIII, IVの中であれば発生するものである。

前者はAのI, とCのIIの組合せでは $x=(2n+1)\pi$ 付近, CのIとAのIVは $x=2n\pi$ 付近で, C, Aの各値ともピーク値に相当しており, 不安定性の強いところと考えて良い。

次に, この解析方法の確認のために, 周波数応答関数および摂動法の考え方を使用して, この振動の発生状況を把握してみよう。

4. 摂動法による近似解

振動方程式(25)をみると右辺の項は, 左辺の項に比して $x/v_0 \cos \varphi_1 = t$ だけ以前の現象に支配されていると考えると, 第1次近似解として $\theta = \epsilon_0 e^{i\omega t}$ の微小振動があって, これによって発生する振動外力(式(25)の右辺項)による振動は求めることができる。この解によって生ずる外力によってまた振動が生ずると考えることを繰返せば良いことになる。

そこで

$$\theta(t) = \theta_0(t) + \epsilon\theta_1(t) + \epsilon^2\theta_2(t) + \dots, \quad \epsilon = M_1 x_1^2 \quad \dots\dots\dots(41)$$

とおき, これを式(25)に代入して, ϵ の各オーダーごと

$$\left. \begin{aligned} \ddot{\theta}_0 + 2r\dot{\theta}_0 + \omega_n^2\theta_0 &= 0 \\ \ddot{\theta}_1 + 2r\dot{\theta}_1 + \omega_n^2\theta_1 &= \int_0^1 x\theta_0(t-x\cdot\beta) dx \\ \beta &= \frac{x_1}{v_0 \cos \varphi_1} \\ \ddot{\theta}_2 + 2r\dot{\theta}_2 + \omega_n^2\theta_2 &= \int_0^1 x\theta_1(t-x\beta) dx \end{aligned} \right\} \dots\dots(42)$$

この場合 θ_0 は固有減衰振動であるが, 先にのべたごとく $\theta_0 = \epsilon_0 e^{i\omega t}$ の振動があったときの解を求めることにする。 θ_1 の解を求めれば, θ_2 以下は同じ形の式であるので解は簡単に求まる。 θ_0 を式(42)の第2式に代入すると右辺は

$$\begin{aligned} \epsilon_0 \int_0^1 x e^{i\omega(t-\beta x)} dx &= \epsilon_0 e^{i\omega t} \int_0^1 x e^{-i\omega\beta x} dx \\ &= \epsilon_0 e^{i\omega t} [i\omega\beta e^{-i\omega\beta} + e^{-i\omega\beta} - 1] / (\omega\beta)^2 \\ &= \epsilon_0 N(\omega\beta) e^{i\omega t} \dots\dots\dots(43) \end{aligned}$$

とおくと, θ_1 の解は減衰振動の解として

$$\left. \begin{aligned} \theta_1 &= \frac{\epsilon_0 N(\omega\beta)}{(\omega_n^2 - \omega^2) + 2r\omega i} e^{i\omega t} = \epsilon_1 e^{i\omega t} = \epsilon_0 \delta e^{i\omega t} \\ \delta &= N(\omega\beta) / [(\omega_n^2 - \omega^2) + i2r\omega] \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(44)$$

以下同様に、 $\epsilon_0 \rightarrow \epsilon_1, \epsilon_1 \rightarrow \epsilon_2$ とおいてゆくことによって解が求まる。したがって式 (41) は

$$\left. \begin{aligned} \theta(t) &= [\epsilon_0 + \epsilon_1 \epsilon + \epsilon_2 \epsilon^2 + \dots] e^{i\omega t} \\ &= \epsilon_0 [1 + \epsilon\delta + \epsilon^2\delta^2 + \dots] e^{i\omega t} \\ &= \frac{\epsilon_0}{1 - \epsilon\delta} e^{i\omega t} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (45)$$

ただし $|\epsilon\delta| < 1$ の場合である。

したがって振動の拡大率は $1/(1 - \epsilon\delta)$ によって決まることがわかる。よって振幅の拡大率は $1/(1 - \epsilon\delta)$ の絶対値として

$$\begin{aligned} \text{Abs} \left[\frac{1}{1 - \epsilon\delta} \right] &= \left| \frac{(\omega_n^2 - \omega^2) + i 2 \tau \omega}{(\omega_n^2 - \omega^2) + i 2 \tau \omega - \epsilon N(\omega\beta)} \right| \\ &= \sqrt{\frac{(Ax)^2}{[C(x_n^2 - x^2) - (\cos x + x \sin x - 1)/x^2]^2} + \frac{C^2(x_n^2 - x^2)}{[Ax - (x \cos x - \sin x)/x^2]^2} \dots\dots\dots (46)} \end{aligned}$$

ただし x, A, C は式 (32) と同じである。

式 (46) の分母をよくみると式 (33) の $F_2(x), F_1(x)$ に相当している。したがって振動が不安定になるための条件は、 $F_1(x) = 0, F_2(x) = 0$ を満たす x, x_n, A, C の値が組合わさった場合である。これは 図-6 で $\tilde{X} = 0, \tilde{Y} = 0$ を同時に満たす部分ということの意味し、 $\tilde{X} = 0$ か $x = 2n\pi$ を中心にして分布しているのでこの付近に不安定振動が発生してくると考えられる。

次に $x = x_n$ の場合には $x_n = 2n\pi (n = 1, 2, \dots)$ で不安定になることは Nyquist の方法のところで求めたが、この場合についても調べてみる。 $x = x_n$ の場合の $F_1(x_n) = 0, F_2(x_n) = 0$ は式 (33) より

$$\left. \begin{aligned} F_1(x_n) &= Ax_n - (x_n \cos x_n - \sin x_n)/x_n^2 = 0 \\ F_2(x_n) &= (1 - \cos x_n - x_n \sin x_n)/x_n^2 = 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (47)$$

この解は第2式より

$$x_n = 2n\pi (n = 1, 2, 3, \dots) \dots\dots\dots (48)$$

これを第1式に代入すると

$$A = 1/x_n^2 \dots\dots\dots (49)$$

となり、これは 図-6 (1) で \tilde{Y} の曲線の $x = 2n\pi$ の点の値にほかならない。A の値がこれよりはなれるにしたがって振幅の拡大率は小さくなっていく*。

5. 自励振動の発生する条件

発散系の振動が生ずる条件は 図-6 (1) より (4) までは 図-7 (1) のようにして使うことによって不安定条

* 式 (47) の条件は振動方程式 (25) に外乱 $f_0 \sin \omega_n t$ が作用したときの周波数応答関数 $H(\omega)$ を次のように求め、

$$H(\omega_n) = \text{Abs} \left[\frac{1}{Z(i\omega_n)} \right] \cdot f_0 = \text{Abs} \left[\frac{1}{\tilde{X} + i\tilde{Y}} \right] \cdot M_1 x_1^2 f_0$$

共振点、 $H(\omega_n) \rightarrow \infty$ の条件を求めると式 (47) と同じ条件式が求まる。

件として求めることができるが、実際に模型実験してみると、水槽内の下流壁面からの反射波との共振による振動をのぞけば、多くの場合、大きな振動はゲート支持装置とゲートによって作られる振動系の固有振動 ($\omega \approx \omega_n$) に近いところで発生してくることがわかっている。すなわちばね系で支持されたゲート上に水を流しておき、このばねに衝撃を与えてやると、そのまま発散振動となり持続的な振動になってゆく。この点を考慮すると、多くの不安定振動のうち、特に大きな振動は、前記解析の $x = x_n$ で発生するものではないかと考えられる。

そこで式 (48), (49) の条件式をもっと具体的に書きなおしておこう。 $x_n = \omega_n \beta, \beta = x_1/v_0 \cos \varphi_1$ で β は水の落下する時間を示している。

$$x_n = 2n\pi = \omega_n \cdot \frac{x_1}{v_0 \cos \varphi_1} = \frac{2\pi}{T_0} \cdot \beta$$

$$\text{より } nT_0 = \beta \dots\dots\dots (50)$$

ただし $n = 1, 2, \dots, T_0$ は系の固有振動周期、 h は水脈の落下高さ。式 (49) の条件は、 $Ax_n^2 = 1$ とし式 (32) の条件を使うと

$$1 = Ax_n^2 = \frac{2\tau}{M_1 x_1^2 \beta} \omega_n^2 \beta^2 = \frac{2\tau}{M_1 x_1^2} \cdot \omega_n^2 \beta \dots\dots\dots (51)$$

となる。これを満たす減衰係数になっていけば良い。

ただし、落下時間 β は式 (10) より $y = h$ (落下距離) とおいて、 t についてとくと

$$t = \beta = \frac{v_0 \sin \varphi_1}{g} + \sqrt{\left(\frac{v_0 \sin \varphi_1}{g} \right)^2 + \frac{2h}{g}} \dots\dots\dots (52)$$

となる。また $\frac{2h}{g} \gg \left(\frac{v_0 \sin \varphi_1}{g} \right)^2$ のときには

$$\beta = \frac{v_0 \sin \varphi_1}{g} + \sqrt{\frac{2h}{g}} \dots\dots\dots (53)$$

となり、また $\varphi_1 = 0$ のときには次のごとくなる。

$$\beta = \sqrt{\frac{2h}{g}} \dots\dots\dots (54)$$

次に 図-6, 7 の解析の結果 A, C の値が小さいほど、不安定度が増すことがわかっているのので、 A, C の式もまとめておく。

$$\left. \begin{aligned} C &= \frac{1}{M_1 x_1^2 \beta^2} = \frac{V^2 I}{B^2 l^2 \cdot R \cdot T} \cdot \frac{2}{\left(\frac{2h}{g} \right)^2 v_0^2 \cos^2 \varphi_1} \\ A &= 2\tau \cdot C \cdot \beta = 2\tau \cdot \sqrt{\frac{2h}{g}} \cdot C \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (55)$$

6. 自励振動の発生したときの水脈の形状

$x = x_n = 2n\pi$ の条件のもとに発生する自励振動によ

って水脈の形状がどのようになるか、いくつかの場合について求めてみる。この場合の振動は式 (45), (46) より

$$\theta(t) = \varepsilon_0 \cdot \frac{1}{[1 - 1/Ax_n^2]} \cdot \sin \omega_n t \dots\dots\dots (56)$$

となる。また水脈の形状は θ が φ_1 に比して小さいとすることによって式 (16) より

$$y = x \left[\tan \varphi_1 + \theta \left(t - \frac{x}{v_0 \cos \varphi_1} \right) \right] + \frac{g}{2} \frac{x^2}{[v_0 \cos \varphi_1]^2}$$

$$= x \left[\tan \varphi_1 + \varepsilon_0 \frac{1}{[1 - 1/Ax_n^2]} \sin \omega_n \left(t - \frac{x}{v_0 \cos \varphi_1} \right) \right]$$

$$+ \frac{g}{2} \frac{x^2}{[v_0 \cos \varphi_1]^2} \dots\dots\dots (57)$$

さらに $y/h = \eta$, $x/x_1 = \xi$ とおき式 (26), (50), (55) などの関係を使うと次のような無次元化された式を得る。

$$\eta = \xi \left[a + b \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - n \cdot \xi \right) \right] + \xi^2 \dots\dots\dots (58)$$

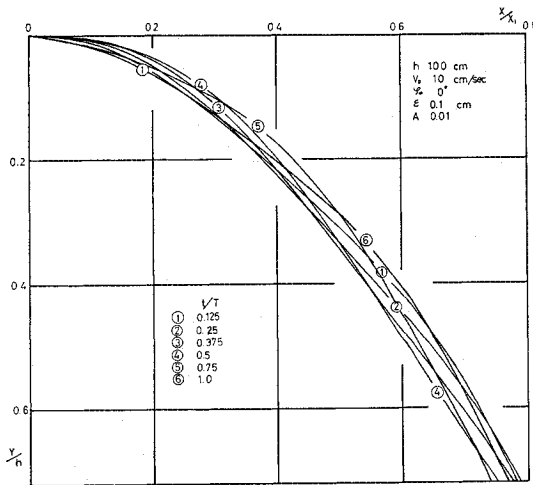


図-8 (1)

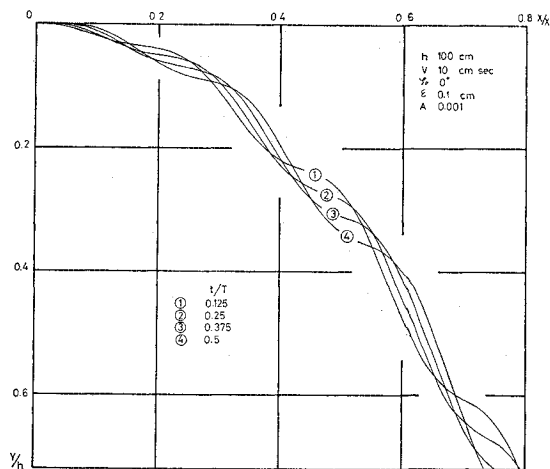


図-8 (2)

$$\left. \begin{aligned} a &= \sqrt{\frac{2}{gh}} \cdot v_0 \cos \varphi_1 \tan \varphi_1 \\ b &= \sqrt{\frac{2}{gh}} \cdot v_0 \cos \varphi_1 \cdot \varepsilon_0 \frac{1}{1 - 1/A \cdot (2n\pi)^2} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (59)$$

ただし $0 \leq \eta \leq 1$, $0 \leq \xi \leq 1$ である。

$h=100$ cm, $v_0=10$ cm/sec, $\varepsilon_0=0.1$ cm とした場合のいくつかの計算結果を図に示したのが 図-8 である。

図-8 (1), (2) は $\zeta_1=0^\circ$ で $n=1$, $A=0.01$ と $n=3$, $A=0.001$ の場合であって、ナップが脈動してゆく状況が良くわかる。以下、いずれの図も無次元して示してあるので、実際の流れよりひずんだ形状となっている。

7. おわりに

この研究での結果をまとめると

(1) フラップゲートの自励振動の主たる原因を落下する水脈(ナップ)の形状変化に伴う空気圧の変動に求め解析を行った。その結果不安定条件をみつけ出すことができた。

(2) 不安定条件の求め方は Nyquist の方法により、特に不安定になる条件として、系の固有振動の周期と落下水の落下時間との間に1つの条件が成立すれば良いことがわかった。

(3) その場合の振動を摂動法によって求めた。この報告は理論解析を主として扱った。模型実験との比較は、過去3年間に行われたものと、本年の追加実験と合わせて1つの論文にまとめている。

記号表

- A, C : 無次元パラメーター (式 (55))
- B : ゲート幅 [L]
- F : 振動外力(モーメント) [$F \cdot L$]
- g : 重力の加速度 [LT^{-2}]
- h : 水脈の落下距離 [L]
- I : ゲートの慣性モーメント [$M \cdot L^2$]
- k : ゲート支持系のばね定数 [F/L]
- l : ゲート扉高 [L]
- M_1 : 定数 (式 (24))
- p_1', p_2', P_1', P_2' : ゲートに働く圧力及びその積分値
- R : 気体定数
- R_θ : ゲートの粘性減衰係数
- s : ラプラス変換のパラメーター
- T : 絶対温度
- t, t_n : 時間
- V, V_1, V_2 : 空気体積
- v_0 : ゲート先端での水の流出速度

- x_1 : ナップ落下点とゲート先端との水平距離
 x, x_n : $x = \omega\beta$, $x_n = \omega_n\beta$
 β : 水のゲート先端より水面までの落下時間
 τ : R_0/I
 φ : ゲート開度
 φ_1 : ゲート先端での水の流出角度
 θ : ゲートの振動回転角
 ω_n : ゲートの固有角周波数

参 考 文 献

- 1) Petrikat : Vibration test on Weirs and bottom Gates, Water Power, May, p. 190, 1958.
- 2) 中島康吉・巻幡敏秋・砂田博幸 : 越流ゲートの振動について, 第22回土木学会年次学術講演会, 昭和42年.
- 3) 西川秀利 : 砂防ダムの鳴音の研究, 第25回土木学会年次学術講演会, 昭和45年.
- 4) Schwartz, H. Ivan : Nappe Oscillation, Pr. A.S.C.E. Vol. 90, HY 6 July 1963, Nov. 1964.
- 5) Discussion by Petrikat, Pr. A.S.C.E. September, 1965.
Discussion by Naudasher, Pr. A.S.C.E. May, 1965.
- 5) Hans Werner Partenscky, Abhimanyu Swain : Theoretical Study on Flap Gate Oscillation, Pr.I.A.H.R. (15th) Vol. 2, 1971.
- 6) 高橋利衛 : 自動制御の数学, p. 51, オーム社.
- 7) 同上 第6章
- 8) 高橋利衛 : 振動工学演習(II), p. 161, オーム社.
- 9) 荻原国宏 : 開水路中のスルース・ゲートの振動に関する基礎的研究, 土木学会論文集, 141号 pp. 31~41, 1967.
- 10) 若杉一彰 : フラップゲートの振動実験, 東洋大学工学部土木工学科, 昭和48年度卒業論文.
村松桂司 : フラップゲートの振動実験, 東洋大学工学部土木工学科, 昭和49年度卒業論文.
- 11) 本間 仁・荻原国宏 : フラップゲートの自励振動について, 第19回水理講演会論文集, p. 197.

(1974.11.13・受付)