【討　議】

坂井藤一著 "薄肉開断面部材の弾性安定基礎方程式の統一的誘導"への討議

(土木学会論文報告集第221号・1974年1月所載)

討　議

西野文雄（東京大学）
倉方慶夫（東京大学）
長谷川彰夫（名古屋工業大学）

薄肉断面部材の安定問題に対する基礎方程式は古くから求められているにもかかわらず，連続体の力学に基礎をおいたエネルギー原理によって統一的に誘導する努力がなされるようになったのは，著者も指摘されているように比較的最近のことであり，同じ問題に関心を持つものの一人として[19,4),35)]興味深く読ませて頂いた。著者は有限変位の連続体の力学に基礎をおき，よく知られたひずみ-変位関係と仮想仕事の原理を用いて理論展開をされている。しかしながら，最も基礎となる有限変位の力学の解釈に混乱がみられるようなので，ここに問題として提起したい。

(1) 著者は空間固定座標系 $O-X-Y-Z$ と Lagrange 座標系 $G-x-y-z$ を区別して定義した上で，x, y, z 方向の変位を u, v, w としたとき，Green のひずみテンソルが式 (1)，(2) であらわされるとしているが，この表現は不明確である。Green のひずみテンソルが式 (1)，(2) のように表現されるためには u, v, w は変位ベクトルの X, Y, Z 方向への成分でなければならず[20),36),37),38)]，したがって x, y, z 方向への変位と定義するのであれば，$G-x-y-z$ が直交直線座標を構成する変形前の状態での x, y, z 方向への変位と定義しなければならない。

変形する物体の力学を扱うとき，物体内の点を記述するのに変形前の位置で記述する方法と変形後の位置で記述する方法の二つがあり，前者は Lagrange の方法，後者は Euler の方法と呼ばれている[20),36)]。Lagrange の方法を用いるとき，座標の選び方として，物体とともに移動する座標が用いられることが多いが[36),37)]，空間に固定したままの座標が用いられることもある[20),35)]。物体内の点は変形前の位置で記述され，変位も変形前の状態での基底ベクトルに対する成分で定義されるので，この両者の座標の選び方による差はなく，単に便宜的な手法上の差にすぎない。当然のことながら Green のひずみテンソルの表示はどちらの座標を選んでも一致する。このことは文献でも明らかであり空間固定座標を用いた場合にも[20),36)]，物体埋込座標を用いた場合[37),38)]にも式 (1)，(2) のひずみ-変位関係が得られている。したがって式 (1)，(2) が Green のひずみテンソルと変位の関係を表わすためには

$$x \equiv X \qquad y \equiv Y \qquad z \equiv Z \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (172)$$

でなければならない。一方，物理的な考察を加えている。式 (102) では

$$\frac{du}{dZ} \approx \frac{du}{dz} \qquad \frac{dv}{dZ} \approx \frac{dv}{dz}$$

と書かれており，著者の定義する Lagrange 座標の意味が明らかでないが，座標に対する解釈に混乱があるのではないかと考えられる。一般に直交直線座標を基準状態に選び，Lagrange の方法を用いるかぎり，常に式 (172) が成り立つので著者のように $O-X-Y-Z$, $G-x-y-z$ の両者を区別して定義する必要はなく，どちらか片方で十分ではないかと考えられる。

(2) 著者は Vlasov の理論との比較のなかで，Vlasov が変形前のせん断中心で力のつり合いを考えているが，これは誤りであって，変形後のせん断中心について考えるべきであろうと述べ，さらに有限変位理論でのねじり中心は微少変位理論によるそれと異なることを指摘している。式 (82)～(85) のつり合い式において分布外力 q_x, q_y のみに起因する外力に注目すれば，式 (12)から明らかなように，m_T を定義するときには，$\bar{q}_x$, $\bar{q}_y$ を (x_0, y_0) に作用する力とモーメントに分けている。一方式 (85) に表われる $q_x(a_x+\beta_x+x_0)\theta$, $q_y(b_y+\beta_y+y_0)\theta$ は明らかに $\bar{q}_x$, $\bar{q}_y$ を (x_0, y_0) 以外の点で力とモーメントに分けていることを示している。後者は初期応力とつり合い状態にある外力ということを考慮しても，外力を2つの異なった点で力とモーメントに分解することは不合理ではないかと考えられる。

一方，式 (82)～(85) は式 (8) において仮想変位 δ_{w_0}, δ_{u_0}, δ_{v_0}, δ_θ の係数を 0 とおいて得られたものである。式 (8) が仮想変位に伴う仕事を表わすものであることを

考えると，式 (82)～(85) は w_0, u_0, v_0, θ が定義されている点，すなわち式 (13)，(14) から明らかなように (x_0, y_0) での w_0, u_0, v_0 方向すなわち X, Y, Z 方向への力と，この点でのモーメントのつり合い式であることがわかる。有限変位理論と微少変位理論とでねじり中心がずれることと，つり合い式をどの点で考えるかということは無関係であり，変形後のつり合いにおいても式 (85) は (x_0, y_0) まわりのモーメントを考えていると思われ，本論文中の記述と異なっていると考えられる。

なお，初期応力状態に対応する力には上肩つきの (0) をつけるのであれば，上記の q_x, q_y は $q_x^{(0)}$, $q_y^{(0)}$ と記すべきであり，q_x, q_y とは異なった量と区別する方が好ましいのではないか。

(**3**) 式 (82)～(85) のつり合い式で明らかなように，本論文は初期応力と変位の1次項との積で表わされる微少項までを考慮した有限変位理論である。このような有限変位理論では当然ながら，これよりも高次な微少項は小さいものとして無視されている。反対に，初期応力と変位の1次項で表わされる項があれば，一般的にはこれらの項の一部を残し，一部を小さいものとして無視することは微少項に対する理論的な取り扱いに統一性を欠くことになる。仮定についても同じであり，これらの項に影響をおよぼすような仮定をもうけると，結果的には初期応力と変位の1次項の積で表わされる項を適宜に無視するのと同じことになる。

初期応力と変位の1次項の積で表わされる項の一部は式 (9) の $\delta_z^{(0)}\delta\varepsilon_z^N$, $\tau_{zs}^{(0)}\delta\gamma_{zs}^N$ の項から求まるものであり，ε_z^N, γ_{zs}^N の変位表式の2次の微少項が関係する。著者は薄肉構造の理論では通常のこととして式 (3)，(4) の仮定をおき，その結果 γ_{zs}^N は式 (2)′ で表わされるとしている。式 (4) は微少変位理論では，せん断ひずみ零の条件を表わし，Euler-Bernouilli の仮定と一致するが，変位の2次の項を微少項として無視できない本論文の立場では，式 (2)′ から明らかなようにひずみテンソルのせん断ひずみ成分が零とならず，Euler-Bernouilli の仮定，すなわち変形前に部材軸に垂直な平面が変形後も部材軸に垂直で，かつ平面を保つとする仮定が成立しない。

一方，Euler-Bernouilli の仮定を用いて，すなわち変位の2次の微少項までを含めて $\gamma_{zs}=0$ が成り立つものとして計算すると，前項で問題となった本理論と Vlasov の理論との差はなくなり，式 (85) も (x_0, y_0) まわりのモーメントのつり合い式として矛盾のないものとなる[19.4),35)]。St. Venant のねじりに起因するせん断ひずみを除いた，曲げと曲げねじりによるせん断ひずみが軸方向ひずみに比べて無視し得るような，十分に細長い部材では，Euler-Bernouilli の仮定が成り立ち，材料力学の常識からいっても通常棒部材と考えられるようなものでは，Euler-Bernouilli の仮定の成り立つ理論の方が，せん断ひずみが式 (2) で表わされる仮定による理論よりも信頼度が高いのではないかと考えられる。

(**4**) 回転 θ が小さいものとして，式 (13)，(14) を線形化した式 (17)，(18) を用いて理論展開されているが，ここでも (**3**) で指摘したと同じことが成り立ち，すでに別の文献で指摘したように[35)]当然残さねばならない微少項の一部が落ちてしまっている。

参　考　文　献

19.4) Nishino, F., C. Kasemset and S. L. Lee: Variation formulation of stability problem for thin-walled members, Ingenier-Archiev, Band 43, Heft 1, pp. 58～68, 1973.

35) 西野文雄・倉方慶夫・長谷川彰夫・奥村敏恵：軸力と曲げおよびねじりを受ける薄肉断面部材，土木学会論文報告集，No. 225, pp. 1-15, 1974-5.

36) Eringen, A. C.: Mechanics of Continua, John Wiley and Sons, New York, 1967.

37) Flügge, W.: Tenson Analysis and Continuum Mechanics, Springer-Verlag, Berlin, 1972.

38) Green, A. E. and W. Zerna: Theoretical Elasticity, 2nd Ed., Oxford University Press, 1968.

回　答

坂井藤一（川崎重工業株式会社）

著者の論文に対し詳細なご検討をいただき感謝します。本論における著者の立場は，従来幾何学的に力の平衡条件から得られていた薄肉部材の座屈安定の一般基礎方程式を連続体力学の観点から代数的演算によって誘導することを試み，結果として従来の諸研究のあるものには不備な点があることを示すという問題提起を行った積りです。得られた結果は Vlasov の理論と多少相違することになり，この原因については著者にとっても疑問として残り若干の説明を加えたに止まっていました。討議者のご指摘はその意味においてきわめて重要であり，今後参考にさせて戴きたいと思います。

以下回答します。

(**1**) ご指摘のように二つの座標系を併用しているが，著者は討議者のいうような意味ではなく，物体とともに移動する Lagrange 座標と変形後の位置を示す Euler 座標を用い，主として前者によって記述し，一部物理的に

理解し易いよう後者も用いている。その限りにおいて著者の用法は差支えないと思われる。本論のような座標の用い方はそれほど特別でなく，特にはりや板の力学では慣用的であるように思われる[39]。討議者の誤解を招いたのは，おそらく2ページ **2.(1)** において u, v, w を x, y, z 方向の変位と定義したことによるであろう。これは明らかに著者の記述ミスであり，変形前の x, y, z 方向の変位あるいは X, Y, Z 方向の変位と書くべきであった。この際そのように訂正したい。また，3ページ **2.(2)** における荷重 q_x, q_y, q_z などについても同様である。

なお，式(102)については記述に誤りがあるので，次のように訂正したい。

$$\beta \approx \sin\beta \left(\approx \tan\beta = \frac{du}{dZ}\right) = \frac{1}{1+E_z}\cdot\frac{\partial u}{\partial z} \approx \frac{\partial u}{\partial z} \quad \cdots\cdots (102.a)$$

$$\gamma \approx \sin\gamma \left(\approx \tan\gamma = \frac{du}{dZ}\right) = \frac{1}{1+E_z}\cdot\frac{\partial v}{dz} \approx \frac{\partial v}{\partial z} \quad \cdots\cdots (102.b)$$

ただし，

$$E_z = \sqrt{1+\varepsilon_z} - 1$$

(2) ご指摘のとおりです。著者の結果が Vlasov のそれと相違した原因について，討議者が **(3)** との関連において明らかにされたことに敬意を表したい。ただし，著者は (x_D, y_D) を有限な St. Venant ねじりのねじり中心と述べているのであって，一般の有限変位状態に対してねじり中心とはいっていない。

(3) および **(4)**

ご指摘のとおりです。変位を線形的に表示した著者の立場も非線形とした討議者の立場も一般的な連続体の力学の観点からは仮定と言えるが，後者の方がより矛盾のない結果に至っているようです。

39) たとえば
Novozhilov, V. V.: Theory of Elasticity, Pergamon Press, 1961.